ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Дифференциальные уравнения в частных производных

Вязкостные субрешения в теории m-гессиановских уравнений

Н.М.Ивочкина, С.И.Прокофьева**, Г.В.Якунина***

**Санкт-Петербургский государственный университет*

***Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет*

Памяти Евгения Константиновича Ершова

Аннотация

В статье показано, что в теории m-гессиановских операторов возможная негладкость вязкостных субрешений не представляет интереса. Определяющим фактором является то, что множество вязкостных C^2-субрешений совпадает с множеством корректной постановки задачи Дирихле. В статье приводится пример, показывающий, что на множестве эллиптичности 5-гессиановского оператора постановка задачи Дирихле некорректна, поскольку она имеет два C^∞-решения, но только одно из них является вязкостным субрешением.

Ключевые слова: полностью нелинейные дифференциальные уравнения, вязкостные субрешения, суперрешения, конусы Гординга, m-гессиановские уравнения.

Abstract

We show that possible non-smoothness of viscosity sub-solutions is of no interest in the theory of m-Hessian operators. It is crucial that the set of viscosity

C^2-sub-solutions coincides with the set of correct setting of the Dirichlet problem. Moreover, we present an example to demonstrate that on the set of ellipticity of 5-Hessian operator the setting of the Dirichlet problem is incorrect because our problem has two C^∞-solutions but only one of them is viscosity sub-solution.

Keywords: fully nonlinear differential equations, viscosity sub-solutions, supersolutions, Gårding cones, m-Hessian equations.

§1 Введение

Первые попытки рассмотреть задачу Дирихле для полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка были предприняты С.Н.Бернштейном в начале прошлого века [1]. Было введено понятие тотально эллиптических уравнений и для равномерно эллиптических уравнений построена априорная оценка C^2-нормы решения u задачи Дирихле в двумерном случае. В работе Л.Ниренберга [2] была доказана априорная ограниченность нормы u в $C^{2+\alpha}\left(\bar{\Omega}\right)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, и сформулированы условия существования и единственности классического решения задачи Дирихле для равномерно эллиптических полностью нелинейных уравнений в двумерном случае. Однако, в отличие от линейной теории, распространить этот результат на произвольную размерность невозможно, что следует из основополагающих в современной теории полностью нелинейных уравнений работ Л.К.Эванса [7], Н.В.Крылова [8] и М.В.Сафонова [9].

В схему исследования тотально эллиптических уравнений не вкладывается уравнение Монжа-Ампера, которое с давних пор привлекало внимание геометров. В книге А.В.Погорелова [3] представлены достаточные условия разрешимости задачи Дирихле для уравнения Монжа-Ампера в регулярном смысле. Для этого использовались разработанные ранее геометрические подходы в комбинации с некоторыми методами теории квазилинейных эллиптических уравнений [5]. Отметим, что регулярными решениями А.В.Погорелова являются выпуклые функции из пространства $C^2\left(\Omega\right) \cap C^1\left(\bar{\Omega}\right)$.

В заметке [4] найден метод построения априорной оценки выпуклых решений задачи Дирихле для уравнений Монжа-Ампера в $C^2\left(\bar{\Omega}\right)$, а в статье [10] введчн класс m-гессиановских уравнений, на которые распространены новые методы исследования. Заметим, что в перечисленных работах уравнения рассматривались в выпуклых областях, а решения принимали постоянное значение на границе. Благодаря результатам, полученным в [7],

[8], [9], оценка решений задачи Дирихле для m-гессиановских уравнений в $C^2\left(\bar{\Omega}\right)$ гарантирует разрешимость этой задачи в классическом смысле [11].

В программной статье Л.Каффарелли, Л.Ниренберга и Д.Спрука [12] была предпринята попытка ввести максимальный класс гессиановских уравнений, для которых применимы методы исследования m-гессиановских уравнений, в частности, уравнения Монжа-Ампера, $m = n$. При этом, допускается произвольное условие Дирихле и на геометрию границы налагается новое условие, которое при $1 \leq m < n$ не предполагает eч выпуклости. Там же введено понятие допустимого решения гессиановского уравнения.

Приведчнные публикации можно рассматривать как основу современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, и создана она по аналогии с линейной теорией. Со времени их написания прошло более 30 лет и мы считаем, что сейчас интерес представляют результаты, не имеющие линейных аналогов, чему и посвящена предлагаемая статья.

Если имеются проблемы с доказательством разрешимости в классе гладких функций, традиционно вводится концепция слабых решений, существование которых предполагается известным. В теории нелинейных дифференциальных уравнений эта роль предназначалась вязкостным решениям [17], впервые введчнным в работе [6] для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. В §2 мы приводим основные понятия этой теории, следуя работам [17], [18]. Для их демонстрации мы выбираем уравнения с m-гессиановскими операторами, которые являются m-следами матриц Гессе. Анализируя алгебраические свойства m-следов симметричных матриц в §3 и соответствующие свойства m-гессиановских операторов в §4, мы приходим к выводам:

(i) проблема существования вязкостного субрешения, принимающего заданные граничные условия, для m-гессиановского уравнения при $m > 1$ является проблемой той же степени сложности, что и доказательство разрешимости в классическом смысле задачи Дирихле;

(ii) C^2-гладкие вязкостные субрешения заполняют конус m-допустимых функций, который совпадает с множеством корректной постановки задачи Дирихле для m-гессиановских уравнений;

(iii) множество корректной постановки задачи Дирихле для m-гессиановских уравнений совпадает с конусом Л.Гординга и является множеством положительной монотонности m-гессиановских операторов.

В §5 мы показываем, что множество эллиптичности m-гессиановских операторов, вообще говоря, не является множеством корректной постановки задачи Дирихле. Именно, приводится пример задачи Дирихле в шаре $B_1 \subset \mathbb{R}^6$ для 5-гессиановского уравнения, которая имеет два бесконечно гладких решения. При этом, на каждом из них оператор эллиптичен. Дополнительный анализ показывает, что лишь одно из них является вязкостным.

§2 О разрешимости задачи Дирихле в вязкостном смысле

Приведчм одну из интерпретаций понятия вязкостного решения [18], [19].

Рассмотрим функцию $u(x)$, определчнную в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и обозначим через X^+ и X^- множества точек, где существуют первый и второй суб- и супердифференциалы функции $u(x)$ соответственно:

$$X^+ = \Big\{ x^+ \in \Omega : u\left(x^+ + h\right) - u\left(x^+\right) \leq \left(p^+, h\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(r^+ h, h\right) + o\left(h^2\right) \Big\}, \tag{2.1}$$

$$X^- = \Big\{ x^- \in \Omega : u\left(x^- + h\right) - u\left(x^-\right) \geq \left(p^-, h\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(r^- h, h\right) + o\left(h^2\right) \Big\}. \tag{2.2}$$

Отметим, что для $u \in C^2(\Omega)$

$$X^+ = X^- = \Omega, \quad p^+ = p^- = u_x,$$

$$r^+ = u_{xx}\left(x^+\right) + A\left(x^+\right), \quad r^- = u_{xx}\left(x^-\right) + A\left(x^-\right),$$

где $A \in Sym(n)$, $A \geq 0$, $Sym(n)$ – пространство симметричных матриц размера $n \times n$.

Определение 2.1. *Функция и называется субрешением уравнения*

$$F(x, u, u_x, u_{xx}) = 0 \tag{2.3}$$

в области Ω, если для любых $x^+ \in X^+$, $p, r \in \{p^+, r^+\}$ выполнено неравенство

$$F(x, u(x), p, r) \geq 0 \tag{2.4}$$

и суперрешением, если для любых $x^- \in X^-$, $p, r \in \{p^-, r^-\}$ справедливо неравенство

$$\inf_{\eta \geq 0} F\left(x, u\left(x\right), p, r + \eta\right) \leq 0, \tag{2.5}$$

где $\eta \in Sym\left(n\right)$.

Определение 2.2. *Непрерывная функция u называется вязкостным решением уравнения (2.3), если для неч выполнены как неравенство (2.4), так и неравенство (2.5).*

Для доказательства разрешимости задачи Дирихле для дифференциальных уравнений второго порядка в вязкостном смысле используется классический метод Перрона, который можно распространить на полностью нелинейные уравнения [18], [19], [20].

Приведчм идею этого метода для уравнений общего вида (2.3).

Пусть $u^i \in C\left(\Omega\right), \; i = 1, 2, ..., N,$ – субрешения уравнения (2.3), тогда из определения 2.1 следует, что функция $u = \sup\limits_i \left(u^i\right)$ – субрешение уравнения (2.3). Обозначим символом $\bar{\mathfrak{M}}\left(F\right)$ множество всех субрешений уравнения (2.3).

Аналогично, если $v^i \in C\left(\Omega\right), \; i = 1, 2, ..., N,$ – суперрешения уравнения (2.3), тогда функция $v = \inf\limits_i v^i$ – суперрешение уравнения (2.3). Обозначим символом $\bar{\mathfrak{N}}\left(F\right)$ множество всех суперрешений уравнения (2.3).

Далее введчм следующие обозначения

$$\begin{gathered}
\bar{\mathfrak{M}}^{\varphi}\left(F\right) = \left\{u \in \bar{\mathfrak{M}}\left(F\right); u|_{\partial\Omega} \leq \varphi\right\}, \\
\bar{\mathfrak{N}}_{\varphi}\left(F\right) = \left\{u \in \bar{\mathfrak{N}}\left(F\right); u|_{\partial\Omega} \geq \varphi\right\}, \\
\overline{u} = \sup_{\bar{\mathfrak{M}}^{\varphi}(F)} \left\{\omega\right\}, \quad \underline{u} = \inf_{\bar{\mathfrak{N}}_{\varphi}(F)} \left\{\omega\right\},
\end{gathered} \tag{2.6}$$

где φ – известная ограниченная функция.

В работе [19] показано, что если функции $\overline{u}$, $\underline{u}$ – суб- и суперрешения уравнения (2.3), то они являются вязкостными решениями этого уравнения. А именно, доказано следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Предположим для простоты, что функция F не зависит от аргумента u. $F \in C\left(\Gamma\right)$, $\Gamma = \Omega \times \mathbb{R}^n \times Sym\left(n\right)$.*

1. *Пусть $\overline{u}$ – непрерывное субрешение уравнения (2.3). Предположим, что функция F удовлетворяет неравенству*

$$F\left(x, p, \eta\right) > 1, \tag{2.7}$$

если хотя бы одно из собственных чисел неотрицательной матрицы η достаточно велико в зависимости от (x, p). Тогда $\overline{u}$ – вязкостное решение уравнения (2.3).

2. *Пусть $\underline{u}$ – непрерывное суперрешение уравнения (2.3). Тогда $\underline{u}$ – вязкостное решение этого уравнения.*

Таким образом, проблема существования вязкостного решения уравнения (2.3) сводится к существованию хотя бы одной из функций $\overline{u}$ или $\underline{u}$. По аналогии с гармоническим случаем решением Перрона принято называть функцию $\overline{u}$.

Понятие вязкостного решения является корректным, если доказана его единственность. Эта проблема была решена в работе [21], где был доказан принцип максимума для непрерывных вязкостных решений и непрерывных функций F.

Следствием принципа максимума из [21] была лемма, доказанная Н.Трудингером в статье [18]. Приведчм эту лемму.

Лемма 2.4. *Пусть функция F удовлетворяет в Γ неравенствам*

$$|F(x,u,p,r) - F(y,u,p,r)| \leq \omega(|x-y|),$$

где

$$\omega(t) \to 0 \text{ при } t \to 0, \tag{2.8}$$

$$F(x,u,p,r) - F(x,u+t,p,r) \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{2.9}$$

Предположим также, что выполнено неравенство (2.7) леммы 2.3 с матрицами $\eta \geq 0$.

Тогда для функций $u, v \in C\left(\bar{\Omega}\right)$, удовлетворяющих неравенствам $F[u] \geq \delta$, $F[v] \leq 0$ в Ω в вязкостном смысле $(\delta > 0)$ справедливо неравенство

$$u - v \leq \max_{\partial\Omega}(u-v)^+, \quad x \in \Omega. \tag{2.10}$$

В области Ω поставим задачу Дирихле для уравнения (2.3) с граничным условием

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad \varphi \in C(\partial\Omega). \tag{2.11}$$

Применение метода Перрона и принципа максимума приводит к следующему утверждению.

Теорема 2.5. *Пусть функция $F = F(x, u, p, r) \in C(\Gamma)$, где $\Gamma = \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times Sym(n)$, удовлетворяет в Γ условиям (2.7)–(2.9). Предположим, что существуют хотя бы одно непрерывное субрешение и непрерывное суперрешение уравнения (2.3), равные $\varphi(x)$ на $\partial\Omega$. Тогда существует единственное непрерывное вязкостное решение задачи (2.3), (2.11).*

Таким образом, проблема разрешимости задачи Дирихле для уравнения (2.3) в вязкостном смысле сведена к вопросу существования суб- и суперрешения.

Отметим, что суперрешения для уравнения (2.3) можно легко построить. Покажем это на примере задачи Дирихле для уравнения Монжа-Ампера

$$\det u_{xx} = f \text{ в } \Omega, \tag{2.12}$$

$$f \geq \nu > 0,$$

с граничным условием (2.11). Здесь u_{xx} – матрица Гессе функции $u \in C^2\left(\bar{\Omega}\right)$, Ω – строго выпуклая область.

Можно показать, что решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

является суперрешением задачи (2.12), (2.11).

Однако вопрос о существовании субрешений остачтся открытым. Продемонстрируем это опять на примере задачи Дирихле для уравнения Монжа-Ампера (2.12) с граничным условием

$$u|_{\partial\Omega} = const. \tag{2.13}$$

Вопрос о разрешимости задачи (2.12), (2.13) тесно связан со свойствами границы $\partial\Omega$.

В работе [22] показано, что если гауссова кривизна поверхности $\partial\Omega$ вырождается хотя бы в одной точке $x_0 \in \partial\Omega$, т.е. $G(\partial\Omega)(x_0) = 0$, то задача (2.12), (2.13) вообще не имеет C^2-гладких решений. Таким образом,

$$\left\{u \in C^2\left(\bar{\Omega}\right) : \det u_{xx} > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = const\right\} = \varnothing.$$

§3 Свойства m-следов симметричных матриц

Рассмотрим пространство $Sym(n)$ симметричных матриц размера $n \times n$. Выберем и зафиксируем число m, $1 \leq m \leq n$. Обозначим символом $\mathrm{tr}_m S$

сумму всех главных миноров порядка m матрицы $S \in Sym\,(n)$. В частности, $\mathrm{tr}_1 S = \mathrm{tr} S$, $\mathrm{tr}_n S = \det S$. По определению полагают $\mathrm{tr}_0 S = 1$.

Пусть $S \in Sym\,(n)$, рассмотрим функцию

$$\mathrm{T}_m\,(S) = \frac{\mathrm{tr}_m S}{C_n^m}.$$

Из теории гиперболических многочленов известно, что функция $\mathrm{T}_m\,(S)$ является гиперболическим многочленом в направлении единичной матрицы I, а каждый гиперболический многочлен порождает конус Гординга [23], [14], [24].

Обозначим конус Гординга для многочлена $\mathrm{T}_m\,(S)$ символом K_m и приведчм четыре равносильных определения множества K_m.

Определение 3.1. *Для I-гиперболического многочлена $\mathrm{T}_m\,(S)$ назовчм конусом Гординга множество*

(i) K_m*, состоящее ровно из таких матриц S, для которых многочлен*

$$p\,(t) = \mathrm{T}_m\,(S + tI) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \mathrm{T}_k\,(S)\,t^{m-k} \tag{3.1}$$

имеет только отрицательные корни;

(ii) K_m *– это компонента связности множества $\{S : \mathrm{T}_m\,(S) > 0\}$, содержащая единичную матрицу I;*

(iii) $\mathrm{K}_m = \{S \in Sym\,(n) : \mathrm{T}_i\,(S) > 0, \quad i = 1, 2, ..., m\}$*;*

(iv) $\mathrm{K}_m = \{S \in Sym\,(n) : \mathrm{T}_m\,(S + tI) > \mathrm{T}_m\,(S) > 0, \quad t > 0\}$*;*

Определение 3.2. *Матрицы $S \in \mathrm{K}_m$ называются m-положительными.*

Для конусов Гординга справедлива цепочка вложений

$$\mathrm{K}_n \subset \mathrm{K}_{n-1} \subset ... \subset \mathrm{K}_1.$$

§4 m-Гессиановские операторы и их свойства

Положим $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2\,(\Omega)$, u_{xx} – матрица Гессе функции u. Введчм оператор, порождчнный функцией $\mathrm{T}_m\,(S)$

$$\mathrm{T}_m\,[u] = \mathrm{T}_m\,(u_{xx})\,,$$

который называется m-гессиановским.

Отметим, что при $m = 1$ $\mathrm{T}_1[u] = \frac{\Delta u}{n}$, где Δu – оператор Лапласа, при $m = n$ $\mathrm{T}_n[u] = \det u_{xx}$ – оператор Монжа-Ампера.

Определение 4.1. *Функция $u \in C^2(\Omega)$ называется m-допустимой в области Ω, если $u_{xx} \in \mathrm{K}_m$, $x \in \Omega$.*

Множество m-допустимых функций образует функциональный конус

$$\mathbb{K}_m = \left\{u \in C^2(\Omega) : u_{xx} \in \mathrm{K}_m, \quad x \in \Omega\right\}.$$

Справедлива цепочка вложений

$$\mathbb{K}_n \subset \mathbb{K}_{n-1} \subset ... \subset \mathbb{K}_1.$$

Впервые конусы m-допустимых функций были введены в работе [10]. В ней описаны свойства конусов $\mathbb{K}_m$. В частности, для функции $u \in \mathbb{K}_m$ выполнены неравенства Маклорен

$$\mathrm{T}_m^{\frac{1}{m}}[u] \le \mathrm{T}_{m-1}^{\frac{1}{m-1}}[u] \le ... \le \mathrm{T}_1[u] = \frac{\Delta u}{n}.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$\mathrm{T}_m[u] = f, \quad f \ge \nu > 0. \tag{4.1}$$

Выясним, какие C^2-функции являются субрешениями уравнения (4.1). Положим

$$F[u] = \mathrm{T}_m[u] - f.$$

Тогда (2.4) равносильно неравенству

$$\mathrm{T}_m\left(r^+\right) \ge f(x) > 0, \tag{4.2}$$

где $r^+ = u_{xx}(x^+) + A(x^+)$, $A \in Sym(n)$, $A \ge 0$.

В частности для $A = tI$, где $t \ge 0$, имеем

$$\mathrm{T}_m(u_{xx} + tI) \ge f(x) > 0. \tag{4.3}$$

Неравенство (4.3) означает, что многочлен $p(t)$, определчнный равенством (3.1), имеет только отрицательные корни, а это значит, что $u_{xx} \in \mathrm{K}_m$.

Таким образом, неравенство (4.3) описывает конус $\mathbb{K}_m$, а именно, если $u \in C^2$ является субрешением уравнения (4.1), то $u \in \mathbb{K}_m$.

§5 Об эллиптичности m-гессиановских операторов

В работах С.Н.Бернштейна [1], посвящчнных двумерным полностью нелинейным уравнениям второго порядка, было введено понятие эллиптичности уравнения на решении. Это значит, что в случае уравнения (2.3) на решении $u \in C^2(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\frac{\partial F[u]}{\partial u_{ij}} \xi^i \xi^j > 0, \quad |\xi| = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

В работе [10] было показано, что оператор $\mathrm{T}_m[u]$ эллиптичен в конусе $\mathbb{K}_m$, приччм

$$\frac{1}{c(n)} \left(\frac{\nu}{\mu}\right) \le \frac{\partial \mathrm{T}_m[u]}{\partial u_{ij}} \xi^i \xi^j \le c(n) \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{m-1}, \tag{5.1}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$, если $\mathrm{T}_m[u] \ge \nu > 0$, $\mathrm{T}_1[u] \le \mu$ в Ω.

Таким образом $\mathrm{T}_m[u]$ является эллиптическим на каждом m-допустимом решении уравнения (4.1) при условии $f \ge \nu > 0$ в Ω и при наличии априорной оценки $||u||_{C^2(\Omega)}$.

В работах [14], [25] были приведены примеры, показывающие, что неравенство (5.1) не гарантирует однозначной разрешимости задачи (4.1), (2.11).

В этих работах построены примеры задачи Дирихле для 5-гессиановского уравнения в единичном шаре $B_1 \subset \mathbb{R}^6$, которая имеет по крайней мере два гладких решения класса C^2, приччм оператор T_5 является эллиптическим на этих решениях. А именно, построена функция

$$w(x) = \frac{9}{40}\left(x^1\right)^2 - \sum_{i=2}^{6}\left(x^i\right)^2,$$

которая является решением задачи Дирихле

$$\mathrm{T}_5(w_{xx}) = \frac{2}{3}, \tag{5.2}$$

$$w|_{\partial B_1} = \frac{49}{40}\left(x^1\right)^2 - 1.$$

При этом

$$\frac{\partial \mathrm{T}_5[w]}{\partial w_{ij}} \xi^i \xi^j \ge \frac{4}{15},$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$, т.е. уравнение (5.2) эллиптично на решении w.

Покажем, что функция $w(x)$ не является вязкостным решением уравнения (5.2), а именно не является его субрешением. Предположим, что это не так и $w(x)$ – вязкостное субрешение. Тогда, выполнено неравенство

$$\mathrm{T}_5\left(w_{xx}+tI\right) \geq \mathrm{T}_5\left(w_{xx}\right), \quad t \geq 0. \tag{5.3}$$

Используя разложение (3.1) для функции $\mathrm{T}_5\left(w_{xx}+tI\right)$, получим

$$\mathrm{T}_5\left(w_{xx}+tI\right)=t^5+5\mathrm{T}_1\left(w_{xx}\right)t^4+10\mathrm{T}_2\left(w_{xx}\right)t^3+$$

$$+10\mathrm{T}_3\left(w_{xx}\right)t^2+5\mathrm{T}_4\left(w_{xx}\right)t+\mathrm{T}_5\left(w_{xx}\right).$$

Последнее соотношение и неравенство (5.3) приводят к неравенству

$$t\left(t^4+5\mathrm{T}_1\left(w_{xx}\right)t^3+10\mathrm{T}_2\left(w_{xx}\right)t^2+10\mathrm{T}_3\left(w_{xx}\right)t+5\mathrm{T}_4\left(w_{xx}\right)\right) \geq 0,$$

которое невозможно, например, при $t = 1,6$. Значит, наше предположение ошибочно. Таким образом, построенное решение задачи (5.2) не является субрешением, т.е. не является вязкостным решением и не принадлежит конусу допустимых функций $\mathbb{K}_5$.

Этот пример показывает, что задача Дирихле для полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка корректна только для вязкостных решений. При этом она имеет не более одного решения только на множестве всех субрешений.

Список литературы

[1] *Бернштейн С.Н.* Собр. соч., т.3, изд-во АН СССР, 1960.

[2] *Nirenberg L.* On nonlinear elliptic partial differential equations and Holder continuity. Comm. Pure and Appl. Math., 6 (1953), pp.103-156.

[3] *Погорелов А.В.* Многомерная проблема Минковского. "Наука", Москва, 1975, 95 с.

[4] *Ивочкина Н.М.* Априорная оценка выпуклых $\|u\|_{C^2}$ решений задачи Дирихле для уравнений Монжа - Ампера. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 96 (1980), С.69-79.

[5] *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. "Наука", Москва, 1973, 576 с.

[6] *Lions P.-L.* Optimal control of diffusion processes and Hamilton - Jacobi - Bellman equations. Part II: Viscosity solutions and uniqueness, Comm. Partial Diff. Eqns. 8 (1983), pp.1229-1276.

[7] *Evans L.C.* Classical solutions of fully nonlinear convex second order elliptic equations. Comm. Pure Appl. Math. 1982, 25, pp.333-363.

[8] *Крылов Н.В.* Ограниченно неоднородные эллиптические и параболические уравнения в области. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1983, 47,1, С.75-108.

[9] *Сафонов М.В.* Неравенство Харнака для эллиптических уравнений и гельдеровость их решений. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1983, Вып. 12, С.272-287.

[10] *Ивочкина Н.М.* Описание конусов устойчивости, порождаемых дифференциальными операторами типа Монжа-Ампера. Мат.сб., 1983, Вып.22, С.265-275.

[11] *Ивочкина Н.М.* Решение задачи Дирихле для некоторых уравнений типа Монжа – Ампера. Мат.сб. 128 (170), 1985, С.403-415.

[12] *L.Caffarelli, L.Nirenberg, J.Spruck.* The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations III. Functions of the Hessian. Acta Math., 155 (1985), pp.261-301.

[13] *Ивочкина Н.М.* От конусов Гординга к p-выпуклым гиперповерхностям. Современная математика. Фунд. направления, 45 (2012), РУДН, С.94-104.

[14] *N.M.Ivochkina, S.I.Prokof'eva, G.V.Yakunina.* The Gårding cones in the modern theory of fully nonlinear second order differential equations. Journal of Mathematical Sciences., 2012, Vol.184, Issue 3, pp.295-315.

[15] *Ivochkina N. M., Filimonenkova N.V.* On the backgrounds of the theory of m-Hessian equations. Comm. Pure Appl. Anal., 12 (2013), 4.

[16] *Ivochkina N.M.* On classic solvability of the m-Hessian evolution equation. AMS Transl. 229 (2010), Series 2, pp.119-129.

[17] *M.C.Crandall, H.Ishii, P.L.Lions.* User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Bull.Am.Math.Soc., 1992, Vol. 27, pp.1-67.

[18] *Trudinger N.S.* The Dirichlet problem for the prescribed curvature equations. Arch.Rat.Mech.Anal., 1990, Vol.111, pp.153-179.

[19] *Ивочкина Н.М.* Принцип Дирихле в теории уравнений типа Монжа-Ампера. Алгебра и анализ., 1992, Том. 4, 6, С.131-156.

[20] *Ishii H.* On uniqueness and existance of viscosity solutions of fully nonlinear second order elliptic equtions. Comm.Pure Appl.Math., 1989, Vol.42, pp.14-45.

[21] *Jensen R.* The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations. Arch.Rat.Mech.Anal., 1988, Vol.101, pp.1-27.

[22] *Ивочкина Н.М. Филимоненкова Н.В.* Геометрические модели в теории нелинейных дифференциальных уравнений. Препринт СПбМО, 2016, 6.

[23] *Gårding L.* An inequality for hyperbolic polynomials., J.Math.Mech., 1959, Vol.8, pp.957-965.

[24] *Филимоненкова Н.В., Бакусов П.А.* Гиперболические многочлены и конусы Гординга. Мат.просв., сер. 3, Вып. 20, 2016, С.143-166.

[25] *Прокофьева С.И., Якунина Г.В.* О понятии эллиптичности для полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Эл. ж. Дифференциальные уравнения и процессы управления, 2012, 1, С.142-145. http://math.spbu.ru/diffjournal/pdf/prokofyeva.pdf