*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*
*И*
*ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ*
*N 1, 1997*
*Электронный журнал,*
*рег. N П23275 от 07.03.97*

*http://www.neva.ru/journal*
*e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru*

*стохастические дифференциальные уравнения*

# МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ И АППРОКСИМАЦИИ ПОВТОРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ СТРАТОНОВИЧА, ОСНОВАННЫЙ НА КРАТНЫХ РЯДАХ ФУРЬЕ ПО ПОЛНЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ

Д.Ф.Кузнецов

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29
С.-Петербургский государственный технический университет
Кафедра "Высшая математика"
e-mail: control1@citadel.stu.neva.ru

Поступила в редакцию 15.12.96

## Аннотация.

Предложен метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, позволяющий представлять их в виде кратных рядов из произведений независимых стандартных гауссовских величин. Коэффициенты этих рядов являются коэффициентами кратных рядов Фурье по полным ортонормированным системам функций в пространстве $L_2([t, T])$ для специальных функций многих переменных. Рассматриваемый метод позволяет получить общую формулу разложения и оценить погрешность аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича произвольной кратности k. Доказана сходимость в среднем степени $q = 2n;\ n = 1,\ 2, \ldots$ предлагаемого метода. Произведено его сравнение с методом Г.Н. Мильштейна разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, а также с другими известными методами сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов.

## 1. Введение. Постановка задачи

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и винеровский случайный процесс $f_t \in \Re^1$. Рассмотрим совокупность $\sigma-$алгебр $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0, T]\}$, определенную на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и связанную с винеровским процессом $f_t$ так, что

1. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ при $s < t$;

2. $f_t$ измерим относительно $\mathcal{F}_t$ при каждом $t \in [0, T]$;

3. процесс $f_{t+\Delta} - f_\Delta$ при всех $\Delta \geq 0;\ t > 0$ не зависит от событий $\sigma-$алгебры $\mathcal{F}_\Delta$.

В дальнейшем будем называть винеровский процесс $f_t$, удовлетворяющий условиям 2 и 3, согласованным с совокупностью $\sigma-$алгебр

$$\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}.$$

Введем в рассмотрение класс $\mathcal{M}_2([0, T])$ функций $\xi :\ [0, T] \times \Omega \rightarrow \Re^1$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(I) функции $\xi(t, \omega)$ измеримы по совокупности переменных $(t, \omega)$;

(II) функция $\xi(t, \omega)$ – $\mathcal{F}_t$ измерима при всех $t \in [0, T]$ и ее значения $\xi(\tau, \omega)$ не зависят от приращений $f_{t+\Delta} - f_\Delta$ винеровского процесса при $\Delta \geq \tau;\ t > 0$;

(III) $\int_0^T \mathsf{M}\left\{(\xi(t, \omega))^2\right\} dt < \infty$;

(IV) $\mathsf{M}\left\{(\xi(t, \omega))^2\right\} < \infty$ для всех $t \in [0, T]$.

Введем на классе $\mathcal{M}_2([0, T])$ норму вида:

$$\|\xi\|_{2,T} = \sqrt{\int_0^T \mathsf{M}\left\{(\xi(t, \omega))^2\right\} dt}.$$

Будем отождествлять две функции $\xi, \eta$ из класса $\mathcal{M}_2([0,T])$, если $\|\xi - \eta\|_{2,T} = 0$.

Рассмотрим разбиение промежутка $[0,T]$ вида:

$$0 = \tau_0^{(N)} < \tau_1^{(N)} < \ldots < \tau_N^{(N)} = T, \text{ где } \Delta_N = \max_{0 \le j \le N-1} \left|\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)}\right| \to 0$$

при $N \to \infty$. Определим последовательность ступенчатых функций

$$\xi^{(N)}(t,\omega)$$

следующим образом: $\xi^{(N)}(t,\omega) = \xi(\tau_j^{(N)},\omega)$ с в.1 при $t \in [\tau_j^{(N)}, \tau_{j+1}^{(N)})$, где $j = 0,\ 1, \ldots, N-1$; $N = 1,\ 2, \ldots$ .

*Стохастическим интегралом Ито от функции $\xi \in \mathcal{M}_2([0,T])$ назовем среднеквадратический предел последовательности ступенчатых функций:*

$$\underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)}(\tau_j^{(N)},\omega) \left(f(\tau_{j+1}^{(N)},\omega) - f(\tau_j^{(N)},\omega)\right) \stackrel{def}{=} \int\limits_0^T \xi_\tau df_\tau, \qquad (1)$$

*где $\xi^{(N)}(t,\omega)$ – произвольная ступенчатая функция из $\mathcal{M}_2([0,T])$, сходящаяся по норме $\|\cdot\|_{2,T}$ к функции $\xi(t,\omega)$.*

Известно [6], что если $\xi \in \mathcal{M}_2([0,T])$, то стохастический интеграл Ито существует.

*Стохастическим интегралом от функции $\xi \in \mathcal{M}_2([0,T])$ назовем следующий среднеквадратический предел:*

$$\underset{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}}{\text{l.i.m}} \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)} \left(\tau_j^{(N)},\omega\right) \left(\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)}\right) \stackrel{def}{=} \int\limits_0^T \xi_\tau d\tau, \qquad (2)$$

*где $\xi^{(N)}(t,\omega)$ – произвольная ступенчатая функция из класса $\mathcal{M}_2([0,T])$, сходящаяся по норме $\|\cdot\|_{2,T}$ к $\xi \in \mathcal{M}_2([0,T])$.*

Известно также, что интеграл $\int\limits_0^T \xi_\tau d\tau$ существует для любой функции $\xi \in \mathcal{M}_2([0,T])$.

Мы не приводим основные свойства определенных выше стохастических интегралов в силу их широкой известности.

*Стохастическим интегралом Стратоновича от процесса* $\xi(t,\omega)$ *назовем следующий среднеквадратический предел последовательности ступенчатых функций:*

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m}} \sum_{j=0}^{N-1}\xi^{(N)}\left(\frac{1}{2}\left(\tau_j^{(N)}+\tau_{j+1}^{(N)}\right),\omega\right)\left(f(\tau_{j+1}^{(N)},\omega)-f(\tau_j^{(N)},\omega)\right)\stackrel{def}{=}\int\limits_0^{*T}\xi_\tau df_\tau, \tag{3}$$

*где сохранен смысл обозначений, входящих в (1).*

В дальнейшем нами будет использоваться формула Ито, поэтому сформулируем соответствующее утверждение.

**Лемма 1** *Пусть функция* $R(x,t):\ \Re^1\times[0,T]\to\Re^1$ *имеет непрерывные частные производные* $\frac{\partial R}{\partial t}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$, *а процесс Ито* $x_t$ *имеет вид:*

$$x_t=x_s+\int\limits_s^t a_\tau d\tau+\int\limits_s^t b_\tau df_\tau,$$

*причем* $a_\tau,b_\tau\in\mathcal{M}_2([0,T]))$. *Тогда для любых* $s,t:\ \ 0\le s\le t\le T$ *с вероятностью 1*

$$R(x_t,t)=R(x_s,s)+\int_s^t\left\{\frac{\partial R}{\partial t}(x_\tau,\tau)+a_\tau\frac{\partial R}{\partial x}(x_\tau,\tau)+\frac{1}{2}b_\tau^2\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(x_\tau,\tau)\right\}d\tau+$$

$$+\int_s^t b_\tau\frac{\partial R}{\partial x}(x_\tau,\tau)df_\tau.$$

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t=\mathbf{a}(\mathbf{x}_t,t)dt+\Sigma(\mathbf{x}_t,t)d\mathbf{f}_t;\ \mathbf{x}_0=\mathbf{x}(0,\omega), \tag{4}$$

где $\mathbf{x}_t\in\Re^n$ – случайный процесс, являющийся решением уравнения (4); неслучайные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x},t):\ \Re^n\times[0,T]\to\Re^n;\ \ \Sigma(\mathbf{x},t):\ \Re^n\times[0,T]\to\Re^{n\times m}$ удовлетворяют условиям существования и единственности, в смысле стохастической эквивалентности, решения уравнения (4); $\mathbf{f}_t\in\Re^m$ – согласованный с совокупностью $\sigma-$алгебр $\{\mathcal{F}_t;\ t\in[0,T]\}$ стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}(i=1,\ldots,m)$; случайная величина $\mathbf{x}_0\in\Re^n$ стохастически независима от приращений $\mathbf{f}_t-\mathbf{f}_0$ при $t>0$.

Из результатов работ [1], [2] следует, что при определенных условиях гладкости функций $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$, $\Sigma(\mathbf{x},t)$ и при выполнении определенных моментных условий для процессов $\mathbf{a}(\mathbf{x}_t,t)$, $\Sigma(\mathbf{x}_t,t)$ решение стохастического дифференциального уравнения Ито (4) разлагается в унифицированные ряды Тейлора-Ито по повторным стохастическим интегралам Ито:

$$I_{l_1\ldots l_{kT,t}}^{(i_1\ldots i_k)}=\int\limits_t^T(t-t_k)^{l_k}\ldots\int\limits_t^{t_2}(t-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} \tag{5}$$

или

$$J_{l_1\ldots l_{kT,t}}^{(i_1\ldots i_k)}=\int\limits_t^T(T-t_k)^{l_k}\ldots\int\limits_t^{t_2}(T-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{6}$$

где $l_1,\ldots,l_k=0,\ 1,\ldots;\ k=1,\ 2,\ldots;\ i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$ или разлагается [3]-[6] в ряды Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и ряды Тейлора-Стратоновича по повторным стохастическим интегралам

$$J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)_{T,t}}^{(i_k\ldots i_1)}=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_2}d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)} \tag{7}$$

и

$$J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)_{T,t}}^{*(i_k\ldots i_1)}=\int\limits_t^{*T}\ldots\int\limits_t^{*t_2}d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)} \tag{8}$$

соответственно, где $\mathbf{w}_t^{(i_l)}=\mathbf{f}_t^{(i_l)}$ и $\lambda_l=1$ при $i_l=1,\ldots,m$; $\mathbf{w}_t^{(i_l)}=t$ и $\lambda_l=0$ при $i_l=0$; $i_1,\ldots,i_k=0,\ 1,\ldots,m$; $l=1,\ldots,k$.

Всвязи с этим проблема численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито возникающая при решении широкого круга задач электродинамики, стохастической механики, финансовой математики, теории управления и других дисциплин (см. например [6]) сводится к совместному численному моделированию совокупностей повторных стохастических интегралов вида (5), (6), (7) или (8). Очевидно, что эта задача является более сложной, чем задача численного моделирования одного повторного стохастического интеграла из семейств (5), (6), (7) или (8).

В дальнейшем нами также будут использоваться повторные стохастические интегралы Стратоновича вида:

$$I^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k T,t}=\int\limits_t^{*T}(t-t_k)^{l_k}\ldots\int\limits_t^{*t_2}(t-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}^{(i_1)}_{t_1}\ldots d\mathbf{f}^{(i_k)}_{t_k}, \qquad (9)$$

$$J^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k T,t}=\int\limits_t^{*T}(T-t_k)^{l_k}\ldots\int\limits_t^{*t_2}(T-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}^{(i_1)}_{t_1}\ldots d\mathbf{f}^{(i_k)}_{t_k}. \qquad (10)$$

Мильштейном Г.Н. в [5] был предложен метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича вида (8). Этот метод основывается на покомпонентном разложении, так называемого, процесса "броуновского моста"вида: $\mathbf{f}_t-\frac{t}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta\in\Re^m$, определенного при $t\in[0,\Delta],\ \Delta>0$ в тригонометрический ряд Фурье со случайными коэффициентами. Для получения разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (8) в кратный ряд из произведений стандартных независимых гауссовских величин по методу Мильштейна Г.Н. необходимо осуществить итеративный процесс, начиная с внутренних интегралов в (8), подстановки с последующим интегрированием "разложенных"в тригонометрический ряд Фурье дифференциалов $d\mathbf{f}^{(i_l)}_t;\ l=1,\ldots,m$. Эта процедура является достаточно трудоемкой и не приводит [5], [6] к общей формуле разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича произвольной кратности $k$. В результате в [5], [7] известны лишь разложения некоторых повторных стохастических интегралов вида (8) кратностей $1\div 3$, при этом в работе [5]– кратностей 1 и 2, а в работе [7]– кратностей $1\div 3$. Кроме этого рассмотренный метод позволяет применять только тригонометрическую систему для получения разложений повторных стохастических интегралов в ряды из произведений стандартных независимых гауссовских величин.

Другой и более общий метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича вида

$$\int\limits_t^{*T}\psi_k(t_k)\ldots\int\limits_t^{*t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{f}^{(i_1)}_{t_1}\ldots d\mathbf{f}^{(i_k)}_{t_k}, \qquad (11)$$

где $\psi_l(\tau);\ l=1,\ldots,k$ – непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t,T]$ функции, предлагается в настоящей работе. Идея этого метода навеяна работой [8]. Рассматриваемый в данной работе метод основывается на представлении повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (11) в виде кратного стохастического интеграла с последующим разложением подынтегральной функции кратного стохастического интеграла в кратный ряд Фурье по полным ортонормированным в пространстве $L_2([t,T])$ системам функций. В результате можно получить общие формулы разложения и аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (11) произвольной кратности k. В дальнейшем этот метод будем называть методом, основанным на кратных рядах Фурье.

Отметим наиболее существенные преимущества метода, основанного на кратных рядах Фурье перед методом Г.Н.Мильштейна.

1. Метод, основанный на кратных рядах Фурье предусматривает применение различных полных ортонормированных систем функций, а метод Г.Н.Мильштейна допускает применение только тригонометрической системы.

2. Метод, основанный на кратных рядах Фурье дает возможность получить конкретную формулу, которая получена в настоящей работе, для аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (11) произвольной кратности $k$. Метод Г.Н. Мильштейна допускает лишь возможность получения такой формулы, однако из-за сложности преобразований на которых он основан в настоящее время в литературе [5]-[7] известны аппроксимации методом Г.Н. Мильштейна лишь для некоторых повторных стохастических интегралов Стратоновича кратностей $1 \div 3$.

3. Метод, основанный на кратных рядах Фурье сводит проблему аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича к вычислению коэффициентов Фурье для специальных функций многих переменных. Эти коэффициенты могут вычисляться как аналитически, так и численно. Метод Г.Н. Мильштейна, в силу своих особенностей, практически исключает возможность применения вычислительных процедур для определения коэффициентов разложения.

В конце работы приведен метод представления повторных стохастических интегралов Стратоновича вида (11) и повторных стохастических интегралов Ито вида

$$\int\limits_t^T \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

где $\psi_1(\tau) \equiv \ldots \equiv \psi_k(\tau)$ и $i_1 = \ldots = i_k$ в виде полиномов конечных степеней от гауссовской случайной величины. Этот метод, основывается на многочленах Эрмита [9] и является частным случаем метода, основанного на кратных рядах Фурье и метода Г.Н. Мильштейна.

Следует отметить, что существуют также методы сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов, которые основываются на интегральных суммах [5]. Однако эти методы среднеквадратически сходятся значительно медленнее, чем метод, основанный на кратных рядах Фурье и метод Г.Н. Мильштейна. Один из таких методов будет рассмотрен в конце настоящей работы.

## 2. Соотношения между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича

С помощью интегральной версии неравенства Гельдера и формулы Ито можно показать (см. например [6]), что для случайного процесса $\xi_\tau$ такого, что $(\xi_\tau)^n \in \mathcal{M}_2([t_0, t])$ справедливы следующие неравенства:

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau df_\tau\right|^{2n}\right\} \le (t-t_0)^{n-1}\left(n(2n-1)\right)^n \int\limits_{t_0}^{t} \mathsf{M}\left\{|\xi_\tau|^{2n}\right\} d\tau, \qquad (12)$$

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau d\tau\right|^{2n}\right\} \le (t-t_0)^{2n-1} \int\limits_{t_0}^{t} \mathsf{M}\left\{|\xi_\tau|^{2n}\right\} d\tau, \qquad (13)$$

где $f_\tau \in \Re^1$ – стандартный винеровский процесс, $n \in \mathcal{N}$.

Используем приведенные оценки моментов стохастических интегралов для доказательства следующей леммы о связи стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

**Лемма 2** *Пусть процесс Ито* $\eta_\tau \in \Re^1$ *определен при* $\tau \in [t, T]$ *следующим образом:*

$$\eta_\tau = \eta_t + \int\limits_{t}^{\tau} a_s ds + \int\limits_{t}^{\tau} b_s d\mathbf{w}_s^{(i)}, \qquad (14)$$

*где процессы* $a_s,\ b_s$ *таковы, что* $a_s^2, b_s^2 \in \mathcal{M}_2([t, T])$ *и при всех* $s, \tau \in [t, T]$ *и некоторых положительных* $C,\ \gamma < \infty$ *процесс* $b_s$ *удовлетворяет условию:*

$$\mathsf{M}\left\{(b_s - b_\tau)^4\right\} \le C \mid s-\tau \mid^{\gamma}, \qquad (15)$$

*где* $\mathbf{w}_s^{(i)} = \mathbf{f}_s^{(i)}$ *при* $i = 1, 2$ *и* $\mathbf{w}_s^{(0)} = s \ \forall s \in [t, T]$. *Тогда выполнено с вероятностью 1 следующее равенство:*

$$\int\limits_t^{*T} \eta_s d\mathbf{w}_s^{(j)} = \int\limits_t^{T} \eta_s d\mathbf{w}_s^{(j)} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i=j\neq 0\}} \int\limits_t^{T} b_s ds, \tag{16}$$

*где* $i,\ j = 0,\ 1,\ 2;\ \mathbf{1}_{\{i=j\neq 0\}} = 1$ *при* $i = j \neq 0$ *и* $\mathbf{1}_{\{i=j\neq 0\}} = 0$ *иначе;* $\mathbf{f}_t^{(1)},\ \mathbf{f}_t^{(2)} \in \Re^1$*- независимые стандартные винеровские процессы;* $\int\limits_t^{*T} \eta_s d\mathbf{w}_s^{(0)} \stackrel{def}{=} \int\limits_t^{T} \eta_s ds$.

**Доказательство:** Представим с вероятностью 1 интегральную сумму для стохастического интеграла $\int\limits_t^{*T} \eta_s d\mathbf{w}_s^{(j)}$ с помощью (14) в виде:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \eta_{\tau_k'} \Delta\mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)} = \sum_{k=0}^{N-1} \eta_{\tau_k} \Delta\mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)} + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\eta_{\tau_k'} - \eta_{\tau_k}\right) \Delta\mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \eta_{\tau_k} \Delta\mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)} + \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_k'} b_s d\mathbf{w}_s^{(i)} \Delta\mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)} + \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_k'} a_s ds \Delta\mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)}, \tag{17}$$

где $\tau_k' = \tau_k + \frac{1}{2}\Delta\tau_k,\ \Delta\mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)} = \mathbf{w}_{\tau_{k+1}}^{(j)} - \mathbf{w}_{\tau_k}^{(j)},\ \Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$. Рассмотрим сначала случай, когда $i \neq 0,\ j \neq 0$. Тогда первое слагаемое в правой части (17) имеет с вероятностью 1 своим среднеквадратическим пределом при $\Delta_N \to 0$, $N \to \infty$ интеграл Ито $\int\limits_t^{T} \eta_s d\mathbf{f}_s^{(j)}$. Рассмотрим второе слагаемое в правой части (17) при $i \neq 0;\ j \neq 0$. С вероятностью 1 имеем:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_k'} b_s d\mathbf{f}_s^{(i)} \Delta\mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)} = \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_k'} (b_s - b_{\tau_k}) d\mathbf{f}_s^{(i)} \left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(j)} - \mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1} b_{\tau_k} \left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(j)} - \mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right)\left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_k}^{(i)}\right) + \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_k'} b_s d\mathbf{f}_s^{(i)} \left(\mathbf{f}_{\tau_{k+1}}^{(j)} - \mathbf{f}_{\tau_k'}^{(j)}\right). \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что третье слагаемое в правой части (18) имеет с вероятностью 1 нулевой среднеквадратический предел при $\Delta_N \to 0,\ N \to \infty$.

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (18). С использованием неравенств Минковского и Коши-Буняковского имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\tau_k}^{\tau_k^{'}}(b_s-b_{\tau_k})d\mathbf{f}_s^{(i)}\left(\mathbf{f}_{\tau_k^{'}}^{(j)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right)\right)^2\right\}\le$$

$$\le\left(\sum_{k=0}^{N-1}\left(\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{\tau_k}^{\tau_k^{'}}(b_s-b_{\tau_k})d\mathbf{f}_s^{(i)}\right)^4\right\}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\mathsf{M}\left\{\left(\mathbf{f}_{\tau_k^{'}}^{(j)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right)^4\right\}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2.$$

Далее используя неравенство (12) при $n=2$ и условие (15), а также соотношение

$$\mathsf{M}\left\{\left(\mathbf{f}_{\tau_k^{'}}^{(j)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right)^4\right\}=3\left(\tau_k^{'}-\tau_k\right)^2$$

получаем, что среднеквадратический предел при $\Delta_N\to 0,\ N\to\infty$ первого слагаемого в правой части (18) с вероятностью 1 равен нулю. Рассмотрим второе слагаемое в правой части (18). Нетрудно видеть, что с вероятностью 1

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \sum_{k=0}^{N-1}b_{\tau_k}\left(\mathbf{f}_{\tau_k^{'}}^{(j)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right)\left(\mathbf{f}_{\tau_k^{'}}^{(i)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i)}\right)=0 \text{ при } i\ne j.$$

Рассмотрим теперь случай $i=j$. С использованием неравенства $(a+b)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)$ получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1}b_{\tau_k}\left(\mathbf{f}_{\tau_k^{'}}^{(i)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i)}\right)^2-\frac{1}{2}\int\limits_t^T b_s ds\right)^2\right\}=$$

$$=\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1}\left(b_{\tau_k}\left(\left(\mathbf{f}_{\tau_k^{'}}^{(i)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i)}\right)^2-\frac{1}{2}\Delta\tau_k\right)-\frac{1}{2}\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\left(b_s-b_{\tau_k}\right)ds\right)\right)^2\right\}\le$$

$$\le 2\sum_{k=0}^{N-1}\mathsf{M}\left\{b_{\tau_k}^2\right\}\mathsf{M}\left\{\left(\left(\mathbf{f}_{\tau_k^{'}}^{(i)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i)}\right)^2-\frac{1}{2}\Delta\tau_k\right)^2\right\}+\frac{1}{2}\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\left(b_s-b_{\tau_k}\right)ds\right)^2\right\}. \tag{19}$$

Поскольку $\mathsf{M}\left\{b_{\tau_k}^2\right\} < \infty$ и

$$\mathsf{M}\left\{\left(\left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(i)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i)}\right)^2-\frac{1}{2}\Delta\tau_k\right)^2\right\}=3\left(\tau_k'-\tau_k\right)^2+\frac{1}{4}\left(\Delta\tau_k\right)^2,$$

то первое слагаемое в правой части (19) имеет нулевой предел при $\Delta_N \to 0,\ N\to\infty$. В силу неравенства Минковского и условия (15) второе слагаемое в правой части (19) также имеет нулевой предел при $\Delta_N\to 0, N\to\infty$. Таким образом при $i,j\neq 0$ с вероятностью 1

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{k=0}^{N-1}b_{\tau_k}\left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(j)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right)\left(\mathbf{f}_{\tau_k'}^{(i)}-\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i)}\right)=\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i=j\neq 0\}}\int\limits_t^T b_s ds.$$

Рассмотрим теперь третье слагаемое в правой части (17). С использованием неравенств Минковского и Коши-Буняковского имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\tau_k}^{\tau_k'}a_s ds\Delta\mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right)^2\right\}\le\left(\sum_{k=0}^{N-1}\left(\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{\tau_k}^{\tau_k'}a_s ds\right)^4\right\}\right)^{1/4}\left(\mathsf{M}\left\{\left(\Delta\mathbf{f}_{\tau_k}^{(j)}\right)^4\right\}\right)^{1/4}\right)^2$$

Из последнего неравенства и неравенства (13) $n=2$ заключаем, что третье слагаемое в правой части (17) имеет нулевой среднеквадратический предел при $\Delta_N\to 0,\ N\to\infty$. Таким образом лемма доказана для $i\neq 0,\ j\neq 0$.

Если $i=0$ или $j=0$, то доказательство леммы проводится аналогично. Лемма доказана. $\square$.

**Замечание 1.** *Обычно в литературе (см. например, [6]) интеграл Стратоновича определяется несколько иначе, чем в настоящей работе, а именно в виде*

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m}}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left(\xi^{(N)}(\tau_j^{(N)},\omega)+\xi^{(N)}(\tau_{j+1}^{(N)},\omega)\right)\left(f(\tau_{j+1}^{(N)},\omega)-f(\tau_j^{(N)},\omega)\right)\stackrel{def}{=}\int\limits_0^{*T}\xi_\tau df_\tau, \tag{20}$$

*где сохранен смысл обозначений, входящих в (3). Отметим, что если процесс $\xi(t,\omega)$ обладает достаточными свойствами гладкости, то левая часть (20) будет с вероятностью 1 равна левой части (3). В частности, это утверждение будет справедливо, если процесс $\xi(t,\omega)$ удовлетворяет условиям леммы 2.*

Пусть выполнены условия:

I. $\mathbf{f}_\tau \in \Re^m$ – согласованный с совокупностью $\sigma-$алгебр $\{\mathcal{F}_t;\ t \in [0,T]\}$ стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_\tau^{(i)};\ i = 1, \ldots, m$.

II. $\psi_j(\tau);\ j = 1, \ldots, k$ – непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t,T]$ функции.

Введем следующие обозначения:

$$J_{T,t}^{(k)s_l\ldots s_1} \stackrel{def}{=} \int\limits_t^T \psi_k(t_k)\ldots \int\limits_t^{t_{s_l+3}} \psi_{s_l+2}(t_{s_l+2}) \int\limits_t^{t_{s_l+2}} \psi_{s_l}(t_{s_l+1})\psi_{s_l+1}(t_{s_l+1})\times$$

$$\times \int\limits_t^{t_{s_l+1}} \psi_{s_l-1}(t_{s_l-1})\ldots \int\limits_t^{t_{s_1+3}} \psi_{s_1+2}(t_{s_1+2}) \int\limits_t^{t_{s_1+2}} \psi_{s_1}(t_{s_1+1})\psi_{s_1+1}(t_{s_1+1})\times$$

$$\times \int\limits_t^{t_{s_1+1}} \psi_{s_1-1}(t_{s_1-1})\ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_{s_1-1}}^{(i_{s_1-1})}dt_{s_1}d\mathbf{w}_{t_{s_1+2}}^{(i_{s_1+2})}\ldots$$

$$\ldots d\mathbf{w}_{t_{s_l-1}}^{(i_{s_l-1})}dt_{s_l}d\mathbf{w}_{t_{s_l+2}}^{(i_{s_l+2})}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{21}$$

$$J_{T,t}^{*(k)} = \int\limits_t^{*T} \psi_k(t_k)\ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{22}$$

$$J_{T,t}^{(k)} = \int\limits_t^T \psi_k(t_k)\ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{23}$$

где в (21)-(23) введены обозначения:

$$\mathcal{A}_{kl} = \{(s_l, \ldots, s_1):\ s_l > s_{l-1}+1, \ldots, s_2 > s_1+1;\ s_l, \ldots, s_1 = 1, \ldots, k-1\};$$

$(s_l, \ldots, s_1) \in \mathcal{A}_{kl}$; $l = 1, \ldots, \left[\frac{k}{2}\right]$; $i_s = 0,\ 1, \ldots, m$; $s = 1, \ldots, k$; $[x]$ – целая часть числа $x$. Отметим, что далее наряду с этими сокращенными обозначениями, там где это необходимо, будут использоваться более развернутые обозначения.

Сформулируем теорему о связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича $J_{T,t}^{(k)},\ J_{T,t}^{*(k)}$ произвольной кратности $k$.

**Теорема 1** *Пусть условия* I *и* II *выполнены. Тогда справедливо с вероятностью 1 следующее соотношение между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича* $J_{T,t}^{(k)},\ J_{T,t}^{*(k)}$*:*

$$J_{T,t}^{*(k)}=J_{T,t}^{(k)}+\sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{2^r}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}J_{T,t}^{(k)s_r\ldots s_1}\prod_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_l+1}\neq 0\}}. \tag{24}$$

**Доказательство:** Нетрудно по индукции проверить, что в условиях теоремы существуют повторные стохастические интегралы $J_{T,t}^{(k)},\ J_{T,t}^{(k)s_r\ldots s_1}$, входящие в (24). Докажем равенство (24) по индукции. Рассмотрим случай $k=1$. Согласно (24) с вероятностью 1 имеем:

$$J_{T,t}^{(1)}=J_{T,t}^{*(1)}. \tag{25}$$

Соотношение (25) является хорошо известным [5], [6]. При $k=2$ из (24) с вероятностью 1 получаем:

$$J_{T,t}^{*(2)}=J_{T,t}^{(2)}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}J_{T,t}^{(2)1}. \tag{26}$$

Покажем, что равенство (26) справедливо с вероятностью 1. Для этого рассмотрим процесс $\eta_{t_2}=\psi_2(t_2)J_{t_2,t}^{(1)}$ и найдем с помощью формулы Ито (лемма 1) его стохастический дифференциал:

$$d\eta_{t_2}=\frac{d\psi_2(t_2)}{dt_2}J_{t_2,t}^{(1)}dt_2+\mathbf{1}_{\{i_1\neq 0\}}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2)d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_1)}. \tag{27}$$

Из (27) следует, что диффузионный коэффициент процесса $\eta_{t_2}$ равен

$$\mathbf{1}_{\{i_1\neq 0\}}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2).$$

Далее непосредственно с помощью леммы 2 получаем с вероятностью 1 соотношение (26). Таким образом утверждение теоремы доказано при $k=1,\ 2$. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором $k>2$ и докажем его справедливость при значении $k$ на единицу большем. Воспользовавшись предположением индукции с вероятностью 1 имеем:

$$J_{T,t}^{*(k+1)}=\int\limits_t^{*T}\psi_{k+1}(t_{k+1})\left\{J_{t_{k+1},t}^{(k)}+\sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{2^r}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}J_{t_{k+1},t}^{(k)s_r\ldots s_1}\times\right.$$

$$\times \prod_{l=1}^{r} \mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_l+1}\neq 0\}}\Biggr\} d\mathbf{w}_{t_{k+1}}^{(i_{k+1})} =$$

$$= \int\limits_t^{*T} \psi_{k+1}(t_{k+1}) J_{t_{k+1},t}^{(k)} d\mathbf{w}_{t_{k+1}}^{(i_{k+1})} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}} \prod_{l=1}^{r} \mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_l+1}\neq 0\}} \int\limits_t^{*T} \psi_{k+1}(t_{k+1}) J_{t_{k+1},t}^{(k)s_r\ldots s_1} d\mathbf{w}_{t_{k+1}}^{(i_{k+1})}. \qquad (28)$$

Используя формулу Ито (лемма 1) и лемму 2 с вероятностью 1 получаем:

$$\int\limits_t^{*T} \psi_{k+1}(t_{k+1}) J_{t_{k+1},t}^{(k)} d\mathbf{w}_{t_{k+1}}^{(i_{k+1})} = J_{T,t}^{(k+1)} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_k=i_{k+1}\neq 0\}} J_{T,t}^{(k+1)k}, \qquad (29)$$

$$\int\limits_t^{*T} \psi_{k+1}(t_{k+1}) J_{t_{k+1},t}^{(k)s_r\ldots s_1} d\mathbf{w}_{t_{k+1}}^{(i_{k+1})} = \begin{cases} J_{T,t}^{(k+1)s_r\ldots s_1} \ \text{при } s_r = k-1 \\ J_{T,t}^{(k+1)s_r\ldots s_1} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_k=i_{k+1}\neq 0\}} J_{T,t}^{(k+1)ks_r\ldots,s_1} \\ \text{при } s_r < k-1 \end{cases}. \qquad (30)$$

После подстановки (29) и (30) в (28) и перегруппировки слагаемых приходим к справедливым с вероятностью 1 соотношениям:

$$J_{T,t}^{*(k+1)} = J_{T,t}^{(k+1)} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k+1,r}} J_{T,t}^{(k+1)s_r\ldots s_1} \prod_{l=1}^{r} \mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_l+1}\neq 0\}} \qquad (31)$$

при $k$-четном и

$$J_{T,t}^{*(k^{'}+1)} = J_{T,t}^{(k^{'}+1)} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k^{'}}{2}\right]+1} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k^{'}+1,r}} J_{T,t}^{(k^{'}+1)s_r\ldots s_1} \prod_{l=1}^{r} \mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_l+1}\neq 0\}} \qquad (32)$$

при $k^{'} = k+1$ – нечетном. Из (31) и (32) с вероятностью 1 получаем:

$$J_{T,t}^{*(k+1)} = J_{T,t}^{(k+1)} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k+1,r}} J_{T,t}^{(k+1)s_r\ldots s_1} \prod_{l=1}^{r} \mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_l+1}\neq 0\}}. \qquad (33)$$

Соотношение (33) доказывает теорему. Теорема доказана. □

**Замечание 2.** *Результат теоремы 1 при* $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *для стохастических интегралов несколько иного вида, чем* $J^{*(k)}_{T,t}$, $J^{(k)}_{T,t}$ *является известным [6]. Обобщение этих результатов на случай произвольного* $k$ *приводится здесь впервые.*

**Замечание 3.** *Результат теоремы 4.1 может быть обобщен, т.е. функция* $\psi_1(s)$ *в (24) может быть заменена на случайный процесс* $\phi_s$ *из класса* $\mathcal{M}_2([t,T])$.

# 3. Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций

## 3.1. Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича в кратные ряды из произведений стандартных гауссовских величин

Рассмотрим функцию $K(t_1,\ldots,t_k),\ k\ge 2$ вида:

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\prod_{l=1}^{k}\psi_l(t_l)\prod_{l=1}^{k-1}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}, \tag{34}$$

определенную на гиперкубе $[t,T]^k \stackrel{def}{=} [t,T]\underbrace{\times\ldots\times}_{k-1}[t,T]$, где $\psi_i(t);\ i=1,\ldots,k$ – непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t,T]$ функции, $\mathbf{1}_{\{\tau<\theta\}}=1$ при $\tau<\theta$ и $\mathbf{1}_{\{\tau<\theta\}}=0$ при $\tau\ge\theta$.

Введем следующее обозначение:

$$\mathcal{A}_j^{\pm}\left\{\Phi(t_p,\ldots,t_k)\right\} \stackrel{def}{=} \mathbf{1}_{\{t_j=t_{j+1}\}}\left[\Phi(t_p,\ldots,t_j,t_j+0,t_{j+2},\ldots,t_k)+\right.$$

$$\left.+\Phi(t_p,\ldots,t_j,t_j-0,t_{j+2},\ldots,t_k)\right], \tag{35}$$

где $1\le p\le j\le k-1;\ p,k\in\mathcal{N};\ \mathbf{1}_{\{t_j=t_{j+1}\}}=1$ при $t_j=t_{j+1}$ и $\mathbf{1}_{\{t_j=t_{j+1}\}}=0$ в противном случае.

Согласно (34) и (35) имеем:

$$\mathcal{A}_j^{\pm}\{K(t_1,\ldots,t_k)\} = \mathbf{1}_{\{t_j=t_{j+1}\}} \prod_{l=1}^{k} \psi_l(t_l) \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}, \qquad (36)$$

где $\prod\limits_{l\in\emptyset} \stackrel{def}{=} 1;\ j=1,\ldots,k-1;\ \emptyset$ – пустое множество.

Сформулируем следующее утверждение.

**Теорема 2** *Пусть выполнены условия:*

*1.*$\psi_i(\tau);\ i=1,\ldots,k$ *– непрерывно дифференцируемые на промежутке* $[t,T]$ *функции.*

*2.*$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ *– полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве* $L_2([t,T])$, *для которой ряд Фурье* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} C_j\phi_j(x)$ *с коэффициентами* $C_j = \int\limits_t^T f(x)\phi_j(x)dx$ *сходится для любой кусочно-гладкой на открытом интервале* $(t,T)$ *и ограниченной на промежутке* $[t,T]$ *функции* $f(x)$ *во всякой внутренней точке* $x$ *промежутка* $[t,T]$ *к величине* $\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)$ *и равномерно к* $f(x)$ *в любом замкнутом интервале непрерывности* $f(x)$, *а также сходится на концах промежутка* $[t,T]$.

*Тогда повторный стохастический интеграл Стратоновича* $J_{T,t}^{*(k)}$ *разлагается с вероятностью 1 в следующий сходящийся в среднем степени* $q=2n;\ n=1,\ 2,\ldots$ *кратный ряд из произведений независимых стандартных гауссовских величин:*

$$J_{T,t}^{*(k)} = \sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}, \qquad (37)$$

*где* $\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} = \int\limits_t^T \phi_{j_l}(s)d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$ *– независимые при различных* $i_l$ *или* $j_l$ *(если* $i_l\neq 0$*) стандартные гауссовские величины и*

$$C_{j_k\ldots j_1} = \int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^T K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k.$$

Для доказательства теоремы 2 докажем ряд утверждений.

**Теорема 3.** *В условиях теоремы 2 функция* $\mathcal{B}_{k-1}^{\pm}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}$ *разлагается в любой внутренней точке гиперкуба* $[t,T]^k$ *в следующий кратный ряд Фурье*

$$\mathcal{B}_{k-1}^{\pm}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}=\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l), \qquad (38)$$

*где*

$$\mathcal{B}_{k-1}^{\pm}\{\cdot\}=\mathcal{A}_{k-1}^{*}\ldots\mathcal{A}_{1}^{*}\{\cdot\};\ \ \mathcal{A}_{j}^{*}\{\cdot\}=\cdot+\frac{1}{2}\mathcal{A}_{j}^{\pm}\{\cdot\};\ j=1,\ldots,k-1,$$

$$C_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^T K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k. \qquad (39)$$

*При этом кратный ряд Фурье (38) сходится на границе* $\Gamma_k$ *гиперкуба* $[t,T]^k$ *и сходится равномерно к функции* $\mathcal{B}_{k-1}^{\pm}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}$ *в областях ее непрерывности.*

**Доказательство:** Рассмотрим случай $k=2$ и разложим функцию $K(t_1,t_2)$ вида (34) в ряд Фурье по переменной $t_1$, считая $t_2=const$ :

$$K(t_1,t_2)=\sum_{j_1=0}^{\infty}C_{j_1}(t_2)\phi_{j_1}(t_1)-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2), \qquad (40)$$

где $C_{j_1}(t_2)=\int\limits_t^T K(t_1,t_2)\phi_{j_1}(t_1)dt_1$. Происхождение члена

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2)$$

в правой части (40) вызвано тем, что функция $K(t_1,t_2)$ терпит разрыв при $t_1=t_2$ и по условию 2 теоремы 2 ряд $\sum\limits_{j_1=0}^{\infty}C_{j_1}(t_2)\phi_{j_1}(t_1)$ сходится при $t_1=t_2$ к величине $\frac{1}{2}\left(K(t_2-0,t_2)+\ K(t_2+0,t_2)\right)=\frac{1}{2}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2)$. Очевидно, что (40) может быть переписано с учетом введенных обозначений в виде:

$$\mathcal{A}_1^{*}\{K(t_1,t_2)\}=\sum_{j_1=0}^{\infty}C_{j_1}(t_2)\phi_{j_1}(t_1). \qquad (41)$$

Разлагая функцию $C_{j_1}(t_2)$ в ряд Фурье на промежутке $[t,T]$ и подставляя результат в (41) получим:

$$\mathcal{A}_1^*\{K(t_1,t_2)\} = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2), \qquad (42)$$

где $C_{j_2j_1} = \int\limits_t^T\int\limits_t^T K(t_1,t_2)\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)dt_1dt_2$. Кроме этого ряд (42) сходится на границе $\Gamma_2$ квадрата $[t,T]^2$ и равномерно сходится к функции $\mathcal{B}_1^{\pm}\{K(t_1,t_2)\}$ в областях ее непрерывности согласно условию 2 теоремы 2. Таким образом утверждение теоремы при $k=2$ доказано. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором $k>2$. Нетрудно видеть, что из (34) следует представление:

$$K(t_1,\ldots,t_k) = \psi_k(t_k)\mathbf{1}_{\{t_{k-1}<t_k\}}K(t_1,\ldots,t_{k-1}). \qquad (43)$$

Применим к левой и правой части (43) оператор $\mathcal{B}_{k-2}^{\pm}\{\cdot\}$ :

$$\mathcal{B}_{k-2}^{\pm}\{K(t_1,\ldots,t_k)\} = \psi_k(t_k)\mathbf{1}_{\{t_{k-1}<t_k\}}\mathcal{B}_{k-2}^{\pm}\{K(t_1,\ldots,t_{k-1})\}. \qquad (44)$$

По предположению индукции имеем:

$$\mathcal{B}_{k-2}^{\pm}\{K(t_1,\ldots,t_{k-1})\} = \sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_{k-1}=0}^{\infty} C_{j_{k-1}\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k-1}\phi_{j_l}(t_l) =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_{k-2}=0}^{\infty} C_{j_{k-2}\ldots j_1}(t_{k-1})\prod_{l=1}^{k-2}\phi_{j_l}(t_l), \qquad (45)$$

где

$$C_{j_{k-2}\ldots j_1}(t_{k-1}) = \int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^T K(t_1,\ldots,t_{k-1})\prod_{l=1}^{k-2}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_{k-2}.$$

После подстановки (45) в (44) получаем:

$$\mathcal{B}_{k-2}^{\pm}\{K(t_1,\ldots,t_k)\} = \sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_{k-2}=0}^{\infty}\psi_k(t_k)\mathbf{1}_{\{t_{k-1}<t_k\}}C_{j_{k-2}\ldots j_1}(t_{k-1})\prod_{l=1}^{k-2}\phi_{j_l}(t_l). \qquad (46)$$

Разложим функцию $\psi_k(t_k)\mathbf{1}_{\{t_{k-1}<t_k\}}C_{j_{k-2}\ldots j_1}(t_{k-1})$ в ряд Фурье по переменным $t_{k-1}$ и $t_k$ на квадрате $[t,T]^2$ аналогично разложению (42):

$$\psi_k(t_k)\mathbf{1}_{\{t_{k-1}<t_k\}}C_{j_{k-2}\ldots j_1}(t_{k-1}) = \sum_{j_{k-1}=0}^{\infty}\sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k\ldots j_1}\phi_{j_k}(t_k)\phi_{j_{k-1}}(t_{k-1}) -$$

$$-\frac{1}{2}\psi_k(t_{k-1})\mathbf{1}_{\{t_{k-1}=t_k\}}C_{j_{k-2}\ldots j_1}(t_{k-1}). \qquad (47)$$

После подстановки (47) в (46) и использования (45) и (44) получаем:

$$\mathcal{B}^{\pm}_{k-2}\{K(t_1,\ldots,t_k)\} = \sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l) -$$

$$-\frac{1}{2}\mathcal{A}^{\pm}_{k-1}\left\{\psi_k(t_k)\mathbf{1}_{\{t_{k-1}<t_k\}}\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_{k-2}=0}^{\infty} C_{j_{k-2}\ldots j_1}(t_{k-1})\prod_{l=1}^{k-2}\phi_{j_l}(t_l)\right\} =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l) - \frac{1}{2}\mathcal{A}^{\pm}_{k-1}\mathcal{B}^{\pm}_{k-2}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}. \qquad (48)$$

Из (48) следует равенство:

$$\mathcal{A}^{*}_{k-1}\mathcal{B}^{\pm}_{k-2}\{K(t_1,\ldots,t_k)\} = \sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l). \qquad (49)$$

Соотношение (49) доказывает равенство (38). Сходимость ряда (38) на границе $\Gamma_k$ гиперкуба $[t,T]^k$, а также равномерная сходимость ряда (38) к функции $\mathcal{B}^{\pm}_{k-1}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}$ в областях ее непрерывности проверяется по индукции с применением условия 2 теоремы 2. Теорема доказана. $\square$.

**Лемма 3** *В условиях теоремы 1 повторный стохастический интеграл Ито $J^{(k)}_{T,t}$ представим с вероятностью 1 в виде:*

$$J^{(k)}_{T,t} = \underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_k=0}^{N-1}\psi_k(\tau_{j_k})\Delta\mathbf{w}^{(i_k)}_{\tau_{j_k}}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\psi_1(\tau_{j_1})\Delta\mathbf{w}^{(i_1)}_{\tau_{j_1}}, \qquad (50)$$

*где* $\Delta\mathbf{w}^{(i_l)}_{\tau_{j_l}} = \mathbf{w}^{(i_l)}_{\tau_{j_l+1}} - \mathbf{w}^{(i_l)}_{\tau_{j_l}}$; $i_l = 0,\ 1,\ldots,m$; $\{\tau_{j_l}\}_{j_l=0}^{N-1}$ *– разбиение промежутка* $[t,T]$ *такого типа, как в (1);* $l = 1,\ldots,k$.

**Доказательство:** Отметим, что существование интеграла $J_{T,t}^{(k)}$ в условиях леммы 3 очевидно. Докажем соотношение (50). Представим с вероятностью 1 интеграл $J_{T,t}^{(k)}$, пользуясь свойством аддитивности, в следующем виде:

$$J_{T,t}^{(k)} = \delta_{N,k} + \sum_{r=1}^{k-1}\sum_{q=1}^{k-r}\delta_{N,k}^{rq}, \tag{51}$$

где

$$\delta_{N,k} = \sum_{j_1=0}^{N-1}\zeta_{j_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k},$$

$$\delta_{N,k}^{rq} = \sum_{j_1=0}^{N-1}\zeta_{j_1}\ldots\sum_{j_{q-1}=0}^{j_{q-2}-1}\zeta_{j_{q-1}}\sum_{j_q=0}^{j_{q-1}-1}\zeta_{j_q}^{r+1}\sum_{j_{q+r+1}=0}^{j_q-1}\zeta_{j_{q+r+1}}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k},$$

где

$$\zeta_{j_q}^{r+1} \stackrel{def}{=} \int\limits_{\tau_{j_q}}^{\tau_{j_q+1}}\psi_{k-q+1}(t_1)\ldots\int\limits_{\tau_{j_q}}^{t_r}\psi_{k-q+1-r}(t_{r+1})d\mathbf{w}_{t_{r+1}}^{(i_{k-q+1-r})}\ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_{k-q+1})};$$

$$\zeta_{j_q}^{1} \stackrel{def}{=} \zeta_{j_q};\ r=0,\ 1,\ldots,k-1;\ k=1,\ 2,\ldots .$$

Нетрудно видеть, что справедливы следующие свойства случайных величин $\zeta_{j_q}^{r+1}$ :

$1^{\circ\circ}$ $\mathsf{M}\left\{\left(\zeta_{j_q}^{r+1}\right)^2\right\} \le C_{r+1} \mid \tau_{j_q+1}-\tau_{j_q} \mid^{\gamma_{r+1}};\ C_{r+1}=const<\infty$, где $\gamma_{r+1} = \sum\limits_{i=1}^{r+1}\theta_i$, $\theta_i = 1$ при $\mathbf{w}_{t_i}^{(i_{k-q+2-i})} = \mathbf{f}_{t_i}^{(i_{k-q+2-i})}$ и $\theta_i = 2$ при $\mathbf{w}_{t_i}^{(i_{k-q+2-i})} = t_i$.

$2^{\circ\circ}$ Случайные величины $\zeta_{j_q}^{r+1}$ при всех возможных $r,\ q$ стохастически независимы от значений $\mathbf{f}_s$ и приращений $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_\tau$ винеровского процесса при $s \le \tau_{j_q};\ t > \tau \ge \tau_{j_q+1}$.

$3^{\circ\circ}$ Случайные величины $\zeta_{j_q}^{r+1}$ и $\zeta_{j_g}^{p+1}$ при всех возможных $r,\ p = 0,\ 1,\ldots,k-1$ стохастически независимы при $g \ne q$.

С помощью свойств $1^{\circ\circ} - 3^{\circ\circ}$ и неравенства Минковского получаем, что второе слагаемое в правой части (51) имеет с вероятностью 1 нулевой среднеквадратический предел при $\Delta_N \to 0,\ N \to \infty$. Представим $\delta_{N,k}$ с вероятностью 1 в виде:

$$\delta_{N,k} = \delta_{N,k}^{'} + \delta_{N,k}^{''}, \tag{52}$$

где

$$\delta'_{N,k}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\xi_{j_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\xi_{j_k},$$

$$\delta''_{N,k}=\sum_{j_1=0}^{N-1}\eta_{j_1}\sum_{j_2=0}^{i_1-1}\zeta_{j_2}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k}+\sum_{j_1=0}^{N-1}\xi_{j_1}\sum_{j_2=0}^{i_1-1}\eta_{j_2}\sum_{j_3=0}^{i_2-1}\zeta_{j_3}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\zeta_{j_k}+$$
$$\ldots$$
$$+\sum_{j_1=0}^{N-1}\xi_{j_1}\ldots\sum_{j_{k-1}=0}^{j_{k-2}-1}\xi_{j_{k-1}}\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}\eta_{j_k},$$

где

$$\eta_{j_q}=\int\limits_{\tau_{j_q}}^{\tau_{j_q+1}}\left(\psi_{k-q+1}(t)-\psi_{k-q+1}(\tau_{j_q})\right)d\mathbf{w}_t^{(i_{k-q+1})},\ \ \xi_{j_q}=\psi_{k-q+1}(\tau_{j_q})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_q}}^{(i_{k-q+1})}.$$

В силу свойств $1^{\circ\circ}-3^{\circ\circ}$, неравенства Минковского и непрерывной дифференцируемости функций $\psi_i(\tau);\ i=1,\ldots,k$ следует, что второе слагаемое в правой части (52) имеет с вероятностью 1 нулевой среднеквадратический предел при $\Delta_N\to 0,\ N\to\infty$. Таким образом лемма доказана. $\square$.

**Замечание 4.** *Результат леммы 3 может быть обобщен, т.е. функция $\psi_1(s)$ в (50) может быть заменена на случайный процесс $\phi_s$ из класса $\mathcal{M}_2([0,T])$.*

**Замечание 5.** *Нетрудно видеть, что если $\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$ в (50) при некотором $l\in\{1,\ldots,k\}$ заменить на $\left(\Delta\mathbf{f}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}\right)^p$, то в интеграле $J_{T,t}^{(k)}$ соответствующий дифференциал $d\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)}$ заменится на $dt_l$ при $p=2$. Если же $p=3,\ 4,\ldots$, то правая часть (50) обратится с вероятностью 1 в ноль. Если $\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$ в (50) при некотором $l\in\{1,\ldots,k\}$ заменить на $(\Delta\tau_{j_l})^p;\ p=2,\ 3,\ldots$, то правая часть в (50) также обратится с вероятностью 1 в ноль.*

**Определение 1** *Кратным стохастическим интегралом от функции $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$, определенной на гиперкубе $[t,T]^k$ назовем следующий среднеквадратический предел:*

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_k=0}^{N-1}\Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right)\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}\stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=}\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^T\Phi(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}=J[\Phi]_{T,t}^{(k)},\qquad(53)$$

*где сохранен смысл обозначений, входящих в (50).*

Пусть $\Gamma_k$ – граница гиперкуба $[t,T]^k$. Определим стохастический интеграл по $\Gamma_k$ от функции $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$, определенной на гиперкубе $[t,T]^k$, следующим образом:

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \left\{\sum_{j_1=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_k=0}^{N-1}-\sum_{j_1=1}^{N-2}\ldots\sum_{j_k=1}^{N-2}\right\}\Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right)\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}\stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=}\int\ldots\int_{\Gamma_k}\Phi(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}. \tag{54}$$

Наряду с интегралами вида (53), (54) введем в рассмотрение следующий стохастический интеграл

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\ \sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\Phi(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=}\int_t^T\ldots\int_t^{t_2}\Phi(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}=I[\Phi]_{T,t}^{(k)}. \tag{55}$$

Пусть $\mathcal{D}_k=\{(t_1,\ldots,t_k):\ t\le t_1<\ldots<t_k\le T\}$, а $\Gamma_{\mathcal{D}_k}$ – граница $\mathcal{D}_k$. Предположим, что выполнены следующие условия:

(BI) $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ непрерывно дифференцируема в $\mathcal{D}_k$,

(BII) $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ ограничена на $\Gamma_{\mathcal{D}_k}$,

(BIII) $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ непрерывно продолжима на $\Gamma_{\mathcal{D}_k}$.

Нетрудно показать, что в условиях (BI)-(BIII) повторный стохастический интеграл $\int_t^T\ldots\int_t^{t_2}\Phi(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}$, где каждый интеграл определен как самостоятельный среднеквадратический предел соответствующих интегральных сумм существует. Кроме этого, используя рассуждения близкие к рассуждениям доказательства леммы 3 нетрудно показать, что в условиях (BI)-(BIII) так определенный повторный стохастический интеграл $\int_t^T\ldots\int_t^{t_2}\Phi(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}$ будет с вероятностью 1 равен повторному стохастическому интегралу, определенному в соответствии с (55).

Введем некоторые вспомогательные обозначения:

$$\mathbf{1}_{j_l,j_{l+1}}(j_{q_1},\ldots,j_{q_2},j_l,j_{q_3},\ldots,j_{q_{k-2}},j_l,j_{q_{k-1}},\ldots,j_{q_k})\stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} (j_{q_1}, \ldots, j_{q_2}, j_{l+1}, j_{q_3}, \ldots, j_{q_{k-2}}, j_{l+1}, j_{q_{k-1}}, \ldots, j_{g_k}), \qquad (56)$$

где $q_i, l \in \mathcal{N};\ i = 1, \ldots, k;\ l \neq q_1, \ldots, q_2, q_3, \ldots, q_{k-2}, q_{k-1}, \ldots, q_k;\ (j_{q_1}, \ldots, j_{q_k})$ – наборы вещественных чисел $j_{q_1}, \ldots, j_{q_k}$. Далее будем считать, что для мультииндексов $(j_{q_1} \ldots j_{q_k})$ так же как и для наборов $(j_{q_1}, \ldots, j_{q_k})$ справедливо соотношение (56). Будем также считать, что

$$(\ldots, j_p, j_q, \ldots, j_g, j_k, \ldots) \stackrel{def}{=} \begin{cases} (\ldots, j_p, j_q, j_k, \ldots) & \text{при } q = g \\ (\ldots, j_p, j_k, \ldots) & \text{при } q > g \end{cases},$$

где $p, q, g, k \in \mathcal{N}$. Введем в рассмотрение операторы $\mathcal{C}_l^* \{\cdot\}$ и $\mathcal{C}_l^+ \{\cdot\}$; $l = 1, \ldots, k-1$ вида:

$$\mathcal{C}_l^+ \left\{ \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1,\ldots,j_k)} a_{(j_1 \ldots j_k)} \right\} \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_{l+1}=0}^{j_{l+2}-1} \sum_{j_{l-1}=0}^{j_{l+1}-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{\mathbf{1}_{j_l, j_{l+1}}(j_1,\ldots,j_k)} a_{\mathbf{1}_{j_l, j_{l+1}}(j_1 \ldots j_k)};$$

$$\mathcal{C}_l^* \{\cdot\} \stackrel{def}{=} \cdot + \mathcal{C}_l^+ \{\cdot\},$$

где $\sum\limits_{(j_{q_1},\ldots,j_{q_k})}$ – сумма по перестановкам $(j_{q_1} \ldots, j_{q_k})$; $q_1, \ldots, q_k \in \{1, \ldots, k\}$, а $a_{(j_{q_1} \ldots j_{q_k})}$ – некоторые скалярные величины.

По индукции нетрудно доказать следующее равенство:

$$\sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{N-1} a_{(j_1 \ldots j_k)} = \mathcal{C}_{k-1}^* \ldots \mathcal{C}_1^* \left\{ \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1,\ldots,j_k)} a_{(j_1 \ldots j_k)} \right\}. \qquad (57)$$

Перепишем соотношение (57) в виде:

$$\sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{N-1} a_{(j_1 \ldots j_k)} = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1 \\ s_r > \ldots > s_1}}^{k-1} \mathcal{C}_{s_r}^+ \ldots \mathcal{C}_{s_1}^+ \left\{ \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1,\ldots,j_k)} a_{(j_1 \ldots j_k)} \right\}, \qquad (58)$$

где $\sum\limits_{\substack{s_0,\ldots,s_1=1 \\ s_0 > \ldots > s_1}}^{k-1} \mathcal{C}_{s_0}^+ \ldots \mathcal{C}_{s_1}^+ \{\cdot\} \stackrel{def}{=} \cdot;\ k = 2,\ 3, \ldots$. В частности, при $k = 2$ из (58) получаем хорошо известную формулу:

$$\sum_{j_2=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{N-1} a_{(j_1 j_2)} = \sum_{j_2=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1,j_2)} a_{(j_1 j_2)} + \mathcal{C}_1^+ \left\{ \sum_{j_2=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1,j_2)} a_{(j_1 j_2)} \right\} =$$

$$=\sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\left(a_{(j_1 j_2)}+a_{(j_2 j_1)}\right)+\sum_{j_2=0}^{N-1}a_{(j_2 j_2)}.$$

Положим $a_{(j_1\ldots j_k)}=\Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right)\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}$. Тогда из (53) и (58) имеем:

$$J[\Phi]_{T,t}^{(k)}=\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_k=0}^{N-1}\Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right)\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}=$$

$$=\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_{s_r+1}=0}^{j_{s_r+2}-1}\sum_{j_{s_r-1}=0}^{j_{s_r+1}-1}\ldots\sum_{j_{s_1+1}=0}^{j_{s_1+2}-1}\sum_{j_{s_1-1}=0}^{j_{s_1+1}-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}$$

$$\times\sum_{\prod\limits_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{j_{s_l},j_{s_{l+1}}}(j_1,\ldots,j_k)}\Bigl[\Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_{s_1-1}},\tau_{j_{s_1+1}},\tau_{j_{s_1+1}},\ldots,\tau_{j_{s_r-1}},\tau_{j_{s_r+1}},\tau_{j_{s_r+1}},\ldots,\tau_{j_k}\right)$$

$$\times\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_1-1}}}^{(i_{s_1-1})}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_1+1}}}^{(i_{s_1})}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_1+1}}}^{(i_{s_1+1})}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_r-1}}}^{(i_{s_r-1})}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_r+1}}}^{(i_{s_r})}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_r+1}}}^{(i_{s_r+1})}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}\Bigr]$$

$$=\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}\prod_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_{l+1}}\neq 0\}}I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1\ldots s_r},\qquad(59)$$

где

$$I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1\ldots s_r}=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_{s_r+3}}\int\limits_t^{t_{s_r+2}}\int\limits_t^{t_{s_r}}\ldots\int\limits_t^{t_{s_1+3}}\int\limits_t^{t_{s_1+2}}\int\limits_t^{t_{s_1}}\ldots\int\limits_t^{t_2}$$

$$\times\sum_{\prod\limits_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{t_{s_l},t_{s_{l+1}}}(t_1,\ldots,t_k)}\Bigl[\Phi\left(t_1,\ldots,t_{s_1-1},t_{s_1+1},t_{s_1+1},\ldots,t_{s_r-1},t_{s_r+1},t_{s_r+1},\ldots,t_k\right)$$

$$\times d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_{s_1-1}}^{(i_{s_1-1})}dt_{s_1+1}d\mathbf{w}_{t_{s_1+2}}^{(i_{s_1+2})}\ldots d\mathbf{w}_{t_{s_r-1}}^{(i_{s_r-1})}dt_{s_r+1}d\mathbf{w}_{t_{s_r+2}}^{(i_{s_r+2})}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\Bigr],$$

где $\prod\limits_{l=1}^{0}\stackrel{def}{=}1$; $\sum\limits_{(s_0,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k0}}\stackrel{def}{=}1$; $k=2,\ 3,\ldots$. При этом равенство (59) справедливо с вероятностью 1, если кратный стохастический интеграл в левой части (59) и стохастические интегралы в правой части (59) существуют.

**Лемма 4** *Пусть условия* (BI)-(BIII) *выполнены. Тогда*

$$
\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_2}\Phi(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\right|^{2n}\right\}\le
$$

$$
\le C_{nk}\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_2}\Phi^{2n}(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k, \tag{60}
$$

*где* $C_{nk}<\infty,\ n=1,\ 2,\ldots$ .

**Доказательство:** Очевидно, что если $\left(\xi_\tau^{(l)}\right)^n\in\mathcal{M}_2([t,T])$, где

$$
\xi_\tau^{(l)}=\int\limits_t^\tau\ldots\int\limits_t^{t_2}\Phi(t_1,\ldots,t_{l-1},\tau,t_{l+1},\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_{l-1}}^{(i_{l-1})};\ l=2,\ 3,\ldots,k,
$$

то согласно оценкам (12), (13) получим (60). Рассмотрим $\xi_\tau^{(2)}$. Ясно, что $\mathsf{M}\left\{\left(\xi_\tau^{(2)}\right)^{2n}\right\}<\infty$. Для доказательства существования интеграла

$$
\int\limits_t^T\mathsf{M}\left\{\left(\xi_\tau^{(2)}\right)^{2n}\right\}d\tau
$$

докажем непрерывность функции $\mathsf{M}\left\{\left(\xi_\tau^{(2)}\right)^{2n}\right\}$. Поскольку

$$
\left|\mathsf{M}\left\{\left(\xi_\tau^{(2)}\right)^{2n}\right\}-\mathsf{M}\left\{\left(\xi_\theta^{(2)}\right)^{2n}\right\}\right|=\left|\mathsf{M}\left\{\left(\xi_\tau^{(2)}-\xi_\theta^{(2)}+\xi_\theta^{(2)}\right)^{2n}\right\}-\mathsf{M}\left\{\left(\xi_\theta^{(2)}\right)^{2n}\right\}\right|=
$$

$$
=\left|\sum_{j=0}^{2n-1}C_{2n}^j\mathsf{M}\left\{\left(\xi_\tau^{(2)}-\xi_\theta^{(2)}\right)^{2n-j}\left(\xi_\theta^{(2)}\right)^j\right\}\right|\le
$$

$$
\le\sum_{j=0}^{2n-1}C_{2n}^j\left(\mathsf{M}\left\{\left(\xi_\tau^{(2)}-\xi_\theta^{(2)}\right)^{2n}\right\}\right)^{\frac{2n-j}{2n}}\left(\mathsf{M}\left\{\left(\xi_\theta^{(2)}\right)^{2n}\right\}\right)^{\frac{j}{2n}} \tag{61}
$$

и

$$
\mathsf{M}\left\{\left(\xi_\tau^{(2)}-\xi_\theta^{(2)}\right)^{2n}\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_t^\tau\left(\Phi(t_1,\tau,t_3,\ldots,t_k)-\Phi(t_1,\theta,t_3,\ldots,t_k)\right)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}+\right.\right.
$$

$$+\int\limits_{\theta}^{\tau}\Phi(t_1,\theta,t_3,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\Biggr)^{2n}\Biggr\}\le$$

$$\le C_n\left[\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t}^{\tau}\left(\Phi(t_1,\tau,t_3,\ldots,t_k)-\Phi(t_1,\theta,t_3,\ldots,t_k)\right)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\right)^{2n}\right\}+\right.$$

$$\left.+\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{\theta}^{\tau}\Phi(t_1,\theta,t_3,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\right)^{2n}\right\}\right]\le$$

$$\le C_n'\left[\int\limits_{t}^{\tau}\left(\Phi(t_1,\tau,t_3,\ldots,t_k)-\Phi(t_1,\theta,t_3,\ldots,t_k)\right)^{2n}dt_1+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\theta}^{\tau}\Phi^{2n}(t_1,\theta,t_3,\ldots,t_k)dt_1\right]\to 0 \text{ при } \tau\to\theta,$$

где $C_n, C_n' < \infty$; $C_n^m$ – биномиальный коэффициент, то $\mathsf{M}\left\{\left(\xi_\tau^{(2)}\right)^{2n}\right\}$ – непрерывна. Таким образом $\left(\xi_\tau^{(2)}\right)^n\in\mathcal{M}_2([t,T])$. Предположим, что $\left(\xi_\tau^{(l)}\right)^n\in\mathcal{M}_2([t,T])$, где $l=2,\ 3,\ldots,k-1$ и рассмотрим $\xi_\tau^{(k)}=\int\limits_t^\tau\xi_s^{(k-1)}d\mathbf{w}_s^{(i_k)}$. По предположению $\left(\xi_\tau^{(k-1)}\right)^n\in\mathcal{M}_2([t,T])$, т.е. $\left(\xi_\tau^{(k)}\right)^n\le C_n''\int\limits_t^T\mathsf{M}\left\{\left(\xi_s^{(k-1)}\right)^{2n}\right\}ds<\infty$; $C_n''<\infty$. Кроме этого по предположению получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_t^\tau\ldots\int\limits_t^{t_2}\Phi(t_1,\ldots,t_{k-2},\tau,t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_{k-2}}^{(i_{k-2})}\right|^{2n}\right\}\le$$

$$\le C_{n,k-1}\int\limits_t^\tau\ldots\int\limits_t^{t_2}\Phi^{2n}(t_1,\ldots,t_{k-2},\tau,t_k)dt_1\ldots dt_{k-2}. \qquad (62)$$

Далее используя (62) и предположение индукции имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\xi_\tau^{(k)}-\xi_\theta^{(k)}\right)^{2n}\right\}=$$

$$= \mathsf{M}\Biggl\{\Biggl(\int\limits_t^{\tau}\ldots\int\limits_t^{t_2}\left(\Phi(t_1,\ldots,t_{k-1},\tau)-\Phi(t_1,\ldots,t_{k-1},\theta)\right)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})}+$$

$$+\int\limits_\theta^{\tau}\int\limits_t^{t_{k-1}}\ldots\int\limits_t^{t_2}\Phi(t_1,\ldots,t_{k-1},\theta)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_{k-2}}^{(i_{k-2})}d\mathbf{w}_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})}\Biggr)^{2n}\Biggr\}\le$$

$$\le C'_{nk}\Biggl(\int\limits_t^{\tau}\ldots\int\limits_t^{t_2}\left(\Phi(t_1,\ldots,t_{k-1},\tau)-\Phi(t_1,\ldots,t_{k-1},\theta)\right)^{2n}dt_1\ldots dt_{k-1}+$$

$$+\int\limits_\theta^{\tau}\int\limits_t^{t_{k-1}}\ldots\int\limits_t^{t_2}\Phi^{2n}(t_1,\ldots,t_{k-1},\theta)dt_1\ldots dt_{k-2}dt_{k-1}\Biggr)\to 0 \text{ при } \tau\to\theta;\ C'_{nk}<\infty.$$

Таким образом заменяя $\xi_\tau^{(2)}$ на $\xi_\tau^{(k)}$ в (61) получаем, что функция $\mathsf{M}\left\{\left(\xi_\tau^{(k)}\right)^{2n}\right\}$ непрерывна, т.е. $\int\limits_t^T\mathsf{M}\left\{\left(\xi_\tau^{(k)}\right)^{2n}\right\}d\tau<\infty$ и следовательно $\left(\xi_\tau^{(k)}\right)^n\in\mathcal{M}_2([t,T])$. Лемма доказана. □

Используя неравенство Минковского и лемму 4 получаем из (59) следующие оценки:

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(J[\Phi]_{T,t}^{(k)}\right)^{2n}\right\}\right)^{\frac{1}{2n}}\le\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}\prod_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_{l+1}}\neq 0\}}\left(\mathsf{M}\left\{\left(I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1\ldots s_r}\right)^{2n}\right\}\right)^{\frac{1}{2n}},\tag{63}$$

где

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1\ldots s_r}\right)^{2n}\right\}\right)^{\frac{1}{2n}}\le$$

$$\le C_{nk}^{s_1\ldots s_r}\sum_{\prod\limits_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{t_{s_l},t_{s_{l+1}}}(t_1,\ldots,t_k)^*}\Biggl[\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_{s_r+3}}\int\limits_t^{t_{s_r+2}}\int\limits_t^{t_{s_r}}\ldots\int\limits_t^{t_{s_1+3}}\int\limits_t^{t_{s_1+2}}\int\limits_t^{t_{s_1}}\ldots\int\limits_t^{t_2}$$

$$\times\Phi^{2n}\left(t_1,\ldots,t_{s_1-1},t_{s_1+1},t_{s_1+1},\ldots,t_{s_r-1},t_{s_r+1},t_{s_r+1},\ldots,t_k\right)$$

$$\times dt_1\ldots dt_{s_1-1}dt_{s_1+1}dt_{s_1+2}\ldots dt_{s_r-1}dt_{s_r+1}dt_{s_r+2}\ldots dt_k\Biggr]^{\frac{1}{2n}},\tag{64}$$

где $\sum\limits_{\prod\limits_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{t_{s_l},t_{s_{l+1}}}(t_1,\ldots,t_k)^*}$ – сумма по перестановкам $\prod\limits_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{t_{s_l},t_{s_{l+1}}}(t_1,\ldots,t_k)$ в величинах

$$\Phi^{2n}\left(t_1,\ldots,t_{s_1-1},t_{s_1+1},t_{s_1+1},\ldots,t_{s_r-1},t_{s_r+1},t_{s_r+1},\ldots,t_k\right)$$
$$\times dt_1\ldots dt_{s_1-1}dt_{s_1+1}dt_{s_1+2}\ldots dt_{s_r-1}dt_{s_r+1}dt_{s_r+2}\ldots dt_k;$$

$C_{nk}^{s_1\ldots s_r}<\infty$.

Докажем следующую лемму.

**Лемма 5** *В условиях теоремы 1 с вероятностью 1 справедливо равенство:*

$$\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^T\mathcal{B}_{k-1}^{\pm}\left\{K(t_1,\ldots,t_k)\right\}d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}=J_{T,t}^{*(k)}. \tag{65}$$

**Доказательство:** Нетрудно видеть, что оператор $\mathcal{B}_{k-1}^{\pm}\{\cdot\}$ в силу своего определения может быть представлен в виде:

$$\mathcal{B}_{k-1}^{\pm}\{\cdot\}=\sum_{r=0}^{k-1}\frac{1}{2^r}\sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1\\ s_r>\ldots>s_1}}^{k-1}\mathcal{A}_{s_r}^{\pm}\ldots\mathcal{A}_{s_1}^{\pm}\left\{\cdot\right\}, \tag{66}$$

где $\sum\limits_{\substack{s_0,\ldots,s_1=1\\ s_0>\ldots>s_1}}^{k-1}\mathcal{A}_{s_0}^{\pm}\ldots\mathcal{A}_{s_1}^{\pm}\left\{\cdot\right\}\stackrel{def}{=}\cdot$; $k=2,\ 3,\ldots$. Подставляя (66) в (65) и используя лемму 3 и замечание 5 нетрудно увидеть, что справедливо с вероятностью 1 равенство:

$$\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^T\mathcal{B}_{k-1}^{\pm}\left\{K(t_1,\ldots,t_k)\right\}d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}=$$

$$=J_{T,t}^{(k)}+\sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{2^r}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}J_{T,t}^{(k)s_r\ldots s_1}\prod_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{\{i_{s_l}=i_{s_l+1}\neq 0\}},$$

из которого согласно теореме 1 вытекает утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$.

**Теорема 4** *Пусть функция* $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ *такова, что подынтегральные функции во всех повторных стохастических интегралах* $I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1\ldots s_r}$

*в правой части (59) удовлетворяют условиям* (BI)-(BIII) *в областях интегрирования этих интегралов. Тогда справедливо с вероятностью 1 равенство:*

$$\int \ldots \int_{\Gamma_k} \Phi(t_1, \ldots, t_k) d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} = 0. \tag{67}$$

**Доказательство:** Предположим сначала, что $\Phi(t_1, \ldots, t_k) \equiv 1$. Тогда интегральная сумма интеграла

$$\int \ldots \int_{\Gamma_k} \Phi(t_1, \ldots, t_k) d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}$$

может быть представлена в следующем виде:

$$\left(\Delta\mathbf{w}_{\tau_0}^{(i_1)} + \sum_{j_1=1}^{N-2} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} + \Delta\mathbf{w}_{\tau_{N-1}}^{(i_1)}\right) \ldots \left(\Delta\mathbf{w}_{\tau_0}^{(i_k)} + \sum_{j_k=1}^{N-2} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)} + \Delta\mathbf{w}_{\tau_{N-1}}^{(i_k)}\right) -$$

$$- \sum_{j_1=1}^{N-2} \ldots \sum_{j_k=1}^{N-2} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \ldots \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}.$$

Нетрудно видеть, что это выражение состоит из конечной суммы случайных величин $\alpha_p^N \beta_{k-p}^N$, где

$$\alpha_p^N = \sum_{s_1=1}^{N-2} \ldots \sum_{s_p=1}^{N-2} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{s_1}}^{(r_1)} \ldots \Delta\mathbf{w}_{\tau_{s_p}}^{(r_p)}, \quad \beta_{k-p}^N = \prod_{l=1}^{k-p} \left(\Delta\mathbf{w}_{\tau_0}^{(r_{p+l})} + \Delta\mathbf{w}_{\tau_{N-1}}^{(r_{p+l})}\right),$$

где $\alpha_0^N \stackrel{def}{=} 1$; $\{r_1, \ldots, r_k\} = \{i_1, \ldots, i_k\}$; $p = 0,\ 1, \ldots, k-1$; $k-p = 1, \ldots, k$; $i_1, \ldots, i_k = 0,\ 1, \ldots, m$ и при этом $\mathsf{M}\left\{\left(\alpha_p^N\right)^2\right\} < \infty$. Далее используя неравенство Минковского и независимость случайных величин $\alpha_p^N$ и $\beta_{k-p}^N$ нетрудно показать, что

$$\lim_{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N \to \infty}} \mathsf{M}\left\{\left(\left\{\sum_{j_1=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_k=0}^{N-1} - \sum_{j_1=1}^{N-2} \ldots \sum_{j_k=1}^{N-2}\right\} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \ldots \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}\right)^2\right\} = 0,$$

откуда следует утверждение теоремы при $\Phi(t_1, \ldots, t_k) \equiv 1$. Если же функция $\Phi(t_1, \ldots, t_k)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей условиям теоремы 4, то очевидно доказательство проводится аналогично случаю $\Phi(t_1, \ldots, t_k) \equiv 1$. Теорема доказана. $\square$.

Таким образом, поскольку $\mathcal{B}^{\pm}_{k-1}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}$ согласно (34), (66) удовлетворяет условиям теоремы 4, то согласно лемме 5, теоремам 3 и 4 с вероятностью 1 имеем:

$$J^{*(k)}_{T,t}=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^T\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)d\mathbf{w}^{(i_k)}_{t_k}\ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_1}, \tag{68}$$

где исключение границы $\Gamma_k$ гиперкуба $[t,T]^k$ из области интегрирования интеграла $J^{*(k)}_{T,t}$ не меняет с вероятностью 1 его величины.

**Лемма 6** *Пусть $\varphi_i(t)$; $i=1,\ldots,k$ – непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t,T]$ функции. Тогда с вероятностью 1 справедливо равенство:*

$$\prod_{l=1}^{k}\int\limits_t^T\varphi_l(s)d\mathbf{w}^{(i_l)}_s=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^T\prod_{l=1}^{k}\varphi_l(t_l)d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_1}\ldots d\mathbf{w}^{(i_k)}_{t_k}\stackrel{def}{=}I^{(k)}_{T,t}. \tag{69}$$

**Доказательство:** Рассмотрим сначала случай, когда $\mathbf{w}^{(i_l)}_{t_l}=\mathbf{f}^{(i_l)}_{t_l}$; $l=1,\ldots,k$. По определению 1 имеем:

$$I^{(k)}_{T,t}\stackrel{def}{=}\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\prod_{l=1}^{k}J^l_N,$$

где $J^l_N\stackrel{def}{=}\sum\limits_{j=0}^{N-1}\varphi_l(\tau_j)\Delta\mathbf{f}^{(i_l)}_{\tau_j}$. Пусть $J^l=\int\limits_t^T\varphi_l(s)d\mathbf{f}^{(i_l)}_s$. Покажем, что с вероятностью 1

$$\underset{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}{\text{l.i.m.}}\prod_{l=1}^{k}J^l_N=\prod_{l=1}^{k}J^l. \tag{70}$$

Нетрудно видеть, что с вероятностью 1 справедливо представление:

$$\prod_{l=1}^{k}J^l_N-\prod_{l=1}^{k}J^l=\sum_{l=1}^{k}\left(\prod_{g=1}^{l-1}J^g\right)\left(J^l_N-J^l\right)\left(\prod_{g=l+1}^{k}J^g_N\right).$$

Поэтому в силу неравенств Минковского и Коши-Буняковского имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\prod_{l=1}^{k}J^l_N-\prod_{l=1}^{k}J^l\right)^2\right\}\le\left(\sum_{l=1}^{k}\left(\mathsf{M}\left\{\left(\prod_{g=1}^{l-1}J^g\right)^8\right\}\right)^{\frac{1}{8}}\times\right.$$

$$\times\left(\mathsf{M}\left\{\left(\prod_{g=l+1}^{k}J_N^g\right)^8\right\}\right)^{\frac{1}{8}}\left(\mathsf{M}\left\{\left(J_N^l-J^l\right)^4\right\}\right)^{\frac{1}{4}}\Biggr)^2. \tag{71}$$

Поскольку случайные величины $J^l$ и $J_N^l$ гауссовские и имеют конечную дисперсию, то $\mathsf{M}\left\{\left(J^l\right)^n\right\}<\infty$, $\mathsf{M}\left\{\left(J_N^l\right)^n\right\}<\infty$ для любого конечного $n$. Поэтому из (71) с помощью неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$\sqrt{\mathsf{M}\left\{\left(\prod_{l=1}^{k}J_N^l-\prod_{l=1}^{k}J^l\right)^2\right\}}\le C_k\sum_{l=1}^{k}\left(\mathsf{M}\left\{\left(J_N^l-J^l\right)^4\right\}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{72}$$

где $C_k=const<\infty$. Представим $J_N^l-J^l$ в виде:

$$J_N^l-J^l=\sum_{g=0}^{N-1}\zeta_g^l, \tag{73}$$

где $\zeta_g^l=\int\limits_{\tau_g}^{\tau_{g+1}}\left(\varphi_l(\tau_g)-\varphi_l(s)\right)d\mathbf{f}_s^{(i_l)}$. Поскольку случайные величины $\zeta_g^l$ независимы при различных $g$, то нетрудно показать [10], что

$$\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j=0}^{N-1}\zeta_j^l\right)^4\right\}=\sum_{j=0}^{N-1}\mathsf{M}\left\{\left(\zeta_j^l\right)^4\right\}+6\sum_{j=0}^{N-1}\mathsf{M}\left\{\left(\zeta_j^l\right)^2\right\}\sum_{q=0}^{j-1}\mathsf{M}\left\{\left(\zeta_q^l\right)^2\right\}. \tag{74}$$

В силу гауссовости $\zeta_j^l$ имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\zeta_j^l\right)^2\right\}=\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\left(\varphi_l(\tau_j)-\varphi_l(s)\right)^2ds,\ \mathsf{M}\left\{\left(\zeta_j^l\right)^4\right\}=3\left(\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\left(\varphi_l(\tau_j)-\varphi_l(s)\right)^2ds\right)^2.$$

После подстановки этих соотношений в (74), с учетом непрерывной дифференцируемости функций $\varphi_i(s)$ получаем, что правая часть (74) имеет нулевой предел при $\Delta_N\to 0,\ N\to\infty$. Используя этот факт, а также (70), (71), (72) и (73) приходим к утверждению леммы при $\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)}=\mathbf{f}_{t_l}^{(i_l)}$, $l=1,\ldots,k$. Нетрудно видеть, что если при некоторых $l\in\{1,\ldots,k\}:\ \mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)}=t_l$, то доказательство леммы проводится аналогично. Лемма доказана. $\square$.

В силу леммы 6 соотношение (68) может быть с вероятностью 1 переписано в виде:

$$J_{T,t}^{*(k)} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \int\limits_t^T \phi_{j_l}(s) d\mathbf{w}_s^{(i_l)} + J[R_{p_1\ldots p_k}]_{T,t}^{(k)}, \qquad (75)$$

где

$$J[R_{p_1\ldots p_k}]_{T,t}^{(k)} = \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^T R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \qquad (76)$$

$$R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k) = \left\{ \sum_{j_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{j_k=0}^{\infty} - \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} \right\} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l). \qquad (77)$$

При этом согласно теореме 3 в любой внутренней точке $(t_1,\ldots,t_k)$ гиперкуба $[t,T]^k$

$$\lim_{p_1\to\infty} \ldots \lim_{p_k\to\infty} R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k) = 0, \qquad (78)$$

а в любой граничной точке гиперкуба

$$\lim_{p_1\to\infty} \ldots \lim_{p_k\to\infty} R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k) < \infty. \qquad (79)$$

**Замечание 6.** *Кроме этого (78) выполняется согласно теореме 3 равномерно в областях непрерывности функции* $R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k)$.

Докажем следующую лемму.

**Лемма 7** *В условиях теоремы 3 справедливо равенство:*

$$\lim_{p_1\to\infty} \ldots \lim_{p_k\to\infty} \mathsf{M}\left\{ \left( J[R_{p_1\ldots p_k}]_{T,t}^{(k)} \right)^{2n} \right\} = 0, \qquad (80)$$

*где* $n = 1,\ 2,\ldots$ .

**Доказательство:** Согласно (35), (38), (66) и (77) имеем:

$$R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k) = \mathcal{B}_{k-1}^{\pm}\{K(t_1,\ldots,t_k)\} - \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l)$$

$$= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{2^r} \sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1 \\ s_r>\ldots>s_1}}^{k-1} \mathcal{A}_{s_r}^{\pm} \ldots \mathcal{A}_{s_1}^{\pm} \{K(t_1,\ldots,t_k)\} - \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l)$$

$$= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{2^r} \sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1\\ s_r>\ldots>s_1}}^{k-1} \prod_{l=1}^{r} \mathbf{1}_{\{t_{s_l}=t_{s_l+1}\}} \prod_{l=1}^{k} \psi_l(t_l) \prod_{\substack{l=1\\ l\neq s_1,\ldots,s_r}}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}} -$$

$$- \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l). \qquad (81)$$

Согласно (81) функция $R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k)$ непрерывно дифференцируема в областях интегрирования повторных интегралов в правой части (59), ограничена на границах этих областей и непрерывно продолжима на границы этих областей. Тогда подставляя функцию $R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k)$ вместо $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ в (63) и (64) и осуществляя предельный переход под знаками интегралов в (63) и (64) получим с учетом (78), (79) и замечания 6 требуемое. Лемма доказана. $\square$

Равенства (75), (80) завершают доказательство теоремы 2. Теорема 2 доказана. $\square$.

Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ – полная в пространстве $L_2([-1,1])$ ортонормированная тригонометрическая система или система полиномов Лежандра. Сформулируем следующую теорему о сходимости ряда Фурье по системе функций $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$.

**Теорема 5** *Пусть $f(x)$ – ограниченная на промежутке $[-1,\ 1]$ функция, которая является кусочно-гладкой на открытом интервале $(-1,\ 1)$. Тогда ряд Фурье $\sum\limits_{j=0}^{\infty} C_j\phi_j(x)$ с коэффициентами $C_j = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\phi_j(x)dx$ сходится во всякой внутренней точке $x$ промежутка $[-1,\ 1]$ к величине $\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)$ и равномерно к $f(x)$ в любом замкнутом интервале непрерывности $f(x)$. При этом ряд Фурье по полиномам Лежандра сходится в точках $x=-1$ и $x=1$ к $f(-1+0)$ и $f(1-0)$ соответственно, а тригонометрический ряд Фурье сходится в точках $x=-1$ и $x=1$ в случае периодического продолжения функции $f(x)$ к $\frac{1}{2}\left(f(-1+0)+f(1-0)\right)$.*

Теорема 5 установлена при более слабых условиях для тригонометрического ряда Фурье, в частности, в [11], а для ряда Фурье по полиномам Лежандра в [12].

**Замечание 7** *Результат теоремы 5 легко обобщается на случай произвольного промежутка $[t,T]$, где $-\infty < t < T < \infty$.*

Из теоремы 5 и замечания 7 следует, что полные ортонормированные в пространстве $L_2([t,T])$ тригонометрическая и полиномиальная системы функций удовлетворяют условию 2 теоремы 2. Поэтому повторные стохастические интегралы Стратоновича $J_{T,t}^{*(k)}$ могут быть разложены с вероятностью 1, в условиях теоремы 2, в кратный ряд вида (37) с использованием полных ортонормированных в пространстве $L_2([t,T])$ тригонометрической или полиномиальной систем функций. В дальнейшем будут широко использоваться разложения вида (37) именно по этим двум системам функций.

## 3.2. Общие соотношения для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича

Идея аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича $J_{T,t}^{*(k)}$ заключается в усечении кратных рядов, в которые они разлагаются согласно теореме 2 исходя из какого-либо критерия на точность аппроксимации, например, исходя из среднеквадратического критерия.

Пусть $J_{T,t}^{*(k)q}$—аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича $J_{T,t}^{*(k)}$, которая имеет вид

$$J_{T,t}^{*(k)q}=\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{q} C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}, \tag{82}$$

где $q<\infty$ и удовлетворяет следующему условию на среднеквадратическую точность аппроксимации:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J_{T,t}^{*(k)q}-J_{T,t}^{*(k)}\right)^2\right\}\le\varepsilon, \tag{83}$$

где $\varepsilon$ – заданное малое положительное число.

Формула (82) представляет собой общую формулу для аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича $J_{T,t}^{*(k)}$ произвольной кратности $k$.

Сформулируем следующее утверждение.

**Лемма 8** *Пусть $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$ и попарно различны. Тогда среднеквадратическая погрешность аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича $J_{T,t}^{*(k)}$ определяется формулой:*

$$\mathsf{M}\left\{\left(J_{T,t}^{*(k)q}-J_{T,t}^{*(k)}\right)^2\right\}=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^T K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k-\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{q}C_{j_k\ldots j_1}^2. \tag{84}$$

**Доказательство:** Из теоремы 1 следует, что для попарно различных $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$ справедлива с вероятностью 1 формула:

$$J^{*(k)}_{T,t}=J^{(k)}_{T,t}.$$

Поэтому в этом случае

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{*(k)}_{T,t}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(J^{(k)}_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_t^T\psi_k^2(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1^2(t_1)dt_1\ldots dt_k=$$

$$=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^T K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k. \tag{85}$$

Далее имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{*(k)}_{T,t}-J^{*(k)q}_{T,t}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(J^{*(k)}_{T,t}\right)^2\right\}-2\mathsf{M}\left\{J^{*(k)}_{T,t}J^{*(k)q}_{T,t}\right\}+\mathsf{M}\left\{\left(J^{*(k)q}_{T,t}\right)^2\right\}. \tag{86}$$

Нетрудно видеть, что поскольку согласно теореме 2 с вероятностью 1

$$J^{*(k)}_{T,t}=\left\{\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty}-\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{q}\right\}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\zeta^{(i_l)}_{(j_l)T,t}+J^{*(k)q}_{T,t},$$

то в условиях леммы

$$\mathsf{M}\left\{J^{*(k)}_{T,t}J^{*(k)q}_{T,t}\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(J^{*(k)q}_{T,t}\right)^2\right\}. \tag{87}$$

Подставляя (85) и (87) в (86) получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{*(k)}_{T,t}-J^{*(k)q}_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^T K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k-\mathsf{M}\left\{\left(J^{*(k)q}_{T,t}\right)^2\right\}. \tag{88}$$

Учитывая (88) и соотношение

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{*(k)q}_{T,t}\right)^2\right\}=\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{q}C^2_{j_k\ldots j_1},$$

которое справедливо для попарно различных $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$, приходим к утверждению леммы 8. Лемма доказана. $\square$.

Предположим теперь, что $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$ и не являются попарно различными. В этом случае вычисление математического ожидания $\mathsf{M}\left\{\left(J_{T,t}^{*(k)q}-J_{T,t}^{*(k)}\right)^2\right\}$ существенно сложнее, чем в случае попарно различных $i_l$; $l=1,\ldots,k$. Для преодоления этой трудности докажем следующую лемму.

**Лемма 9** *Пусть $f_t\in\Re^1$ – стандартный винеровский процесс, а $\phi_j(\tau)$; $j=1,\ 2,\ldots,2k$ – непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t,T]$ функции. Тогда*

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{j=1}^{2k}\int\limits_t^T\phi_j(\tau)df_\tau\right\}=\sum_{\substack{\{(r_1,r_2),\ldots,(r_{2k-1},r_{2k})\}\\ r_i\in\{1,\ldots,2k\};\ r_i\ne r_j(i\ne j)}}\prod_{j=1}^{k}\int\limits_t^T\phi_{r_{2j}}(\tau)\phi_{r_{2j-1}}(\tau)d\tau, \tag{89}$$

*где $\sum\limits_{\substack{\{(r_1,r_2),\ldots,(r_{2k-1},r_{2k})\}\\ r_i\in\{1,\ldots,2k\};\ r_i\ne r_j(i\ne j)}}$ означает сумму по всем различным наборам вида*

$$\{(r_1,r_2),\ldots,(r_{2k-1},r_{2k})\}$$

*из $k$ двоек чисел $r_i\in\{1,\ldots,2k\}$; $r_i\ne r_j(i\ne j)$. При этом $(r_i,r_{i+1})\stackrel{def}{=}(r_{i+1},r_i)$; $i=1,\ldots,2k-1$ и наборы, состоящие из одних и тех же двоек, но расположенных в различном порядке считаются тождественными.*

**Доказательство:** Пусть $J_N^l\stackrel{def}{=}\sum\limits_{j=0}^{N-1}\varphi_l(\tau_j)\Delta f_{\tau_j}$, $J^l=\int\limits_t^T\varphi_l(s)df_s$; $\Delta f_{\tau_j}=f_{\tau_{j+1}}-f_{\tau_j}$; $\{\tau_j\}_{j=0}^N$-такое разбиение промежутка $[t,T]$, как в (3).

Из (70) следует, что

$$\lim_{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}\mathsf{M}\left\{\prod_{g=1}^{2k}J_N^l\right\}=\mathsf{M}\left\{\prod_{g=1}^{2k}J^l\right\}. \tag{90}$$

Используя соотношение (58) имеем:

$$\lim_{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}\mathsf{M}\left\{\prod_{g=1}^{2k}J_N^l\right\}=\lim_{\substack{\Delta_N\to 0\\ N\to\infty}}\mathsf{M}\left\{\prod_{j=1}^{2k}\sum_{l_j=0}^{N-1}\phi_j(\tau_{l_j})\Delta f_{\tau_{l_j}}\right\}$$

$$
= \lim_{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N\to\infty}} \mathsf{M}\left\{\sum_{r=0}^{2k-1}\ \sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1\\ s_r>\ldots>s_1}}^{2k-1} C^{+}_{s_r}\ldots C^{+}_{s_1}\left\{\sum_{j_{2k}=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\ \sum_{(j_1,\ldots,j_{2k})}\ \prod_{q=1}^{2k}\phi_q(\tau_{j_q})\Delta f_{\tau_{j_q}}\right\}\right\}
$$

$$
= \lim_{\substack{\Delta_N \to 0 \\ N\to\infty}} \sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\left(\sum_{(j_1,j_1,\ldots,j_k,j_k)}\ \prod_{q=1}^{k}\phi_{2q}(\tau_{j_q})\phi_{2q-1}(\tau_{j_q})\right)\Delta\tau_{j_1}\ldots\Delta\tau_{j_k}
$$

$$
= \int\limits_t^T\int\limits_t^{t_k}\ldots\int\limits_t^{t_2}\left(\sum_{(t_1,t_1,\ldots,t_k,t_k)}\ \prod_{q=1}^{k}\phi_{2q}(t_q)\phi_{2q-1}(t_q)\right)dt_1\ldots dt_{k-1}dt_k
$$

$$
= \int\limits_t^T\int\limits_t^{t_k}\ldots\int\limits_t^{t_2}\left(\sum_{\substack{((r_1,r_2),\ldots,(r_{2k-1},r_{2k}))\\ r_i\in\{1,\ldots,2k\};\ r_i\ne r_j (i\ne j)}}\ \prod_{q=1}^{k}\phi_{r_{2q}}(t_q)\phi_{r_{2q-1}}(t_q)\right)dt_1\ldots dt_{k-1}dt_k
$$

$$
= \int\limits_t^T\int\limits_t^{T}\ldots\int\limits_t^{T}\left(\sum_{\substack{\{(r_1,r_2),\ldots,(r_{2k-1},r_{2k})\}\\ r_i\in\{1,\ldots,2k\};\ r_i\ne r_j (i\ne j)}}\ \prod_{q=1}^{k}\phi_{r_{2q}}(t_q)\phi_{r_{2q-1}}(t_q)\right)dt_1\ldots dt_{k-1}dt_k
$$

$$
= \sum_{\substack{\{(r_1,r_2),\ldots,(r_{2k-1},r_{2k})\}\\ r_i\in\{1,\ldots,2k\};\ r_i\ne r_j (i\ne j)}}\ \prod_{q=1}^{k}\int\limits_t^T\phi_{r_{2q}}(\tau)\phi_{r_{2q-1}}(\tau)d\tau, \tag{91}
$$

где $\sum\limits_{(x_1,\ldots,x_k)}$ – сумма по перестановкам $(x_1,\ldots,x_k)$. Соотношения (90),(91) доказывают лемму. Лемма доказана. $\square$.

Нетрудно проверить, что из (89) при $k=1,\ 2$ следуют равенства:

$$
\mathsf{M}\left\{\prod_{l=1}^{2}\xi_l\right\}=a_{12},\ \ \mathsf{M}\left\{\prod_{l=1}^{4}\xi_l\right\}=a_{12}a_{34}+a_{32}a_{14}+a_{13}a_{24},
$$

где $\xi_l \stackrel{def}{=} \int\limits_t^T\phi_l(\tau)df_\tau$, $a_{lk} \stackrel{def}{=} \int\limits_t^T\phi_l(\tau)\phi_k(\tau)d\tau.$

Из леммы 9 вытекает следующее утверждение.

**Лемма 10** *Пусть $f_t$ – стандартный скалярный винеровский процесс, а $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$ – полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2([t,T])$. Тогда*

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{i=1}^{2k}\int\limits_t^T \phi_{r_i}(\tau)df_\tau\right\}=\begin{cases}(2g+1)!!\ \text{при}\ \{r_1,\ldots,r_{2k}\}=\{q_1,q_1,\ldots,q_k,q_k\}\\ \qquad\qquad 0\ \text{в противном случае}\end{cases},$$

*где $g$ – количество совпадений чисел в наборе $\{q_1,\ldots,q_k\}$; $g\ge 0$; $r_i\in\mathcal{N}\bigcup\{0\}$; $r_i\ne r_j (i\ne j)$; $i,j=1,\ldots,2k$; $\{x_1,\ldots,x_k\}$ – неупорядоченный набор чисел $x_1,\ldots,x_k$.*

## 3.3. Аппроксимация повторных стохастических интегралов с помощью тригонометрической системы функций

Согласно теореме 5 полная ортонормированная тригонометрическая система функций в пространстве $L_2([t,T])$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Рассмотрим аппроксимации некоторых повторных стохастических интегралов Стратоновича вида (9), полученные согласно теореме 2 и соотношению (82) с использованием тригонометрической системы:

$$I_{0_{T,t}}^{*(i_1)}=\sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)},\tag{92}$$

$$I_{1_{T,t}}^{*(i_1)q}=-\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right],\tag{93}$$

$$I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}=\frac{1}{2}(T-t)\Biggl[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\Bigl\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+$$

$$+\sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\Bigr\}\Biggr],\tag{94}$$

$$I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)q}=(T-t)^{\frac{3}{2}}\Biggl(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{\pi r}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi^2r^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\Biggr]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{q}\Biggl[\frac{1}{r^2-l^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_3)}\right\}+$$

$$+\left(\frac{1}{rl}-\frac{r}{(r^2-l^2)l}\right)\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}-\frac{r}{(l^2-r^2)l}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-$$

$$-\frac{1}{rl}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\Biggr]+$$

$$+\sum_{r=1}^{q}\Biggl[\frac{1}{4\pi r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}+\right.$$

$$\left.+\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{8\pi^2r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-6\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+\right.$$

$$\left.+3\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}-2\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\Biggr]+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2}\Biggl\{\sum_{r,m=1}^{q}\frac{2}{rm}\Bigl[-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+$$

$$+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Bigr]+$$

$$+\sum_{l,m=1}^{q}\frac{1}{m(l+m)}\Bigl[-\zeta_{2(m+l)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\zeta_{2(m+l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-$$

$$-\zeta_{2(m+l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(m+l)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Bigr]+$$

$$+\sum_{m=1}^{q}\sum_{l=m+1}^{q}\frac{1}{m(l-m)}\Bigl[\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-$$

$$-\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Bigr]+$$

$$+\sum_{l=1}^{q}\sum_{m=l+1}^{q}\frac{1}{m(m-l)}\Bigl[-\zeta_{2(m-l)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2(m-l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-$$

$$\left.\left.-\zeta_{2(m-l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}-\zeta_{2(m-l)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Bigr]\right\}\right),\qquad(95)$$

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)q} = (T-t)^2\Biggl(-\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Biggl[-\frac{1}{\pi r}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right\}$$

$$+\frac{1}{\pi^2r^2}\left(-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+2\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right)\Biggr]$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\left[-\frac{k}{(l^2-k^2)l}\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}+\frac{1}{l^2-k^2}\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\right]\Biggr), \tag{96}$$

$$I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)q} = (T-t)^2\Biggl(-\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Biggl[\frac{1}{\pi r}\left\{-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{2}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right\}\right\}$$

$$+\frac{1}{\pi^2r^2}\left(-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{2}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right)\Biggr]$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\left[\left(\frac{k}{(l^2-k^2)l}+\frac{1}{kl}\right)\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}+\frac{1}{l^2-k^2}\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\right]\Biggr), \tag{97}$$

$$I_{2_{T,t}}^{*(i_1)q} = (T-t)^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left(\frac{1}{\pi^2r^2}\zeta_{2r}^{(i_1)}+\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right)\right]. \tag{98}$$

где $\zeta_j^{(i)} = \int\limits_t^T \phi_j(s)d\mathbf{f}_s^{(i)}$, а $\phi_j(s)$ имеет вид:

$$\phi_j(s) = \frac{1}{\sqrt{T-t}}\begin{cases} 1 & \text{при } j=0 \\ \sqrt{2}sin\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r-1 \\ \sqrt{2}cos\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r \end{cases}, \tag{99}$$

где $r=1,\ 2,\ldots,\ i_1,\ i_2,\ i_3=1,\ldots,m.$

Рассмотрим вопрос о среднеквадратической сходимости аппроксимаций (93)-(98). Из соотношений (93)-(98) при $i_1 \neq i_2,\ i_2 \neq i_3,\ i_1 \neq i_3$ непосредственным вычислением получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{1_{T,t}}^{*(i_1)}-I_{1_{T,t}}^{*(i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^3}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right), \tag{100}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{3(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right), \tag{101}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)}-I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)q}\right)^2\right\}=$$

$$=(T-t)^3\left\{\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)+\frac{79}{32\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\pi^4}\left(\sum_{\substack{r,l=1\\ r\neq l}}^{\infty}-\sum_{\substack{r,l=1\\ r\neq l}}^{q}\right)\frac{5l^4+4r^4-3l^2r^2}{r^2l^2(r^2-l^2)^2}\right\}, \tag{102}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{2_{T,t}}^{*(i_1)}-I_{2_{T,t}}^{*(i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^5}{2}\left\{\frac{1}{\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)\right\}, \tag{103}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_1)q}\right)^2\right\}=(T-t)^4\left\{\frac{3}{4\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{25}{32\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\right)+\frac{1}{4\pi^4}\left(\sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{\infty}-\sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{q}\right)\frac{l^2+k^2}{k^2(l^2-k^2)^2}\right\}, \tag{104}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=(T-t)^4\left\{\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)+\right.$$

$$+\frac{25}{32\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\right)+\frac{1}{4\pi^4}\left(\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{\infty}-\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\right)\frac{l^2+k^2}{l^2(l^2-k^2)^2}\Biggr\}. \tag{105}$$

Нетрудно показать, что соотношения (102), (104) и (105) могут быть представлены с помощью леммы 8 в виде:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)}-I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)q}\right)^2\right\}=(T-t)^3\Biggl\{\frac{5}{36}-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-$$

$$-\frac{79}{32\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{4\pi^4}\sum_{\substack{r,l=1\\r\neq l}}^{q}\frac{5l^4+4r^4-3r^2l^2}{r^2l^2\left(r^2-l^2\right)^2}\Biggr\}, \tag{106}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^4}{4}\Biggl\{\frac{2}{9}-\frac{1}{\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-$$

$$-\frac{25}{8\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{\pi^4}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{k^2+l^2}{l^2\left(l^2-k^2\right)^2}\Biggr\}, \tag{107}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^4}{4}\Biggl\{\frac{5}{9}-\frac{3}{\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-$$

$$-\frac{25}{8\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{\pi^4}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{l^2+k^2}{k^2\left(l^2-k^2\right)^2}\Biggr\}. \tag{108}$$

Сопоставляя (106)-(108) и (102), (104), (105) замечаем, что

$$\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{\infty}\frac{l^2+k^2}{k^2\left(l^2-k^2\right)^2}=\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{\infty}\frac{l^2+k^2}{l^2\left(l^2-k^2\right)^2}=\frac{\pi^4}{48}, \tag{109}$$

$$\sum_{\substack{r,l=1\\r\neq l}}^{\infty}\frac{5l^4+4r^4-3r^2l^2}{r^2l^2\left(r^2-l^2\right)^2}=\frac{9\pi^4}{80}.$$

Рассмотрим аппроксимации повторных интегралов $I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)}$, $I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)}$ и условия для выбора числа $q$ с использованием тригонометрической системы функций:

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} = (T-t)^2 \left( -\frac{1}{6}\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[-\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi^2 r^2}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\right)^2\right)\right] +$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\ne l}}^{q}\left[-\frac{k}{(l^2-k^2)l}\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_1)} + \frac{1}{l^2-k^2}\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_1)}\right]\right),$$

$$I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} = (T-t)^2 \left( -\frac{1}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[-\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi^2 r^2}\left(-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\right)^2\right)\right] +$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\ne l}}^{q}\left[\left(\frac{k}{(l^2-k^2)l} + \frac{1}{kl}\right)\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_1)} + \frac{1}{l^2-k^2}\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_1)}\right]\right).$$

С использованием леммы 9 получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q}\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{(T-t)^4}{4}\left[\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right) + \frac{5}{2\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi^4}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{\pi^4}\left(\sum_{\substack{k,l=1\\k\ne l}}^{\infty} - \sum_{\substack{k,l=1\\k\ne l}}^{q}\right)\frac{l^2+k^2}{k^2(l^2-k^2)^2}\right], \qquad (110)$$

Далее с учетом (109) перепишем соотношение (110) в виде:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q}\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q}\right)^2\right\}$$

$$
= \frac{(T-t)^4}{4}\left[\frac{23}{144} - \frac{5}{6\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2} - \frac{5}{2\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4} + \right.
$$

$$
\left. + \frac{1}{\pi^4}\left(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)^2 - \frac{1}{\pi^4}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{l^2+k^2}{k^2(l^2-k^2)^2}\right]. \tag{111}
$$

Рассмотрим теперь аппроксимации повторных стохастических интегралов вида (8) с использованием соотношения (82) и тригонометрической системы. Нетрудно видеть, что аппроксимации $J^{*(i_2 i_1)q}_{(\lambda_2\lambda_1)T,t}$, $J^{*(i_3 i_2 i_1)q}_{(\lambda_3\lambda_2\lambda_1)T,t}$ будут иметь вид (94), (95), причем $\zeta_j^{(i)}$ в (94), (95) будут иметь вид: $\zeta_j^{(i)} = \int\limits_t^T \phi_j(s)d\mathbf{w}_s^{(i)}$, где $\phi_j(s)$ имеют вид (99).

Используя соотношение

$$
\int\limits_t^T \phi_j(s)d\mathbf{w}_s^{(0)} = \begin{cases}\sqrt{T-t} & \text{при } j=0\\ 0 & \text{при } j\neq 0\end{cases},
$$

нетрудно получить из (94), (95) следующее семейство формул:

$$
J^{*}_{(00)T,t} = \frac{1}{2}(T-t)^2,
$$

$$
J^{*(i_2)q}_{(10)T,t} = \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\zeta_0^{(i_2)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right],
$$

$$
J^{*(i_1)q}_{(01)T,t} = \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right],
$$

$$
J^{*}_{(000)T,t} = \frac{1}{6}(T-t)^3,
$$

$$
J^{*(i_1)q}_{(001)T,t} = (T-t)^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left(\frac{1}{\pi^2 r^2}\zeta_{2r}^{(i_1)} + \frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right)\right],
$$

$$
J^{*(i_2)q}_{(010)T,t} = (T-t)^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{\pi^2 r^2}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right],
$$

$$
J_{(100)T,t}^{*(i_3)q}=(T-t)^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_3)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left(\frac{1}{\pi^2r^2}\zeta_{2r}^{(i_3)}-\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\right)\right],
$$

$$
J_{(011)T,t}^{*(i_2i_1)q}=(T-t)^2\Biggl(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Biggl[\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+
$$

$$
+\frac{1}{\pi^2r^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\Biggr]+
$$

$$
+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{q}\left[\frac{1}{r^2-l^2}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}-\frac{r}{(l^2-r^2)l}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\right]+
$$

$$
+\sum_{r=1}^{q}\Biggl[\frac{1}{4\pi r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right\}+
$$

$$
+\frac{1}{8\pi^2r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right\}\Biggr]\Biggr),
$$

$$
J_{(110)T,t}^{*(i_3i_2)q}=(T-t)^2\Biggl(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Biggl[-\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+
$$

$$
+\frac{1}{\pi^2r^2}\left\{-2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\right\}\Biggr]+
$$

$$
+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{q}\left[-\frac{1}{r^2-l^2}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2l}^{(i_3)}+\left(\frac{1}{rl}-\frac{r}{(r^2-l^2)l}\right)\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\right]+
$$

$$
+\sum_{r=1}^{q}\Biggl[\frac{1}{4\pi r}\left\{-\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r}^{(i_3)}+\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right\}+
$$

$$
+\frac{1}{8\pi^2r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right\}\Biggr]\Biggr),
$$

$$
J_{(101)T,t}^{*(i_3i_1)q}=(T-t)^2\Biggl(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}+
$$

$$
+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{\pi r}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}+\right.
$$

$$+\frac{1}{\pi^2 r^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\Bigg]-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\neq l}}^{q}\frac{1}{rl}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}-$$

$$-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{4\pi^2 r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\right\}\Bigg),$$

$$J_{(11)T,t}^{*(i_2i_1)q}=I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)q},\ J_{(111)T,t}^{*(i_3i_2i_1)q}=I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)q},$$

где $I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}$, $I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)q}$ определяются формулами (94), (95); $\zeta_j^{(i)}=\int\limits_t^T\phi_j(s)d\mathbf{f}_s^{(i)}$, а $\phi_j(s)$ имеет вид (99); $i_1,\ i_2,\ i_3=1,\ldots,m$.

## 3.4. Аппроксимация повторных стохастических интегралов с помощью полиномиальной системы функций

Согласно теореме 5 полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([t,T])$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Эта система имеет вид:

$$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty},\ \text{где}\ \phi_j(x)=\sqrt{\frac{2j+1}{T-t}}P_j\left(\left(x-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right),\tag{112}$$

где $P_j(x)$-полином Лежандра. Известно [12], что $P_j(x)$ представим, например, в виде:

$$P_j(x)=\frac{1}{2^j j!}\frac{d^j}{dx^j}\left(x^2-1\right)^j,$$

который именуется формулой Родрига. Отметим некоторые хорошо известные свойства полиномов $P_j(x)$.

$$\frac{dP_{j+1}(x)}{dx}-\frac{dP_{j-1}(x)}{dx}=(2i+1)P_j(x);\ j=1,\ 2,\ldots .$$

$$\int\limits_{-1}^{1}x^kP_j(x)dx=0;\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots,j-1.$$

$$\int\limits_{-1}^{1}P_k(x)P_j(x)dx=\begin{cases}0 & \text{при } k\neq j\\ \frac{2}{2j+1} & \text{при } k=j\end{cases},$$

$$jP_j(x)-(2j-1)xP_{j-1}(x)+(j-1)P_{j-2}(x)=0;\ j=2,\ 3,\ldots .$$

Используя эти свойства и систему функций (112) получим с вероятностью 1, согласно теореме 2, следующие справедливые с вероятностью 1 разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича:

$$I_{0_{T,t}}^{*(i_1)}=\sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{113}$$

$$I_{1_{T,t}}^{*(i_1)}=-\frac{(T-t)^{3/2}}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right), \tag{114}$$

$$I_{2_{T,t}}^{*(i_1)}=\frac{(T-t)^{5/2}}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)}+\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1^{(i_1)}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}\right), \tag{115}$$

$$I_{00_{T,t}}^{*(i_2 i_1)}=\frac{T-t}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i-1}^{(i_1)}\right\}\right], \tag{116}$$

$$I_{01_{T,t}}^{*(i_2 i_1)}=-\frac{(T-t)^2}{4}\left[\frac{4}{3}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}+\frac{2}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_1^{(i_1)}+\frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_2^{(i_1)}-\right.$$

$$-\frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}+\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)}-\right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i-1}^{(i_1)}-\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}+$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}\left((i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}-(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}\right)\right\}\right], \tag{117}$$

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_2 i_1)}=-\frac{(T-t)^2}{4}\left[\frac{2}{3}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}+\frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}-\frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i-1}^{(i_1)}-\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)}+\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}\left((i+1)\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_2)}-(i+2)\zeta_{i+2}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}\right)+$$

$$+\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}\Biggr\}\Biggr], \tag{118}$$

Нетрудно видеть, что разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича, полученные с помощью системы полиномиальных функций существенно проще, чем соответствующие разложения, полученные с помощью тригонометрической системы функций.

Нетрудно показать, что среднеквадратические погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов $I^{*(i_2 i_1)}_{00_{T,t}}$, $I^{*(i_2 i_1)}_{01_{T,t}}$, $I^{*(i_2 i_1)}_{10_{T,t}}$ при $i_1 \neq i_2$ определяются равенствами:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I^{*(i_2 i_1)}_{00_{T,t}} - I^{*(i_2 i_1)q}_{00_{T,t}}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^2}{4}\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{4i^2-1} = \frac{(T-t)^2}{4}\left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right). \tag{119}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I^{*(i_2 i_1)}_{10_{T,t}} - I^{*(i_2 i_1)q}_{10_{T,t}}\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(I^{*(i_2 i_1)}_{01_{T,t}} - I^{*(i_2 i_1)q}_{01_{T,t}}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{(T-t)^4}{16}\sum_{i=q+1}^{\infty}\left(\frac{1}{4i^2-1} + \frac{(i+2)^2+(i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)} + \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2}\right). \tag{120}$$

Вместо равенства (120) можно с помощью леммы 8 записать более удобное соотношение:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I^{*(i_2 i_1)}_{10_{T,t}} - I^{*(i_2 i_1)q}_{10_{T,t}}\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(I^{*(i_2 i_1)}_{01_{T,t}} - I^{*(i_2 i_1)q}_{01_{T,t}}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{(T-t)^4}{16}\left\{\frac{7}{9} - \sum_{i=1}^{q}\left(\frac{1}{4i^2-1} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(i+2)^2+(i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2}\right)\right\}.$$

Рассмотрим аппроксимации следующих повторных стохастических интегралов $I^{*(i_1 i_1)}_{10_{T,t}}$, $I^{*(i_1 i_1)}_{01_{T,t}}$ и выражения для среднеквадратических погрешности этих аппроксимаций, полученные с использованием полиномиальной системы функций:

$$I^{*(i_1 i_1)q}_{01_{T,t}} = -\frac{(T-t)^2}{4}\left[\frac{4}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_2^{(i_1)} + \right.$$

$$+\sum_{i=1}^{q}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}-\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\left(\zeta_i^{(i_1)}\right)^2\right\}\Biggr],$$

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}=-\frac{(T-t)^2}{4}\Biggl[\frac{2}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_1)}-\frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_2^{(i_1)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{q}\left\{-\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}+\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\left(\zeta_i^{(i_1)}\right)^2\right\}\Biggr].$$

Далее с использованием леммы 9 получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{(T-t)^4}{16}\Biggl[\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2}+\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{2}{(2i-1)^2(2i+3)^2}+$$

$$+\left(\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\right)^2\Biggr]\le$$

$$\le\frac{(T-t)^4}{16}\left[\frac{3}{16}\left(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{i^4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right)^2\right].$$

## 4. Метод Г.Н.Мильштейна разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича

Г.Н.Мильштейном в [5] был предложен метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на разложении, так называемого процесса "броуновского моста"в ряд Фурье со случайными коэффициентами.

Рассмотрим процесс "броуновского моста", который имеет вид:

$$\mathbf{f}_t-\frac{t}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta \tag{121}$$

и определен при $t\in[0,\Delta]$, где $\mathbf{f}_t\in\Re^m$ – стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)};\ i=1,\ldots,m$. Рассмотрим справедливое с вероятностью 1 покомпонентное разложение процесса (121) в тригонометрический ряд Фурье:

$$\mathbf{f}_t^{(i)} - \frac{t}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)} = \frac{1}{2}a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(a_{i,r}cos\frac{2\pi rt}{\Delta} + b_{i,r}sin\frac{2\pi rt}{\Delta}\right), \tag{122}$$

где

$$a_{i,r} = \frac{2}{\Delta}\int_0^\Delta \left(\mathbf{f}_s^{(i)} - \frac{s}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)}\right)cos\frac{2\pi rs}{\Delta}ds,\ b_{i,r} = \frac{2}{\Delta}\int_0^\Delta \left(\mathbf{f}_s^{(i)} - \frac{s}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)}\right)sin\frac{2\pi rs}{\Delta}ds,$$

где $r = 0,\ 1, \ldots;\ i = 1, \ldots, m$. Нетрудно показать, что случайные величины $a_{i,r}, b_{i,r}$ – гауссовские и удовлетворяют следующим соотношениям [5], [6]:

$$\mathsf{M}\left\{a_{i,r}b_{i,r}\right\} = \mathsf{M}\left\{a_{i,r}b_{i,k}\right\} = 0, \tag{123}$$

$$\mathsf{M}\left\{a_{i,r}a_{i,k}\right\} = \mathsf{M}\left\{b_{i,r}b_{i,k}\right\} = 0, \tag{124}$$

$$\mathsf{M}\left\{a_{i_1,r}a_{i_2,r}\right\} = \mathsf{M}\left\{b_{i_1,r}b_{i_2,r}\right\} = 0, \tag{125}$$

$$\mathsf{M}\left\{a_{i,r}^2\right\} = \mathsf{M}\left\{b_{i,r}^2\right\} = \frac{\Delta}{2\pi^2r^2}, \tag{126}$$

где $i,\ i_1,\ i_2 = 1, \ldots, m;\ r \neq k;\ i_1 \neq i_2$.

Согласно (122) с вероятностью 1 имеем:

$$\mathbf{f}_t^{(i)} = \mathbf{f}_\Delta^{(i)}\frac{t}{\Delta} + \frac{1}{2}a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(a_{i,r}cos\frac{2\pi rt}{\Delta} + b_{i,r}sin\frac{2\pi rt}{\Delta}\right). \tag{127}$$

Далее путем подстановки (127) в повторный стохастический интеграл можно в принципе получить его разложение по системе стандартных независимых гауссовских величин. Обоснование того, что в результате описанной процедуры мы получим именно повторный стохастический интеграл Стратоновича дано в [5], [6].

Используя соотношение (127) нетрудно получить с вероятностью 1 следующие соотношения [5], [6]:

$$\int_0^{*t} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \frac{t}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)} + \frac{1}{2}a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(a_{i,r}cos\frac{2\pi rt}{\Delta} + b_{i,r}sin\frac{2\pi rt}{\Delta}\right), \tag{128}$$

$$\int\limits_0^{*t}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)}d\tau=\frac{t^2}{2\Delta}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i)}+\frac{t}{2}a_{i,0}+\frac{\Delta}{2\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\left\{a_{i,r}sin\frac{2\pi rt}{\Delta}-\right.$$

$$\left.-b_{i,r}\left(cos\frac{2\pi rt}{\Delta}-1\right)\right\}. \qquad (129)$$

Положим в соотношениях (128), (129) $t=\Delta$. В результате получим следующие справедливые с вероятностью 1 соотношения:

$$\int\limits_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)}=\mathbf{f}_{\Delta}^{(i)}, \qquad (130)$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)}d\tau=\frac{1}{2}\Delta\left(\mathbf{f}_{\Delta}^{(i)}+a_{i,0}\right). \qquad (131)$$

С помощью описанного подхода можно также получить следующие соотношения:

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)}=\frac{1}{2}\Delta\left(\mathbf{f}_{\Delta}^{(i)}-a_{i,0}\right), \qquad (132)$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)}=\frac{1}{2}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i_1)}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i_2)}-\frac{1}{2}\left(a_{i_2,0}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i_1)}-a_{i_1,0}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i_2)}\right)+$$

$$+\pi\sum_{r=1}^{\infty}r\left(a_{i_1,r}b_{i_2,r}-b_{i_1,r}a_{i_2,r}\right). \qquad (133)$$

При получении (130)-(133) использовалось соотношение:

$$a_{i,0}=-2\sum_{r=1}^{\infty}a_{i,r}, \qquad (134)$$

которое следует из (122) при $t=\Delta$.

Произведем сравнение разложений некоторых повторных стохастических интегралов Стратоновича, полученных методом Г.Н.Мильштейна и методом, основанным на кратных рядах Фурье.

Введем в рассмотрение следующие независимые стандартные гауссовские величины:

$$\xi_i = \frac{\mathbf{f}_\Delta^{(i)}}{\sqrt{\Delta}}; \quad \rho_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}}\pi r a_{i,r}, \quad \eta_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}}\pi r b_{i,r}, \tag{135}$$

где $i = 1, \ldots, m;\ r = 1,\ 2, \ldots$ . В силу (134) имеем:

$$a_{i,0} = -\sqrt{2\Delta}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{\pi r}\rho_{i,r}. \tag{136}$$

Подставляя соотношения (135) и (136) в (130)-(133) получим следующие справедливые с вероятностью 1 соотношения:

$$\int\limits_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \sqrt{\Delta}\xi_i, \tag{137}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{1}{2}\Delta^{\frac{3}{2}}\left(\xi_i - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\rho_{i,r}\right), \tag{138}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = \frac{1}{2}\Delta^{\frac{3}{2}}\left(\xi_i + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\rho_{i,r}\right), \tag{139}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} = \frac{\Delta}{2}\Biggl\{\xi_{i_1}\xi_{i_2} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\bigl(\rho_{i_1,r}\eta_{i_2,r} - \eta_{i_1,r}\rho_{i_2,r} +$$

$$+\sqrt{2}\left(\rho_{i_2,r}\xi_{i_1} - \rho_{i_1,r}\xi_{i_2}\right)\Bigr)\Biggr\}. \tag{140}$$

Учитывая принятые нами ранее обозначения для повторных стохастических интегралов можно записать:

$$\int\limits_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = I_{0_{\Delta,0}}^{*(i)} = J_{(1)\Delta,0}^{*(i)}, \tag{141}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \Delta I_{0_{\Delta,0}}^{*(i)} + I_{1_{\Delta,0}}^{*(i)} = J_{(10)\Delta,0}^{*(i)}, \tag{142}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = -I_{1_{\Delta,0}}^{*(i)} = J_{(01)\Delta,0}^{*(i)}, \tag{143}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} = I_{00_{\Delta,0}}^{*(i_1 i_2)} = J_{(11)\Delta,0}^{*(i_1 i_2)}. \tag{144}$$

Подставляя разложения интегралов $I_{0_{\Delta,0}}^{*(i)}$, $I_{1_{\Delta,0}}^{*(i)}$, $I_{00_{\Delta,0}}^{*(i_2 i_1)}$ или интегралов $J_{(1)\Delta,0}^{*(i)}$, $J_{(10)\Delta,0}^{*(i)}$, $J_{(01)\Delta,0}^{*(i)}$, $J_{(11)\Delta,0}^{*(i_1 i_2)}$, полученные с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье и тригонометрической системы функций в представления (141)-(144) получим с точностью до обозначений разложения (137)-(140). Это говорит о том, что что по крайней мере для рассмотренных повторных стохастических интегралов Стратоновича и тригонометрической системы функций метод Г.Н.Мильштейна и метод, основанный на кратных рядах Фурье дают один и тот же результат. По-видимому можно показать, что этот вывод будет справедлив и для других повторных стохастических интегралов Стратоновича. В результате можно считать, что метод Мильштейна является частным случаем метода, основанного на кратных рядах Фурье в случае тригонометрической системы функций.

# 5. Разложение повторных стохастических интегралов с использованием полиномов Эрмита

В предыдущих частях работы рассматривалась общая теория аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича. Однако в некоторых частных случаях можно получить точные представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича в виде полиномов конечных степеней от стандартной гауссовской случайной величины.

Рассмотрим семейство производящих многочленов $H_n(x,y);\ n=0,\ 1,\ldots$ вида:

$$H_n(x,y) = \frac{d^n}{d\alpha^n} e^{\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 y} \mid_{\alpha=0}. \tag{145}$$

Нетрудно видеть, что многочлены $H_n(x,y)$ связаны с многочленами Эрмита $h_n(x)$ формулой:

$$H_n(x,y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}} h_n\left(\frac{x}{\sqrt{2y}}\right).$$

В [9] получено следующее представление для повторного стохастического интеграла Ито

$$J_{T,0}^{(n)} = \int\limits_0^T \psi_{t_k} \ldots \int\limits_0^{t_2} \psi_{t_1} df_{t_1} \ldots df_{t_k} = \frac{1}{k!} H_k(\delta_t, \Delta_t);\ k = 1,\ 2, \ldots, \qquad (146)$$

где $\delta_t \stackrel{def}{=} \int\limits_0^t \psi_s df_s$, $\Delta_t \stackrel{def}{=} \int\limits_0^t \psi_s^2 ds$, $\psi_t$ – случайный процесс, например, из класса $\mathcal{M}_2([0,T])$.

В частности, из (146) получаем:

$$J_{T,0}^{(2)} = \frac{1}{2!}\left(\delta_t^2 - \Delta_t\right),\ J_{T,0}^{(3)} = \frac{1}{3!}\left(\delta_t^3 - 3\delta_t\Delta_t\right).$$

В [6] получено следующее представление для повторного стохастического интеграла Стратоновича:

$$J_{T,0}^{*(k)} = \frac{1}{k!}\delta_t^k,$$

где

$$J_{T,0}^{*(k)} \stackrel{def}{=} \int\limits_0^{*T} \psi(t_k) \ldots \int\limits_0^{*t_2} \psi(t_1) df_{t_1} \ldots df_{t_k},$$

$\delta_t = \int\limits_0^t \psi(s) df_s$, а $\psi(t)$ – некоторая детерминированная непрерывно дифференцируемая на промежутке $[0,T]$ функция.

## 6. Сравнение эффективности полиномиальной и тригонометрической систем функций при аппроксимации повторных стохастических интегралов

Рассмотрим вопрос о выборе числа $q$ в суммах, аппроксимирующих некоторые повторные стохастические интегралы Стратоновича в случае тригонометрического базиса.

| $T-t$ | $2^{-4}$ | $2^{-5}$ | $2^{-6}$ | $2^{-7}$ | $2^{-8}$ | $2^{-9}$ | $2^{-10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0(T-t,3)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $q_{00}(T-t,3)$ | 2 | 5 | 10 | 19 | 39 | 78 | 156 |

Таблица 7.1

| $T-t$ | $2^{-4}$ | $2^{-5}$ | $2^{-6}$ | $2^{-7}$ | $2^{-8}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $q_0(T-t,4)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $q_{00}(T-t,4)$ | 39 | 156 | 623 | 2490 | 9960 |
| $q_1(T-t,4)$ | 1 | 2 | 3 | 6 | 13 |
| $q_{000}(T-t,4)$ | 2 | 3 | 6 | 13 | 26 |

Таблица 7.2

Пусть натуральное число $q$ удовлетворяет условию:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{l_1\ldots l_{kT,t}}^{*(i_1\ldots i_k)}-I_{l_1\ldots l_{kT,t}}^{*(i_1\ldots i_k)q}\right)^2\right\}\le C(T-t)^{\gamma}, \tag{147}$$

где $C=1.0$, $\gamma$ – ограниченная положительная постоянная. Будем обозначать число $q$, удовлетворяющее условию (147) следующим образом:

$$q\stackrel{def}{=}q_{l_1\ldots l_k}(T-t,\gamma).$$

Рассмотрим численные результаты выбора $q_{l_1\ldots l_k}(T-t,\gamma)$ с помощью соотношений (100), (101), (103), (106), (107), (108) при $i_1\ne i_2$, $i_2\ne i_3$, $i_1\ne i_3$, $C=1.0$. Эти результаты помещены в таблицах 7.1–7.3.

| $T-t$ | $2^{-4}$ | $2^{-5}$ | $2^{-6}$ |
|---|---|---|---|
| $q_0(T-t,5)$ | 1 | 1 | 1 |
| $q_{00}(T-t,5)$ | 623 | 4980 | 39841 |
| $q_1(T-t,5)$ | 13 | 52 | 208 |
| $q_{000}(T-t,5)$ | 26 | 104 | 416 |
| $q_{10}(T-t,5)$ | 1 | 1 | 2 |
| $q_{01}(T-t,5)$ | 1 | 3 | 5 |

Таблица 7.3

| $T-t$ | $2^{-4}$ | $2^{-5}$ | $2^{-6}$ | $2^{-7}$ | $2^{-8}$ | $2^{-9}$ | $2^{-10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0(T-t,3)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $q_{00}(T-t,3)$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |

Таблица 7.4

| $T-t$ | $2^{-4}$ | $2^{-5}$ | $2^{-6}$ | $2^{-7}$ | $2^{-8}$ | $2^{-9}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0(T-t,4)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $q_{00}(T-t,4)$ | 16 | 64 | 256 | 1024 | 4096 | 16384 |
| $q_1(T-t,4)$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Таблица 7.5

| $T-t$ | $2^{-4}$ | $2^{-5}$ | $2^{-6}$ | $2^{-7}$ |
|---|---|---|---|---|
| $q_0(T-t,5)$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $q_{00}(T-t,5)$ | 256 | 2048 | 16384 | 131072 |
| $q_1(T-t,5)$ | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $q_{10}(T-t,5)$ | 0 | 1 | 2 | 4 |
| $q_{01}(T-t,5)$ | 0 | 1 | 2 | 4 |

Таблица 7.6

| $T-t$ | $2^{-4}$ | $2^{-5}$ |
|---|---|---|
| $q_0(T-t,6)$ | 1 | 1 |
| $q_{00}(T-t,6)$ | 4096 | 65536 |
| $q_1(T-t,6)$ | 2 | 2 |
| $q_{10}(T-t,6)$ | 9 | 39 |
| $q_{01}(T-t,6)$ | 9 | 39 |
| $q_2(T-t,6)$ | 3 | 3 |

Таблица 7.7

Рассмотрим вопрос о выборе числа $q$ в суммах, аппроксимирующих некоторые повторные стохастические интегралы Стратоновича в случае полиномиального базиса.

Рассмотрим численные результаты выбора $q_{l_1\ldots l_k}(T-t,\gamma)$ с помощью соотношений (119), (120), т.е. для полиномиальной системы функций в предположении, что $i_1 \neq i_2$, $C = 1.0$. Эти результаты помещены в таблицах 7.4–7.7.

Сопоставляя результаты, приведенные в таблицах 7.1–7.7, можно прийти к выводу о том, что для аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича с помощью полиномиальной системы функций требуется генерировать существенно меньшее число независимых стандартных гауссовских случайных величин, чем при аппроксимации этих интегралов с помощью тригонометрической системы функций. Кроме этого, непосредственно сами выражения для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича, полученные с помощью полиномиальной системы функций значительно проще, чем выражения для аппроксимаций этих интегралов с помощью тригонометрической системы функций.

## 7. Метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на кратных интегральных суммах

В этом параграфе рассмотрим метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $J_{T,t}^{(k)}$ вида (23), который основывается на их приближении интегральными суммами.

Пусть функции $\psi_l(\tau)$; $l = 1,\ldots,k$ являются непрерывно дифференцируемыми на промежутке $[t,T]$. Тогда согласно лемме 3 с вероятностью 1 справедливо равенство:

$$J_{T,t}^{(k)} = \underset{\substack{\Delta q\to 0\\ q\to\infty}}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_k=0}^{q-1}\psi_k(\tau_{j_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\psi_1(\tau_{j_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)},$$

где $\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} = \mathbf{w}_{\tau_{j_l+1}}^{(i_l)} - \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$; $i_l = 0,\ 1,\ldots,m$; $\{\tau_{j_l}\}_{j_l=0}^{q-1}$ – разбиение промежутка $[t,T]$ такого типа, как в (3); $l = 1,\ldots,k$.

Будем искать аппроксимацию повторного стохастического интеграла

Ито $J_{T,t}^{(k)}$ в виде:

$$J_{T,t}^{(k)q}=\sum_{j_k=0}^{q-1}\psi_k(\tau_{j_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\psi_1(\tau_{j_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}. \tag{148}$$

Соотношение (148) может быть переписано в следующей форме:

$$J_{T,t}^{(k)q}=\sum_{j_k=0}^{q-1}\sqrt{\Delta\tau_{j_k}}\psi_k(\tau_{j_k})\mathbf{u}_{j_k}^{(i_k)}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sqrt{\Delta\tau_{j_1}}\psi_1(\tau_{j_1})\mathbf{u}_{j_1}^{(i_1)}, \tag{149}$$

где

$$\mathbf{u}_j^{(i)}\stackrel{def}{=}\begin{cases}\frac{\Delta\mathbf{f}_{\tau_j}^{(i)}}{\sqrt{\Delta\tau_j}} & \text{при } i=1,\ldots,m\\ \sqrt{\Delta\tau_j} & \text{при } i=0\end{cases}. \tag{150}$$

Из (150) следует, что при $i\neq 0$ и различных $j$ величины $\mathbf{u}_j^{(i)}$ являются гауссовскими независимыми случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями.

Пусть

$$\tau_j=t+j\Delta;\ j=0,1,\ldots,q;\ \tau_q=T;\ \Delta>0. \tag{151}$$

Тогда формула (149) примет вид:

$$J_{T,t}^{(k)q}=\Delta^{k/2}\sum_{j_k=0}^{q-1}\psi_k(t+j_k\Delta)\mathbf{u}_{j_k}^{(i_k)}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\psi_1(t+j_1\Delta)\mathbf{u}_{j_1}^{(i_1)}, \tag{152}$$

где

$$\mathbf{u}_j^{(i)}\stackrel{def}{=}\begin{cases}\frac{\mathbf{f}_{t+(j+1)\Delta}^{(i)}-\mathbf{f}_{t+j\Delta}^{(i)}}{\sqrt{\Delta}} & \text{при } i=1,\ldots,m\\ \sqrt{\Delta} & \text{при } i=0\end{cases}.$$

Рассмотрим вопрос о среднеквадратической погрешности аппроксимации, которая возникает при замене $J_{T,t}^{(k)}$ на $J_{T,t}^{(k)q}$. Нетрудно показать, что при достаточно малой величине $T-t$ существует постоянная $H_k=const<\infty$ такая, что выполняется следующая оценка:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J_{T,t}^{(k)}-J_{T,t}^{(k)q}\right)^2\right\}\le\frac{H_k(T-t)^2}{q}.$$

| $T-t$ | $2^{-4}$ | $2^{-5}$ | $2^{-6}$ | $2^{-7}$ | $2^{-8}$ | $2^{-9}$ | $2^{-10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0(T-t,3)$ | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
| $q_{00}(T-t,3)$ | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |

Таблица 7.8

Нетрудно также показать, что

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{(i_2i_1)}-I_{00_{T,t}}^{(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^2}{2q}. \qquad (153)$$

В таблице 7.8 приведены результаты выбора числа $q$ при аппроксимации повторных стохастических интегралов $I_{0_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{00_{T,t}}^{(i_2i_1)}$ методом, основанным на интегральных суммах, из которых видно, что этот метод сходится медленнее метода, основанного на кратных рядах Фурье.

## Список литературы


[1] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. *Разложение процесса Ито в окрестности фиксированного момента времени в ряд Тейлора-Ито.* Деп. в ВИНИТИ, 1993, N2637-B93 от 26.10.93.

[2] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. *Унифицированное разложение Тейлора-Ито.* Записки научных семинаров ПОМИ. Вероятность и статистика 2, 1997, т.244, с.186-204.

[3] Wagner W., Platen E. *Approximation of Ito integral equations.* Preprint ZIMM, Akad. der. Wiss der DDR, Berlin, 1978.

[4] Platen E., Wagner W. *On a Taylor formula for a class of Ito processes.* Prob. Math. Statist., 1982, 3, pp.37-51.

[5] Мильштейн Г.Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердл.: Изд-во Уральского ун-та, 1988.

[6] Kloeden P.E., Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations. Second Corrected Printing. Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.

[7] Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W. *The Approximation of multiple stochastic integrals.* Stoch. Anal. And Applicat., 1992, 10(4), pp.431-441.

[8] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. *Аппроксимация кратных стохастических интегралов Ито.* Деп. в ВИНИТИ, 1994, N1678-В94 от 15.08.94, 42с.

[9] Chung K.L., Williams R.J. *Introduction to Stochastic Integration.* Progress in Probubility and Stochastics Vol.4 (Edited by Huber P. and Rosenblatt M.) Birkhäuser Boston Basel Stuttgart, 1983.

[10] Скороход А.В. *Случайные процессы с независимыми приращениями.* М.: Наука, 1964, 280с.

[11] Харди Г.Х., Рогозинский В.В. *Ряды Фурье.* М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963, 156с.

[12] Гобсон Е.В. *Теория сферических и эллипсоидальных функций.* М.: ИЛ, 1952, 476с.