ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2015
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Управления на основе предиктора: задача реализации

В. Л. Харитонов

Факультет прикладной математики - процессов управления,

Санкт-Петербургский государственный университет,

Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

В работе рассмотрена задача построения динамических регуляторов для систем с запаздыванием в состоянии и управлении. Регуляторы, построенные на основе метода компенсации запаздывания в управлении, описываются интегральными уравнениями. Известно, что если эти уравнения не являются внутренне устойчивыми, то замена интегралов конечными суммами приводит к неустойчивости замкнутой системы. Предложено использовать дополнительные фильтры для замены интегральных уравнений интегро-дифференциальными. Получен новый класс динамических регуляторов. Показано, что замена интегралов, входящих в состав этих регуляторов, конечными суммами не приводит к потере устойчивости замкнутой системы.

Ключевые слова: дифференциально-разностные системы, компенсация запаздывания, стабилизация

Abstract

The problem of design of dynamic controllers for systems with delay in the state and control variables is studied. Prediction-based controllers are described by integral equations. It is known that in such equations the replacing integrals by finite sums leads to instability of the closed-loop system when integral equations are not internally stable. To avoid this technical defficulty we suggest to apply additional filters. This provides a new class of dynamic controllers described by integro-differential equations. It is shown that the closed-loop system with a controller from the new class remains exponentially stable when integral terms are approximated by finite sums.

keywords: difference-differential systems, delay compensation,stabilization

1 Введение

В работе [11] была предложена общая схема построения стабилизирующих регуляторов для систем с запаздыванием в управлении. Ключевым элементом схемы была формула Коши, выражающая зависимость будущего состояния системы от её текущего состояния и выбранного управления. Различные аспекты предложенной схемы подробно обсуждались в работах [1], [5], [8], [13]. Регуляторы имели вид интегральных уравнений, правые части которых включали интегралы от переменной управления. При практической реализации интегралы заменялись конечными суммами. По сути такая замена принципиально меняла тип регулятора. Исходные интегральные уравнения относятся к уравнениям запаздывающего типа, а приближенные к уравнениям нейтрального типа. Анализ возможных последствий такой замены показал, что даже при использовании квадратурных формул высокой точности новые регуляторы могут приводить к неустойчивости замкнутой системы [12], [4], [3]. В работе [10] было предложено использовать дополнительные фильтры. Это позволило сохранить запаздывающий тип регулятора после замены интегралов конечными суммами. Использование фильтра можно интерпретировать как расширение вектора состояния системы за счет добавления переменных управления к переменным состояния. Устойчивость системы с расширенным вектором состояния влечет устойчивость исходной замкнутой системы. Было показано, что для систем с расширенным вектором состояния замена интегралов конечными суммами не приводит к потере устойчивости, [10]. Возможность распространения схемы построения стабилизирующих регуляторов на случай систем с запаздыванием не только в управлении, но и в состоянии, была показана в работах [6], [7], [14]. Новые регуляторы описываются интегральными уравнениями, аналогичными полученным для систем с запаздыванием в управлении. Только теперь правые части этих уравнений включают дополнительно интегралы от переменных состояния системы. Это значит, что и эти интегралы в приложениях должны быть заменены конечными суммами. В работе [14] предложено добавить переменные управления к вектору состояния. Было замечено, что стабилизируемость исходной системы влечет стабилизируемость системы с расширенным вектором состояния, и можно строить регуляторы непосредственно для систем с расширенным вектором состояния.

В представленной работе предложена новая схема построения регуляторов. Показано, что, как и в случае систем с запаздыванием в управлении использование дополнительных фильтров позволяет получить регуляторы сохраняющие после замены интегралов конечными суммами устойчивость замкнутой системы. В отличии от подхода, предложенного в работе [14], не требуется построения регулятора для расширенной системы.

Описание рассматриваемых систем дано в Разделе 2. Здесь вводятся обозначения, и представлена формула Коши, позволяющая построить предиктор будущих состояний системы. Общая схема построения стабилизирующих регуляторов для систем с запаздыванием в управлении и состоянии представлена в Разделе 3. Задача практической реализации регуляторов обсуждается в Разделе 4. Основной результатом работы является описание класса практически реализуемых регуляторов. В Разделе 5 показано, что аппроксимация слагаемых с распределённым запаздыванием, входящих в состав регуляторов, конечными суммами не влияет на устойчивость замкнутой системы.

2 Описание системы

Рассмотрим систему вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t-\tau), \tag{1}$$

где A_j, $j = 0,1$, вещественные $n\times n$ матрицы, а B вещественная $n\times m$ матрица. Будем считать, что запаздывания удовлетворяют неравенствам $h \le \tau$. Случай $\tau < h$ может быть рассмотрен аналогично. Пусть $t_0 \ge 0$ будет начальным моментом, а начальная функция φ принадлежит пространству $PC([-h,0],R^n)$ кусочно-непрерывных функций, заданных на отрезке $[-h,0]$ со значениями в R^n. Через $x(t,t_0,\varphi)$ будем обозначать решение начальной задачи

$$x(t_0+\theta,t_0,\varphi) = \varphi(\theta), \quad \theta\in[-h,0].$$

Когда это не затрудняет понимание, аргументы t_0 и φ будем опускать и писать просто $x(t)$ вместо $x(t, t_0, \varphi)$.

Для векторов используется эвклидова норма, а для матриц индуцированная сингулярная норма. Для элементов пространства $PC([-h, 0], R^n)$ вводится следующая норма

$$\|\varphi\|_h = \sup_{\theta \in [-h,0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Фундаментальную матрицу системы обозначим через $K(t)$. Она удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}K(t) = A_0 K(t) + A_1 K(t-h), \quad t \geq 0,$$

и начальным условиям: $K(t) = 0_{n\times n}$, $t < 0$, $K(0) = I_{n\times n}$.

Формула Коши [2] даёт явное выражение для решения $x(t, t_0, \varphi)$

$$\begin{aligned} x(t, t_0, \varphi) &= K(t - t_0)\varphi(0) \\ &+ \int_{-h}^{0} K(t - t_0 - \theta - h) A_1 \varphi(\theta) d\theta \\ &+ \int_{t_0}^{t} K(t - \xi) B u(\xi - \tau) d\xi, \ t \geq t_0 \end{aligned}$$

В частности, она задаёт предиктор значений решения в момент $t + \tau$,

$$\begin{aligned} x(t + \tau) &= K(\tau) x(t) \\ &+ \int_{-h}^{0} K(\tau - \theta - h) A_1 x(t + \theta) d\theta \\ &+ \int_{-\tau}^{0} K(-\xi) B u(t + \xi) d\xi, \ t \geq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

и в момент $t+\tau-h$,

$$
\begin{aligned}
x(t+\tau-h) \;\; = \;\; & K(\tau-h)x(t) \\
& + \int\limits_{-h}^{0} K(\tau-\theta-2h)A_1x(t+\theta)d\theta \\
& + \int\limits_{-\tau}^{-h} K(-h-\xi)Bu(t+\xi)d\xi, \;\; t \geq 0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Если $\tau > 2h$, то, дополнительно,

$$
\begin{aligned}
x(t+\tau-2h) \;\; = \;\; & K(\tau-2h)x(t) \\
& + \int\limits_{-h}^{0} K(\tau-\theta-3h)A_1x(t+\theta)d\theta \\
& + \int\limits_{-\tau}^{-2h} K(-2h-\xi)Bu(t+\xi)d\xi, \;\; t \geq 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

3 Построение стабилизирующих регуляторов

В дальнейшем будем полагать, что известны матрицы F_0 и F_1 такие, что система

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A_0 + BF_0)\,x(t) + (A_1 + BF_1)\,x(t-h) \tag{5}$$

экспоненциально устойчива. Начнём с регулятора вида

$$u(t) = F_0x(t+\tau) + F_1x(t+\tau-h), \quad t \geq 0. \tag{6}$$

Он зависит от $x(t+\tau)$ и $x(t+\tau-h)$, поэтому не может быть реализован непосредственно. Однако, если заменить эти значения, используя предиктор, получим регулятор, заданный интегральным уравнением вида

$$\begin{aligned} u(t) \ = \ & \int\limits_{-\tau}^{0} F_0 K(-\xi) B u(t+\xi) d\xi \\ & + \int\limits_{-\tau}^{-h} F_1 K(-h-\xi) B u(t+\xi) d\xi \\ & + \int\limits_{-h}^{0} F_0 K(\tau-\theta-h) A_1 x(t+\theta) d\theta \\ & + \int\limits_{-h}^{0} F_1 K(\tau-\theta-2h) A_1 x(t+\theta) d\theta \\ & + \left[F_0 K(\tau) + F_1 K(\tau-h)\right] x(t), \quad t \geq 0 \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Для построения решения последнего уравнения требуется начальная функция для переменной $u(t)$. Будем считать, что

$$u(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0),$$

где $\psi \in PC([-\tau, 0], R^m)$.

Замечание 1 *Система (1), замкнутая регулятором (7), для $t \in [0, \tau)$ имеет вид*

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + B\psi(t-\tau),$$

а для $t \geq \tau$ совпадает с системой (5).

Замечание 2 *Для $h = 0$ система (1) имеет вид*

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t-\tau),$$

где $A = A_1 + A_2$, а фундаментальная матрица $K(t) = e^{At}$. В этом случае регулятор (7) задан интегральным уравнением

$$u(t) = F \int\limits_{t-\tau}^{t} e^{A(t-\theta)} B u(\theta) d\theta + F e^{A\tau} x(t),$$

где $F = F_0 + F_1$, и совпадает с регулятором, полученным в работе [11].

4 Задача реализации

В приложениях интегралы в правой части уравнения (7) заменяются конечными суммами. В результате интегральное уравнение заменяется разностным. Показано, что разностные регуляторы могут приводить к неустойчивости замкнутой системы даже при использовании квадратурных формул высокой точности. В случае систем с запаздыванием в управлении для решения возникшей проблемы было предложено использовать дополнительные фильтры [10]. В работе [14] предложено включить переменную u в вектор состояния системы и искать решение задачи стабилизации системы с расширенным вектором состояния

$$\frac{d\chi(t)}{dt} = \mathcal{A}_0\chi(t) + \mathcal{A}_1\chi(t-h) + \mathcal{B}v(t).$$

Здесь $\chi(t) = (x^T(t), u^T(t))^T$,

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0_{n\times m} \\ I_{m\times m} \end{pmatrix},$$

и $v(t)$ суть новая переменная управления. Показано, что расширенная система стабилизируема тогда и только тогда, когда стабилизируема исходная система (1). В частности, если для расширенной системы найдётся регулятор вида

$$v(t) = \mathcal{K}_0\chi(t) + \mathcal{K}_1\chi(t-h), \tag{8}$$

где $\mathcal{K}_0 = [K_{0x}, K_{0u}]$ и $\mathcal{K}_1 = [K_{1x}, K_{1u}]$ две постоянные матрицы, то динамический регулятор

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= K_{0u}u(t) + K_{1u}u(t-h) \\ &\quad + K_{0x}x(t+\tau) + K_{1x}x(t+\tau-h), \end{aligned}$$

в котором $x(t+\tau)$ и $x(t+\tau-h)$ заменены выражениями (2) и (3) соответственно, стабилизирует исходную систему (1).

Перейдём к синтезу регуляторов, решающих задачу стабилизации без предварительного вычисления вспомогательного управления (8). С этой целью выберем $m \times m$ матрицу Гурвица G. Управление (7) удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} - Gu(t) &= F_0\frac{dx(t+\tau)}{dt} + F_1\frac{dx(t+\tau-h)}{dt} \\ &\quad - G\left[F_0x(t+\tau) + F_1x(t+\tau-h)\right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись системой (1) для замены в этом равенстве производных, придём к регулятору вида

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= (G+F_0B)\,u(t)+F_1Bu(t-h) \\ &\quad +(F_0A_0-GF_0)x(t+\tau) \\ &\quad +(F_0A_1+F_1A_0-GF_1)\,x(t+\tau-h) \\ &\quad +F_1A_1x(t+\tau-2h), \quad t\geq 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Заменив в нём значения $x(t+\tau)$, $x(t+\tau-h)$ и, в случае $\tau>2h$, $x(t+\tau-2h)$, правыми частями равенств (2)-(4), придём к искомому динамическому регулятору

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= (G+F_0B)\,u(t) \\ &\quad +F_1Bu(t-h)+Q(\tau)x(t) \\ &\quad +\int\limits_{-\tau}^{0} Q(-\xi)Bu(t+\xi)d\xi \\ &\quad +\int\limits_{-h}^{0} Q(\tau-h-\theta)A_1x(t+\theta)d\theta, \quad ,t\geq 0,\end{aligned} \tag{10}$$

где матрица

$$\begin{aligned}Q(t) &= (F_0A_0-GF_0)K(t)+F_1A_1K(t-2h) \\ &\quad +(F_0A_1+F_1A_0-GF_1)\,K(t-h).\end{aligned}$$

Замкнутая этим регулятором система примет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0x(t)+A_1x(t-h)+Bu(t-\tau) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= (G+F_0B)\,u(t) \\ &\quad +F_1Bu(t-h)+Q(\tau)x(t) \\ &\quad +\int\limits_{-\tau}^{0} Q(-\xi)Bu(t+\xi)d\xi \\ &\quad +\int\limits_{-h}^{0} Q(\tau-h-\theta)A_1x(t+\theta)d\theta, \quad t\geq 0.\end{aligned} \tag{12}$$

Замечание 3 *Система (11)-(12) принадлежит к классу систем запаздывающего типа.*

Теорема 1 *Характеристическая функция* $q(s)$ *замкнутой системы (11)-(12) задана формулой*

$$\begin{aligned} q(s) &= \det\left[sI_{n\times n} - (A_0 + BF_0) - e^{-sh}(A_1 + BF_1)\right] \\ &\times \det\left[sI_{m\times m} - G\right]. \end{aligned}$$

Доказательство. Для вычисления характеристической функции воспользуемся преобразованием Лапласа. Через $X(s)$ и $U(s)$ обозначим образы Лапласа $x(t)$ и $u(t)$, соответственно. После преобразования системы (1) и (9) примут вид алгебраических уравнений для $X(s)$ и $U(s)$

$$\begin{pmatrix} R_{11}(s) & R_{12}(s) \\ R_{21}(s) & R_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_{11}(s) &= sI_{n\times n} - \left(A_0 + e^{-sh}A_1\right), \\ R_{12}(s) &= -e^{-s\tau}B, \\ R_{21}(s) &= -e^{s\tau}\left[\left(F_0 + e^{-sh}F_1\right)\left(A_0 + e^{-sh}A_1\right)\right. \\ &\quad \left. - G\left(F_0 + e^{-sh}F_1\right)\right], \\ R_{22}(s) &= sI_{m\times m} - G - \left(F_0 + e^{-sh}F_1\right)B, \end{aligned}$$

а векторы $r_1(s)$, $r_2(s)$ определяются начальными функциями $\varphi \in PC([-h,0],R^n)$ и $\psi \in PC([-\tau,0],R^m)$ переменных $x(t)$ и $u(t)$. Функция $q(s)$ совпадает с определителем матрицы

$$R(s) = \begin{pmatrix} R_{11}(s) & R_{12}(s) \\ R_{21}(s) & R_{22}(s) \end{pmatrix}.$$

Нам понадобится вспомогательная матрица

$$T(s) = \begin{pmatrix} I_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ e^{s\tau}\left(F_0 + e^{-sh}F_1\right) & I_{m\times m} \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости тождества

$$T^{-1}(s)R(s)T(s) = \begin{pmatrix} sI_{n\times n} - A_0 - e^{-sh}A_1 - BF_0 + e^{-sh}BF_1 & B \\ 0_{m\times n} & sI_{m\times m} - G \end{pmatrix}.$$

В итоге, искомая характеристическая функция

$$\begin{aligned} q(s) \;=\; & \det\left[sI_{n\times n} - A_0 - BF_0 - e^{-sh}(A_1 + BF_1)\right] \\ & \times \det\left[sI_{m\times m} - G\right]. \end{aligned}$$

Следствие 1 *Пусть матрицы F_0 и F_1 таковы, что система (5) экспоненциально устойчива. Замкнутая система (11)-(12) экспоненциально устойчива, если G – матрица Гурвица.*

5 Аппроксимация распределённого запаздывания

Замкнутая система (11)-(12) имеет вид

$$\frac{dz(t)}{dt} = \sum_{j=0}^{l} \mathcal{A}_j z(t-\tau_j) + \int_{-\tau}^{0} \mathcal{P}(\theta) z(t+\theta) d\theta, \tag{13}$$

где $\mathcal{A}_j$, $j = 0, 1, ..., l$, $(n+m)\times(n+m)$ матрицы, $\mathcal{P}(\theta)$ матрица порядка $(n+m)\times(n+m)$ с кусочно-непрерывными компонентами, а $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_l = \tau$.

Пусть N натуральное число, положим

$$\delta = \frac{\tau}{N},$$

и заменив интегральное слагаемое в правой части системы (13) конечной суммой вида

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\int_{-k\delta}^{-(k-1)\delta} \mathcal{P}(\theta) d\theta \right) z(t-h_k),$$

где $h_k \in [(k-1)\delta, k\delta)$, $k = 1, 2, ..., N$, придём к системе

$$\frac{dy(t)}{dt} = \sum_{j=0}^{l} \mathcal{A}_j y(t-\tau_j) + \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{-k\delta}^{-(k-1)\delta} \mathcal{P}(\theta) d\theta \right) y(t-h_k). \tag{14}$$

Свяжем с вещественным α комплексную полуплоскость

$$\mathbb{C}_\alpha^- = \left\{ s | \, \mathbf{Re}(s) < \alpha \right\}.$$

Теорема 2 *Пусть все собственные числа системы (13) лежат в полуплоскости $\mathbb{C}_\alpha^-$, тогда найдётся натуральное число N_0 такое, что для любого $N \geq N_0$ все собственные числа системы (14) лежат в этой полуплоскости.*

Доказательство. Характеристическая матрица системы (13),

$$F_0(s) = sE - \sum_{j=0}^{l} e^{-\tau_j s}\mathcal{A}_j - \int\limits_{-\tau}^{0} \mathcal{P}(\theta)e^{\theta s}d\theta, \tag{15}$$

остаётся невырожденной в замкнутой полуплоскости

$$\mathbb{C}_\alpha^+ = \{s | \,\mathbf{Re}(s) \geq \alpha\}.$$

Характеристическая матрица системы (14) имеет вид

$$F(s) = F_0(s) + \Delta(s),$$

где

$$\Delta(s) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{-k\delta}^{-(k-1)\delta} \mathcal{P}(\theta)\left[e^{\theta s} - e^{-h_k s}\right]d\theta. \tag{16}$$

Для доказательства теоремы достаточно указать такое N_0, что для $N \geq N_0$ условие

$$\left\|F_0^{-1}(s)\right\| \|\Delta(s)\| < 1 \tag{17}$$

выполнено для $s \in \mathbb{C}_\alpha^+$. Рассмотрим первый множитель $\left\|F_0^{-1}(s)\right\|$. Из (15) следует, что

$$\|F_0(s)\| \geq |s| - \rho_0,$$

где

$$\rho_0 = \sum_{j=0}^{l} e^{-\tau_j \alpha}\|\mathcal{A}_j\| + \int\limits_{-\tau}^{0} \|\mathcal{P}(\theta)\| e^{\theta\alpha}d\theta.$$

Это означает, что

$$\left\|F_0^{-1}(s)\right\| \leq \frac{1}{|s| - \rho_0}, \tag{18}$$

для любого $s \in \mathbb{C}_\alpha^+$ с $|s| > \rho_0$. Матрица $F_0^{-1}(s)$ не имеет полюсов в замкнутой полуплоскости $\mathbb{C}_\alpha^+$, поэтому найдётся ρ_1 такое, что

$$\left\|F_0^{-1}(s)\right\| \leq \rho_1, \quad s \in \mathbb{C}_\alpha^+. \tag{19}$$

Обратимся ко второму множителю $\|\Delta(s)\|$. Из (16) следует, что

$$\Delta(s) = \sum_{k=1}^{N} e^{-(k-1)\delta s} \int_{-\delta}^{0} \mathcal{P}(\xi - (k-1)\delta) \left[e^{\xi s} - e^{\xi_k s}\right] d\xi,$$

где $\xi_k = (k-1)\delta - h_k \in (-\delta, 0]$, $k = 1, 2, ..., N$. Поэтому неравенство

$$\|\Delta(s)\| \leq \mu_0 \tag{20}$$

выполняется для любого $s \in \mathbb{C}_\alpha^+$. Здесь

$$\mu_0 = 2\eta \int_{-\tau}^{0} \|\mathcal{P}(\theta)\| \, d\theta,$$

и $\eta = \max\left\{e^{-\tau\alpha}, 1\right\}$. Норма слагаемого

$$\begin{aligned} L_k(s) &= e^{-(k-1)\delta s} \int_{-\delta}^{0} \mathcal{P}(\xi - (k-1)\delta) \left[e^{\xi s} - e^{\xi_k s}\right] d\xi \\ &= e^{-(k-1)\delta s} \int_{-\delta}^{0} \mathcal{P}(\xi - (k-1)\delta) \left(s \int_{\xi_k}^{\xi} e^{\theta s} d\theta \right) d\xi \end{aligned}$$

допускает на $\mathbb{C}_\alpha^+$ оценку сверху вида

$$\begin{aligned} \|L_k(s)\| &\leq \mu_1 \int_{-\delta}^{0} \left(\int_{-\delta}^{0} |s| \, d\theta \right) d\xi \\ &\leq \mu_1 |s| \delta^2, \end{aligned}$$

где

$$\mu_1 = \eta \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\mathcal{P}(\theta)\| \, .$$

Второй множитель удовлетворяет на $\mathbb{C}_\alpha^+$ неравенству

$$\|\Delta(s)\| \leq N \mu_1 |s| \delta^2. \tag{21}$$

Выберем $R > \rho_0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\mu_0}{R - \rho_0} < 1.$$

Из (18) и (20) следует, что условие (17) выполнено на множестве $\{s|\, s \in C^+_\alpha, |s| \geq R\}$. Неравенство (21) означает, что для любого $s \in \mathbb{C}^+_\alpha$, с $|s| \leq R$

$$\|\Delta(s)\| \leq N\mu_1 R\delta^2.$$

Так как $\delta = \frac{\tau}{N}$, то для $s \in \mathbb{C}^+_\alpha$, с $|s| \leq R$ второй множитель удовлетворяет неравенству

$$\|\Delta(s)\| \leq \frac{\mu_1 R\tau^2}{N}. \tag{22}$$

Выберем N_0 так, чтобы

$$\frac{\rho_1\mu_1 R\tau^2}{N_0} < 1,$$

тогда, принимая во внимание неравенства (19) и (22), приходим к выводу, что для любого $N \geq N_0$ условие (17) выполнено на множестве $\{s|\, s \in C^+_\alpha, |s| \leq R\}$. Теорема доказана.

6 Заключение

В работе предложен новый класс динамических регуляторов, стабилизирующих систему с запаздываниями в состоянии и управлении. Показано, что при замене интегральных слагаемых конечными суммами, типа сумм Римана, замкнутая система остаётся экспоненциально устойчивой. Для простоты изложения разобран случай систем с одним запаздыванием в состоянии и одним запаздыванием в управлении. Стоит отметить, что предложенную схему построения регуляторов легко обобщить как на случай систем с несколькими запаздываниями в состоянии, так и на случай систем с распределённым запаздыванием.

Список литературы

[1] Arstein Z. Linear systems with delayed controls: A reduction. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1982, 27, pp. 869–879.

[2] Bellman R., Cooke K.L. *Differential Difference Equations*. New York: Academic Press, 1963. 462 p.

[3] Gu K. A review of some subtleties of practical relevance for time delay systems of neutral type. *ISRN Applied Mathematics*, 2012, Article ID 725783, 46 p.

[4] Engelborghs K., Dambrine M., Roos D. Limitation of a class of stabilization methods for delay systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2001, 64, pp. 336–339.

[5] Fiagbedzi Y., Pearson A. Feedback stabilization of linear autonomous time lag systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1986, 31, pp. 847–855.

[6] Jankovic M. Recursive predictor design for state and output feedback controllers for linear time delay systems. *Automatica*, 2010, 46, pp. 510–517.

[7] Kharitonov V.L. An extension of the prediction scheme to the case of systems with both input and state delay. *Automatica*, 2014, 50, pp. 211–217.

[8] Kwon W., Pearson, A. Feedback stabilization of linear systems with delayed control. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1980, 25, pp. 266–269.

[9] Mazenc F., Mondie S., Niculescu S., Conge P., Lorraine L., Metz, F. Global asymptotic stabilization for chains of integrators with a delay in the input. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2003, 48, pp. 57–63.

[10] Mondie S. and Michiels W. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2003, 48, pp. 2207–2212.

[11] Manitius A.Z., Olbrot, A.W. Finite spectrum assignment for systems with delay. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1979, 24, pp. 541–553.

[12] Van Assche V., Dambrine M., Lafey J.F., Richard J.P. Some problems arising in implementation of distributed-delay control laws. *38th IEEE Conference on Decision and Control*, 1999, Phoenix, AZ.

[13] Palmor Z.J. Time-delay compensation, Smith predictor and its modifications. *The Control Handbook* (W.S. Levine, Eds.), CRC Press, 1996, pp. 224–237.

[14] Zhou B. Input delay compensation of linear systems with both state and input delay by nested prediction. *Automatica*, 2014, 50, pp. 1434–1443.