ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 1998
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

стохастические дифференциальные уравнения

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Д.Ф.Кузнецов

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29
С.-Петербургский государственный технический университет
Кафедра "Высшая математика"
e-mail: control1@citadel.stu.neva.ru

Аннотация.

В статье рассматривается подход к получению двух семейств аналитических формул для вычисления стохастических интегралов, который основывается на решении дифференциального уравнения второго порядка в частных производных путем аддитивного и мультипликативного разделения переменных. С помощью этого подхода получен ряд новых аналитических формул для вычисления стохастических интегралов. Среди них присутствуют формулы для стохастических интегралов по процессам Ито, которые являются решениями стохастических дифференциальных уравнений Ито, коэффициенты диффузии и сноса которых не удовлетворяют классическим условиям существования и единственности решений стохастических

[0]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта N 97-0-1.8-71 по фундаментальным исследованиям в области естествознания.

дифференциальных уравнений. Рассмотрены также формулы для вычисления стохастических интегралов по процессам Ито с ограничениями на их области определения и области значений.

Ключевые слова: стохастический интеграл, стохастическое дифференциальное уравнение, аналитическая формула, случайный процесс, формула Ито.

1. Введение

В настоящее время известна обширная таблица римановых интегралов. В тоже время для стохастических интегралов известно лишь несколько аналитических формул для их вычисления (см. например [1,2]). Настоящая статья посвящена получению двух семейств новых аналитических формул для вычисления стохастических интегралов.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Рассмотрим процесс Ито $\eta_\tau \in \Re^n$, определенный при $\tau \in [0, T]$, $T < \infty$, как решение стохастического дифференциального уравнения Ито

$$d\eta_\tau = a(\eta_\tau, \tau)d\tau + B(\eta_\tau, \tau)df_\tau, \ \eta_0 = \eta(0, \omega), \tag{1.1}$$

где $a(\eta, \tau) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$, $B(\eta, \tau) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^{n \times m}$ – неслучайные функции, $f_\tau \in \Re^m$ – стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; случайная величина η_0 не зависит от приращения $f_\tau - f_0$ при $\tau > 0$. Относительно функций $a(\eta, \tau)$ и $B(\eta, \tau)$ будем предполагать, что они удовлетворяют следующим условиям:

I. $a(\eta, \tau), B_1(\eta, \tau), \ldots, B_m(\eta, \tau)$ – борелевские функции, принимающие значения из $\Re^n$.

II. Существует постоянная $K < \infty$ такая, что

$$|a(\eta, \tau)|^2 + \sum_{k=1}^{m} |B_k(\eta, \tau)|^2 \le K^2(1 + |\eta|^2),$$

$$|a(\eta, \tau) - a(\theta, \tau)| + \sum_{k=1}^{m} |B_k(\eta, \tau) - B_k(\theta, \tau)| \le K|\eta - \theta|$$

для всех $\eta, \theta \in \Re^n$; $B_k(\eta, \tau)$ – k-ый столбец матрицы $B(\eta, \tau)$.

Известно [3], что в условиях I и II существует единственное с точностью до стохастической эквивалентности и непрерывное с вероятностью

1 решение η_τ стохастического дифференциального уравнения (1.1). Пусть $Y \subseteq \Re^n$ – множество, для которого

$$\mathbf{P}\left\{\eta_\tau \in Y \text{ при всех } \tau \in [0, T]\right\} = 1. \tag{1.2}$$

Пусть также выполнены условия I, II и (1.2), а функция $R(\eta, \tau) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial R}{\partial \tau}(\eta, \tau),\ \frac{\partial R}{\partial \eta_i}(\eta, \tau), \frac{\partial^2 R}{\partial \eta_i \partial \eta_j}(\eta, \tau);\ i, j = 1, \ldots, n$$

при $(\eta, \tau) \in Y \times [0, T]$. Тогда для всех $s, t \in [0, T]$; $s > t$ справедлива формула Ито [3], которую запишем в виде, удобном для дальнейшего рассмотрения:

$$\int_t^s \left(\frac{\partial R}{\partial \eta}(\eta_\tau, \tau), d\eta_\tau\right) = R(\eta_s, s) - R(\eta_t, t) - \int_t^s \mathcal{L}_{\tau, \eta_\tau}\left\{R(\eta_\tau, \tau)\right\} d\tau \text{ п.н.}, \tag{1.3}$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение, $\mathcal{L}_{\tau,\eta}\left\{\cdot\right\}$ – оператор вида:

$$\mathcal{L}_{\tau,\eta}\left\{\cdot\right\} = \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n} B_{ir}(\eta, \tau) B_{jr}(\eta, \tau) \frac{\partial^2\{\cdot\}}{\partial \eta_i \partial \eta_j}.$$

Пусть функция $R(\eta, \tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\mathcal{L}_{\tau,\eta}\left\{R(\eta, \tau)\right\} = \varphi(\tau), \tag{1.4}$$

где $\varphi(\tau)$ – некоторая скалярная неслучайная интегрируемая на промежутке $[0, T]$ функция. Тогда (1.3) примет вид

$$\int_t^s \left(\frac{\partial R}{\partial \eta}(\eta_\tau, \tau), d\eta_\tau\right) = R(\eta_s, s) - R(\eta_t, t) - \int_t^s \varphi(\tau) d\tau \text{ п.н..} \tag{1.5}$$

Соотношение (1.5) можно интерпретировать как аналитическую формулу для вычисления интеграла в левой части (1.5). В литературе известны лишь несколько формул типа (1.5) для конкретных функций $a(\eta, \tau)$, $B(\eta, \tau)$, $R(\eta, \tau)$, $\varphi(\tau)$. Приведем некоторые из них.

$$\int_t^s (f_s - f_\tau) df_\tau = -\frac{1}{2}(s - t) + \frac{1}{2}\left(f_s - f_t\right)^2 \text{ п.н.},\ f_\tau \in \Re^1, \tag{1.6}$$

$$\int_t^s f_\tau df_\tau = -\frac{1}{2}(s - t) + \frac{1}{2}\left(f_s^2 - f_t^2\right) \text{ п.н.},\ f_\tau \in \Re^1, \tag{1.7}$$

$$\int_t^s (f_\tau, df_\tau) = -\frac{m}{2}(s-t) + \left(\mid f_s \mid^2 - \mid f_t \mid^2\right) \text{ п.н.}, \ f_\tau \in \Re^m, \tag{1.8}$$

$$\int_t^s \frac{(f_\tau, df_\tau)}{\mid f_\tau \mid^m} = \frac{1}{2-m}\left(\mid f_s \mid^{2-m} - \mid f_t \mid^{2-m}\right) \text{ п.н.}, \ m \geq 3, \ f_\tau \in \Re^m, \tag{1.9}$$

$$\int_t^s \frac{(f_\tau, df_\tau)}{\mid f_\tau \mid^2} = ln \mid f_s \mid - ln \mid f_t \mid \ \text{ п.н.}, \ f_\tau \in \Re^2. \tag{1.10}$$

Формула (1.6) содержится, например, в [1], формулу (1.7) можно найти в [1,2], а формулы (1.8)-(1.10) в [2].

В настоящей статье предлагается подход к получению двух семейств новых аналитических формул для вычисления стохастических интегралов, который основывается на решении дифференциального уравнения (1.4) при некоторых допущениях относительно функций $R(\eta,\tau)$ и $B(\eta,\tau)$.

Пусть $\eta \in \Re^1$, $B(\eta,\tau) = \theta(\eta)\sigma(\tau)$, где $\theta(\eta) : \Re^1 \to \Re^m$, $\sigma(\tau) : \ [0,T] \to \Re^1$. Тогда дифференциальное уравнение (1.4) примет вид:

$$\frac{\partial R}{\partial \tau}(\eta,\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau)\beta^2(\eta)\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2}(\eta,\tau) = \varphi(\tau), \tag{1.11}$$

где $\beta^2(\eta) = \sum\limits_{r=1}^{m} \left(\theta_r(\eta)\right)^2$.

Решение уравнения (1.11) может быть найдено, например, методом аддитивного разделения переменных $(R(\eta,\tau) = \rho(\eta) + \psi(\tau))$ или мультипликативного разделения переменных $(R(\eta,\tau) = \rho(\eta)\psi(\tau))$.

2. Случай аддитивного разделения переменных

Пусть $R(\eta,\tau) = \rho(\eta) + \psi(\tau), \ \eta \in \Re^1$. Тогда уравнение (1.11) примет вид:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau)\beta^2(\eta)\frac{d^2\rho(\eta)}{d\eta^2} = \varphi(\tau). \tag{2.1}$$

После разделения переменных в (2.1) при $\sigma(\tau) \neq 0$ получим:

$$\frac{1}{2}\beta^2(\eta)\frac{d^2\rho(\eta)}{d\eta^2} = \left(\varphi(\tau) - \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\right)\frac{1}{\sigma^2(\tau)} = \lambda = const. \tag{2.2}$$

Если $\beta^2(\eta) > 0$ то из (2.2) получим два дифференциальных уравнения: $d\psi(\tau)/d\tau = \varphi(\tau) - \lambda\sigma^2(\tau)$, $d^2\rho(\eta)/d\eta^2 = 2\lambda/\beta^2(\eta)$, решения которых имеют вид:

$$\psi(\tau) = \psi_0 + \int_0^\tau \left(\varphi(u) - \lambda\sigma^2(u)\right) du, \tag{2.3}$$

$$\rho(\eta) = \rho_0 + \rho_1\eta + 2\lambda \int_{y_0}^{\eta} g(u)du, \tag{2.4}$$

где $g(u) \overset{def}{=} \int_{y_0}^{u} dz/\beta^2(z)$; $\rho_0, \rho_1, y_0, \psi_0$ – постоянные, $\beta^2(u) > 0$ при $u \in [y_0, \eta]$.

Подставляя (2.3) и (2.4) в (1.5) и учитывая, что $R(\eta,\tau) = \rho(\eta) + \psi(\tau)$, $\eta \in \Re^1$, получим при $\lambda \neq 0$:

$$\int_t^s g(\eta_\tau)d\eta_\tau = -\frac{1}{2}\int_t^s \sigma^2(\tau)d\tau + \int_{\eta_t}^{\eta_s} g(u)du \text{ п.н..} \tag{2.5}$$

Если же $\lambda = 0$, то: $\int_t^s d\eta_\tau = \eta_s - \eta_t$ п.н..

При определенном выборе функции $\beta(z)$ интеграл $\int_{\eta_t}^{\eta_s} g(u)du$ может быть вычислен аналитически. Тогда формула (2.5) будет определять при различных $\beta(z)$ целое семейство аналитических формул для вычисления стохастического интеграла $\int_t^s g(\eta_\tau)d\eta_\tau$.

Рассмотрим ряд примеров выбора функций $\beta(z)$ и соответствующих им формул из семейства (2.5). При этом, если выбираемая функция $\beta(z)$ такова, что функция $B(\eta,\tau)$ не удовлетворяет условию II, или такова, что накладывает ограничения на область определения или область значений процесса η_τ, то в этом случае будем приводить примеры стохастических дифференциальных уравнений Ито и их точных решений η_τ с целью демонстрации существования процессов η_τ, удовлетворяющих формуле (2.5).

1. $\beta^2(\eta) = 1$:

$$\int_t^s \eta_\tau d\eta_\tau = -\frac{1}{2}\int_t^s \sigma^2(\tau)d\tau + \frac{\eta_s^2}{2} - \frac{\eta_t^2}{2} \text{ п.н..}$$

2. $\beta^2(\eta) = \sqrt{y(\eta)}$, $y(\eta) \overset{def}{=} a\eta^2 + b\eta + c$, $\Delta = 4ac - b^2 > 0$, $a > 0$:

$$\int_t^s Arsh\frac{2a\eta_\tau + b}{\sqrt{\Delta}}d\eta_\tau = -\frac{1}{2}\sqrt{a}\int_t^s \sigma^2(\tau)d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_t) \text{ п.н.,} \tag{2.6}$$

где $F(x) \overset{def}{=} (x + b/2a)Arsh((2ax+b)/\sqrt{\Delta}) - \sqrt{y(x)}/\sqrt{a}$.

3. $\beta^2(\eta) = y(\eta)$, $\Delta = 4ac - b^2 > 0$, $a > 0$:

$$\int_t^s arctg\frac{2a\eta_\tau + b}{\sqrt{\Delta}}d\eta_\tau = -\frac{1}{4}\sqrt{\Delta}\int_t^s \sigma^2(\tau)d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_t) \text{ п.н.,}$$

где $F(x) \overset{def}{=} (x + b/2a)arctg((2ax+b)/\sqrt{\Delta}) - (\sqrt{\Delta}/4a)/lny(x)$.

4. $\beta^2(\eta) = 1/\sqrt{y(\eta)},\ \Delta = 4ac - b^2 > 0;\ a > 0:$

$$\int_t^s F_1(\eta_\tau)d\eta_\tau = -\frac{1}{2}\int_t^s \sigma^2(\tau)d\tau + F_2(\eta_s) - F_2(\eta_t) \text{ п.н.},$$

где $F_1(x) \overset{def}{=} ((2ax+b)/4a)\sqrt{y(x)}+(\Delta/(8a\sqrt{a}))Arsh((2ax+b)/\sqrt{\Delta})$, $F_2(x) \overset{def}{=} (\Delta/(8a\sqrt{a}))(F(x)+y^{3/2}(x)/6a)$; функция $F(x)$ такая же, как в формуле (2.6).

5. $\beta^2(\eta) = 1/P_{n-1}(\eta)$, где $P_{n-1}(\eta) > 0$ – многочлен степени $n-1$ с вещественными коэффициентами:

$$\int_t^s Q_n(\eta_\tau)d\eta_\tau = -\frac{1}{2}\int_t^s \sigma^2(\tau)d\tau + H_{n+1}(\eta_s) - H_{n+1}(\eta_t) \text{ п.н.},$$

где $Q_n(x) = \sum\limits_{l=0}^{n} \beta_l x^{n-l},\ P_{n-1}(x) = dQ_n(x)/dx,\ H_{n+1}(x) = \int Q_n(x)dx$, а $\beta_l \in \Re^1$ – постоянные.

Далее будем считать η_0 постоянной.

6. $\beta^2(\eta) = e^{-2\eta}:$

$$\int_0^t e^{2\eta_\tau}d\eta_\tau = -t + \frac{1}{2}\left(e^{2\eta_t} - 1\right) \text{ п.н.},$$

где, например: $\eta_t = ln\left(f_t + e^{\eta_0}\right)$ (решение уравнения: $d\eta_t = -0.5e^{-2\eta_t}dt + e^{-\eta_t}df_t$), $0 \le |\eta_0| < \infty$, $t \le min\left\{t \ge 0:\ f_t + e^{\eta_0} = 0\right\}$.

7. $\beta^2(\eta) = \eta^2:$

$$\int_0^s \frac{d\eta_\tau}{\eta_\tau} = \frac{1}{2}\int_0^s \sigma^2(\tau)d\tau + ln\eta_s - ln\eta_0 \text{ п.н.}, \tag{2.7}$$

где, например: $\eta_t = \eta_0 e^{\left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma f_t}$ (решение уравнения: $d\eta_t = a\eta_t dt + \sigma\eta_t df_t$), $0 < \eta_0 < \infty$; $a, \sigma = const$.

8. $\beta^2(\eta) = \eta > 0:$

$$\int_0^s ln\eta_\tau d\eta_\tau = -\frac{1}{2}\int_0^s \sigma^2(\tau)d\tau + \eta_s ln\eta_s - \eta_s - \eta_0 ln\eta_0 + \eta_0 \text{ п.н.},$$

где, например: $\eta_t = \left(f_t + \sqrt{\eta_0}\right)^2$ (решение уравнения: $d\eta_t = dt + 2\sqrt{\eta_t}df_t$), $0 < \eta_0 < \infty$.

9. $\beta^2(\eta) = \eta^2(\eta^2 - 1), \ \mid \eta \mid > 1:$

$$\int_0^s \left(-\frac{1}{\eta_\tau} + \frac{1}{2} ln \frac{\eta_\tau + 1}{\eta_\tau - 1} \right) d\eta_\tau = \frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_0) \text{ п.н.},$$

где $F(x) \stackrel{def}{=} xArcthx + 0.5ln(x^2 - 1) - lnx$ и, например: $\eta_t = sec(\sigma f_t + arcsec\eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = 0.5\sigma^2\eta_t(2\eta_t^2 - 1)dt + \sigma\eta_t\sqrt{\eta_t^2 - 1}df_t$) или $\eta_t = cosec(\sigma f_t + arccosec\eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = 0.5\sigma^2\eta_t(2\eta_t^2 - 1)dt - \sigma\eta_t\sqrt{\eta_t^2 - 1}df_t$), $1 < \eta_0 < \infty$; для приведенных процессов $\eta_t : s \leq max\{t \geq 0 : \eta_t > 0\}$, $\sigma = const$.

10. $\beta^2(\eta) = cos^4\eta:$

$$\int_0^s \left(\frac{sin\eta_\tau}{cos^3\eta_\tau} + 2tg\eta_\tau \right) d\eta_\tau = -\frac{3}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_0) \text{ п.н.},$$

где $F(x) \stackrel{def}{=} 2^{-1}cos^{-2}x - 2lncosx$ и, например: $\eta_t = arctg(e^{-t}(tg\eta_0 + \sqrt{2}\int_0^t e^s df_s))$ (решение уравнения: $d\eta_t = -(sin2\eta_t + 0.25sin4\eta_t)\,dt + \sqrt{2}cos^2\eta_t df_t$) или $\eta_t = arctg(\sigma f_t + tg\eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = -\sigma^2 sin\eta_t cos^3\eta_t dt + \sigma cos^2\eta_t df_t$), $cos\eta_0 > 0$; для приведенных процессов $\eta_t : s \leq min\{t \geq 0 : cos\eta_t = 0\}$, $\sigma = const$.

11. $\beta^2(\eta) = sin^4\eta:$

$$\int_0^s \left(-\frac{cos\eta_\tau}{sin^3\eta_\tau} - 2ctg\eta_\tau \right) d\eta_\tau = -\frac{3}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_0) \text{ п.н.},$$

где $F(x) \stackrel{def}{=} 2^{-1}sin^{-2}x - 2lnsinx$ и, например: $\eta_t = arcctg(\sigma f_t + ctg\eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = \sigma^2 cos\eta_t sin^3\eta_t dt - \sigma sin^2\eta_t df_t$); для приведенного процесса $\eta_t : s \leq min\{t \geq 0 : sin\eta_t = 0\}$, $sin\eta_0 > 0$, $\sigma = const$.

12. $\beta^2(\eta) = \left(1 - \eta^2\right)^2.$

$$\int_0^s \left(\frac{\eta_\tau}{2(1 - \eta_\tau^2)} + \frac{1}{4}u(\eta_\tau) \right) d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + \frac{\eta_s}{4}u(\eta_s) - \frac{\eta_0}{4}u(\eta_0) \text{ п.н.}, \quad (2.8)$$

где $u(x) \stackrel{def}{=} ln|(1 + x)/(1 - x)|$ и, например: $\eta_t = th(\sigma f_t + Arth\eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = -\sigma^2\eta_t(1 - \eta_t^2)dt + \sigma(1 - \eta_t^2)df_t$), $\mid \eta_0 \mid < 1$ или $\eta_t = cth(\sigma f_t + Arcth\eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = \sigma^2\eta_t(1 - \eta_t^2)dt - \sigma(1 - \eta_t^2)df_t$), $1 < \mid \eta_0 \mid < \infty$, $\sigma = const$.

13. $\beta^2(\eta) = |1-\eta^2|, \ \mid \eta \mid < 1:$

$$\int_0^s u(\eta_\tau)d\eta_\tau = -\int_0^s \sigma^2(\tau)d\tau + \eta_s u(\eta_s) + u_1(\eta_s) - \eta_0 u(\eta_0) - u_1(\eta_0), \qquad (2.9)$$

где $u(x) \stackrel{def}{=} ln|(1+x)/(1-x)|$, $u_1(x) \stackrel{def}{=} ln|1-x^2|$ и, например: $\eta_t = ch(\sigma f_t + Arch\eta_0)$ (решение уравнения : $d\eta_t = 0.5\sigma^2\eta_t dt + \sigma\sqrt{\eta_t^2 - 1}df_t$), $\eta_t = cos\,(\sigma f_t + arccos\eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = -0.5\sigma^2\eta_t dt - \sigma\sqrt{1-\eta_t^2}df_t$) или $\eta_t = sin\,(\sigma f_t + arcsin\eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = -0.5\sigma^2\eta_t dt + \sigma\sqrt{1-\eta_t^2}df_t$), $\sigma = const.$

3. Случай мультипликативного разделения переменных

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (1.11):

$$\frac{\partial R}{\partial \tau}(\eta,\tau) + \frac{1}{2}\beta^2(\eta)\sigma^2(\tau)\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2}(\eta,\tau) = 0. \qquad (3.1)$$

Пусть $R(\eta,\tau) = \psi(\tau)\rho(\eta)$, где $\psi(\tau): \ [0,T] \to \Re^1$, $\rho(\eta): \Re^1 \to \Re^1$. Тогда, подставляя $R(\eta,t) = \psi(\tau)\rho(\eta)$ в (3.1), получим:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\rho(\eta) + \frac{1}{2}\beta^2(\eta)\sigma^2(\tau)\psi(\tau)\frac{d^2\rho(\eta)}{d\eta^2} = 0. \qquad (3.2)$$

Разделив левую и правую части (3.2) на $\rho(\eta)\psi(\tau)\sigma^2(\tau)$ в предположении, что $\psi(\tau),\ \sigma(\tau),\ \rho(\eta) \neq 0$, получим:

$$\frac{1}{\psi(\tau)\sigma^2(\tau)}\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{\beta^2(\eta)}{\rho(\eta)}\frac{d^2\rho(\eta)}{d\eta^2} = \lambda = const. \qquad (3.3)$$

Уравнение (3.3) эквивалентно двум дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = \lambda\sigma^2(\tau)\psi(\tau), \qquad (3.4)$$

$$\beta^2(\eta)\frac{d^2\rho(\eta)}{d\eta^2} + \mu\rho(\eta) = 0,\ \mu = 2\lambda. \qquad (3.5)$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.4) имеет вид: $\psi(\tau) = \psi_0 e^{\lambda\int_0^\tau \sigma^2(u)du}$, где ψ_0 – произвольная постоянная. Нетрудно видеть, что частным решением дифференциального уравнения (1.11) является интеграл:

$\int_0^\tau \varphi(u)du$. Поэтому общее решение дифференциального уравнения (1.11) с учетом сделанных допущений имеет вид:

$$R(\eta,\tau) = \psi(\tau)\rho(\eta) + \int_0^\tau \varphi(u)du, \tag{3.6}$$

где $\rho(\eta)$ – решение дифференциального уравнения (3.5).

Подставляя (3.6) при $\psi_0 \neq 0$ в (1.5), получим, в рамках сделанных предположений, следующую формулу:

$$\int_t^s \psi(\tau)\frac{d\rho}{d\eta}(\eta_\tau)d\eta_\tau = \psi(s)\rho(\eta_s) - \psi(t)\rho(\eta_t) \text{ п.н..} \tag{3.7}$$

Формула (3.7) определяет семейство формул для вычисления стохастического интеграла в левой части (3.7) при различных функциях $\beta(\eta)$ и параметрах μ.

Рассмотрим примеры выбора $\beta(\eta)$, μ и $\rho(\eta)$ [4], которые могут быть использованы в формуле (3.7). При этом, также как и в параграфе 2, будем приводить, там где это необходимо, примеры процессов η_t, удовлетворяющих формуле (3.7). Далее C_1, C_2, σ – постоянные.

1. $\beta^2(\eta) = 1$.

1.1 $\mu < 0,\ \rho(\eta) = C_1 e^{-\sqrt{|\mu|}\eta} + C_2 e^{\sqrt{|\mu|}\eta}$.

1.2 $\mu > 0,\ \rho(\eta) = C_1 cos(\sqrt{\mu}\eta) + C_2 sin(\sqrt{\mu}\eta)$.

2. $\beta^2(\eta) = 4(\eta^2+1)^2/(a\eta^2+a-3),\ a > 3,\ \mu = 1,\ \rho(\eta) = \left(\eta^2+1\right)^{\frac{1}{4}}(C_1 cosu(\eta)$ $+C_2 sinu(\eta))$, где $u(\eta) = 0.5\sqrt{a-1}Arsh(\eta)$.

3. $\beta^2(\eta) = (a^2\eta^2 + a)^{-1},\ a > 0,\ \mu = -1,\ \rho(\eta) = e^{a\eta^2/2}\left(C_1 + C_2 F(\eta)\right)$, где $F(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} e^{-ax^2}dx$.

4. $\beta^2(\eta) = \left(\eta^2+1\right)^2$,

4.1 $\mu + 1 = \alpha^2 > 0,\ \rho(\eta) = \sqrt{\eta^2+1}\left(C_1 cosu(\eta) + C_2 sinu(\eta)\right)$.

4.2 $\mu + 1 = -\alpha^2 < 0,\ \rho(\eta) = \sqrt{\eta^2+1}\left(C_1 chu(\eta) + C_2 shu(\eta)\right)$.

В примерах 4.1, 4.2 полагается $u(\eta) = \alpha arctg\eta$.

4.3 $\mu = -1,\ \rho(\eta) = \sqrt{\eta^2+1}\left(C_1 + C_2 arctg\eta\right)$.

Процесс η_t в примерах 4.1-4.3, например, может иметь вид: $\eta_t = tg(t + f_t$ $+arctg\eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = (1+\eta_t)(1+\eta_t^2)dt + (1+\eta_t^2)df_t$), $\eta_t = tg\left(\sigma f_t + arctg\eta_0\right)$ (решение уравнения: $d\eta_t = \sigma^2\eta_t(1+\eta_t^2)dt + \sigma(1+\eta_t^2)df_t$) или $\eta_t = ctg\left(\sigma f_t + arctg\eta_0\right)$ (решение уравнения: $d\eta_t = \sigma^2\eta_t(1+\eta_t^2)dt - \sigma(1+\eta_t^2)df_t$), $\sigma = const$.

5. $\beta^2(\eta) = \eta^2 - 1 > 0,\ \mu = -6,\ \rho(\eta) = 4(\eta^2 - 1)\eta$ – частное решение. При этом, например: $\eta_t = ch\,(\sigma f_t + Arch\eta_0)$ (см. (2.9)).

6. $\beta^2(\eta) = 1 - \eta^2 > 0,\ \mu = 6,\ \rho(\eta) = 4(\eta^2 - 1)\eta$ – частное решение. При этом, например: $\eta_t = cos\,(\sigma f_t + arccos\eta_0)$ или $\eta_t = sin\,(\sigma f_t + arcsin\eta_0)$ (см. (2.9)).

7. $\beta^2(\eta) = \eta^4$.

7.1 $\mu < 0,\ \rho(\eta) = \eta\left(C_1 e^{\sqrt{|\mu|}/\eta} + C_2 e^{-\sqrt{|\mu|}/\eta}\right)$.

7.2 $\mu > 0,\ \rho(\eta) = \eta\left(C_1 cos(\sqrt{|\mu|}\eta^{-1}) + C_2 sin(\sqrt{|\mu|}\eta^{-1})\right)$. При этом, например: $\eta_t = \eta_0(1 - \eta_0\sigma f_t)^{-1}$ (решение уравнения: $d\eta_t = \sigma^2\eta_t^3 dt + \sigma\eta_t^2 df_t$).

8. $\beta^2(\eta) = \eta^2$.

8.1 $c^2 = 0.25 - \mu > 0,\ \rho(\eta) = \sqrt{\eta}\left(C_1\eta^c + C_2\eta^{-c}\right)$.

8.2 $c^2 = \mu - 0.25 > 0,\ \rho(\eta) = \sqrt{\eta}\left(C_1 cos(cln\eta) + C_2 sin(cln\eta)\right)$.

8.3 $\mu = 0.25,\ \rho(\eta) = \sqrt{\eta}\left(C_1 + C_2 ln\eta\right)$.

В примерах 8.1-8.3 процесс η_t может быть, например, такой же, как в формуле (2.7).

9. $\beta^2(\eta) = -\eta^2 ln\eta > 0\ (0 < \eta < 1),\ \mu = -1,\ \rho(\eta) = C_1\left(\eta - ln\eta\int_{\eta_0}^{\eta} dy/lny\right) + C_2 ln\eta$. При этом, например: $\eta_t = e^{-\left(f_t + \sqrt{-ln\eta_0}\right)^2}$ (решение уравнения: $d\eta_t = -\eta_t\left(2ln\eta_t + 1\right)dt - 2\eta_t\sqrt{-ln\eta_t}df_t$), где $0 < \eta_0 < 1$.

10. $\beta^2(\eta) = \eta^4/(2\eta^2 + 1),\ \rho(\eta) = C_1(\eta^2 - \eta)e^{1/\eta} + C_2(\eta^2 + \eta)e^{-1/\eta},\ \mu = -1$.

11. $\beta^2(\eta) = \left(\eta^2 - 1\right)^2$.

11.1 $\mu - 1 = 4\alpha^2 > 0,\ \rho(\eta) = \sqrt{|\eta^2 - 1|}(C_1 cos(\alpha lnu(\eta)) + C_2 sin(\alpha lnu(\eta)))$.

11.2 $\mu - 1 = -4\alpha^2 < 0,\ \rho(\eta) = (\eta + 1)\left(C_1 u(\eta)^{\alpha - 1/2} + C_2 u(\eta)^{-\alpha - 1/2}\right)$.

11.3 $\mu = 1,\ \rho(\eta) = \sqrt{\eta^2 - 1}\left(C_1 + C_2 lnu(\eta)\right)$.

В примерах 11.1-11.3 полагается $u(\eta) = |(\eta + 1)/(\eta - 1)|$.

Процесс η_t в примерах 11.1, 11.2 может быть, например, таким же, как в формуле (2.8), а в примере 11.3, например: $\eta_t = cth\,(\sigma f_t + Arcth\eta_0)$ (см. (2.8)).

Литература

[1] *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М: Изд-во МГУ, 1966, 320с.

[2] *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. М.: Наука, 1963, 860с.

[3] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977, 656с.

[4] *Katmke E.* Differential gleichungen lösungsmethoden und lösungen. V.1. Gewöhnliche differential gleichungen. Leipzig: Verbesserte auflage, 1959, 576p.