ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Оптимальное управление

УДК 517.977.5

Условия оптимальности центральных полей траекторий

Орёл Е.Н., Орёл О.Е.

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

Аннотация

Используя методику вариационного исчисления для анализа задач оптимального управления на абсолютный (глобальный) экстремум мы изучаем возможность погружения экстремали в центральное поле траекторий. Элементы этого поля стартуют из заданной точки и однократно покрывают область пространства состояний. В вариационном исчислении для центрального поля экстремалей проверяется условие Вейерштрасса. Если оно выполнено, то каждая экстремаль доставляет глобальный экстремум.

В общем случае элементами поля могут быть не только экстремали. В работе доказывается, что для того, чтобы гладкое центральное поле траекторий было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы оно состояло из экстремалей Понтрягина. Рассмотрен пример с экономическим содержанием, для которого построено оптимальное центральное поле экстремалей.

Ключевые слова: оптимальное управление, глобальный экстремум, экстремаль Понтрягина, центральное поле траекторий.

Abstract

By following the calculus of variations procedure for analyzing optimal control problems on global extremum we study the possibility of imbedding extremal into a central field of trajectories.

All elements of this field start from a given point and once cover the domain of the state space. In calculus of variations for the central field of extremals one examines the Weierstrass condition. If it is fulfilled then each extremal gives a global extremum.

In general case the field may contain not only extremals. In this article we prove that a smooth central field of trajectories is optimal if and only if it consists from Pontryagin's extremals. The example of economic application is considered, where the central field of optimals is constructed.

Keywords: optimal control, global extremum, Pontryagin's extremal, central field of trajectories.

1 Введение

Всюду в тексте доказательства утверждений помещены в треугольные скобки $\triangleleft \ldots \triangleright$.

1.1 Формулировка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления в следующей форме: найти минимум функционала

$$J\left([t_1, t_2], \mathbf{x}(.), \mathbf{u}(.)\right) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt \to \min, \tag{1}$$

если заданы уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \tag{2}$$

условия на концах траектории

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}_2 \tag{3}$$

и соотношения

$$t_1 \leq t_2, \quad (t, \mathbf{x}(t)) \in D \subset \mathbb{R}^{1+n}, \quad \mathbf{u}(t) \in U \subset \mathbb{R}^m. \tag{4}$$

Управление $\mathbf{u}(t)$ должно принадлежать классу кусочно непрерывных вектор-функций. Вектор-функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ и функция Лагранжа $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, зависящие от $1 + n + m$ переменных, непрерывно дифференцируемы. Концы (3) считаются фиксированными. Меняя точки $(t_1, \mathbf{x}_1)$ и $(t_2, \mathbf{x}_2)$, будем получать разные частные задачи. Позднее точка старта $(t_0, \mathbf{x}_0)$ будет зафиксирована.

Заметим, что при $U = \mathbb{R}^n$ и $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv \mathbf{u}$ получаем задачу вариационного исчисления.

1.2 Локальный или глобальный экстремум

Управление как функция времени, траектория, а также весь процесс управления $\gamma = ([t_1, t_2], \mathbf{x}(.), \mathbf{u}(.))$, удовлетворяющие задаче (1)-(4), называются оптимальными. Очень часто в работах по оптимальному управлению не уточняется, о каком минимуме идёт речь – абсолютном (глобальном) или локальном. Умолчание обычно означает, что исследуется локальный экстремум. Во многих случаях это оправдано. Так иногда обстоит дело в задачах управления механическими системами, когда можно обойтись локальным экстремумом. С другой стороны, в задачах с экономическим содержанием нельзя ориентироваться на локальный экстремум, поскольку финансовые потери из-за отказа от поиска глобального экстремума могут быть слишком большими. В данной статье, являющейся развитием работ [1], [2], рассматривается задача глобального экстремума. С этой целью изучаются необходимые и достаточные условия оптимальности центральных полей траекторий в задачах оптимального управления. Для этого сначала рассматриваются некоторые функционалы, определённые на множестве траекторий. Показывается, что неотрицательность одного из функционалов является общим критерием оптимальности поля. Далее рассматриваются гладкие центральные поля экстремалей, по аналогии с вариационным исчислением [3]. При этом, совершив предельный переход для "кратковременных" траекторий, можно получить аналитический критерий оптимальности, который аналогичен условию Вейерштрасса в вариационном исчислении. В качестве примера изучается поле экстремалей для одной известной задачи с экономическим содержанием. В общем случае показывается, что гладкое поле экстремалей оптимально тогда и только тогда, когда оно состоит из экстремалей Понтрягина. Весь материал излагается для неавтономных задач оптимального управления с фиксированным временем.

В вариационном исчислении и теории оптимального управления некоторые обозначения и построения расходятся. Мы будем придерживаться традиций, сложившихся в вариационном исчислении, чтобы подчеркнуть преемственность идей. Так, в статье центром поля считается стартовая точка, в то время как в теории оптимального управления гораздо чаще фиксируется точка финиша. Здесь можно сослаться на конструкции Р. Беллмана [4] и решение задач синтеза в книге Л.С. Понтрягина и соавторов [5]. Принципиальной разницы между выбором стартовой или финишной точки в качестве центра поля траекторий нет.

2 Алгебраические свойства пространства траекторий

Поскольку нам предстоит изучать совокупности траекторий, полезно будет сначала остановиться на простых алгебраических свойствах пространства траекторий. Подобные свойства иногда рассматриваются при исследований пространства путей или петель. Эти свойства превращают пространство траекторий в теоретико-множественную *категорию* [6].

2.1 Обозначения

Пусть пара вектор-функций $(\mathbf{x}(.), \mathbf{u}(.))$ определена на отрезке $[t_1, t_2]$ и удовлетворяет условиям (2)-(4). Тогда $\mathbf{u}(.)$ – управление, $\mathbf{x}(.)$ – траектория, а совокупность

$$\gamma = ([t_1, t_2], \mathbf{x}(.), \mathbf{u}(.)) \tag{5}$$

представляет собой *процесс управления*; при этом

$$J(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt.$$

Иногда для простоты будем называть γ *траекторией*, как и функцию $\mathbf{x}(.)$.

Каждый процесс (5) имеет начало и конец. Пусть $\alpha(\gamma)$ – начальное состояние процесса, $\beta(\gamma)$ – конечное. Это значит, что

$$\alpha(\gamma) = (t_1, \mathbf{x}(t_1)), \quad \beta(\gamma) = (t_2, \mathbf{x}(t_2)).$$

2.2 Произведение (склейка) процессов и траекторий

Если два процесса, γ и δ, таковы, что $\beta(\gamma) = \alpha(\delta)$, то их *произведение* (склейка, конкатенация)

$$\epsilon = \gamma\delta$$

тоже является процессом управления. Точнее, пусть $\gamma = ([t_1, t_2], \mathbf{x}(.), \mathbf{u}(.))$, $\delta = ([t_2, t_3], \mathbf{y}(.), \mathbf{v}(.))$, причём $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{y}(t_2)$. Тогда определён процесс $\epsilon = \gamma\delta = ([t_0, t_2], \mathbf{z}(.), \mathbf{w}(.))$, где

$$\mathbf{w}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}(t), & t \in [t_1, t_2), \\ \mathbf{v}(t), & t \in [t_2, t_3], \end{cases}$$

$$\mathbf{z}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t), & t \in [t_1, t_2), \\ \mathbf{y}(t), & t \in [t_2, t_3]. \end{cases}$$

При этом

$$\alpha(\epsilon) = \alpha(\gamma), \quad \beta(\epsilon) = \beta(\delta),$$

$$J(\epsilon) = J(\gamma) + J(\delta)$$

(аддитивность функционала).

Произведение траекторий ассоциативно: если $\gamma\delta$ и $\delta\epsilon$ определены, то

$$(\gamma\delta)\,\epsilon = \gamma\,(\delta\epsilon)\,. \tag{6}$$

В равенстве (6) траектории γ, δ, ϵ являются соответственно начальным, промежуточным и конечным участками траектории $\gamma\delta\epsilon$.

Здесь можно выразить принцип оптимальности Беллмана в следующей форме: Если траектория $\gamma\delta\epsilon$ оптимальна, то и траектории γ, δ, ϵ оптимальны, каждая для своих граничных условий.

2.3 Вырожденные (единичные) процессы

Если время процесса управления равно нулю, то он вырождается, а траектория превращается в точку. Точнее, при $t_1 = t_2$ траектория (5) становится точкой $(t_1, \mathbf{x}(t_1))$. Обозначим вырожденный процесс, соответствующий состоянию $(t_1, \mathbf{x}(t_1))$, через $1_{t_1,\mathbf{x}(t_1)}$. Заметим, что $J\left(1_{t_1,\mathbf{x}(t_1)}\right) = 0$. Использование вырожденных процессов управления упрощает исследование.

Вырожденные траектории при умножении действуют как единицы. Так, если (5) – траектория в обычном смысле, $t_1 < t_2$, то

$$1_{t_1,\mathbf{x}(t_1)} \cdot \gamma = \gamma, \quad \gamma \cdot 1_{t_2,\mathbf{x}(t_2)} = \gamma.$$

Нетрудно убедиться, что пространство траекторий наделено свойствами категории.

3 Центральное поле траекторий

На неформальном языке под *центральным полем* траекторий Λ будем понимать семейство путей, выходящих из одной точки $(t_0, \mathbf{x}_0)$ и однократно заметающих область D. Помимо всего прочего, это накладывает дополнительные условия на характер области и положение в ней точки $(t_0, \mathbf{x}_0)$. Будет видно, что D не может быть открытым множеством. Достаточно считать, что D имеет кусочно гладкую границу. Так, в рассмотренном ниже примере D представляет собой замкнутый угол на плоскости. В статье будет предполагаться, что D и $(t_0, \mathbf{x}_0)$ фиксированы раз и навсегда, равно как и само поле Λ, покрывающее D.

3.1 Определение поля

Пусть D – множество с кусочно гладкой границей, и пусть дана точка старта $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$. Множество траекторий $\Lambda \subset \Gamma$ назовём центральным полем с центром в $(t_0, \mathbf{x}_0)$, если:

- все траектории множества Λ начинаются в $(t_0, \mathbf{x}_0)$,
- в каждой точке множества D, отличной от $(t_0, \mathbf{x}_0)$, оканчивается ровно одна траектории множества Λ,
- принадлежность $\gamma\delta \in \Lambda$ влечёт $\gamma \in \Lambda$.

Далее будем считать, что множество D, состояние $(t_0, \mathbf{x}_0)$ и центральное поле Λ заданы и фиксированы.

Определение 1 *Центральное поле Λ оптимально, если каждая траектория поля оптимальна для своих граничных условий.*

На рис. 1 показано оптимальное центральное поле траектрий для задачи с экономическим содержанием, которая будет рассмотрена ниже, в разделе 5. Надо иметь в виду, что красная линия на рисунке означает выход на предельный режим, о котором пойдёт речь дальше, и траекторией не является.

Определим на множестве D функцию

$$A(t, \mathbf{x}) = J(\gamma), \quad \gamma \in \Lambda, \quad \beta(\gamma) = (t, \mathbf{x}),$$

которую с некоторыми оговорками можно считать аналогом действия по Гамильтону в вариационном исчислении или аналогом функции Беллмана. Заметим, что $A(t_0, x_0) = 0$.

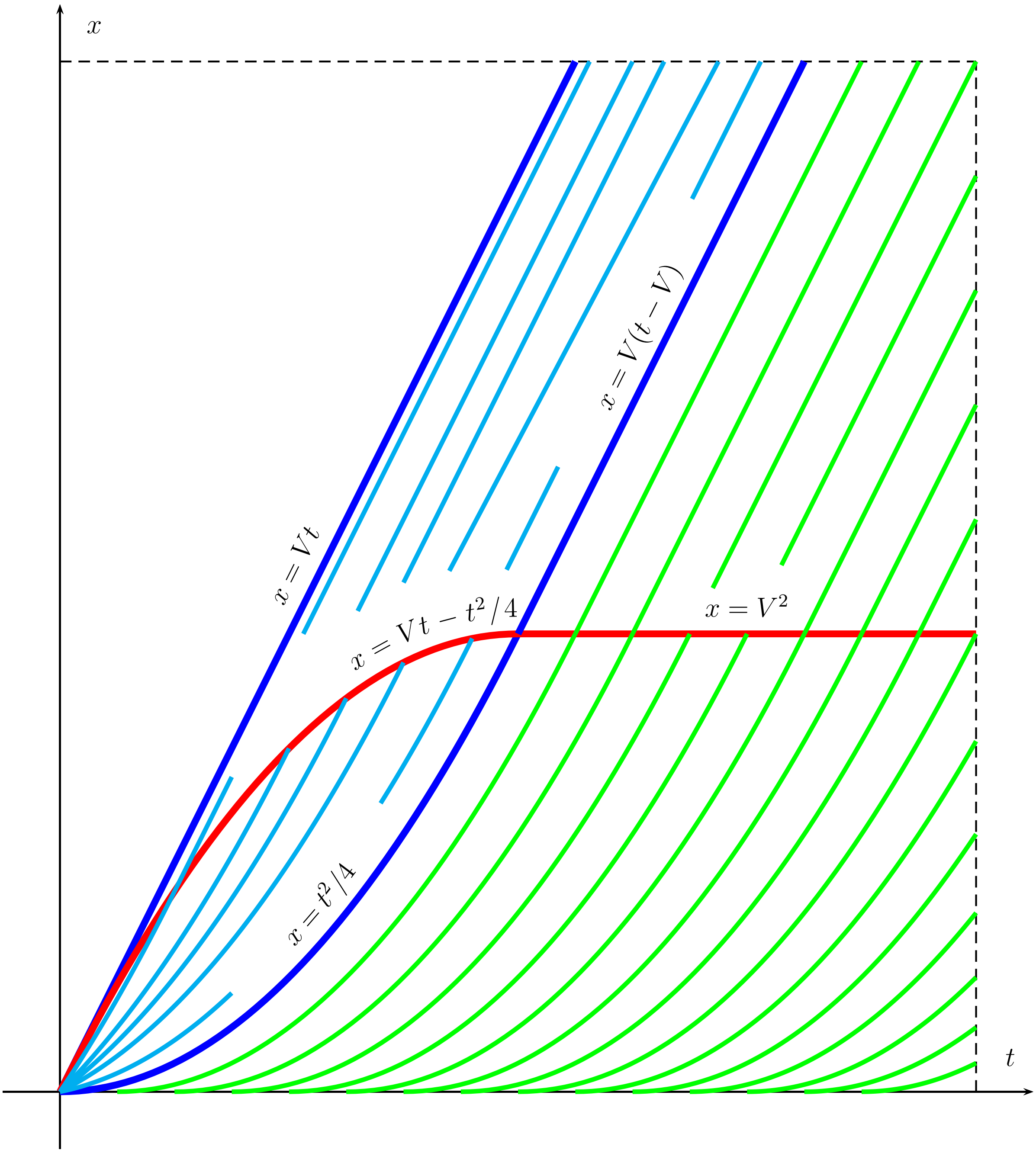

Рис. 1: Центральное поле в примере

3.2 Функционалы, связанные с полем

С полем Λ связан функционал на Γ, который обозначим через $I(\gamma)$. А именно, положим

$$I(\gamma) = A(\beta(\gamma)) - A(\alpha(\gamma)).$$

Предложение 1 *Функционал I аддитивен.*

$\lhd$ Пусть произведение $\gamma\delta$ определено. Тогда

$$I(\gamma) + I(\delta) = A(\beta(\gamma)) - A(\alpha(\gamma)) + A(\beta(\delta)) - A(\alpha(\delta)) =$$

$$= -A(\alpha(\gamma)) + A(\beta(\delta)),$$

т.к. $\beta(\gamma) = \alpha(\delta)$. А поскольку $\alpha(\gamma) = \alpha(\gamma\delta)$, $\beta(\delta) = \beta(\gamma\delta)$ то

$$I(\gamma) + I(\delta) = A(\beta(\gamma\delta)) - A(\alpha(\gamma\delta)) = J(\gamma\delta),$$

ч.т.д. $\rhd$

Следует заметить, что $I(\gamma)$ зависит только от концов траектории γ, т.е. для двух траекторий γ_1, γ_2 с общей начальной и общей конечной точкой выполнено равенство $I(\gamma_1) = I(\gamma_2)$.

Из J и I составим третий аддитивный функционал, который понадобится для сравнения эффективности процессов:

$$\Phi(\gamma) = J(\gamma) - I(\gamma).$$

Заметим, что если $\gamma \in \Lambda$, то $J(\gamma) = I(\gamma)$, откуда $\Phi(\gamma) = 0$.

3.3 Общий критерий оптимальности поля

Теорема 1 *(критерий оптимальности поля). Поле Λ оптимально тогда и только тогда, когда функционал Φ неотрицателен.*

$\lhd$ 1. Пусть дано, что $\Phi \geq 0$. Возьмём произвольную траекторию δ, начинающуюся в (t_0, x_0), и сравним её с траекторией поля γ, имеющую тот же правый конец, $\beta(\delta) = \beta(\gamma)$. Тогда

$$0 \leq \Phi(\delta) = J(\delta) - I(\delta) = J(\delta) - J(\gamma),$$

откуда $J(\delta) \geq J(\gamma)$, что доказывает оптимальность поля.

2. Пусть теперь $\Phi(\delta) < 0$ на некоторой пробной траектории δ. Докажем, что поле не оптимально. Конкретно докажем, что траектория поля γ, такая, что $\beta(\gamma) = \beta(\delta)$, не является оптимальной. Для этого возьмём ещё одну траекторию поля γ', такую, что $\beta(\gamma') = \alpha(\delta)$, и покажем, что $J(\gamma'\delta) < J(\gamma)$. Имеем

$$0 > \Phi(\delta) = J(\delta) - I(\delta) = J(\delta) - A(\beta(\delta)) + A(\alpha(\delta)) =$$

$$= J(\delta) - A(\beta(\gamma)) + A(\beta(\gamma')) = J(\delta) - J(\gamma) + J(\gamma') = J(\gamma'\delta) - J(\gamma),$$

откуда $J(\gamma'\delta) < J(\gamma)$, ч.т.д. $\rhd$

4 Аналитический критерий оптимальности поля

Сформулированный выше общий критерий оптимальности имеет свои преимущества и недостатки. Преимущество состоит в том, что вместо сравнения функционала J на разных траекториях предлагается проверять лишь знак функционала Φ, а недостатком – то, что приходится рассматривать все, в том числе и "долговременные" траектории, хотя интуитивно ясно, что можно обойтись предельными выражениями, связанными с "кратковременными" траекториями. Такой предельный переход делается в настоящем разделе. При этом получаются функции мгновенного управления.

4.1 Производная вдоль траектории

Пусть процесс управления (5) фиксирован, и пусть $t \in [t_1, t_2]$. Тогда возникают различные функции времени, для которых полезно использовать сокращённые обозначения, как это часто делается. Прежде всего,

$$\hat{L}(t) = L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \tag{7}$$

Далее, определим процесс $\hat{\gamma}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, как сужение процесса γ на $[t_1, t]$. Точнее, мы берём разложение $\gamma = \delta\epsilon$, такое, что $\delta = ([t_1, t], \mathbf{x}(.), \mathbf{u}(.))$, и теперь полагаем $\hat{\gamma}(t) = \delta$.

Если дан произвольный функционал $\Psi(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, то его промежуточное значение на траектории γ может быть записано следующим образом:

$$\hat{\Psi}(t) = \Psi(\hat{\gamma}(t)).$$

При дифференцировании функции времени $\hat{\Psi}(t)$ получаем $\hat{\Psi}'(t)$. В частности, для функционала $J(\gamma)$ имеем

$$\hat{J}(t) = \int_{t_1}^{t} \hat{L}(\tau)d\tau, \quad \frac{d}{dt}\hat{J}(t) = \hat{L}(t).$$

Предложение 2 *Если γ – траектория поля, то*

$$\hat{L}(t) - \frac{d}{dt}A(t, \mathbf{x}(t)) = 0. \tag{8}$$

$\lhd$ Действительно, имеем

$$\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \frac{d}{dt}\hat{J}(t) = \frac{d}{dt}\int_{t_1}^{t} \hat{L}(\tau)d\tau = \hat{L}(t). \quad \rhd$$

Замечание 1 *В выражении (8) фигурирует производная функции A по времени t, в данном случае вдоль траектории поля γ. В общем случае речь может идти о производной вдоль любой "пробной" траектории δ, и тогда производная $\frac{d}{dt}A$ может не существовать. Мы всё равно будем использовать это выражение, понимая под $\frac{d}{dt}A$ верхнюю производную, принимающую, быть может, значения $\pm\infty$ [2]. В достаточно гладком случае $\frac{d}{dt}A$ представляет собой производную "по управлению $\mathbf{v}$"*

$$D_{\mathbf{v}}A(t, \mathbf{x}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t + \Delta t, \mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})\Delta t) - A(t, \mathbf{x}(t))}{\Delta t}$$

вдоль δ. В ещё более гладком случае $\frac{d}{dt}\hat{A}$ можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = D_{\mathbf{v}}A(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial A}{\partial t} + \langle \nabla_{\mathbf{x}}A(t, \mathbf{x}), \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \rangle.$$

Здесь $\nabla_{\mathbf{x}}A$ – вектор градиента функции A по переменным $\mathbf{x}$, $\langle , \rangle$ – символика скалярного произведения векторов, $\mathbf{v}$ – управление вдоль траектории δ в момент t. Как будет видно из дальнейшего, выражение

$$W(t, x, \mathbf{v}) = L(t, x, \mathbf{v}) - \frac{d}{dt}A(t, \mathbf{x}(t)),$$

может рассматриваться как одна из форм функции Вейерштрасса.

4.2 Предельный переход

Теперь можно перейти от общего критерия оптимальности к аналитическому. Заметим, что неравенство $\Phi \geq 0$ равносильно тому, что для любой траектории δ функция $\hat{\Phi}(t)$ не убывает. А раз так, то производная этой функции неотрицательна:

$$\frac{d}{dt}\hat{\Phi}(t) \geq 0 \quad \forall \delta \in \Gamma. \tag{9}$$

Очевидно, что неравенство (9) может быть записано в форме

$$\hat{L}(t) - \frac{d}{dt}\hat{A}(t) \geq 0. \tag{10}$$

Определение 2 *Центральное поле Λ будем считать гладким, если функция $A(t, \mathbf{x})$ дважды непрерывно дифференцируема по совокупности переменных.*

Если Λ – гладкое поле и $\gamma = ([t_1, t_2], \mathbf{x}(.), \mathbf{u}(.))$ – траектория поля, то в формуле (8) можно перейти к частным производным (имеется в виду, что $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$):

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \frac{\partial}{\partial t}A(t, \mathbf{x}) - \langle \nabla_{\mathbf{x}} A(t, \mathbf{x}), \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\rangle = 0. \tag{11}$$

Аналогичный переход в неравенствах (9) и (10) приводит к следующей теореме.

Теорема 2 *Для того, чтобы гладкое центральное поле Λ было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \frac{\partial}{\partial t}A(t, \mathbf{x}) - \langle \nabla_{\mathbf{x}} A(t, \mathbf{x}), \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})\rangle \geq 0 \tag{12}$$

для всех $(t, \mathbf{x}) \in D \backslash \{(t_0, \mathbf{x}_0)\}$ и $\mathbf{v} \in U$.

$\lhd$ 1. Пусть неравенство (12) выполнено всюду. Возьмём произвольную траекторию $\delta = ([t_1, t_2], \mathbf{y}(.), \mathbf{v}(.))$ и докажем, что $\Phi(\delta) \geq 0$. Имеем

$$\Phi(\delta) = J(\delta) - I(\delta) = \int_{t_1}^{t_2} \hat{L}(t)dt - \left(\hat{A}(t_2) - \hat{A}(t_1)\right).$$

Далее,

$$\hat{A}(t_2) - \hat{A}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\hat{A}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} A(t, \mathbf{y}(t)) + \langle \nabla_{\mathbf{x}} A(t, \mathbf{y}(t)), \dot{\mathbf{y}}(t) \rangle \right) dt.$$

Учитывая уравнения движения (2), получаем

$$\Phi(\delta) = \int_{t_1}^{t_2} \left(L(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{v}(t)) - \frac{\partial}{\partial t} A(t, \mathbf{y}(t)) - \langle \nabla_{\mathbf{x}} A(t, \mathbf{y}(t)), \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{v}(t)) \rangle \right) dt.$$

Отсюда, используя (12), выводим $\Phi(\delta) \geq 0$.

2. Пусть теперь

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \frac{\partial}{\partial t} A(t, \mathbf{x}) - \langle \nabla_{\mathbf{x}} A(t, \mathbf{x}), \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \rangle < 0 \tag{13}$$

при некотором наборе $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$. Построим траекторию δ, для которой $\Phi(\delta) < 0$. Обозначим через $\mathbf{y}(t)$ решение дифференциального уравнения (2) при управлении $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{v}$, проходящее через точку $(t, \mathbf{x})$. Без ограничения общности можно считать, что $(t, \mathbf{x})$ – внутренняя точка области D, в противном случае можно было бы несколько отодвинуться от границы, сохраняя неравенство (13). Существует такой отрезок $[t_1, t_2]$, содержащий t, что $\delta = ([t_1, t_2], \mathbf{y}(.), \mathbf{v}(.)) \in \Gamma$, причём, в силу непрерывности,

$$L(\tau, \mathbf{y}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) - \frac{\partial}{\partial t} A(\tau, \mathbf{y}(\tau)) - \langle \nabla_{\mathbf{x}} A(\tau, \mathbf{y}(\tau)), \dot{\mathbf{y}}(\tau) \rangle < 0$$

при всех $\tau \in [t_1, t_2]$. Перейдём к интегралу:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(L(\tau, \mathbf{y}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) - \frac{\partial}{\partial t} A(\tau, \mathbf{y}(\tau)) - \langle \nabla_{\mathbf{x}} A(\tau, \mathbf{y}(\tau)), \dot{\mathbf{y}}(\tau) \rangle \right) d\tau < 0,$$

или

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\tau, \mathbf{y}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\tau} A(\tau, \mathbf{y}(\tau)) d\tau < 0,$$

или, наконец,

$$J(\delta) - I(\delta) = \Phi(\delta) < 0,$$

ч.т.д. $\triangleright$

Условием теоремы является гладкость поля Λ. Как сказано в Замечании 1, это условие можно убрать, если заменить (12) неравенством

$$L(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{v}(t)) - \frac{d}{dt} A(t, \mathbf{y}(t)) \geq 0, \tag{14}$$

вдоль любой траектории δ, а под $\frac{d}{dt} A(t, \mathbf{y}(t))$ понимать верхнюю производную, которая может принимать значения $\pm\infty$.

4.3 Экстремали

Определим функцию Гамильтона-Понтрягина

$$\Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \rangle - L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{15}$$

где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Она отличается от функции Гамильтона вариационного исчисления тем, что последняя зависит только от лагранжевых переменных $(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ или только от канонических (гамильтоновых) переменных $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$, в то время как Π зависит и от лагранжевых $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, и от гамильтоновых $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ переменных. Введём теперь функцию Вейерштрасса-Понтрягина

$$E(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}) = \Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) - \Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{p}). \tag{16}$$

Запишем канонические уравнения Гамильтона-Понтрягина

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}} \Pi(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)), \tag{17}$$

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \nabla_{\mathbf{p}} \Pi(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)) \tag{18}$$

и неравенство Понтрягина

$$\Pi(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)) \geq \Pi(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}, \mathbf{p}(t)) \quad \forall \mathbf{v} \in U, \tag{19}$$

которое равносильно неравенству Вейерштрасса

$$E(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}, \mathbf{p}(t)) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in U. \tag{20}$$

Легко проверить, что уравнения (18) и (2) эквивалентны. Неравенство (19) можно записать в форме включения

$$\mathbf{u}(t) \in \arg\max_{\mathbf{v}\in U} \Pi(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}, \mathbf{p}(t)). \tag{21}$$

Траектория (5) называется *экстремалью Понтрягина*, если она удовлетворяют принципу максимума, т.е. соотношениям (17)-(19) для некоторой непрерывной функции импульса $\mathbf{p}(t)$. Принцип максимума Понтрягина является необходимым условием локального экстремума. Система $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений (17)-18) содержит $2n$ неизвестных функций $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$, а управление $\mathbf{u}(t)$ находится из неравенства (21). Поэтому задачу поиска экстремали можно считать определённой.

5 Пример

В качестве примера применения данного подхода рассмотрим хорошо известную задачу динамической оптимизации с экономическим содержанием [7] в несколько усложнённом виде.

5.1 Описание

После линейного преобразования переменной [8] прикладная задача оптимизации приобретает следующий вид:

$$J = \int_0^T \left(u^2(t) + x(t)\right) dt \to \min,$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),$$

$$0 \le u(t) \le V,$$

$$t \ge 0, \quad x(t) \ge 0,$$

$$x(0) = 0, \quad x(T) = X,$$

$$T \ge 0, \quad X \ge 0.$$

Содержательный смысл задачи состоит в следующем. Фирмой получен заказ на производство X единиц продукции, который надо выполнить к моменту времени T. В формулах через $x(t)$ обозначено количество продукции, уже изготовленной к моменту t, через $u(t)$ – скорость производства продукции. Текущая скорость неотрицательна и ограничена сверху величиной V (обычно [7] неявно полагается $V = \infty$, что упрощает задачу). Функция Лагранжа $L = u^2 + x$ состоит из двух слагаемых. Первое (u^2) определяет плату за скорость изготовления, а второе (x) – плату за хранение изготовленной продукции. Первоначально обе эти платы входили в функцию Лагранжа с некоторыми коэффициентами. После линейного преобразования переменной эти коэффициенты стали равными единице, а все величины сделались безразмерными. Ищется управление, минимизирующее функционал J.

Область достижимости представляет собой острый угол с вершиной в начале координат

$$D = \{(t, x) : t \geq 0, 0 \leq x \leq Vt\}$$

(см. рис. 1).

5.2 Принцип максимума

Найдём экстремали с помощью принципа максимума. Имеем

$$\Pi(x, v, p) = pv - v^2 - x,$$

$$\frac{dp}{dt} = 1 \Rightarrow p = t - a.$$

Вдоль каждой экстремали импульс $p = t - a$ линейно растёт; при этом a – параметр, отличающий одну экстремаль от другой. Далее,

$$u = \arg\max_{0 \leq v \leq V} \left(pv - v^2 - x\right),$$

откуда

$$u = \arg\min_{0 \leq v \leq V} \left(v^2 - pv\right). \tag{22}$$

Вершина параболы $y = v^2 - pv$:

$$v_0 = \frac{p}{2}.$$

В зависимости от того, как расположена вершина v_0 по отношению к отрезку $[0, V]$ допустимых управлений, имеем три стадии:

$$u = 0, \quad u = \frac{p}{2}, \quad u = V.$$

Во времени эти стадии возникают в указанном порядке: сначала $u = 0$ (период ожидания; продукция не производится), затем развитие производства с линейной скоростью $u = \frac{t-a}{2}$ (ускорение равно $\dot{u} = \frac{1}{2}$) и, наконец, производство с максимальной скоростью $u = V$.

Экстремали, выходящие из начала координат, образуют центральное поле, заметающее угол достижимости D (рис. 1). Экстремаль $a = 0$ разбивает D на две подобласти: правую D_1 $(a \geq 0)$ и левую D_2 $(-2V \leq a \leq 0)$. При $a < -2V$ экстремали не существуют.

В подобласти $a \geq 0$ задержка производства идёт на промежутке времени $[0, a]$, а в подобласти $-2V \leq a \leq 0$ период задержки вообще отсутствует. Приведём выражения для различных функций, связанных с экстремалями, в каждой подобласти отдельно.

Траектории, проходящие по D_1, подчинены условиям

$$u(t, a) = \begin{cases} 0, \quad 0 \leq t \leq a; \\ (t-a)/2, \quad a \leq t \leq 2V + a; \\ V, \quad 2V + a \leq t. \end{cases} \quad (a \geq 0),$$

$$x(t, a) = \begin{cases} 0, \quad 0 \leq t \leq a; \\ (t-a)^2/4, \quad a \leq t \leq 2V + a; \\ V(t - V - a), \quad 2V + a \leq t. \end{cases} \quad (a \geq 0),$$

а траектории, проходящие по D_2, – условиям

$$u(t, a) = \begin{cases} (t-a)/2, \quad a \leq t \leq 2V + a; \\ V, \quad 2V + a \leq t. \end{cases} \quad (-2V \leq a \leq 0),$$

$$x(t, a) = \begin{cases} (t-a)^2/4 - a^2/4, \quad a \leq t \leq 2V + a; \\ V(t - V - a) - a^2/4, \quad 2V + a \leq t. \end{cases} \quad (-2V \leq a \leq 0)$$

Красным цветом на рис. 1 изображена линия перехода на максимальную скорость. Эта линия делит каждую из областей D_1, D_2 ещё на 2 части, нижнюю и верхнюю. Пусть D_{i1} $(i = 1, 2)$ – (нижняя) подобласть области D_i, во внутренних точках которой скорость меньше V; D_{i2} – (верхняя) подобласть, в которой скорость максимальна и равна V. Как видно из рис. 1, внутренними границами этих четырёх областей являются экстремаль с параметром $a = 0$

$$x(t,0) = \begin{cases} t^2/4, & 0 \le t \le 2V, \\ V(t-V), & 2V \le t, \end{cases}$$

и линия перехода на максимальную скорость

$$x(t) = \begin{cases} Vt - t^2/4, & 0 \le t \le 2V, \\ V^2, & 2V \le t. \end{cases}$$

5.3 Проверка аналитического критерия

Убедимся, что построенное поле экстремалей оптимально. Для этого выразим явно A и $L - \frac{dA}{dt}$ через фазовые координаты t и x. Сначала нужно выразить параметр a через t и x. После некоторых преобразований можно получить явные выражения для четырёх подобластей

$$D_{11} = \left\{(t,x) : t \ge 0, \quad 0 \le x \le \min\left\{t^2/4, V^2\right\}\right\}$$

$$D_{12} = \left\{(t,x) : t \ge 0, \quad V^2 \le x \le Vt - V^2\right\}$$

$$D_{21} = \left\{(t,x) : t \ge 0, \quad t^2/4 \le x \le Vt - t^2/4\right\}$$

$$D_{22} = \left\{(t,x) : t \ge 0, \quad \max\{t^2/4, Vt - t^2/4\} \le x \le Vt\right\}$$

и для функции A:

$$A(t,x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}, & (t,x) \in D_{11}; \\ \frac{1}{2V}x^2 + Vx - \frac{1}{6}V^3, & (t,x) \in D_{12}; \\ x^2/t + 0.5tx - t^3/48, & (t,x) \in D_{21}; \\ \frac{4}{3}\left(Vt - x\right)^{3/2} - \frac{1}{2}\left(2V + t\right)\left(Vt - 2x\right), & (t,x) \in D_{22}. \end{cases}$$

Переходя к производной по "пробному" управлению v, согласно формуле $L - \frac{d}{dt}A = v^2 + x - \frac{d}{dt}A$, находим

$$L - \frac{dA}{dt} = \begin{cases} \left(v - \sqrt{x}\right)^2, \quad (t,x) \in D_{11}; \\ (V - v)\,\frac{x - Vv}{V}, \quad (t,x) \in D_{12}; \\ \frac{1}{16}\frac{\left(4x - 4tv + t^2\right)^2}{t^2}, \quad (t,x) \in D_{21}; \\ (V - v)\left(V + t - v - 2\sqrt{Vt - x}\right), \quad (t,x) \in D_{22}. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что на стыках областей формулы совпадают. Таким образом, функции A и $L - \frac{dA}{dt}$ являются гладкими. Синтез экстремального управления выражается формулой

$$u = \begin{cases} \sqrt{x}, \quad (t,x) \in D_{11}; \\ \frac{\left(4x + t^2\right)}{4t}, \quad (t,x) \in D_{21}; \\ V, \quad (t,x) \in D_{i2}. \end{cases}$$

Легко показать, что во всех случаях $L - \frac{dA}{dt} \geq 0$. Поэтому в данном примере центральное поле экстремалей является оптимальным.

6 Оптимальность гладкого поля экстремалей

В рассмотренном примере оказалось, что неравенство $L - \frac{dA}{dt} \geq 0$ выполнено. В данном разделе будет показано, что это не случайно.

Теорема 3 *(принцип максимума для центрального поля). Для того, чтобы гладкое центральное поле траекторий было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы оно состояло из экстремалей Понтрягина.*

$\lhd$ Необходимость. Пусть поле оптимально и $\gamma = ([t_0, t_1], \mathbf{x}(.), \mathbf{u}(.))$ – траектория поля. Докажем, что она является экстремалью. Определим вектор импульса согласно формуле

$$\mathbf{p}(t) = \nabla_{\mathbf{x}} A(t, \mathbf{x}(t)). \tag{23}$$

По сути, надо доказать, что γ удовлетворяет уравнению (17), т.к. уравнение движения (18) выполнено автоматически. Кроме того, надо доказать неравенство (19).

Перейдём в (23) к производной по времени (для упрощения аргументы в записи опускаем):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\mathbf{x}} A + \left\langle \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}} A, \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\rangle, \tag{24}$$

где $\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{x}})$ – оператор Гессе

$$\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Скалярное умножение в формуле (24) ведётся по каждой координате. Согласно (2), $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ зависит от $(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$. Меняя порядок дифференцирования, получаем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \nabla_{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial t} A + \langle \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}} A, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \rangle .$$

Ближайшая задача – вынести за скобки оператор $\nabla_{\mathbf{x}}$. Однако напрямую это не получится, т.к., вообще говоря, $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \neq 0$. Поэтому найдём градиент скалярного произведения:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \langle \nabla_{\mathbf{x}} A, \mathbf{f} \rangle = \langle \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}} A, \mathbf{f} \rangle + \langle \nabla_{\mathbf{x}} A, \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f} \rangle .$$

Значит,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \nabla_{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial t} A + \nabla_{\mathbf{x}} \langle \nabla_{\mathbf{x}} A, \mathbf{f} \rangle - \langle \nabla_{\mathbf{x}} A, \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f} \rangle$$

или

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial}{\partial t} A + \langle \nabla_{\mathbf{x}} A, \dot{\mathbf{x}} \rangle \right) - \langle \mathbf{p}, \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f} \rangle = \nabla_{\mathbf{x}} \frac{dA}{dt} - \langle \mathbf{p}, \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f} \rangle .$$

Учитывая (8), имеем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \nabla_{\mathbf{x}} \hat{L} - \langle \mathbf{p}, \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f} \rangle .$$

Подставляя (15), получаем (17).

Теперь выведем принцип максимума. Так как поле оптимально, то при любом $\mathbf{v} \in U$ выполнено условие (12)

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \frac{\partial}{\partial t} A(t, \mathbf{x}) - \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \rangle \geq 0,$$

а для оптимального управления

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \frac{\partial}{\partial t} A(t, \mathbf{x}) - \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \rangle = 0,$$

Вычитая, после сокращения $\frac{\partial}{\partial t} A(t, \mathbf{x})$ получим

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \rangle - L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \rangle \geq 0.$$

или

$$\Pi(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)) - \Pi(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}, \mathbf{p}(t)) \geq 0.$$

Достаточность. Дано поле экстремалей Λ. Возьмём произвольную траекторию $\delta \in \Gamma$ и докажем, что при любом t выполнено неравенство (12). Будем считать, что $\alpha(\delta) = (t_0, \mathbf{x}_0)$. Если это не так, то заменим δ траекторией $\delta_0 \cdot \delta$, где δ_0 – экстремаль поля Λ, оканчивающаяся в $\alpha(\delta)$. Итак, пусть

$$\delta = ([t_0, t_1], \mathbf{y}(.), \mathbf{w}(.)) . \tag{25}$$

В каждой точке траектории δ оканчивается экстремаль поля, которую обозначим

$$\check{\gamma}(t) = ([t_0, t], \mathbf{x}(t, .), \mathbf{u}(t, .)) .$$

Таким образом, имеем однопараметрическое семейство экстремалей с параметром t, который определяет "номер" экстремали. Пусть τ – текущее время экстремали, так что

$$J(\check{\gamma}(t)) = \int_{t_0}^{t} L(\tau, \mathbf{x}(t, \tau), \mathbf{u}(t, \tau)) d\tau.$$

Оценим производную функции Π по параметру t (аргументы по возможности опускаем):

$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p}) =$$
$$\left\langle \nabla_{\mathbf{x}}\Pi(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p}), \tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}\right\rangle + \left\langle \nabla_{\mathbf{u}}\Pi(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p}), \tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}\right\rangle + \nabla_{\mathbf{p}}\Pi(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p})\tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}.$$

Здесь $\left\langle \nabla_{\mathbf{u}}\Pi(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p}), \tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}\right\rangle$ – условная запись для

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Pi(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u}(t+\Delta t,\tau),\mathbf{p}) - \Pi(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u}(t,\tau),\mathbf{p})}{\Delta t}.$$

В последнем выражении величина под знаком предела неположительна в силу принципа максимума, т.к. $\mathbf{u}(t,\tau)$ – экстремальное, а $\mathbf{v} = \mathbf{u}(t+\Delta t,\tau)$ – пробное управление для момента времени τ. Поэтому в пределе будем иметь

$$\left\langle \nabla_{\mathbf{u}}\Pi(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p}), \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}\right\rangle \le 0,$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p}) \ge \left\langle \nabla_{\mathbf{x}}\Pi(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p}), \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}\right\rangle + \left\langle \nabla_{\mathbf{p}}\Pi(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p}), \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}\right\rangle.$$

Продифференцируем по t равенство (15) с учётом (2):

$$\frac{\partial L(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \mathbf{p}, \frac{\partial \mathbf{x}(t,\tau)}{\partial \tau}\right\rangle - \frac{\partial}{\partial t}\Pi(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p})$$

Отсюда

$$\frac{\partial L(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial t} = \left\langle \mathbf{p}, \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{x}(t,\tau)}{\partial \tau}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}, \frac{\partial \mathbf{x}(t,\tau)}{\partial \tau}\right\rangle - \frac{\partial}{\partial t}\Pi(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p}).$$

Используя формулу производной произведения

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\langle \mathbf{p}, \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}\rangle = \langle \frac{\partial}{\partial \tau}\mathbf{p}, \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{p}, \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}\rangle,$$

получим

$$\frac{\partial L(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left\langle \mathbf{p}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tau}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}\right\rangle - \frac{\partial}{\partial t}\Pi(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p}).$$

Из неравенства $\frac{\partial}{\partial t}\Pi \geq \left\langle \nabla_{\mathbf{x}}\Pi, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \nabla_{\mathbf{p}}\Pi, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right\rangle$ выводим

$$\frac{\partial L}{\partial t} \leq \frac{\partial}{\partial \tau}\left\langle \mathbf{p}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tau}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \nabla_{\mathbf{x}}\Pi, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \nabla_{\mathbf{p}}\Pi, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right\rangle.$$

Группируя и используя канонические уравнения,

$$\frac{\partial L}{\partial t} \leq \frac{\partial}{\partial \tau}\left\langle \mathbf{p}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tau} + \nabla_{\mathbf{x}}\Pi, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} - \nabla_{\mathbf{p}}\Pi, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right\rangle,$$

получаем

$$\frac{\partial L}{\partial t} \leq \frac{\partial}{\partial \tau}\left\langle \mathbf{p}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right\rangle. \tag{26}$$

Теперь оценим производную по t функции $\int_{t_0}^{t} L(\tau, \mathbf{x}(t,\tau), \mathbf{u}(t,\tau))d\tau$ как сумму производной интеграла по верхнему пределу и производной под знаком интеграла:

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} L(\tau, \mathbf{x}(t,\tau), \mathbf{u}(t,\tau))d\tau = L(t, \mathbf{x}(t,t), \mathbf{u}(t,t)) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial L(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial t} d\tau \leq$$

$$\leq L(t, \mathbf{x}(t,t), \mathbf{u}(t,t)) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \tau}\left\langle \mathbf{p}(t,\tau), \frac{\partial \mathbf{x}(t,\tau)}{\partial t} \right\rangle d\tau =$$

$$= L(t, \mathbf{x}(t,t), \mathbf{u}(t,t)) + \left\langle \mathbf{p}(t,\tau), \frac{\partial \mathbf{x}(t,\tau)}{\partial t} \right\rangle \Bigg|_{t_0}^{t} =$$

$$= L(t, \mathbf{x}(t,t), \mathbf{u}(t,t)) + \left\langle \mathbf{p}(t,t), \frac{\partial \mathbf{x}(t,t)}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \mathbf{p}(t,t_0), \frac{\partial \mathbf{x}(t,t_0)}{\partial t} \right\rangle.$$

Так как поле является центральным, то $x(t,t_0) = x_0$ для всех t. Поэтому $\frac{\partial x(t,t_0)}{\partial t} = 0$. Значит,

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \hat{L}(\tau)d\tau \leq L(t, \mathbf{x}(t,t), \mathbf{u}(t,t)) + \left\langle \mathbf{p}(t,t), \frac{\partial \mathbf{x}(t,t)}{\partial t} \right\rangle.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t,t),$$

выразим полную производную выражения $\mathbf{x}(t,t)$ по t:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \frac{\partial \mathbf{x}(t,t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}(t,t)}{\partial \tau}\frac{dt}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}(t,t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}(t,t)}{\partial \tau}$$

(здесь, например, $\frac{\partial \mathbf{x}(t,t)}{\partial \tau}$ есть производная по второму аргументу, τ, при $\tau = t$). Поэтому

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \hat{L}(\tau)d\tau \leq L(t,\mathbf{x}(t,t),\mathbf{u}(t,t)) - \left\langle \mathbf{p}(t,t), \frac{\partial \mathbf{x}(t,t)}{\partial \tau}\right\rangle + \left\langle \mathbf{p}(t,t), \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t)\right\rangle.$$

Имеем $\frac{\partial \mathbf{x}(t,t)}{\partial \tau} = f(t,\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t))$, откуда

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \hat{L}(\tau)d\tau \leq -\Pi(t,\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{p}) + \left\langle \mathbf{p}(t,t), \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t)\right\rangle.$$

Вспомним, что $\int_{t_0}^{t} \hat{L}(\tau)d\tau = \hat{A}(t)$. Поэтому

$$\hat{L}(t) - \frac{d}{dt}\hat{A}(t) \geq L(t,\mathbf{y}(t),\mathbf{v}(t)) + \Pi(t,\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{p}) - \left\langle \mathbf{p}(t,t), \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t)\right\rangle$$

или

$$\hat{L}(t,\mathbf{y}(t),\mathbf{v}(t)) - \frac{d}{dt}A(t,\mathbf{y}(t)) \geq \Pi(t,\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{p}) - \Pi(t,\mathbf{y},\mathbf{v},\mathbf{p}).$$

Снова применяя принцип максимума, получаем окончательно

$$L(t,\mathbf{y}(t),\mathbf{v}(t)) - \frac{d}{dt}A(t,\mathbf{y}(t)) \geq 0. \tag{27}$$

Для произвольной пробной траектории критерий оптимальности выполнен. $\triangleright$

7 Заключение

В статье завершено начатое в работах [1], [2] построение аналитического аппарата для оптимальных центральных полей траекторий. Рассмотрена задача с фиксированным временем, хотя не видно принципиальных трудностей для применения данного аппарата в смежных классах задач. Как показывает разобранный в разделе 5 пример, соотношение (27) для произвольной пробной траектории (25) в регулярном случае превращается в простое неравенство

$$L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}) - \frac{d}{dt}A(t, \mathbf{x}(t)) \geq 0 \tag{28}$$

при произвольном управлении $\mathbf{v}$. Это неравенство сходно с неравенством Понтрягина

$$\Pi(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) - \Pi(t, \mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{p}) \geq 0 \tag{29}$$

и неравенством Вейерштрасса в вариационном исчислении. Так, в примере из раздела 5 левые части неравенств (28) и (29) совпадают, кроме одного вырожденного случая. В общем классе задач можно гарантировать только полученное в последней теореме неравенство

$$L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}) - \frac{d}{dt}A(t, \mathbf{x}(t)) \geq \Pi(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) - \Pi(t, \mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{p}),$$

причём величины слева и справа отличаются на интеграл от выражения

$$-\left\langle \nabla_{\mathbf{u}}\Pi(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}), \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} \right\rangle,$$

которое не всегда гладко. В регулярном случае этот интеграл обращается в нуль.

В основу изложения были положены алгебра траекторий и аддитивные функционалы, что сильно облегчило получение результатов. В последней теореме показано, что принцип максимума Понтрягина для гладкого центрального поля экстремалей является не только необходимым, но и достаточным условием глобального экстремума.

Список литературы

[1] *Орёл Е.Н., Орёл О.Е.* Абсолютный экстремум в автономных задачах оптимального управления // Известия РАН. Теория и системы управления, 2013, № 3, 60-73.

[2] *Орёл Е.Н., Орёл О.Е.* Центральные поля оптимальных траекторий // Доклады Академии Наук, **458**:4 (2014), 402-405.

[3] *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления - М.: Мир (1974), 488.

[4] *Беллман Р.* Динамическое программирование - М., Изд-во иностр. лит. (1960), 400.

[5] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов - М.: Наука (1969), 391.

[6] *Маклейн С.* Гомология - М.: Мир (1966), 544.

[7] *Kamien N.I., Shwartz N.L.* Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management - New York: Elsevier (1991), 377.

[8] *Орёл Е.Н., Орёл О.Е.* Оптимальное управление процессом производства при выполнении заказа к заданному сроку // Экономика и математические методы, **52**:3 (2016), 65-77.