ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 1998
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.wplus.net/pp/diffur
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

стохастические дифференциальные уравнения

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О.Ю. Кульчицкий

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29
С.-Петербургский государственный технический университет
Кафедра "Механика и процессы управления"
e-mail: control1@citadel.stu.neva.ru

Д.Ф.Кузнецов

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29
С.-Петербургский государственный технический университет
Кафедра "Высшая математика"
e-mail: control1@citadel.stu.neva.ru

Аннотация.

Линейные стохастические системы занимают особое место как в теории стохастических систем, так и в их приложениях в механике, электротехнике и других областях. Прикладная значимость линейных систем определяется тем, что они являются универсальным средством математического описания малых отклонений поведения реальных систем от номинальных режимов их функционирования. Теория стационарных линейных

систем основывается на аналитических представлениях решений в общем случае и допускает применение специальных, особенно эффективных методов численно-статистического моделирования. В связи с этим, настоящая статья посвящена специальным методам численного моделирования линейных стационарных стохастических систем и их практической реализации.

1. Системы линейных стохастических дифференциальных уравнений: расчетные формулы и вспомогательные результаты

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений (СЛСДУ) вида:

$$d\mathbf{x}_t = A(t)\mathbf{x}_t dt + \mathbf{g}(t)dt + \Sigma(t)d\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t,\omega) \in R_n-$ случайный процесс, являющийся решением СЛСДУ (1) с начальным условием $\mathbf{x}(0,\omega)$; $\mathbf{f}_t = \mathbf{f}(t,\omega) \in R_m-$ винеровский случайный процесс с независимыми компонентами $f_t^{(i)}(i = 1,...,m) : M\{\mathbf{f}_t\} \equiv 0,\ M\{\mathbf{f}_t\mathbf{f}_t^T\} = \Sigma_f^2 = diag\{\sigma_{f_i}^2\}_{i=1}^m$; $\mathbf{g}(t) \in R_k-$ детерминированное возмущение системы; $\Sigma(t) \in R_{n\times m}; A(t) \in R_{n\times n}$ и $\mathbf{g}(t) \in R_n-$ матричные функции, удовлетворяющие условиям существования и единственности решения СЛСДУ (1).

Систему (1) можно рассматривать как систему уравнений Ито или Стратоновича, или в другом смысле, поскольку нетрудно показать, что система (1) в силу своей структуры имеет одно и то же решение в каком бы смысле она не рассматривалась. В связи с этим, часто применяемая в технической литературе форма описания системы (1) в виде:

$$\dot{\mathbf{x}}_t = A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t) + \Sigma(t)\,\dot{\mathbf{f}}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega),$$

с белым шумом $\dot{\mathbf{f}}_t$ в правой части не приводит к неоднозначности математического определения решений системы (1).

Линейные стохастические дифференциальные уравнения (ЛСДУ) рассматривались рядом авторов. Так, в работах Арнольда [1], Ричардсона [2], Маккенна и Моррисона [3], [4], а также Клоедена и Платена [5] рассматривались скалярные ЛСДУ. В этих работах получено интегральное представление решения скалярного ЛСДУ через фундаментальное решение, изучены свойства решений скалярных ЛСДУ. Аналитические решения некоторых простейших скалярных ЛСДУ можно найти у Арнольда

[1], Гарда [6], Хорстхемке и Лофевера [7], Пугачева и Синицина [8], Клоедена и Платена [5]. В работах Микулевичуса [9], Струка и Варадана [10], Клоедена и Платена [5], Пугачева и Синицина [8] рассматривались СЛСДУ. Для них дано интегральное представление решения через фундаментальную матрицу решений, а также аналитически решены некоторые простейшие СЛСДУ. В книге Арато [11] рассматривались стационарные СЛСДУ. Для них дано представление решения через матричную экспоненту и рассмотрены их основные свойства. Кроме этого изучены дискретные стационарные линейные стохастические системы, для которых построен алгоритм численного моделирования. Вопросы численного моделирования СЛСДУ рассматривались в работе Шкурко [12].

Настоящая работа посвящена построению численных методов решения стационарных СЛСДУ, основанных на точном интегральном представлении их решений. При этом рассматривается ряд вопросов, связанных непосредственно с особенностями численной реализации построенных численных методов.

1.1. Интегральное представление решений СЛСДУ

Рассмотрим хорошо известные результаты (см. например [8], [5], [11]) по интегральному представлению решений СЛСДУ.

Общий случай. Будем говорить, что $n\times n$ - матричная функция $X(t,\tau)$ является фундаментальной матрицей системы (1), если:

1. $X(\tau,\tau)=I$ при всех $\tau\geq 0$.
2. $\frac{\partial}{\partial t}X(t,\tau)=A(t)X(t,\tau)$ при $t\geq\tau\geq 0$.
3. $X(\tau,t)=X^{-1}(t,\tau)$ при $\tau\leq t,\ \tau\geq 0$.

Известно, (см., например, [13]), что $X(t,\tau)$ обладает следующими свойствами:

1. $X(t,\tau)=X(t,s)X(s,\tau)$ для любых $\tau,\ s,\ t\geq 0$.
2. $\frac{\partial}{\partial\tau}X(t,\tau)=-X(t,\tau)A(\tau)$ при любых $t,\tau\geq 0$.

Воспользовавшись описанными свойствами $X(t,\tau)$, нетрудно получить интегральное соотношение для решений СЛСДУ (1) известное под названием формулы Коши:

$$\mathbf{x}_t=X(t,\tau)\mathbf{x}_\tau+\int_\tau^t X(t,s)\mathbf{g}(s)ds+\int_\tau^t X(t,s)\Sigma(s)d\mathbf{f}_s, \qquad (2)$$

где $t \geq \tau \geq 0$.

Если задать временную сетку t_i :

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < ...,$$

то из (2) следует рекуррентная формула для значений вектора решений $\mathbf{x}_t$ в моменты времени t_k :

$$\mathbf{x}_{t_{k+1}} = X(t_{k+1}, t_k)\mathbf{x}_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t_{k+1}, s)\mathbf{g}(s)ds + \tag{3}$$

$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t_{k+1}, s)\Sigma(s)d\mathbf{f}_s; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega).$$

Для упрощения дальнейших выкладок примем следующие обозначения:

$$\mathbf{x}_k \triangleq \mathbf{x}_{t_k}; \quad \tilde{A}(k) \triangleq X(t_{k+1}, t_k);$$

$$\tilde{\mathbf{g}}(k) \triangleq \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t_{k+1}, s)\mathbf{g}(s)ds; \quad \tilde{\mathbf{f}}_{k+1} \triangleq \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t_{k+1}, s)\Sigma(s)d\mathbf{f}_s. \tag{4}$$

Тогда рекуррентное уравнение (3) примет вид:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{A}(k)\mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{g}}(k) + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \tag{5}$$

По своему построению (4) случайное возмущение $\tilde{\mathbf{f}}_k$ является гауссовским белошумным дискретным векторным случайным процессом таким, что:

$$M\{\tilde{\mathbf{f}}_k\} \equiv 0; \quad M\{\tilde{\mathbf{f}}_k \tilde{\mathbf{f}}_r^T\} = 0 \ \text{ при } k \neq r;$$

$$D\left\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}\right\} \triangleq M\left\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^T\right\} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t_{k+1}, s)\Sigma(s)\Sigma_f^2\Sigma^T(s)X^T(t_{k+1}, s)ds.$$

Дисперсионная матричная функция $D\left\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}\right\}$ является симметричной не- отрицательно-определенной и представима в виде:

$$D\left\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}\right\} = D_f(t_{k+1}),$$

где матричная функция $D_f(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1}]$ является решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{D}_f(t) = A(t)D_f(t) + D_f(t)A^T(t) + \Sigma(t)\Sigma_f^2\Sigma^T(t); \quad D_f(t_k) = 0 \tag{6}$$

Стационарный случай. Систему (1) будем называть стационарной, если: $A(t) \equiv A$; $\Sigma(t) \equiv \Sigma$:

$$d\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_t dt + \mathbf{g}(t)dt + \Sigma d\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega). \tag{7}$$

В этом случае фундаментальная матрица решений $X(t,\tau)$ представляет собой матричную экспоненту:

$$X(t,\tau) = e^{A(t-\tau)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(t-\tau)^k}{k!}.$$

Формула Коши (2) запишется при этом в виде:

$$\mathbf{x}_t = e^{A(t-\tau)}\mathbf{x}_\tau + \int_\tau^t e^{A(t-s)}\mathbf{g}(s)ds + \int_\tau^t e^{A(t-s))}\Sigma d\mathbf{f}_s.$$

Если в случае стационарной системы (7) взять регулярную сетку:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta; \quad t_0 = 0,$$

где $\Delta-$ шаг сетки, то обозначения (4) несколько упростятся:

$$\tilde{A} = e^{A\Delta};$$

$$\tilde{\mathbf{g}}(k) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^\Delta e^{A(\Delta-s)}\mathbf{g}(k\Delta+s)ds; \quad \tilde{\mathbf{f}}_{k+1} \stackrel{\Delta}{=} \int_0^\Delta e^{A(t-s)}\Sigma d\mathbf{f}_{k\Delta+s}.$$

и система (5) превращается в систему с постоянной матрицей $\tilde{A}$:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{A}\mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{g}}(k) + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega), \tag{8}$$

где векторный гауссовский белошумный дискретный случайный процесс $\tilde{\mathbf{f}}_k$ имеет дисперсионную матрицу:

$$D\left\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}\right\} = D_f(\Delta) = \int_0^\Delta e^{A(\Delta-s)}\Sigma\Sigma_f^2\Sigma^T e^{A^T(\Delta-s)}ds, \tag{9}$$

равную решению матричного дифференциального уравнения (6) при $t = \Delta$, которое с учетом сделаных допущений принимает вид:

$$\dot{D_f}(t) = AD_f(t) + D_f(t)A^T + \Sigma\Sigma_f^2\Sigma^T; \quad D_f(0) = 0. \tag{10}$$

Если все собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости: $Re\lambda_i(A) < 0$, то уравнение (10) имеет стационарное решение $D(\infty)$, удовлетворяющее следующей алгебраической системе линейных уравнений:

$$0 = AD(\infty) + D(\infty)A^T + \Sigma\Sigma_f^2\Sigma^T. \tag{11}$$

Однако, в задачах моделирования шаг Δ обычно нельзя считать достаточно большим по сравнению с $\frac{1}{\lambda_{min}(A)}$ и, следовательно, матрица $D_f(\Delta)$ не может определяться из уравнения (11).

1.2. Моментные характеристики решений СЛСДУ

Приведем сводку известных в литературе (см., например, [8], [11]) уравнений, которым удовлетворяют математические ожидания и корреляционные функции решений СЛСДУ. Введем обозначения:

$$\mathbf{m}_x(t) \stackrel{\Delta}{=} M\left\{\mathbf{x}_t\right\}; \quad \overset{\circ}{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{m}_x(t);$$

$$R_x(t,\tau) = M\left\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_t \overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_\tau^T\right\}; \quad D_x(t) = R_x(t,t).$$

В общем случае из (1) с учетом введенных обозначений получаем:

1. Для $\mathbf{m}_x(t)$ при $t \geq 0$:

$$\dot{\mathbf{m}}_x(t) = A(t)\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{g}(t); \quad \mathbf{m}_x(0) = M\left\{\mathbf{x}_0\right\},$$

или в интегральной форме:

$$\mathbf{m}_x(t) = X(t,0)\mathbf{m}_x(0) + \int_0^t X(t,\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau.$$

2. Для $D_x(t)$ при $t \geq 0$:

$$\dot{D}_x(t) = A(t)D_x(t) + D_x(t)A(t)^T + \Sigma(t)\Sigma_f^2\Sigma^T(t); \quad D_x(0) = M\left\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_0 \overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_0^T\right\}$$

3. Для $R_x(t,\tau)$ при $t,\tau \geq 0$:
при $t \geq \tau$:

$$\frac{\partial}{\partial t}R_x(t,\tau) = A(t)R_x(t,\tau); \quad R_x(\tau,\tau) = D(\tau),$$

при $t \leq \tau$:

$$R(t,\tau) = R^T(\tau,t)$$

В стационарном случае эти уравнения принимают вид:

$$\dot{\mathbf{m}}_x(t) = A\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{m}(t);\ \mathbf{m}_x(0) = M\left\{\mathbf{x}_0\right\},$$

$$\mathbf{m}_x(t) = e^{At}\mathbf{m}_x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{g}(\tau)d\tau.$$

$$\dot{D}_x(t) = AD_x(t) + D_x(t)A^T + \Sigma\Sigma_f^2\Sigma^T; \quad D_x(0) = M\left\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_0\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_0^T\right\}. \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}R_x(t,\tau) = AR_x(t,\tau); \quad R_x(\tau,\tau) = D(\tau) \ \text{ при } t \geq \tau,$$

$$R(t,\tau) = R^T(\tau,t) \ \text{ при } t \leq \tau.$$

Нетрудно видеть, что в данном случае:

$$R_x(t,\tau) = \begin{cases} e^{A(t-\tau)}D_x(\tau) & \text{при } t \geq \tau \\ D_x(t)e^{A^T(\tau-t)} & \text{при } \tau \geq t. \end{cases}$$

Для гурвицевой матрицы A матричное уравнение (12) имеет стационарное решение, удовлетворяющее системе линейных алгебраических уравнений вида:

$$0 = AD_x(\infty) + D_x(\infty)A^T + \Sigma\Sigma_f^2\Sigma^T.$$

Если $D_x(0) = D_x(\infty)$, то $D_x(t) = D_x(\infty) = const$. Тогда

$$R_x(t,\tau) \equiv R_x(t-\tau) = \begin{cases} e^{A(t-\tau)}D_x(\infty) & \text{при } t \geq \tau \\ D_x(\infty)e^{A^T(\tau-t)} & \text{при } \tau \geq t. \end{cases} \tag{13}$$

Если $D_x(0) \neq D_x(\infty)$, то в силу гурвицевости матрицы A $D_x(t) \to D_x(\infty)$ при $t \to \infty$ и формула (13) оказывается справедливой асимптотически при $t,\tau \to \infty$, $\mid t-\tau \mid < \infty$:

$$\lim_{t,\tau\to\infty |t-\tau|<\infty} R_x(t,\tau) = R_x(t-\tau).$$

Таким образом, центрированная составляющая решения системы (7) $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{m}_x(t)$ является в случае гурвицевой матрицы A либо стационарным процессом при $D_x(0) = D_x(\infty)$, либо асимптотически стационарным при $D_x(0) \neq D_x(\infty)$.

Пусть выходными переменными СЛСДУ являются линейные комбинации координат вектора состояния:

$$\mathbf{y}_t = H^T \mathbf{x}_t \in R_l,$$

где $H \in R_{n\times l}$. Тогда моментные характеристики процесса $\mathbf{y}_t$ определяются по формулам:

$$m_y(t) = M\left\{\mathbf{y}_t\right\} = H^T \mathbf{m}_x(t);$$

$$D_y(t) = M\left\{\overset{\circ}{\mathbf{y}}_t^{\,2}\right\} = H^T D_x(t) H; \quad R_y(t,\tau) = H^T R_x(t,\tau) H. \tag{14}$$

В установившемся режиме для гурвицевой матрицы A формулы (14) при $\tau, t \to \infty, \mid t-\tau \mid < \infty$ принимают вид:

$$D_y(\infty) = H^T D_x(\infty) H; \quad R_y(t,\tau) \to R_y(t-\tau) = H^T R_x(t-\tau) H.$$

Спектральная плотность мощности центрированной составляющей стационарного выходного процесса $\mathbf{y}_t$ представима в виде:

$$S_{\overset{\circ}{y}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(t) e^{-i\omega t} dt = H^T (i\omega I - A)^{-1} \Sigma \Sigma_f^2 \Sigma^T (-i\omega I - A^T)^{-1} H =$$

$$= G(i\omega) G^T(-i\omega),$$

где $I-$ единичная матрица, а $i-$ мнимая единица; $G(p) = H^T (pI - A)^{-1} \Sigma \Sigma_f$- матричная передаточная функция системы от входа $\dot{\mathbf{f}}_t$ к $\mathbf{y}_t$.

1.3. Свойства дискретной системы стохастических уравнений в стационарном случае

Рассмотрим дискретную линейную стохастическую систему (8) в предположении, что:

$$\tilde{\mathbf{g}}(k) = \tilde{B}\mathbf{u}(k); \quad \tilde{\mathbf{f}}_k = \tilde{\Sigma}\mathbf{v}_k; \quad \mathbf{y}_k = H^T \mathbf{x}_k,$$

где $\mathbf{u}(k) \in R_r-$ детерминированные возмущения; $\mathbf{v}_k \in R_m-$ белошумный векторный гауссовский случайный процесс с нулевым средним и дисперсионной матрицей, пропорциональной единичной матрице:

$$M\left\{\mathbf{v}_k\right\} \equiv 0; \quad M\left\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T\right\} = I; \quad \tilde{\Sigma} = \sqrt{D_{\tilde{f}}},$$

$\mathbf{y}_k \in R_l-$ выходная переменная.

С учетом принятых обозначений система (8) запишется в виде:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{A}\mathbf{x}_k + \tilde{B}\mathbf{u}(k) + \tilde{\Sigma}\mathbf{v}_{k+1}; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0); \quad \mathbf{y}_k = H^T\mathbf{x}_k. \tag{15}$$

Рассмотрим моментные характеристики решения системы (15) (см., например, [8], [11]).

1. Для $\mathbf{m}_x(k)$ и $\mathbf{m}_y(k)$:

$$\mathbf{m}_x(k+1) = \tilde{A}\mathbf{m}_x(k) + \tilde{B}\mathbf{u}(k); \quad \mathbf{m}_x(0) = M\left\{\mathbf{x}_0\right\};$$

$$\mathbf{m}_y(k) = H^T\mathbf{m}_x(k)$$

или

$$\mathbf{m}_x(k+1) = \tilde{A}^k\mathbf{m}_x(0) + \sum_{s=0}^{k-1}\tilde{A}_{k-s-1}\tilde{B}\mathbf{u}(s);$$

$$\mathbf{m}_y(k+1) = H^T\tilde{A}^k\mathbf{m}_x(0) + \sum_{s=0}^{k-1}H^T\tilde{A}_{k-s-1}\tilde{B}\mathbf{u}(s);$$

2. Для $D_x(k)$ и $D_y(k)$:

$$D_x(k+1) = \tilde{A}D_x(k)\tilde{A}^T + \tilde{\Sigma}^2; \quad D_x(0) = M\left\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_0\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_0^T\right\}; \tag{16}$$

$$D_y(k) = H^TD_x(k)H.$$

3. Для $R_x(k,r)$ и $R_y(k,r)$:

$$R_x(k,r) = \begin{cases} e^{A(k-r)}D_x(r) & \text{при } k \geq r \\ D_x(k)e^{A^T(r-k)} & \text{при } r \geq k. \end{cases}$$

$$R_y(k,r) = \begin{cases} H^Te^{A(k-r)}D_x(r)H & \text{при } k \geq r \\ H^TD_x(k)e^{A^T(r-k)}H & \text{при } r \geq k. \end{cases}$$

Если матрица A гурвицева, то матрица $\tilde{A}$ имеет все собственные числа внутри единичного круга и уравнение (16) имеет асимптотически устойчивое решение, удовлетворяющее системе линейных алгебраических уравнений:

$$D_x(\infty) = \tilde{A}D_x(\infty)\tilde{A}^T + \tilde{\Sigma}^2; \quad D_y(\infty) = H^TD_x(\infty)H.$$

Если $D_x(0) = D_x(\infty)$, то $D_x(k) = D_x(\infty) = const$. Тогда

$$R_x(k,r) \equiv R_x(k-r) = \begin{cases} e^{A(k-r)}D_x(\infty) & \text{при } k \geq r \\ D_x(\infty)e^{A^T(r-k)} & \text{при } r \geq k. \end{cases} \qquad (17)$$

Если $D_x(0) \neq D_x(\infty)$, то в силу гурвицевости матрицы A $D_x(k) \to D_x(\infty)$ при $k \to \infty$ и формула (17) оказывается справедливой асимптотически при $k, r \to \infty$, $\mid k-r \mid < \infty$:

$$\lim_{k,r\to\infty|k-r|<\infty} R_x(k,r) = R_x(k-r).$$

Таким образом, центрированная составляющая решения системы (15) $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{m}_x(k)$ является в случае гурвицевой матрицы A либо стационарным процессом при $D_x(0) = D_x(\infty)$, либо асимптотически стационарным при $D_x(0) \neq D_x(\infty)$.

2. Точный метод моделирования решений СЛСДУ

В этом разделе будет рассматриваться метод численного решения СЛСДУ, основанный на представлении решений СЛСДУ по формуле Коши. Поскольку формула Коши является точным интегральным представлением решения СЛСДУ, то численный метод, основанный на ее применении, будем называть точным численным методом.

2.1. Общий подход к моделированию и структурирование проблемы

Рассмотрим СЛСДУ вида (1) в предположениях:

$$A(t) \equiv A;\ \mathbf{g}(t) \equiv B\mathbf{u}(t);\ \Sigma(t) \equiv \Sigma. \qquad (18)$$

Выходом системы будем считать линейную комбинацию компонент вектора состояния системы. С учетом (18) интересующая нас система уравнений (1) может быть переписана в виде:

$$d\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_t dt + B\mathbf{u}(t)dt + \Sigma d\mathbf{f}_t;\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0); \qquad (19)$$

$$\mathbf{y}_t = H^T\mathbf{x}_t,$$

где $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t,\omega) \in R_n-$ решение СЛСДУ; $\mathbf{u}(t) \in R_k-$ детерминированное внешнее возмущение; $\mathbf{y}_t \in R_l-$ выходной процесс, численная реализация которого является финальной целью моделирования; $H \in R_{n\times l},\ A \in R_{n\times n}$, $\Sigma \in R_{n\times m},\ B \in R_{n\times k}-$ числовые матрицы; $\mathbf{f}_t \in R_m-$ винеровский случайный процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$ $(i = 1,\dots,m)$.

Рассмотрим временную сетку с узлами $t_k,\ k = 0,\ 1,\dots$ с постоянным шагом $\Delta > 0$ такую, что:

$$t_{k+1} = t_k + \Delta = t_0 + (k+1)\Delta.$$

Решение системы (19) на временной сетке с постоянным шагом Δ запишется в форме Коши в виде:

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta}\mathbf{x}_k + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}B\mathbf{u}(\tau + k\Delta)d\tau + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}\Sigma d\mathbf{f}_{\tau+k\Delta}, \tag{20}$$

где $\mathbf{x}_k \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{x}_{k\Delta}$.

Исходя из содержательного смысла слагаемых, входящих в правую часть (20), будем называть первое слагаемое **переходной** или **динамической** составляющей, второе - **систематической** составляющей, а третье - **случайной** составляющей векторного случайного процесса $\mathbf{x}_k$. Рассмотрим отдельно проблемы моделирования каждой из этих составляющих.

2.2. Алгоритм моделирования динамической составляющей решения СЛСДУ

Вычисление динамической составляющей процесса $\mathbf{x}_k$ на каждом шаге моделирования требует знания матрицы $e^{A\Delta}$. По определению матричная экспонента задается в виде ряда:

$$e^{A\Delta} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^s\Delta^s}{s!}. \tag{21}$$

Однако непосредственное использование формулы (21) для вычисления $e^{A\Delta}$ не рационально, т.к. достижение приемлемой точности вычисления требует в этом случае выполнения большого количества операций матричных умножений и сложений. Для эффективного вычисления матричной экспоненты в литературе [14] рекомендуется использовать специальный алгоритм "быстрого"вычисления, основанный на формуле:

$$e^{A\Delta} = \left(e^{A\frac{\Delta}{2^M}}\right)^{2^M} \simeq \left(\sum_{s=0}^{N} \frac{A^s}{s!}\left(\frac{\Delta}{2^M}\right)^s\right)^{2^M}, \tag{22}$$

где $N \geq 1$, $M \geq 0$−некоторые целые числа.

Отметим, что, если $M = 0$, $n = \infty$, то формула (22) полностью совпадает с формулой (21). При $M = 2, 3, \ldots$ $\frac{\Delta}{2^M} << \Delta$ и потому для аппроксимации с достаточной точностью матричной экспоненты $e^{A\Delta}$ количество $N+1$ членов ряда в (22) может быть взято значительно меньшим, чем при $M = 0$. Причем это различие будет тем значительней, чем больше берется значение M. Учитывая, что в диапазоне $M \in [10, 20]$ величина 2^M примерно находится в диапазоне $[10^3, 10^6]$, число N в (22), необходимое для достижения одной и той же точности вычисления $e^{A\Delta}$ резко уменьшается с увеличением M.

В работе [15], (см.также [16, гл.8]) показано, что для того, чтобы вычислить матричную экспоненту $e^{A\Delta}$ по формуле (22) с точностью не меньшей ϵ :

$$\|e^{A\Delta} - D\| \leq \epsilon, \tag{23}$$

достаточно взять такие целые $N \geq 1$ и $M \geq 0$, при которых выполняется условие:

$$\frac{e^{\|A\|\Delta (\|A\|\Delta)^{N+1}}}{2^{MN}(N+1)!} \leq \epsilon, \tag{24}$$

где

$$\|A\| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \mid A^{(ij)} \mid,$$

где $A^{(ij)}$−компонента матрицы A.

В [15] поставлены и решены задачи об определении оптимальной пары (M, N), используемой в формуле (22). Оказалось, что соотношения, связывающие оптимальные M и N в задаче об определении минимума вычислительных затрат при фиксированной точности вычисления матричной экспоненты и в задаче минимизации погрешности вычисления матричной экспоненты при фиксированных вычислительных затратах эквивалентны.

Приведем эти соотношения:

$$M = \begin{cases} [z]+1 & \text{при } \ \|A\|\Delta > v \\ \\ 0 & \text{при } \ \|A\|\Delta \le v, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$z = \frac{1}{ln2}\left(ln\frac{\|A\|\Delta}{N+1} - \frac{1}{2(N+1)}\right) + N;$$

$$v = \frac{1}{2^N}(N+1)e^{\frac{1}{2(N+1)}}.$$

В [15] также даны практические рекомендации по выбору M и N. Так, например, перебор натуральных N следует начинать с 4-5 при $\|A\|\Delta \le 1,3$ и с 2-3 при $\|A\|\Delta \ge 1,3$. После фиксации конкретного N определяется M, удовлетворяющее (23) и (24). Таким образом, алгоритм вычисления матричной экспоненты может быть записан в следующей рекуррентной форме:

Алгоритм 2.1. Вычисление матричной экспоненты $e^{A\Delta}$ с точностью ϵ.

1. Вычисляется $\|A\|\Delta$.

2. По заданному $\epsilon > 0$ выбираются значения M и N из соотношения (25) и условия (24).

3. $i := 0$.

4. $G := \sum\limits_{s=0}^{N} \frac{A^s}{s!}\left(\frac{\Delta}{2^M}\right)^s$.

5. $i := i + 1$.

6. $G := G^2$.

7. Если $i < M$, то переход к пункту 3.

8. Если $i = M$, то полагается: $e^{A\Delta} \approx G$.

9. Конец алгоритма.

2.3. Алгоритм моделирования систематической составляющей решения СЛСДУ

Проблема моделирования систематической составляющей сводится к вычислению интеграла

$$J_{\Delta} = \int_{0}^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)} B\mathbf{u}(\tau + k\Delta) d\tau. \tag{26}$$

Рассмотрим различные способы приближенного вычисления интеграла J_{Δ}. Будем считать, что векторная функция $\mathbf{u}(k\Delta+\tau)$ при $k = 0,\ 1,\dots$ и $\tau \in [0,\Delta]$ аппроксимируется с точностью ρ некоторой полиномиальной функцией вида:

$$\mathbf{u}(k\Delta + \tau) = \sum_{j=0}^{l} \mathbf{v}_j(k)\tau^j + \mathbf{r}_{l+1}(k,\tau), \tag{27}$$

где $\mid \mathbf{r}_{l+1}(k,\tau) \mid \leq \rho\tau^{l+1}$ при $k = 0,\ 1,\dots$ и $\tau \in [0,\Delta]$, а векторные коэффициенты $\mathbf{v}_j(k);\ j = 0,\ 1,\dots,l$ могут быть выбраны различными способами. Ниже будут рассмотрены некоторые из них.

Достаточным условием, обеспечивающим возможность аппроксимаций вида (27) является $l+1$ кратная непрерывная дифференцируемость функции $\mathbf{u}(t)$ с ограниченной $l+1-$й производной. Однако возможны и другие менее ограничительные условия.

Подставим (27) в (26). В результате получим следующее выражение:

$$J_{\Delta} = \sum_{j=0}^{l} J_{\Delta,j} B\mathbf{v}_j(k) + R_{\Delta,l+1}, \tag{28}$$

где

$$\|R_{\Delta,l+1}\| = \| \int_{0}^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)} B\mathbf{r}_{l+1}(k,\tau)d\tau\| \leq \rho \|J_{\Delta,l+1}\|\|B\|. \tag{29}$$

$$J_{\Delta,j} = \int_{0}^{\Delta} \tau^j e^{A(\Delta-\tau)} d\tau.$$

Остановимся подробнее на вычислении интегралов $J_{\Delta,j};\ j = 0,\ 1,\dots,l$. Нетрудно видеть, что

$$J_{\Delta,0} = A^{-1}\left(e^{A\Delta} - I\right); \tag{30}$$

$$J_{\Delta,j} = -A^{-1}\left(\Delta^j I - jJ_{\Delta,j-1}\right);\ j = 1,\ 2, \dots, l. \tag{31}$$

Применяя многократно формулу (31) саму к себе придем к следующему выражению:

$$J_{\Delta,j} = A^{-(j+1)} j! \left[AJ_{\Delta,0} - \sum_{s=1}^{j} \frac{\Delta^s A^s}{s!} \right];\ j \geq 1. \tag{32}$$

Подставляя (30) в (32) получим окончательное выражение для интеграла $J_{\Delta,j};\ j \geq 1$:

$$J_{\Delta,j} = A^{-(j+1)} j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{s=0}^{j} \frac{\Delta^s A^s}{s!} \right];\ j \geq 0. \tag{33}$$

Из (29) и (33) следует, что

$$\|R_{\Delta,l+1}\| \leq const \Delta^{l+2} \rho. \tag{34}$$

Подставляя (33) в (28) и отбрасывая остаточный член $R_{\Delta,l+1}$ придем к следующему приближенному представлению:

$$J_{\Delta} \approx A^{-(j+1)} \sum_{j=0}^{l} j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{s=0}^{j} \frac{\Delta^s A^s}{s!} \right] B\mathbf{v}_j(k). \tag{35}$$

Рассмотрим некоторые случаи выбора коэффициентов $\mathbf{v}_j(k);\ j = 0,\ 1, \dots, l$ в соответствии с формулой (27) и соответствующие этим случаям приближенные представления для J_{Δ}.

1. Аппроксимация с помощью формулы Тейлора:

$$\mathbf{v}_j(k) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^{(j)} \mathbf{u}_k}{\partial t^j}; \quad \mathbf{r}_{l+1}(k,\tau) = \frac{\partial^{(l+1)} \mathbf{u}(\theta(\tau))}{\partial t^{l+1}} \frac{\tau^{l+1}}{(l+1)!},$$

где $\theta(\tau) \in [k\Delta, k\Delta + \tau]$;

$$J_{\Delta} \approx A^{-(j+1)} \sum_{j=0}^{l} \left[e^{A\Delta} - \sum_{s=0}^{j} \frac{\Delta^s A^s}{s!} \right] B \frac{\partial^{(j)} \mathbf{u}_k}{\partial t^j}.$$

2. Кусочно-постоянная аппроксимация (l=0):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k, \tag{36}$$

где $\mathbf{u}_k \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{u}(k\Delta)$;

$$J_\Delta \approx A^{-1}\left(e^{A\Delta} - I\right) B\mathbf{u}_k.$$

3. Линейная интерполяция (l=1):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k,$$

$$\mathbf{v}_1(k) = \frac{1}{\Delta}\left(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\right),$$

где $\mathbf{u}_{k+1} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{u}((k+1)\Delta)$;

$$J_\Delta \approx A^{-1}\left(e^{A\Delta} - I\right) B\mathbf{u}_k + \frac{A^{-2}}{\Delta}\left[e^{A\Delta} - I - \Delta A\right] B\left(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\right).$$

4. Квадратичная интерполяция (l=2):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k,$$

$$\mathbf{v}_1(k) = \frac{1}{\Delta}\left(4\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} - 3\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k+1}\right);$$

$$\mathbf{v}_2(k) = \frac{2}{\Delta^2}\left(\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_k - 2\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}}\right),$$

где $\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{u}((k+\frac{1}{2})\Delta)$;

$$J_\Delta \approx A^{-1}\left(e^{A\Delta} - I\right) B\mathbf{u}_k + \frac{A^{-2}}{\Delta}\left[e^{A\Delta} - I - \Delta A\right] B\left(4\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} - 3\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k+1}\right) +$$

$$+\frac{4A^{-3}}{\Delta^2}\left[e^{A\Delta} - I - \Delta A - \frac{\Delta^2 A^2}{2}\right] B\left(\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_k - 2\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}}\right).$$

5. Кубическая интерполяция (l=3):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k,$$

$$\mathbf{v}_1(k) = \frac{1}{2\Delta}\left(2\mathbf{u}_{k+1} + 18\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 9\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - 11\mathbf{u}_k\right),$$

$$\mathbf{v}_2(k) = \frac{9}{2\Delta^2}\left(-\mathbf{u}_{k+1} - 5\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} + 4\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} + 2\mathbf{u}_k\right),$$

$$\mathbf{v}_3(k) = \frac{9}{2\Delta^3}\left(\mathbf{u}_{k+1} + 3\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 3\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - \mathbf{u}_k\right),$$

где $\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{u}((k+\frac{1}{3})\Delta)$, $\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{u}((k+\frac{2}{3})\Delta)$;

$$J_\Delta \approx A^{-1}\left(e^{A\Delta} - I\right)B\mathbf{u}_k +$$

$$+\frac{A^{-2}}{2\Delta}\left[e^{A\Delta} - I - \Delta A\right]B\left(2\mathbf{u}_{k+1} + 18\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 9\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - 11\mathbf{u}_k\right) +$$

$$+\frac{9A^{-3}}{\Delta^2}\left[e^{A\Delta} - I - \Delta A - \frac{\Delta^2 A^2}{2}\right]B\left(-\mathbf{u}_{k+1} - 5\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} + 4\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} + 2\mathbf{u}_k\right) +$$

$$+\frac{27A^{-4}}{\Delta^3}\left[e^{A\Delta} - I - \Delta A - \frac{\Delta^2 A^2}{2} - \frac{\Delta^3 A^3}{6}\right]B\left(\mathbf{u}_{k+1} + 3\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 3\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - \mathbf{u}_k\right).$$

Из (35) следует, что проблема моделирования систематической составляющей практически сводится к вычислению матриц $\tilde{B}_j$ вида:

$$\tilde{B}_j = A^{-(j+1)} j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{s=0}^{j} \frac{\Delta^s A^s}{s!}\right] B, \tag{37}$$

где $j = 0,\ 1, \ldots, l$. Если матрица A неособенная, то матрицы $\tilde{B}_j$ могут быть вычислены непосредственно по формуле (37) с использованием алгоритма вычисления матричной экспоненты $e^{A\Delta}$. Однако, матрицы $\tilde{B}_j$ могут быть вычислены и в случае вырожденной матрицы A, поскольку $\tilde{B}_j$ представимы в виде:

$$\tilde{B}_j = j! A^{-(j+1)} \sum_{s=j+1}^{\infty} \frac{\Delta^s}{s!} A^s B; \quad j = 0,\ 1, \ldots, l. \tag{38}$$

Из последнего равенства следует существование конечного предела левой части (38) при $det(A) \to 0$. Для вычисления матриц $\tilde{B}_j$ в случае вырожденной матрицы A рассмотрим обобщение подхода, предложенного в [15].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B\sum_{j=0}^{l} t^j \mathbf{v}_j(k); \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = 0, \tag{39}$$

где $\hat{\mathbf{x}}(t) \in R_n$.

Нетрудно видеть, что решение системы (39) имеет вид:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = e^{At}\hat{\mathbf{x}}(0) + \sum_{j=0}^{l} J_{t,j} B \mathbf{v}_j(k).$$

Откуда следует, что:

$$\hat{\mathbf{x}}(\Delta) = e^{A\Delta}\hat{\mathbf{x}}(0) + \sum_{j=0}^{l} \tilde{B}_j \mathbf{v}_j(k).$$

Введем в рассмотрение расширенную векторную функцию:

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}_{n+1}(t) \\ \dots \\ \mathbf{x}_{n+l+1}(t) \\ \mathbf{x}_{n+l+2}(t) \end{bmatrix},$$

которая является решением однородной системы уравнений вида:

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) = A_1 \hat{\mathbf{y}}(t); \quad \hat{\mathbf{y}}(0) = \begin{bmatrix} O_{n,1} \\ \mathbf{v}_0(k) \\ \mathbf{v}_1(k) \\ 2!\mathbf{v}_2(k) \\ \dots \\ l!\mathbf{v}_l(k) \end{bmatrix}, \tag{40}$$

где

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{l} t^j \mathbf{v}_j(k),$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+p+1}(t) = \mathbf{x}_{n+p+2}(t); \quad p = 0,\ 1, \dots, l$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+l+2}(t) = 0;$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & B & O_{n,k} & O_{n,k} & \dots & O_{n,k} & O_{n,k} \\ O_{k,n} & O_k & I_k & O_k & \dots & O_k & O_k \\ & & & \dots & & & \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \dots & I_k & O_k \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \dots & O_k & I_k \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \dots & O_k & O_k \end{bmatrix};$$

O_k-нулевая матрица размера $k \times k$; I_k—единичная матрица размера $k \times k$; $O_{n,k}$—нулевая матрица размера $n \times k$.

Решением системы (40) является матричная функция:

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = e^{A_1 t}\hat{\mathbf{y}}(0) = \begin{bmatrix} e^{At} & J_{t,0}B & J_{t,1}B & \dots & \frac{1}{l!}J_{t,l}B \\ & & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{n,1} \\ \mathbf{v}_0(k) \\ \mathbf{v}_1(k) \\ 2!\mathbf{v}_2(k) \\ \dots \\ l!\mathbf{v}_l(k) \end{bmatrix}$$

.

Таким образом, вычислив матричную экспоненту $e^{A_1\Delta}$, можно получить сразу как матрицу $e^{A\Delta}$ так и матрицы $\tilde{B}_j$; $j = 0,\ 1, \dots, l$. Сформулируем полученный результат в форме специального алгоритма.

Алгоритм 2.2. Вычисление матриц $e^{A\Delta}$ и $\tilde{B}_j$; $j = 0,\ 1, \dots, l$.

1. Из матрицы A и B системы (19) формируется матрица A_1 системы (40).

2. К матрице $A_1\Delta$ применяется алгоритм 2.1 вычисления матричной экспоненты, результатом которого с точностью ε, оказывается матрица:

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} e^{A\Delta} & J_{\Delta,0}B & J_{\Delta,1}B & \dots & \frac{1}{l!}J_{\Delta,l}B \\ & & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}.$$

3. Левый верхний блок (размера $n \times n$) матрицы $\tilde{A}_1$ является матрицей $e^{A\Delta}$.

4. $j := 1$.

5. $j+1$-й левый верхний блок (размера $n \times k$) матрицы $\tilde{A}_1$ является матрицей: $\hat{B}_j = \frac{1}{j!}J_{\Delta,j}B$.

6. $\tilde{B}_j := j!\hat{B}_j$.

7.Если $j < l+1$, то $j := j+1$ и перейти к пункту 5.

8. Конец работы алгоритма 2.2.

2.4. Алгоритм моделирования случайной составляющей решения СЛСДУ.

Сначала рассмотрим основные идеи, которые будут положены в основу построения алгоритма моделирования случайной составляющей решения СЛСДУ, а затем приведем непосредственно сам алгоритм.

Найдем такое представление случайного столбца $\tilde{\mathbf{f}}_k \in R_n$, которое было бы удобно для моделирования. Для этого рассмотрим дисперсионную матрицу $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}$:

$$D_f(\Delta) = M\left\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^T\right\}.$$

Спектральное разложение дисперсионной матрицы $D_f(\Delta)$ имеет вид:

$$D_f(\Delta) = S_D\Lambda_D^2 S_D^{-1}, \tag{41}$$

где S_D- матрица ортонормированных собственных векторов $D_f(\Delta)$, а Λ_D- диагональная матрица. Отметим, что $D_f(\Delta)-$ симметричная, неотрицательно определенная матрица, поэтому ее собственные числа неотрицательны, а матрица собственных векторов ортогональная.

Представим $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}$ в виде:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1} = S_D\Lambda_D\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^*, \tag{42}$$

где $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^*-$ случайный столбец, такой, что компоненты $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^{*(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ являются независимыми гауссовскими случайными величинами с нулевым средним и единичной дисперсией.

Таким образом, при представлении (42) справедливо соотношение (41). Для того, чтобы смоделировать случайный столбец $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}$ необходимо найти матрицу $D_f(\Delta)$, ее собственные числа и собственные векторы, а также смоделировать n независимых гауссовских случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, которые будут являться элементами $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^*$. Выражение для матрицы $D_f(\Delta)$ и дифференциальное уравнение для ее определения даны соотношениями (9) и (10). Отметим, что так как матрица $D_f(\Delta)$ симметричная, то полезную информацию несут $\frac{n^2+n}{2}$ элементов, расположенных над(под) главной диагональю $D_f(\Delta)$, включая главную диагональ. Для нахождения матрицы $D_f(\Delta)$ необходимо решить уравнение (10). С этой целью оно приводится к виду:

$$\frac{d\mathbf{d}_f(\Delta)}{d\Delta} = A^*\mathbf{d}_f(\Delta) + \mathbf{b}, \tag{43}$$

где столбцы $\mathbf{d}_f(\Delta)$, $\mathbf{b} \in R_{\frac{n^2+n}{2}}$ и имеют вид:

$$\mathbf{d}_f^T(\Delta) = \left[\mathbf{d}_{f_1}^T(\Delta), \dots, \mathbf{d}_{f_n}^T(\Delta)\right], \quad \mathbf{b}^T = \left[\mathbf{b}_1^T \ \dots \ \mathbf{b}_n^T\right], \tag{44}$$

где

$$\mathbf{d}_{f_j}^T(\Delta) = \left[D_f^{(1j)}(\Delta) \ \dots \ D_f^{(n-j+1\ n)}(\Delta)\right], \quad \mathbf{b}_j^T = \left[S^{(1j)} \ \dots \ S^{(n-j+1\ n)}\right],$$

где $j = 1, \dots, n$, $S \stackrel{\Delta}{=} \Sigma\Sigma_f^2\Sigma^T$.

Матрица A^* (размера $\frac{n^2+n}{2} \times \frac{n^2+n}{2}$), входящая в (18), строится следующим образом. Сначала строятся матрицы Q_{ip}; $p = 0, \dots, n-1$, $i = 1, \dots, n-p$ размера $n \times n$ с элементами $Q_{ip}^{(kl)}$ вида:

$$Q_{ip}^{(kl)} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad k = i, \ \ l = i+p \\ 1, & \text{при} \quad k = i+p, \ l = i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Затем рассматриваются матрицы: R_{ip}; $p = 0, \dots, n-1$, $i = 1, \dots, n-p$ вида:

$$R_{ip} = Q_{ip}A^T + AQ_{ip}.$$

Далее нетрудно заметить, что первые n столбцов матрицы A^* строятся из матриц $R_{i0}(i = 1, \dots, n)$ подобно тому, как строится столбец $\mathbf{d}_f(\Delta)$ из матрицы $D_f(\Delta)$ по правилу (44). Затем из матриц $R_{i1}(i = 1, \dots, n-1)$ получаем следующие $n-1$ столбец матрицы A^* по тому же правилу и т.д. Теперь, после того, как определены $\mathbf{d}_f(\Delta)$, $\mathbf{b}$ и A^* можно найти решение уравнения (43):

$$\mathbf{d}_f(\Delta) = A^{*-1}\left(e^{A^*\Delta} - I\right)\mathbf{b}. \tag{45}$$

Следует отметить, что при переходе от (10) к (43) резко возрастает размерность задачи.

Далее после перехода от $\mathbf{d}_f(\Delta)$ к $D_f(\Delta)$ могут быть определены матрицы S_D и Λ_D. После этого можно приступить к моделированию случайной составляющей решения СЛСДУ.

Сформулируем изложенные идеи в виде алгоритмов.

Алгоритм 2.3 Преобразование симметричной $n \times n$ матрицы A в столбец $\mathbf{b}$ размера $\frac{n^2+n}{2}$.

1. $i := 0$.
2. $j := 1$.
3. $q := 1$.
4. $\mathbf{b}^{(q+i)} := A^{(q\ q+j-1)}$.
5. Если $q < n - j + 1$, то $q := q + 1$ и перейти к пункту 4.
6. $i := i + n - j + 1$.
7. Если $j < n$, то $j := j + 1$ и перейти к пункту 3.
8. Конец работы алгоритма.

Алгоритм 2.4 Преобразование столбца $\mathbf{b}$ размера $\frac{n^2+n}{2}$ в симметричную матрицу A размера $n \times n$.

1. $i := 0$.
2. $j := 1$.
3. $q := 1$.
4. $A^{(q\ q+j-1)} := \mathbf{b}^{(q+i)}$.
5. $A^{(q+j-1\ q)} := \mathbf{b}^{(q+i)}$.
6. Если $q < n - j + 1$, то $q := q + 1$ и перейти к пункту 4.
7. $i := i + n - j + 1$.
8. Если $j < n$, то $j := j + 1$ и перейти к пункту 3.
9. Конец работы алгоритма.

Алгоритм 2.5 Преобразование симметричной матрицы A размера $n \times n$ в матрицу A^* размера $\frac{n^2+n}{2} \times \frac{n^2+n}{2}$.

1. $Q := O_n$
2. $r := 1$.
3. $j := 1$.
4. $q := 1$.
5. $i := q + j - 1$.
6. $Q^{(qi)} := 1$.
7. $Q^{(iq)} := 1$.
8. $R := QA^T + AQ$.
9. $m := 0$.

10. $s := 1$.

11. $l := 1$.

12. $A^{*(l+m\ r)} := R^{(l\ l+s-1)}$.

13. Если $l < n - s + 1$, то $l := l + 1$ и перейти к пункту 12.

14. $m := m + n - s + 1$.

15. Если $s < n$, то $s := s + 1$ и перейти к пункту 11.

16. $Q := O_n$.

17. $r := r + 1$.

18. Если $q < n - j + 1$, то $q := q + 1$ и перейти к пункту 5.

19. Если $j < n$, то $j := j + 1$ и перейти к пункту 4.

20. Конец работы алгоритма.

Алгоритм 2.6 Алгоритм моделирования случайной составляющей.

1. Формирование столбца $\mathbf{b}$ из матрицы $\Sigma\Sigma_f^2\Sigma^T$ по алгоритму 2.3.

2. Формирование матрицы A^* из матрицы A по алгоритму 2.5.

3. Определение столбца $\mathbf{d}_f(\Delta) = A^{*-1}\left(e^{A^*\Delta} - I\right)\mathbf{b}$ по алгоритму 2.2.

4. Формирование матрицы $D_f(\Delta)$ из столбца $\mathbf{d}_f(\Delta)$ по алгоритму 2.4.

5. Осуществление спектрального разложения матрицы $D_f(\Delta)$ и определение матриц S_D, Λ_D^2.

6. Определение матрицы Λ_D.

7. $i := 1$.

8. Моделирование случайной величины $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^{*(i)}$.

9. Если $i < n$, то $i := i + 1$ и перейти к пункту 7.

10. $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1} := S_D\Lambda_D\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^*$.

11. Конец работы алгоритма.

2.5. Алгоритм моделирования решения системы линейных стохастических дифференциальных уравнений.

Приведем алгоритм моделирования решения СЛСДУ.

Алгоритм 2.7. Моделирование решения СЛСДУ.

1. Определение матриц $\tilde{A} = e^{A\Delta}$ и $\tilde{B}_j = \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}\tau^j d\tau B$; $j = 0,\ 1, \ldots, l$

по алгоритму 2.2.

2. $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}(0)$.

3. $k := 1$.

4. Моделирование случайного столбца $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}$ по алгоритму 2.6.

5. $\mathbf{x}_{k+1} := \tilde{A}\mathbf{x}_k + \sum\limits_{j=0}^{l} \tilde{B}_j \mathbf{v}_j(k) + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}$.

6. $\mathbf{y}_k := H^T \mathbf{x}_k$.

7. Если $k < N$, то $k := k + 1$ и перейти к пункту 4.

8. Конец работы алгоритма.

Список литературы

[1] Arnold L. Stochastic Differential Equations, New York: Wiley, 1974.

[2] Richardson J.M. The application of truncated hierarchy techniques in the solution of a stochastic linear differential equation. In Stochastic Processes in Mathematical Phisics and Engineering// Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. 16, 1964 (R. Bellman, editor) Amer. Math. Soc., Providence RI, pp. 290-302.

[3] McKenna J., Morrison J.A. Moments and correlation functions of a stochastic differential equation//J. Math. Phys., 11, 1970, pp. 2348-2360.

[4] McKenna J., Morrison J.A. Moments of solutions of a class of stochastic differential equations//J. Math. Phys., 12, 1971, pp. 2126-2136.

[5] Kloeden P.E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1992.

[6] Gard T.C. Introduction to Stochastic Differential Equations, New York: Marcel Dekker, 1988.

[7] Horsthemke W., Lofever R. Noise Induced Transitions, Springer, 1984.

[8] Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Stochastic Differential Systems: Analisis and Filtering, New York: Wiley, 1987.

[9] Mikulevicius R. On some properties of solutions of stochastic differential equations//Lietuvos Matem. Rink, 4, 1983, pp. 18-31.

[10] Strook D.W., Varadhan S.R.S. Multidimensional Diffusion Processes, Springer, 1982.

[11] Arato M. Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1982.

[12] Shkurko I.O. Numerical solution of linear systems of stochastic differential equations//In: Numerical Methods for Statistics and Modeling. Collected Scientific Works. Novosibirsk, 1987, pp. 101-109 (In Russian)

[13] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд.5-е. М.:Наука, 1982, 331с.

[14] Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Физматгиз, 1973, 631 с.

[15] Арсеньев Д.Г., Кульчицкий О.Ю. Оптимизация алгоритмов численного интегрирования жестких линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами//ВИНИТИ 31.01.86, N 732-В, 1986. 32с.

[16] Арсеньев Д.Г., Иванов В.М., Кульчицкий О.Ю. Адаптивные методы вычислительной математики и механики. Стохастический вариант. СПб.: Наука, 1996, 366 с.