

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2020

Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>
e-mail: jodiff@mail.ru

Стохастические дифференциальные уравнения
Численные методы

Моделирование линейных нестационарных стохастических систем спектральным методом

К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт
национальный исследовательский университет

e-mail: rkoffice@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается спектральный метод моделирования линейных одномерных нестационарных стохастических систем, описываемых линейными стохастическими дифференциальными уравнениями с аддитивным и мультипликативным шумом. В основе метода лежит представление случайных процессов с помощью ортогональных рядов по произвольным базисным системам. Основное внимание уделено апробации предлагаемого метода, а именно моделированию типовых случайных процессов, которые являются выходными сигналами линейных стохастических систем: винеровский процесс (броуновское движение), процесс Орнштейна–Уленбека, броуновский мост и геометрическое броуновское движение.

Ключевые слова: анализ выходных процессов, линейная стохастическая система, моделирование, ортогональное разложение, случайный процесс, спектральный метод, спектральная форма математического описания, винеровский процесс, броуновское движение, процесс Орнштейна–Уленбека, броуновский мост, геометрическое броуновское движение.

Введение

В теории стохастических систем управления при описании математических моделей возникает задача формирования случайных сигналов с заданными вероятностными характеристиками. Один из вариантов ее решения состоит в построении динамической, как правило, линейной стационарной системы, входным сигналом для которой является гауссовский белый шум. Выходной сигнал такой динамической системы, называемой формирующим фильтром, должен обладать требуемыми вероятностными характеристиками. Для этой задачи традиционно применяется описание линейных систем дифференциальными уравнениями, импульсными переходными функциями, передаточными функциями и частотными характеристиками. Предлагается для описания формирующих фильтров и моделирования случайных сигналов применить спектральную форму. При ее выборе характеристикой линейной системы является двумерная нестационарная передаточная функция. Спектральная форма математического описания может применяться как для стационарных, так и для нестационарных систем. По аналогии с описанием линейной системы передаточными функциями и частотными характеристиками обеспечивается простота моделирования выходного сигнала, поскольку дифференциальные и интегральные соотношения в спектральной форме математического описания становятся алгебраическими (матричными).

Ранее спектральная форма математического описания и спектральный метод применялись для моделирования выходных сигналов линейных систем при случайных воздействиях, но только в рамках корреляционной теории, т.е. задача анализа выходных процессов решалась как детерминированная, где входные и выходные сигналы задавались своими математическими ожиданиями и ковариационными функциями [1–3].

В этой работе предложена методика моделирования случайных сигналов с применением спектральной формы математического описания и спектрального метода. Предложенная методика может применяться для моделирования динамических систем при их описании линейными стохастическими дифференциальными уравнениями как с аддитивным, так и с мультипликативным шумом. Основные соотношения были получены в работах [4, 5], здесь основное внимание уделено апробации и тестированию предлагаемой методики при моделировании типовых случайных процессов. В качестве тестовых задач моделировались гауссовские случайные процессы: винеровский процесс (броуновское движение), процесс Орнштейна – Уленбека, броуновский мост. Кроме того, рассмотрен пример моделирования негауссовского процесса: геометрического броуновского движения.

Спектральная форма математического описания сигналов и линейных систем управления

Базовым понятием спектральной формы математического описания систем управления является нестационарная спектральная характеристика — упорядоченный набор коэффициентов разложения функции времени (детерминированного сигнала, математического ожидания случайного сигнала) в ряд по функциям базисной системы, представленный в виде бесконечной матрицы-столбца. Для функций двух переменных (импульсной переходной функции линейной системы, ковариационной функции случайного сигнала) спектральная характеристика представляется бесконечной матрицей. Базисные системы могут быть ортонормированными или биортонормированными, в этой работе ограничимся первыми из них. Тогда функции времени $x(t)$ ставится в соответствие спектральная характеристика

$$X = [X_0 \ X_1 \ X_2 \ \dots]^T \quad (\text{ }^T \text{ — транспонирование})$$

относительно ортонормированной базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$, где

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i q(i, t), \quad X_i = (q(i, t), x(t))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) x(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Такое представление функции в виде ряда справедливо, если $x(t)$ — квадратично интегрируемая функция на отрезке T (интегралы понимаются в смысле Лебега), однако формально коэффициенты разложения X_i могут быть найдены для более широкого множества функций, включая и обобщенные. В последнем случае ряд не будет сходиться к функции $x(t)$ в обычном смысле, но спектральная характеристика X может быть найдена.

Если $x(t)$ — случайный процесс, то для него в спектральной форме математического описания определяются первая и вторая нестационарные спектральные плотности [1]:

$${}^1S^x = [{}^1S_0^x \ {}^1S_1^x \ {}^1S_2^x \ \dots]^T,$$

где

$$m_x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} {}^1S_i^x q(i, t), \quad {}^1S_i^x = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) m_x(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

и

$$S^x = \begin{bmatrix} S_{00}^x & S_{01}^x & S_{02}^x & \dots \\ S_{10}^x & S_{11}^x & S_{12}^x & \dots \\ S_{20}^x & S_{21}^x & S_{22}^x & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$R_x(t, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} S_{ij}^x q(i, t) q(j, \tau),$$

$$S_{ij}^x = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} q(i, t) q(j, \tau) R_x(t, \tau) dt d\tau, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

В приведенных соотношениях $m_x(t) = \mathbb{E}x(t)$ и $R_x(t, \tau) = \text{cov}(x(t), x(\tau)) = \mathbb{E}[(x(t) - m_x(t))(x(\tau) - m_x(\tau))]$ — математическое ожидание и ковариационная функция случайного процесса $x(t)$ соответственно.

Здесь, как и в случае с детерминированным сигналом, можно полагать, что $R_x(t, \tau)$ — квадратично интегрируемая функция на квадрате \mathbb{T}^2 , а можно расширить множество случайных процессов, полагая, что $R_x(t, \tau)$ может быть обобщенной функцией (главное, чтобы можно было вычислить все элементы матрицы S^x).

Преобразование, ставящее в соответствие функции ее спектральную характеристику, называется спектральным преобразованием и обозначается \mathbb{S} . Обратное спектральное преобразование, позволяющее восстановить функцию по ее спектральной характеристике, обозначается \mathbb{S}^{-1} . В соответствии с этими обозначениями имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[x(t)] &= X & (x(t) &= \mathbb{S}^{-1}[X]), \\ \mathbb{S}[m_x(t)] &= {}^1S^x & (m_x(t) &= \mathbb{S}^{-1}[{}^1S^x]), \\ \mathbb{S}[R_x(t, \tau)] &= S^x & (R_x(t, \tau) &= \mathbb{S}^{-1}[S^x]). \end{aligned}$$

Использование одинаковых обозначений для преобразования функций одной и двух переменных сделано для упрощения записи соотношений, в дальнейшем это не приводит к путанице. Аналогичное замечание справедливо при обозначении обратного спектрального преобразования для бесконечных матриц-столбцов и бесконечных матриц.

Для линейных систем управления можно применять различные формы математического описания [3,6]: линейными дифференциальными уравнениями, переходными функциями (в частности импульсной переходной функцией

$k(t, \tau)$ — реакцией системы на импульсное входное воздействие $\delta(t - \tau)$ при нулевых начальных условиях), для линейных стационарных систем используется описание передаточными функциями и частотными характеристиками. При применении спектральной формы математического описания линейная система определяется двумерной нестационарной передаточной функцией, которая представляет собой бесконечную матрицу W с элементами

$$\begin{aligned} W_{ij} &= (q(i, t)q(j, \tau), k(t, \tau))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} q(i, t)q(j, \tau)k(t, \tau)dt d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \left[\int_0^t k(t, \tau)q(j, \tau) d\tau \right] dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

с учетом условия физической реализуемости: $k(t, \tau) = 0$ при $t \leq \tau$.

Эквивалентное определение элементов матрицы W состоит в следующем [7]:

$$W_{ij} = (q(i, t), \mathcal{A}q(j, t))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \mathcal{A}q(j, t) dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где \mathcal{A} — линейный оператор, соответствующий линейной системе с импульсной переходной функцией $k(t, \tau)$.

Известная связь вход-выход для линейной системы с импульсной переходной функцией $k(t, \tau)$, а именно

$$x(t) = \int_0^t k(t, \tau)g(\tau) d\tau,$$

где $g(t)$ и $x(t)$ — входной и выходной сигналы соответственно, в спектральной форме математического описания определяется соотношением

$$X = WG, \quad \mathbb{S}[g(t)] = G, \quad \mathbb{S}[x(t)] = X.$$

При случайном входном сигнале $g(t)$

$$m_x(t) = \int_0^t k(t, \tau)m_g(\tau) d\tau, \quad R_x(t, \tau) = \int_0^t \int_0^\tau k(t, \theta)k(\tau, \vartheta)R_g(\theta, \vartheta) d\theta d\vartheta,$$

где $m_g(t)$, $m_x(t)$, $R_g(t, \tau)$, $R_x(t, \tau)$ — математические ожидания и ковариационные функции входного и выходного сигналов соответственно, имеем

$$\begin{aligned} {}^1S^x &= W {}^1S^g, \quad S^x = W S^g W^T, \\ \mathbb{S}[m_g(t)] &= {}^1S^g, \quad \mathbb{S}[m_x(t)] = {}^1S^x, \quad \mathbb{S}[R_g(t, \tau)] = S^g, \quad \mathbb{S}[R_x(t, \tau)] = S^x. \end{aligned}$$

Остановимся на элементарных звеньях линейных систем управления [3, 8]: усилительном с импульсной переходной функцией $k(t, \tau) = a(t)\delta(t - \tau)$ ($a(t)$ — коэффициент усиления), дифференцирующем с импульсной переходной функцией $k(t, \tau) = \delta'(t - \tau)$ и интегрирующем с импульсной переходной функцией $k(t, \tau) = 1(t - \tau)$ ($1(t - \tau)$ — единичная ступенчатая функция, или индикатор множества $t > \tau$ при фиксированном τ). Для каждого из этих звеньев определим двумерные нестационарные передаточные функции (спектральные характеристики оператора умножения, дифференцирования и интегрирования [7]) согласно (1) или (2), т.е. бесконечные матрицы A , \mathcal{P} и P^{-1} с элементами

$$A_{ij} = \int_{\mathbb{T}} a(t)q(i, t)q(j, t)dt, \quad \mathcal{P}_{ij} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \frac{dq(j, t)}{dt} dt,$$

$$P_{ij}^{-1} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_0^t q(j, \tau)d\tau dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Описание случайных процессов спектральными характеристиками

Выше приведено описание детерминированных и случайных сигналов, которое применяется в спектральной форме математического описания, при этом случайные сигналы задаются своими моментными характеристиками: математическим ожиданием и ковариационной функцией. При таком описании не учитываются отдельные траектории случайных процессов, хотя математический аппарат функциональных рядов может быть применен и к случайным процессам [9]. Тогда появляется возможность моделирования отдельных траекторий или ансамблей траекторий, оценивание моментных характеристик любого порядка, а также оценивание функции распределения и плотности вероятности, если есть такая необходимость. Например, известно разложение Карунена–Лоэва для случайного процесса по собственным функциям линейного интегрального оператора с ядром $R_x(t, \tau)$ или каноническое представление случайного процесса [10, 11].

Особенность спектральной формы математического описания состоит не только в том, что сигналы представляются в виде функциональных рядов по функциям ортонормированной базисной системы, но и в том, что при преобразовании сигналов все операции производятся только с коэффициентами разложения, т.е. со спектральной характеристикой. Этот же подход целесообразно реализовать и для случайных процессов.

Таким образом, определение спектральной характеристики функции времени, приведенное выше, можно расширить для случайных процессов. Если $x(t)$ — случайный процесс, то его спектральная характеристика представляет

собой бесконечную матрицу-столбец, образованную коэффициентами разложения X_i , которые являются случайными величинами. При этом функциональный ряд сходится к $x(t)$ в среднеквадратическом смысле.

Укажем, как связана спектральная характеристика X случайного процесса с первой и второй нестационарными спектральными плотностями ${}^1S^x$ и S^x . Для элементов первой нестационарной спектральной плотности имеем

$$\begin{aligned} {}^1S_i^x &= \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \mathbb{E}x(t) dt = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{\infty} X_j q(j, t) \right] dt = \\ &= \mathbb{E} \sum_{j=0}^{\infty} X_j \int_{\mathbb{T}} q(i, t) q(j, t) dt = \mathbb{E} \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{ij} X_j = \mathbb{E} X_i, \end{aligned}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Таким образом, ${}^1S^x = \mathbb{E}X$. Если представить случайную функцию $x(t)$ в виде суммы $m_x(t) + x^\circ(t)$, где $\mathbb{E}x^\circ(t) = 0$, то $X = {}^1S^x + X^\circ$, где X° — спектральная характеристика случайного процесса $x^\circ(t)$.

Для элементов второй нестационарной спектральной плотности можно записать

$$\begin{aligned} S_{ij}^x &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} q(i, t) q(j, \tau) \text{cov}(x(t), x(\tau)) dt d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} q(i, t) q(j, \tau) \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} X_k^\circ q(k, t) \sum_{l=0}^{\infty} X_l^\circ q(l, \tau) \right] dt d\tau = \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} X_k^\circ \int_{\mathbb{T}} q(i, t) q(k, t) dt \sum_{l=0}^{\infty} X_l^\circ \int_{\mathbb{T}} q(j, t) q(l, t) dt \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} X_k^\circ \delta_{ik} \sum_{l=0}^{\infty} X_l^\circ \delta_{jl} \right] = \mathbb{E} [X_i^\circ X_j^\circ] = \text{cov}(X_i, X_j). \end{aligned}$$

Следовательно, находим $S^x = \text{cov}(X) = \mathbb{E}(X - {}^1S^x)(X - {}^1S^x)^\top = \mathbb{E}X^\circ X^{\circ\top}$.

В формирующих фильтрах базовым входным сигналом является стандартный центрированный гауссовский белый шум $v(t)$ — случайный процесс с математическим ожиданием $m_v(t) = \mathbb{E}v(t) = 0$ и ковариационной функцией $R_v(t, \tau) = \text{cov}(v(t), v(\tau)) = \delta(t - \tau)$ (единичной интенсивности). При описании случайных процессов в рамках корреляционной теории и применении спектральной формы математического описания для стандартного центрированного гауссовского белого шума первая нестационарная спектральная плотность — это нулевая матрица-столбец, а вторая нестационарная спектральная плотность — это бесконечная единичная матрица. Тогда спектральная

характеристика \mathcal{V} стандартного гауссовского белого шума — это бесконечная матрица-столбец, элементы которой являются независимыми случайными величинами \mathcal{V}_i , имеющими стандартное нормальное распределение, для любой базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$, т.е.

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{V}_i q(i, t), \quad \mathcal{V}_i \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (3)$$

Действительно, нулевое математическое ожидание случайных величин \mathcal{V}_i обеспечивает равенство первой нестационарной спектральной плотности нулевой матрице-столбцу. Следствием их независимости является диагональный вид второй нестационарной спектральной плотности, на диагонали которой дисперсии случайных величин \mathcal{V}_i , т.е. единицы. Гауссовское распределение случайных величин \mathcal{V}_i требуется для того, чтобы белый шум был именно гауссовским.

Рассмотрим стандартный винеровский процесс (броуновское движение) $w(t)$ — гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием $m_w(t) = \mathbb{E}w(t) = 0$ и ковариационной функцией $R_w(t, \tau) = \text{cov}(w(t), w(\tau)) = \min\{t, \tau\}$ (гауссовский случайный процесс полностью описывается этими двумя моментными характеристиками). Случайный процесс $w(t)$ имеет независимые приращения и для него выполняются условия

$$w(0) = 0, \quad w(t) - w(\tau) \sim \mathcal{N}(0, |t - \tau|).$$

Его представление в виде функционального ряда со случайными коэффициентами имеет вид [12–14]

$$w(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{V}_j \int_0^t q(j, \tau) d\tau. \quad (4)$$

Дополнительно отметим, что доказательство существования броуновского движения основано на формуле (4). Его представление в виде ряда используется для вычисления повторных стохастических интегралов при построении численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений, основанных на разложении решения в ряды Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича [15–17].

Представим функцию

$$\int_0^t q(j, \tau) d\tau$$

в виде ряда по базисной системе $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ с учетом того, что соответствующий набор коэффициентов разложения этой функции представляет собой столбец матрицы P^{-1} с номером j :

$$\int_0^t q(j, \tau) d\tau = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}^{-1} q(i, t).$$

Подставляя это выражение в (4) и меняя порядок суммирования, находим

$$w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^{-1} \mathcal{V}_j \right) q(i, t),$$

или

$$w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{W}_i q(i, t), \quad \mathcal{W}_i = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^{-1} \mathcal{V}_j,$$

т.е. \mathcal{W}_i — элементы спектральной характеристики \mathcal{W} случайного процесса $w(t)$.

Используя матричные обозначения, можно записать

$$\mathcal{W} = P^{-1} \mathcal{V}. \tag{5}$$

Дополнительно проиллюстрируем свойство самоподобия (фрактальности, автомодельности) винеровского процесса [12, 24], а именно то, что случайный процесс

$$w^*(t) = \frac{1}{\sqrt{c}} w(ct), \quad c > 0,$$

также является винеровским процессом. Это означает, что случайные процессы $w(t)$ и $w^*(t)$ имеют одинаковые конечномерные распределения: $w(t) \stackrel{\circ}{=} w^*(t)$.

Покажем связь указанного свойства со спектральными характеристиками. Предположим, что базисная система $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ определена на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$, а \mathcal{W}^c и P^{-1} — спектральные характеристики случайного процесса $w(ct)$ и оператора интегрирования относительно этой базисной системы соответственно. Функции $\{\tilde{q}(i, t) = (1/\sqrt{c})q(i, t/c)\}_{i=0}^{\infty}$ образуют базисную систему на отрезке $\tilde{\mathbb{T}} = [0, cT]$. Спектральные характеристики винеровского процесса $w(t)$ и оператора интегрирования относительно базисной системы $\{\tilde{q}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ обозначим через $\tilde{\mathcal{W}}$ и \tilde{P}^{-1} соответственно. Тогда

$$\tilde{\mathcal{W}} = \sqrt{c} \mathcal{W}^c, \quad \tilde{P}^{-1} = cP^{-1}.$$

Распределение спектральных характеристик \mathcal{V} и $\tilde{\mathcal{V}}$ стандартного гауссовского белого шума $v(t)$ не зависит от выбора базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ или $\{\tilde{q}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ ($\mathcal{V} \doteq \tilde{\mathcal{V}}$) и $\tilde{\mathcal{W}} = \tilde{P}^{-1}\tilde{\mathcal{V}}$, следовательно,

$$\mathcal{W}^* = \frac{1}{\sqrt{c}} \mathcal{W}^c = \frac{1}{c} \tilde{\mathcal{W}} = \frac{1}{c} \tilde{P}^{-1} \tilde{\mathcal{V}} \doteq \frac{c}{c} P^{-1} \mathcal{V} = P^{-1} \mathcal{V},$$

но произведение $P^{-1}\mathcal{V}$ определяет спектральную характеристику \mathcal{W} винеровского процесса $w(t)$ относительно базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$, т.е.

$$\mathcal{W}^* = \frac{1}{\sqrt{c}} \mathcal{W}^c, \quad \mathcal{W} \doteq \mathcal{W}^*.$$

Анализ выходных процессов линейных стохастических систем

Ограничимся одномерными системами, которые описываются линейным стохастическим дифференциальным уравнением в форме Ланжевена:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)g(t) + (c(t)x(t) + d(t))v(t), \quad x(0) = x_0, \quad (6)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ — заданные функции, $g(t)$ — заданный входной сигнал, $v(t)$ — стандартный гауссовский белый шум, x_0 — случайная величина с конечным вторым моментом: $\mathbb{E}x_0^2 < \infty$, $x(t)$ — выходной сигнал, $t \in \mathbb{T} = [0, T]$.

Случайный процесс $x(t)$ является решением уравнения (6), если он удовлетворяет интегральному соотношению

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (a(\tau)x(\tau) + b(\tau)g(\tau)) d\tau + \int_0^t (c(\tau)x(\tau) + d(\tau)) \circ dw(\tau),$$

в котором второй интеграл понимается в смысле Стратоновича, $w(t)$ — стандартный винеровский процесс. Использование интеграла Стратоновича обеспечивает возможность применения таких же правил дифференцирования, как если бы случайный процесс $x(t)$ был гладкой функцией. При $c(t) = 0$ и $d(t) \neq 0$ уравнение (6) является линейным уравнением с аддитивным шумом, а при $c(t) \neq 0$ и $d(t) = 0$ — линейным уравнением с мультипликативным шумом. Линейность уравнения (6) и конечность второго момента случайной величины x_0 обеспечивает существование и единственность решения, а также условие $\mathbb{E}x^2(t) < \infty$ [18].

Задача анализа выходных процессов состоит в нахождении выходного сигнала $x(t)$ по заданной математической модели (6) и входному сигналу $g(t)$. Воспользуемся для ее решения спектральным методом, представляя все

входящие в уравнение (6) элементы спектральными характеристиками. Для этого нужно применить спектральное преобразование к левой и правой частям уравнения (6):

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[\dot{x}(t)|_{x(0)=x_0}] &= \mathbb{S}[a(t)x(t) + b(t)g(t) + (c(t)x(t) + d(t))v(t)] = \\ &= \mathbb{S}[a(t)x(t)] + \mathbb{S}[b(t)g(t)] + \mathbb{S}[(c(t)x(t) + d(t))v(t)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее следует использовать известные свойства спектрального преобразования [1–3, 7], которые ранее применялись для формирования расчетных алгоритмов анализа выходных процессов линейных и нелинейных детерминированных систем. Эти свойства не зависят от того, осуществляется преобразование детерминированных или случайных сигналов, поэтому подробно здесь не приводятся.

Зафиксируем базисную систему $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$, заданную на отрезке \mathbb{T} , и введем следующие обозначения: G , X и D — спектральные характеристики входного, выходного сигналов и функции $d(t)$ соответственно; \mathcal{V} — спектральная характеристика стандартного гауссовского белого шума $v(t)$; A , B и C — спектральные характеристики операторов умножения на функции $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ соответственно; \mathcal{P} — спектральная характеристика оператора дифференцирования; Δ — спектральная характеристика дельта-функции $\delta(t)$, т.е. матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ в точке $t = 0$.

По сравнению с детерминированным случаем, для которого все спектральные характеристики неслучайны, здесь спектральная характеристика \mathcal{V} образована случайными величинами, начальное значение x_0 также может быть случайной величиной и, следовательно, спектральная характеристика X также образована случайными величинами.

Если условие $c(t) = 0$ не выполнено, то требуется определить трехмерную нестационарную передаточную функцию множительного звена — бесконечную пространственную матрицу V с элементами

$$V_{ijk} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t)q(j, t)q(k, t)dt, \quad i, j, k = 0, 1, 2, \dots$$

С помощью этой матрицы можно преобразовать спектральную характеристику функции в спектральную характеристику оператора умножения на эту функцию [1, 4, 5]:

$$\mathbb{S}[x(t)v(t)] = (V\mathcal{V})X,$$

где для нахождения произведения пространственной матрицы и матрицы-столбца производится суммирование по любому индексу i , j или k (пространственная матрица V обладает симметрией по любой паре индексов).

В результате из соотношения (7) получаем

$$PX - x_0\Delta = AX + BG + (V\mathcal{V})(CX + D),$$

где $P = \mathcal{P} + \Delta\Delta^T$ — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального условия [1, 4, 5, 7].

Таким образом,

$$PX - AX - (V\mathcal{V})CX = x_0\Delta + BG + (V\mathcal{V})D \quad (8)$$

и

$$X = (P - A - (V\mathcal{V})C)^{-1}(x_0\Delta + BG + (V\mathcal{V})D). \quad (9)$$

При $c(t) = 0$ целесообразно определить D не как спектральную характеристику функции $d(t)$, а как спектральную характеристику оператора умножения на эту функцию. Тогда можно обойтись без пространственной матрицы V , а уравнение (8) примет более простой вид

$$PX - AX = x_0\Delta + BG + DV, \quad (10)$$

его решение представляется следующим образом:

$$X = (P - A)^{-1}(x_0\Delta + BG + DV). \quad (11)$$

Применяя обратное спектральное преобразование, находим решение задачи анализа выходных процессов в виде ряда

$$x(t) = \mathbb{S}^{-1}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} X_i q(i, t), \quad (12)$$

коэффициенты X_i которого зависят от элементов спектральной характеристики \mathcal{V} стандартного гауссовского белого шума $v(t)$, т.е. от счетного числа независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, а также от случайной величины x_0 .

Выполнение операций с бесконечными матрицами, особенно в части умножения и обращения, затрудняет нахождение выходного сигнала аналитически. Поэтому перейдем к приближенному решению, используя тот же подход, что и при анализе выходных процессов линейных детерминированных систем, а именно усечение всех спектральных характеристик до некоторого выбранного порядка L [1]. Это означает, что все матрицы, входящие в соотношение (9), являются конечными размера L по каждому измерению, т.е. L для матриц-столбцов, $L \times L$ для квадратных и $L \times L \times L$ для пространствен-

ных матриц. В этом случае будет получено приближенное решение задачи анализа выходных процессов в виде частичной суммы:

$$x(t) \approx \sum_{i=0}^{L-1} X_i q(i, t), \quad (13)$$

где коэффициенты X_i зависят от элементов усеченной спектральной характеристики \mathcal{V} стандартного гауссовского белого шума $v(t)$, т.е. от конечного числа L независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, а также от случайной величины x_0 .

В качестве базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ могут использоваться различные полные ортонормированные системы функций, успешно применяемые при решении задач в спектральной форме математического описания, например, полиномы Лежандра $\{\hat{P}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$, косинусоиды $\{\hat{C}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$, функции Уолша $\{\hat{\Omega}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ и функции Хаара $\{\hat{X}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$. Для всех перечисленных базисных систем разработано алгоритмическое обеспечение (элементарные и специализированные алгоритмы динамического расчета), включающее алгоритмы расчета спектральных характеристик типовых входных воздействий, спектральных характеристик операторов умножения на типовые функции, операторов дифференцирования и интегрирования, а также трехмерную нестационарную передаточную функцию множительного звена. Все эти алгоритмы реализованы в виде пакетов программ для систем компьютерной математики и отдельных приложений [19]. Спектральные характеристики оператора интегрирования для перечисленных базисных систем приведены в [20] для представления повторных стохастических интегралов и площади Леви.

В этом разделе рассмотрено применение спектральной формы математического описания к одномерным линейным системам. Однако спектральная форма может применяться и к многомерным линейным системам (к решению задачи анализа выходных процессов многомерных линейных систем) без каких-либо ограничений. В этом случае спектральное преобразование применяется к левым и правым частям всех линейных стохастических дифференциальных уравнений, которые задают математическую модель многомерной динамической системы [4].

Моделирование типовых случайных процессов

Винеровский процесс. Запишем стохастическое дифференциальное уравнение для стандартного винеровского процесса:

$$\dot{w}(t) = v(t), \quad w(0) = 0, \quad (14)$$

т.е. $x(t) = w(t)$, $a(t) = b(t) = c(t) = 0$, $d(t) = 1$, $x_0 = 0$.

Формула (11) здесь принимает наиболее простой вид, а именно (5), поскольку $X = W$, $A = B = C = O$, $D = E$ (O — нулевая матрица, E — единичная матрица).

Используя связи вход-выход для линейной системы при случайных воздействиях в спектральной форме математического описания и учитывая, что $S^v = E$, находим

$$S^w = WW^T, \quad W = P^{-1},$$

где S^w — спектральная характеристика ковариационной функции винеровского процесса $R_w(t, \tau)$. Таким образом, $S^w = \text{cov}(W)$, а матрица $W = P^{-1}$ определяет линейное преобразование столбца \mathcal{V} , результатом которого будет столбец с ковариационной матрицей S^w .

Далее приведем результаты вычислительного эксперимента, в котором проведено моделирование траекторий винеровского процесса на основе соотношений (5) и (13) для различных базисных систем и разных порядков усечения спектральных характеристик при $T = 1$. Порядки усечения выбраны следующим образом: $L = 2^\nu$ при $\nu = 3, 4, \dots, 8$. Подобный выбор обусловлен использованием в качестве базисных систем функций Уолша и Хаара, для которых такие значения L являются оптимальными.

Для каждой базисной системы и для каждого порядка усечения моделировалось $M = 10^6$ траекторий, по которым оценивались значения математического ожидания и ковариационной функции в узловых точках. Для получения узловых точек отрезок $[0, 1]$ был разбит на 20 отрезков длины $h = 0.05$ и взяты центры этих отрезков. Таким образом, оценки математических ожиданий вычислялись в точках $t_i = hi + h/2$, а оценки ковариаций — в точках t_i и t_j , где $i, j = 0, 1, \dots, 19$. Эти оценки сравнивались с точными значениями. Максимумы модулей отклонений по всем узловым точкам приведены в табл. 1 (через дробь указаны максимальные отклонения оценок математических ожиданий и ковариаций). Несколько выборочных траекторий винеровского процесса показаны на рис. 1, а на рис. 2 приведены: график точной ковариационной функции (красный цвет), результат обращения спектральной характеристики S^w (синий цвет), оценка ковариационной функции по всему ансамблю траекторий (черный цвет) с отмеченными узловыми точками; на осях в горизонтальной плоскости указаны номера узловых точек i, j . Рисунки соответствуют базисной системе полиномов Лежандра и порядку усечения $L = 64$.

Проанализируем полученные данные вычислительного эксперимента. Для отклонений оценок ковариаций характерно убывание с ростом поряд-

Таблица 1. Максимальные отклонения оценок математических ожиданий / ковариаций от точных значений (винеровский процесс, $M = 10^6$ траекторий).

L	$\{\hat{P}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$	$\{\hat{C}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$	$\{\hat{\Omega}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$	$\{\hat{X}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$
8	0.000466/0.021853	0.000866/0.033262	0.001501/0.095204	0.001601/0.069219
16	0.000929/0.010342	0.000613/0.011809	0.002054/0.047555	0.001267/0.034748
32	0.000696/0.004821	0.000576/0.007578	0.000870/0.023919	0.000503/0.017486
64	0.002317/0.002265	0.002512/0.002467	0.000846/0.011863	0.000588/0.010510
128	0.001194/0.001841	0.000733/0.002396	0.000911/0.006729	0.000727/0.004758
256	0.000613/0.001600	0.001717/0.000921	0.000919/0.003975	0.001064/0.003411

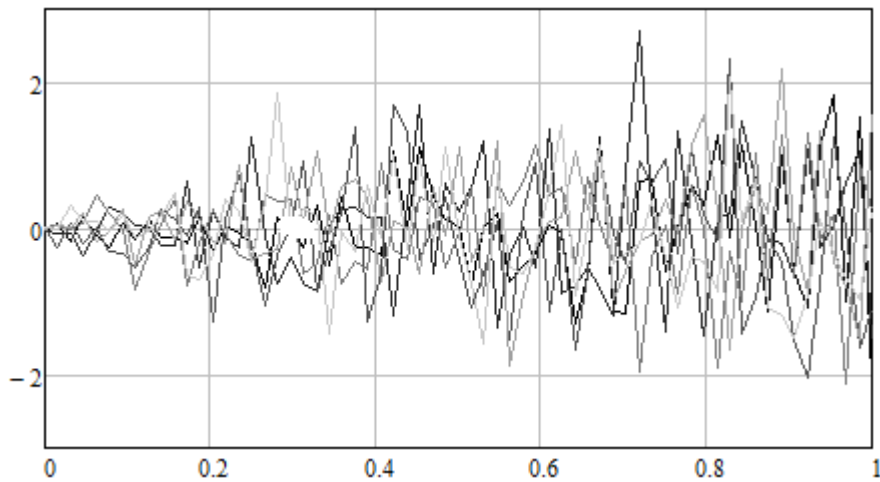


Рис. 1. Выборочные траектории винеровского процесса.

ка усечения L , причем для полиномов Лежандра, а также функций Уолша и Хаара увеличение L в 2 раза приводит к уменьшению отклонения оценок ковариаций примерно в 2 раза за исключением $L = 256$ (для полиномов Лежандра также при $L = 128$). Для базисной системы косинусовид такой очевидной зависимости нет. Ситуация с отклонениями оценок математических ожиданий существенно отличается и с ростом L нет тенденции к уменьшению такого отклонения.

Здесь нужно отметить, что погрешность расчетов складывается из двух основных составляющих: методической погрешности спектрального метода, связанной с усечением спектральных характеристик, и статистической погрешности, обусловленной конечностью выборки для расчета статистических характеристик (погрешности датчиков случайных чисел и машинной арифметики здесь несущественны). Методическая погрешность зависит от выбранной базисной системы и величины L , а статистическая — от объема выборки M . Результаты из табл. 1 могут указывать на то, что на отклонение оценок

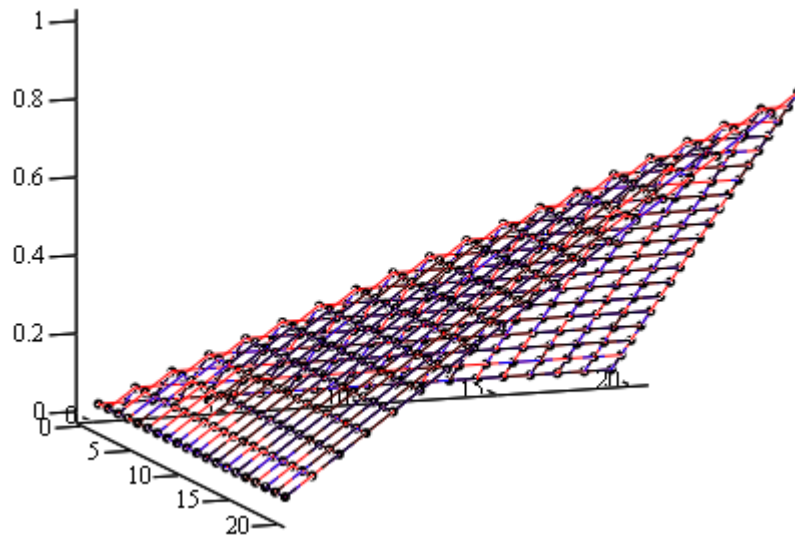


Рис. 2. Графики ковариационной функции винеровского процесса.

математических ожиданий для всех базисных систем и на отклонение оценок ковариаций для косинусоид большее влияние оказывает именно статистическая погрешность. Для того чтобы в этом удостовериться, увеличим объем выборки в 100 раз, т.е. для каждой базисной системы и для каждого порядка усечения будем моделировать $M = 10^8$ траекторий. Результаты моделирования приведены в табл. 2.

Таблица 2. Максимальные отклонения оценок математических ожиданий / ковариаций от точных значений (винеровский процесс, $M = 10^8$ траекторий).

L	$\{\hat{P}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$	$\{\hat{C}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$	$\{\hat{\Omega}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$	$\{\hat{X}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$
8	0.000044/0.022525	0.000073/0.033202	0.000048/0.093855	0.000058/0.068824
16	0.000079/0.010486	0.000065/0.011796	0.000059/0.046887	0.000062/0.034418
32	0.000097/0.005127	0.000120/0.007557	0.000133/0.023430	0.000132/0.017187
64	0.000091/0.002510	0.000043/0.001968	0.000154/0.011802	0.000063/0.008645
128	0.000135/0.001255	0.000113/0.000806	0.000143/0.005893	0.000116/0.004284
256	0.000052/0.000642	0.000058/0.000681	0.000096/0.003110	0.000067/0.002406

По этим данным можно сделать следующий вывод. Действительно, отклонение оценок математических ожиданий обусловлено статистической погрешностью (несложно показать, что методическая погрешность здесь отсутствует), так как она уменьшается на порядок при увеличении объема выборки в 100 раз, а на отклонение оценок ковариаций оказывает влияние именно методическая погрешность, в том числе и для косинусоид. Обозначая эти погрешности $\Delta_m^{\text{стат}}$ и $\Delta_R^{\text{спектр}}$ и основываясь только на результатах вычислительного эксперимента, получаем для полиномов Лежандра, а также функций Уолша

и Хаара, что

$$\Delta_m^{\text{стат}} \approx C_m^{\text{стат}} / \sqrt{M}, \quad (15)$$

$$\Delta_R^{\text{спектр}} \approx C_R^{\text{спектр}} / L, \quad (16)$$

где $C_m^{\text{стат}}$ и $C_R^{\text{спектр}}$ — некоторые положительные константы, зависящие от базисной системы. Первое из этих соотношений также справедливо для косинусоид, но для этой базисной системы по экспериментальным данным сложно сделать вывод о погрешности $\Delta_R^{\text{спектр}}$.

Статистическая погрешность в отклонении оценок ковариаций также присутствует. Именно она сказывается при $M = 10^6$ на результатах для порядков усечения $L = 128$ и $L = 256$. Эти данные позволяют выбрать оптимальное соотношение между параметрами L и M , непосредственно влияющими на точность расчетов. Например, при $M = 10^6$ не имеет практического смысла выбирать $L > 128$ или при $L = 16$ будет достаточно $M = 10^4$.

Кроме того, из табл. 1 и 2 видно, что функции Уолша и Хаара обеспечивают менее точный результат по сравнению с полиномами Лежандра или косинусоидами. Это обусловлено свойствами базисных систем. Функции Хаара включают постоянную функцию (она входит во все перечисленные базисные системы) и функции, порожденные сжатиями и сдвигами вейвлета Хаара. Увеличение порядка усечения вида $L = 2^l$ в 2 раза приводит к сжатию порождающей функции также в 2 раза и «заполнению» отрезка $[0, 1]$ с помощью сдвигов. Функции Уолша при таких порядках усечения однозначно выражаются через функции Хаара [21]. Для полиномов Лежандра и косинусоид увеличение порядка усечения в 2 раза не только увеличивает степень полинома или уменьшает период для косинусоид в 2 раза, но и добавляет к набору функций все промежуточные степени и периоды, которые не кратны исходному периоду.

В дополнение к приведенным данным получим отклонения оценок математических ожиданий и ковариаций при дискретной аппроксимации винеровского процесса:

$$w_{k+1} = w_k + \sqrt{h} \Delta w_k, \quad w_0 = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где $h = T/N$, Δw_k — независимые в совокупности случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, N — заданное натуральное число, т.е. воспользуемся наиболее часто используемым способом моделирования, на котором основаны численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений [15, 22, 23].

Для сравнения положим $L = N$, чтобы при моделировании одной траектории винеровского процесса спектральным и численным методами было одинаковое число обращений к датчику случайных чисел. Максимальные отклонения будем вычислять по всем узлам на отрезке $[0, 1]$, т.е. в точках $t_k = kh$, $k = 0, 1, \dots, N$. Результаты расчетов содержатся в табл. 3. Из них, в частности, можно сделать вывод, что спектральный метод может обеспечить такую же точность при определенном выборе порядка усечения L , например, для полиномов Лежандра и косинусоид можно остановиться на значении $L = 128$.

Сравнение отдельных траекторий, получаемых с помощью спектрального и численного методов, между собой (в сильном смысле) здесь затруднительно, поскольку один и тот же набор реализаций случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, порождает разные траектории: в численном методе каждая новая реализация позволяет «продвинуться» вперед по оси времени, а в спектральном методе каждая новая реализация добавляет слагаемое в частичную сумму функционального ряда, которым аппроксимируется случайный процесс на всем рассматриваемом отрезке времени. Поэтому сравнение проводится только по моментным характеристикам в их взаимосвязи с точными значениями (в слабом смысле). Отметим также, что при численном моделировании траекторий винеровского процесса имеется только статистическая погрешность.

Таблица 3. Максимальные отклонения оценок математических ожиданий / ковариаций от точных значений (винеровский процесс, численное моделирование).

N	$M = 10^6$	$M = 10^8$
8	0.001183/0.000771	0.000046/0.000082
16	0.000353/0.001321	0.000044/0.000101
32	0.001778/0.000741	0.000078/0.000181
64	0.000667/0.002548	0.000067/0.000117
128	0.001232/0.001845	0.000033/0.000074
256	0.000504/0.001278	0.000017/0.000088

Разумеется, вычислительная сложность численного моделирования меньше, так как оно не включает операции умножения матрицы на вектор, однако алгоритм моделирования спектральным методом можно оптимизировать, используя свойства спектральных характеристик оператора интегрирования для конкретных базисных систем. Например, матрица P^{-1} для полиномов Лежандра является трехдиагональной, причем на главной диагонали только один ненулевой элемент. В результате каждый элемент спектральной характеристики винеровского процесса представляется линейной комбинацией

двух реализаций нормальной случайной величины. Элементы матрицы P^{-1} для косинусоид при четной сумме индексов i и j нулевые. Матрица P^{-1} для функций Уолша разреженная и каждый элемент спектральной характеристики винеровского процесса представляется линейной комбинацией не более, чем $\log_2 L + 1 = \nu + 1$ реализаций нормальной случайной величины. Матрица P^{-1} для функций Хаара имеет наиболее сложную структуру, однако в ней можно выделить разреженные блоки и также использовать ее свойства для оптимизации моделирования. Эти матрицы приведены в [1, 20].

Процесс Орнштейна – Уленбека. Случайный процесс Орнштейна – Уленбека [18] описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = \mu x(t) + \sigma v(t), \quad x(0) = x_0, \quad (17)$$

где μ , σ и x_0 — заданные числовые параметры, т.е. $a(t) = \mu$, $b(t) = 0$, $c(t) = 0$, $d(t) = \sigma$.

Решение этого уравнения — гауссовский случайный процесс, который полностью определяется математическим ожиданием и ковариационной функцией:

$$m_x(t) = x_0 e^{\mu t}, \quad R_x(t, \tau) = \frac{\sigma^2}{2\mu} (e^{\mu(t+\tau)} - e^{\mu|t-\tau|}).$$

Используя формулу (11), запишем выражение для спектральной характеристики X процесса Орнштейна – Уленбека:

$$X = (P - \mu E)^{-1} (x_0 \Delta + \sigma \mathcal{V}), \quad (18)$$

применяя свойство спектрального преобразования операторов умножения, а именно равенство спектральной характеристики оператора умножения на константу произведению этой константы на единичную матрицу, т.е. $A = \mu E$, $B = C = O$, $D = \sigma E$ (O — нулевая матрица, E — единичная матрица).

В выражении (18) P — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального условия; Δ — матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ в точке $t = 0$; \mathcal{V} — спектральная характеристика стандартного гауссовского белого шума $v(t)$. Тогда точное решение уравнения (17) задается формулой (12), а приближенное решение — формулой (13) с учетом усечения всех спектральных характеристик до некоторого выбранного порядка L .

На основании связи вход-выход для линейной системы при случайных воздействиях в спектральной форме математического описания с учетом ра-

венства $S^v = E$ получаем

$$S^x = WW^T, \quad W = \sigma(P - \mu E)^{-1},$$

где S^x — спектральная характеристика ковариационной функции процесса Орнштейна–Уленбека $R_x(t, \tau)$. Таким образом, $S^x = \text{cov}(X)$, а матрица $W = \sigma(P - \mu E)^{-1}$ определяет линейное преобразование столбца \mathcal{V} , результатом которого будет столбец с ковариационной матрицей S^x .

Вычислительный эксперимент проводится в этом примере таким же образом, как и для винеровского процесса. Использовались соотношения (13) и (18), числовые параметры: $\mu = -1$, $\sigma = 0.5$, $T = 1$, $x_0 = 0$. Результаты расчетов приведены в табл. 4 и 5. Как и для предыдущего примера, здесь на рис. 3 и 4 показаны несколько выборочных траекторий процесса Орнштейна–Уленбека и графики ковариационной функции (точной, результата обращения спектральной характеристики S^x и оценки ковариационной функции по ансамблю $M = 10^6$ траекторий; цветовые обозначения такие же, как и ранее), эти результаты соответствуют базисной системе косинусоид и порядку усечения $L = 64$.

Таблица 4. Максимальные отклонения оценок математических ожиданий / ковариаций от точных значений (процесс Орнштейна–Уленбека, $M = 10^6$ траекторий).

L	$\{\hat{P}(i, t)\}_{i=0}^\infty$	$\{\hat{C}(i, t)\}_{i=0}^\infty$	$\{\hat{\Omega}(i, t)\}_{i=0}^\infty$	$\{\hat{X}(i, t)\}_{i=0}^\infty$
8	0.000514/0.005886	0.000534/0.021915	0.000430/0.020721	0.000535/0.013846
16	0.000365/0.002575	0.000317/0.005521	0.000338/0.010137	0.000657/0.007197
32	0.000226/0.001305	0.000370/0.001548	0.000288/0.004995	0.000371/0.004203
64	0.000444/0.000742	0.001067/0.000519	0.000412/0.002488	0.000304/0.002013
128	0.000439/0.000443	0.000261/0.000450	0.001018/0.001344	0.000379/0.000904
256	0.000307/0.000557	0.000317/0.000168	0.000409/0.000644	0.000255/0.000506

Таблица 5. Максимальные отклонения оценок математических ожиданий / ковариаций от точных значений (процесс Орнштейна–Уленбека, $M = 10^8$ траекторий).

L	$\{\hat{P}(i, t)\}_{i=0}^\infty$	$\{\hat{C}(i, t)\}_{i=0}^\infty$	$\{\hat{\Omega}(i, t)\}_{i=0}^\infty$	$\{\hat{X}(i, t)\}_{i=0}^\infty$
8	0.000019/0.005848	0.000027/0.021823	0.000023/0.020730	0.000027/0.013855
16	0.000062/0.002637	0.000026/0.005503	0.000023/0.010161	0.000026/0.007234
32	0.000023/0.001248	0.000047/0.001535	0.000044/0.005034	0.000040/0.004203
64	0.000051/0.000622	0.000023/0.000482	0.000069/0.002502	0.000024/0.001989
128	0.000036/0.000307	0.000039/0.000233	0.000052/0.001253	0.000039/0.000858
256	0.000052/0.000172	0.000022/0.000129	0.000034/0.000623	0.000029/0.000450

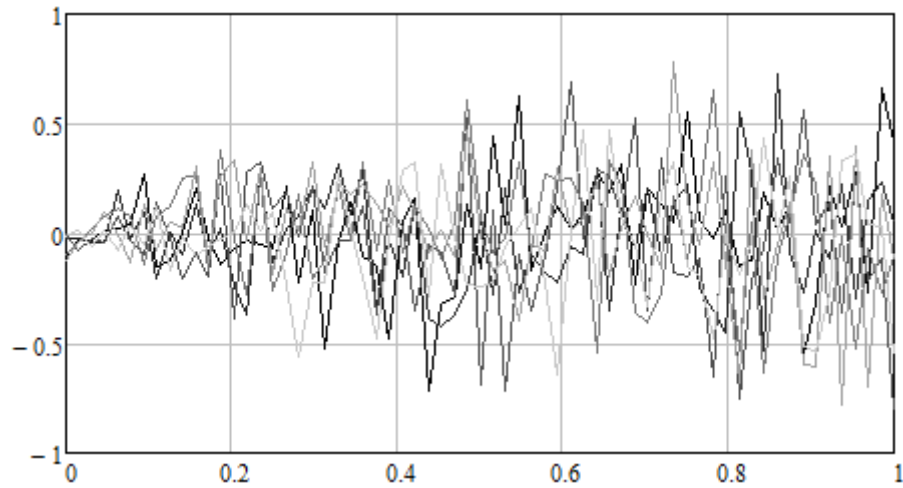


Рис. 3. Выборочные траектории процесса Орнштейна–Уленбека.

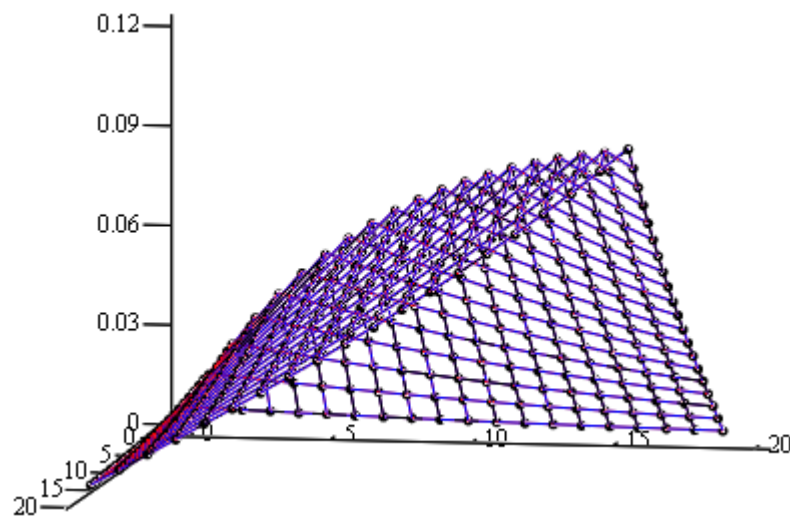


Рис. 4. Графики ковариационной функции процесса Орнштейна–Уленбека.

Для более полного сравнительного анализа воспользуемся стохастическим методом Эйлера для численного моделирования траекторий процесса Орнштейна–Уленбека. Приведем рекуррентное соотношение, определяющее дискретную аппроксимацию случайного процесса $x(t)$:

$$x_{k+1} = x_k + h\mu x_k + \sqrt{h}\sigma \Delta w_k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где $h = T/N$, Δw_k — независимые в совокупности случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Результаты моделирования приведены в табл. 6.

Согласно приведенным в табл. 4–6 результатам вычислительного эксперимента можно сделать следующий вывод. Для полиномов Лежандра, а также функций Уолша и Хаара остаются справедливыми соотношения (15) и (16).

Таблица 6. Максимальные отклонения оценок математических ожиданий / ковариаций от точных значений (процесс Орнштейна–Уленбека, стохастический метод Эйлера).

N	$M = 10^6$	$M = 10^8$
8	0.000382/0.009519	0.000023/0.009511
16	0.000430/0.004464	0.000030/0.004595
32	0.000675/0.002256	0.000034/0.002228
64	0.000369/0.001164	0.000022/0.001130
128	0.000491/0.000759	0.000018/0.000564
256	0.000547/0.000531	0.000008/0.000287

Для косинусоид сходимость относительно ковариаций оказывается быстрее по сравнению с другими базисными системами при $L \leq 64$. Численное моделирование стохастическим методом Эйлера проигрывает по точности спектральному методу при использовании полиномов Лежандра, при $L \geq 32$ проигрывает и при выборе косинусоид, однако дает более точный результат в сравнении со спектральным методом при использовании функций Уолша и Хаара.

Броуновский мост. Случайный процесс, называемый броуновским мостом [24], описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = \frac{x_T - x(t)}{T - t} + v(t), \quad x(0) = x_0, \quad (19)$$

где x_0 и x_T — заданные числовые параметры (краевые условия для случайного процесса $x(t)$ на отрезке $[0, T]$), т.е. $a(t) = -1/(T - t)$, $b(t) = x_T/(T - t)$, $c(t) = 0$, $d(t) = 1$, $g(t) = 1$.

Решение этого уравнения — гауссовский случайный процесс, который полностью определяется математическим ожиданием и ковариационной функцией:

$$m_x(t) = x_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) + x_T \frac{t}{T}, \quad R_x(t, \tau) = \min\{t, \tau\} - \frac{t\tau}{T}.$$

Используя формулу (11), найдем выражение для спектральной характеристики X броуновского моста:

$$X = (P + U)^{-1}(x_0\Delta + x_TUG + \mathcal{V}), \quad (20)$$

где в дополнение к обозначениям предыдущего примера через U обозначена спектральная характеристика оператора умножения на функцию $1/(T - t)$, а через G — спектральная характеристика функции $g(t) = 1$. Функция $1/(T - t)$ имеет особенность при $t = T$, поэтому для нахождения спектральной харак-

теристики U было использовано соотношение $U = (TE - A_1)^{-1}$, в котором A_1 — спектральная характеристика оператора умножения на функцию t . Следовательно, $A = -U$, $B = x_T U$, $C = O$, $D = E$ (O — нулевая матрица, E — единичная матрица).

При помощи связи вход-выход для линейной системы при случайных воздействиях в спектральной форме математического описания с учетом равенства $S^v = E$ можно записать

$$S^x = WW^T, \quad W = (P + U)^{-1},$$

где S^x — спектральная характеристика ковариационной функции броуновского моста $R_x(t, \tau)$. Таким образом, $S^x = \text{cov}(X)$, а матрица $W = (P + U)^{-1}$ определяет линейное преобразование столбца \mathcal{V} , результатом которого будет столбец с ковариационной матрицей S^x .

Вычислительный эксперимент проводится в этом примере таким же образом, как и для двух предыдущих примеров. Использовались соотношения (13) и (20), числовые параметры: $T = 1$, $x_0 = 0$, $x_T = 2$. Результаты расчетов приведены в табл. 7 и 8, а также на рис. 5 и 6, на которых показаны несколько выборочных траекторий броуновского моста и графики ковариационной функции (точной, результата обращения спектральной характеристики S^x и оценки ковариационной функции по ансамблю $M = 10^6$ траекторий; цветовые обозначения такие же, как и ранее), эти результаты соответствуют базисной системе функций Уолша и порядку усечения $L = 64$.

Таблица 7. Максимальные отклонения оценок математических ожиданий / ковариаций от точных значений (броуновский мост, $M = 10^6$ траекторий).

L	$\{\hat{P}(i, t)\}_{i=0}^\infty$	$\{\hat{C}(i, t)\}_{i=0}^\infty$	$\{\hat{\Omega}(i, t)\}_{i=0}^\infty$	$\{\hat{X}(i, t)\}_{i=0}^\infty$
8	0.000373/0.023417	0.023972/0.082948	0.125462/0.081914	0.125452/0.072025
16	0.000433/0.010663	0.013392/0.020944	0.063306/0.039940	0.062736/0.037729
32	0.000559/0.005116	0.004424/0.006153	0.031819/0.019769	0.031822/0.019041
64	0.001091/0.002537	0.001698/0.002046	0.016226/0.010012	0.016192/0.009404
128	0.000784/0.001861	0.001467/0.001059	0.008333/0.005119	0.008151/0.004388
256	0.000352/0.000604	0.000499/0.000731	0.004331/0.002531	0.004111/0.001984

Помимо спектрального метода применим стохастический метод Эйлера для численного моделирования траекторий броуновского моста согласно рекуррентному соотношению для дискретной аппроксимации случайного процесса $x(t)$:

$$x_{k+1} = x_k + h \frac{x_T - x_k}{T - t_k} + \sqrt{h} \Delta w_k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

Таблица 8. Максимальные отклонения оценок математических ожиданий / ковариаций от точных значений (броуновский мост, $M = 10^8$ траекторий).

L	$\{\hat{P}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$	$\{\hat{C}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$	$\{\hat{\Omega}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$	$\{\hat{X}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$
8	0.000068/0.023161	0.023957/0.082977	0.125002/0.081911	0.125003/0.071960
16	0.000088/0.010595	0.013442/0.020917	0.062520/0.039970	0.062572/0.037660
32	0.000039/0.005010	0.004038/0.006151	0.031238/0.019762	0.031242/0.019133
64	0.000055/0.002510	0.001724/0.002129	0.015649/0.009843	0.015759/0.009323
128	0.000117/0.001262	0.000859/0.001056	0.007826/0.004882	0.007949/0.004413
256	0.000077/0.000622	0.000305/0.000649	0.003967/0.002448	0.003924/0.001923

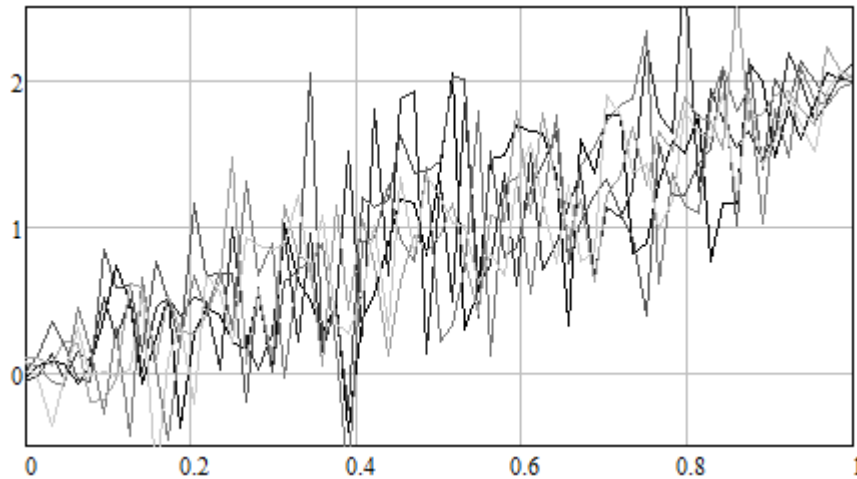


Рис. 5. Выборочные траектории броуновского моста.

где $h = T/N$, Δw_k — независимые в совокупности случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Эти результаты содержатся в табл. 9.

Результаты вычислительного эксперимента, приведенные в табл. 7–9, в целом такие же, как и для процесса Орнштейна–Уленбека за исключением двух моментов. Во-первых, для косинусоид, а также функций Уолша и Хаара

$$\Delta_m^{\text{спектр}} \approx C_m^{\text{спектр}}/L, \tag{21}$$

где $\Delta_m^{\text{спектр}}$ — методическая погрешность спектрального метода при оценивании математических ожиданий, $C_m^{\text{спектр}}$ — некоторая положительная константа, зависящая от базисной системы. Это следствие того, что в этом примере математическое ожидание не постоянно, а является линейной функцией (для двух предыдущих примеров математические ожидания рассматриваемых случайных процессов тождественно равны нулю), при этом постоянная функция включена во все рассмотренные базисные системы, а линейная функция — только в базисную систему полиномов Лежандра. Во-вторых, чис-

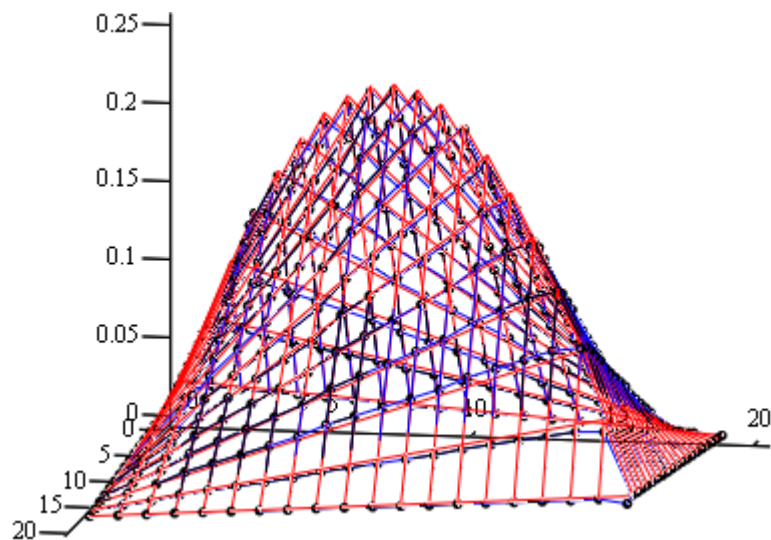


Рис. 6. Графики ковариационной функции броуновского моста.

Таблица 9. Максимальные отклонения оценок математических ожиданий / ковариаций от точных значений (броуновский мост, стохастический метод Эйлера).

L	$M = 10^6$	$M = 10^8$
8	0.001315/0.124897	0.000041/0.124997
16	0.000786/0.062567	0.000040/0.062504
32	0.000759/0.031201	0.000066/0.031250
64	0.000819/0.015621	0.000046/0.015626
128	0.000683/0.007824	0.000029/0.007813
256	0.000842/0.003907	0.000015/0.003907

ленное моделирование стохастическим методом Эйлера уступает по точности оценивания ковариаций спектральному методу для всех рассмотренных базисных систем.

Геометрическое броуновское движение. Случайный процесс, называемый геометрическим броуновским движением, описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) x(t) + \sigma x(t) v(t), \quad x(0) = x_0, \quad (22)$$

где μ , σ и x_0 — заданные числовые параметры, т.е. $a(t) = \mu - \sigma^2/2$, $b(t) = 0$, $c(t) = \sigma$, $d(t) = 0$.

Отметим, что в отличие от трех предыдущих примеров, рассматриваемый случайный процесс описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением с мультипликативным шумом. И здесь важно, что оно

понимается в смысле Стратоновича. При использовании стохастического исчисления Ито уравнение для случайного процесса $x(t)$ имеет вид [24]

$$\dot{x}(t) = \mu x(t) + \sigma x(t)v(t), \quad x(0) = x_0.$$

Решение этого уравнения — случайный процесс, для которого можно записать следующие математическое ожидание и дисперсию:

$$m_x(t) = x_0 e^{\mu t}, \quad D_x(t) = x_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

Используя формулу (9), получим выражение для спектральной характеристики X геометрического броуновского движения:

$$X = \left(P - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) E - \sigma(V\mathcal{V}) \right)^{-1} (x_0 \Delta), \quad (23)$$

принимая во внимание, как и ранее, свойство спектрального преобразования операторов умножения, а именно равенство спектральной характеристики оператора умножения на константу произведению этой константы на единичную матрицу, т.е. $A = (\mu - \sigma^2/2)E$, $B = O$, $C = \sigma E$, $D = \bar{O}$ (O — нулевая матрица, \bar{O} — нулевая матрица-столбец, E — единичная матрица).

Вычислительный эксперимент проводится в этом примере по аналогии с предыдущими с той лишь разницей, что здесь оценивается дисперсия, а не ковариационная функция. Использовались соотношения (13) и (23), числовые параметры: $\mu = 1$, $\sigma = 0.5$, $T = 1$, $x_0 = 1$. Результаты расчетов приведены в табл. 10, а также на рис. 7 и 8 с несколькими выборочными траекториями геометрического броуновского движения и графиками дисперсии (точной и оценки дисперсий в узловых точках по ансамблю $M = 10^6$ траекторий; цветовые обозначения такие же, как и ранее). Эти результаты соответствуют базисной системе функций Хаара и порядку усечения $L = 64$.

Для сравнения также применим стохастический метод Эйлера, чтобы численно моделировать траектории геометрического броуновского движения согласно рекуррентному соотношению для дискретной аппроксимации случайного процесса $x(t)$ (при выборе метода Эйлера нужно использовать уравнение, соответствующее стохастическому исчислению Ито):

$$x_{k+1} = x_k + h\mu x_k + \sqrt{h}\sigma x_k \Delta w_k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где $h = T/N$, Δw_k — независимые в совокупности случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Таблица 11 содержит результаты оценивания.

Таблица 10. Максимальные отклонения оценок математических ожиданий / дисперсий от точных значений (геометрическое броуновское движение, $M = 10^6$ траекторий).

L	$\{\hat{P}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$	$\{\hat{C}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$	$\{\hat{\Omega}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$	$\{\hat{X}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$
8	0.039057/0.091179	0.102421/0.724951	0.599391/0.550064	0.544138/0.547966
16	0.015045/0.026362	0.059136/0.126350	0.509084/0.286248	0.509130/0.262852
32	0.009426/0.015989	0.020483/0.030761	0.517320/0.155056	0.517371/0.102566
64	0.003381/0.003538	0.008242/0.014627	0.035646/0.084599	0.026357/0.057523
128	0.001498/0.005492	0.003868/0.003292	0.018966/0.040947	0.016550/0.043239
256	0.000982/0.007032	0.002066/0.009799	0.010359/0.021466	0.007635/0.020224

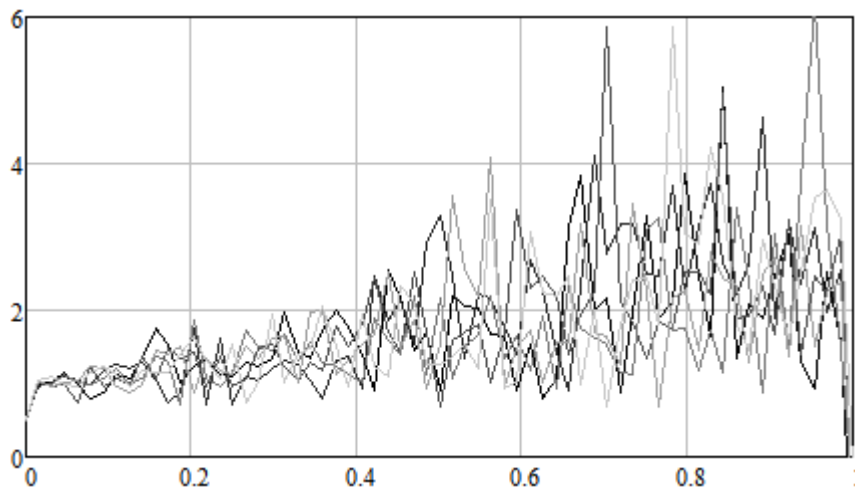


Рис. 7. Выборочные траектории геометрического броуновского движения.

По результатам вычислительных экспериментов, приведенных в табл. 10 и 11, можно сделать следующие выводы. Для всех базисных систем характерно убывание отклонений оценок математических ожиданий и дисперсий. То, что это нарушается в случае дисперсий для полиномов Лежандра при $L = 128$ и $L = 256$, а для косинусоид при $L = 256$ указывает на влияние статистической погрешности. Моделирование с большим количеством траекторий, например $M = 10^8$, как в предыдущих примерах, здесь не проводится. Рассматриваемый случайный процесс описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением с мультипликативным шумом, а это приводит к необходимости обращения матрицы $L \times L$ в соотношении (23) для каждой реализации усеченной спектральной характеристики \mathcal{V} стандартного гауссовского белого шума $v(t)$ и, следовательно, к заметному увеличению времени расчетов в отличие от моделирования траекторий винеровского процесса, процесса Орнштейна – Уленбека и броуновского моста (в соотношениях (5), (18) и (20) соответствующие матрицы не зависят от \mathcal{V}).

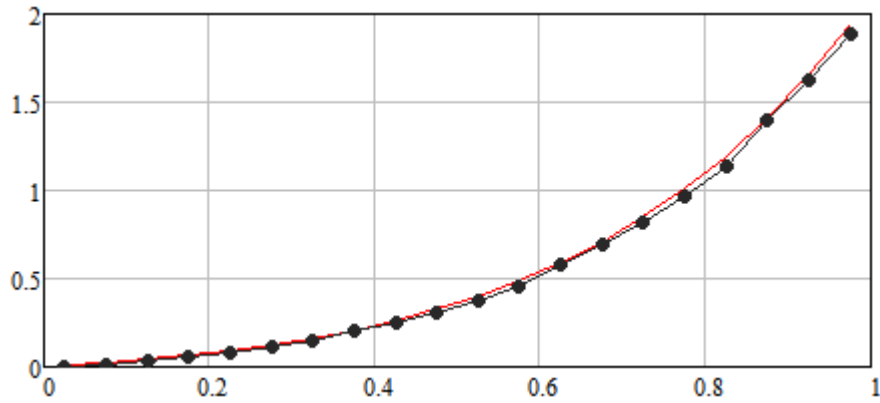


Рис. 8. Графики дисперсии геометрического броуновского движения.

Таблица 11. Максимальные отклонения оценок математических ожиданий / дисперсий от точных значений (геометрическое броуновское движение, стохастический метод Эйлера).

N	$M = 10^6$
8	0.152499/0.680270
16	0.081131/0.388565
32	0.041287/0.208505
64	0.021320/0.111770
128	0.012010/0.057276
256	0.005462/0.031615

Для методической погрешности спектрального метода при выборе в качестве базисной системы функций Уолша или Хаара явно прослеживаются зависимости (16) и (21), а именно увеличение порядка усечения L в 2 раза приводит к уменьшению отклонения оценок математических ожиданий и дисперсий примерно в 2 раза (для математических ожиданий при $L \geq 64$). При выборе полиномов Лежандра и косинусоид отклонения убывают быстрее. Значительная погрешность оценивания математических ожиданий при выборе функций Уолша и Хаара для порядков усечения $L \leq 32$ обусловлена тем, что приближенное решение задачи анализа выходных процессов в точке $t = 0$ сходится не к начальному значению $x_0 = 1$, а к значению $(1/2)x_0$ (это верно для всех четырех базисных систем и связано с особенностью поточечной сходимости функциональных рядов) и того, что в результате получается кусочно-постоянная аппроксимация траекторий случайного процесса. Отметим, что полиномы Лежандра для моделирования геометрического броуновского движения наиболее предпочтительны, а применение стохастического метода Эйлера дает худший результат.

Список литературы

- [1] *Солодовников, В.В., Семенов, В.В., Пешель, М., Недо, Д.* Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. — М.: Машиностроение, 1979.
- [2] *Рыбин, В.В.* Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. — М.: Изд-во МАИ, 2011.
- [3] *Пантелеев, А.В., Бортакровский, А.С.* Теория управления в примерах и задачах. — М.: Инфра-М, 2016.
- [4] *Рыбаков, К.А.* Моделирование и анализ выходных процессов линейных непрерывных стохастических систем на основе ортогональных разложений случайных функций // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2020. № 3. — С. 14–29.
- [5] *Rybakov, K.A.* Spectral method of analysis and optimal estimation in linear stochastic systems // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. — 2020. Vol. 11. No. 3. Id 2050022.
- [6] *Семенов, В.В.* Формы математического описания линейных систем. — М.: МАИ, 1980.
- [7] *Baghdasaryan, G.Y., Mikilyan, M.A., Panteleev, A.V., Rybakov, K.A.* Spectral method for analysis of diffusions and jump diffusions / Innovation, Systems and Technologies, vol 173. — Springer, 2020. — P. 293–314.
- [8] *Пантелеев, А.В., Летова, Т.А., Помазуева, Е.А.* Параметрический синтез оптимального в среднем дробного ПИД-регулятора в задаче управления полетом // Управление большими системами, вып. 56. — М.: ИПУ РАН, 2015. — С. 176–200.
- [9] *Кахан, Ж.-П.* Случайные функциональные ряды. — М.: Мир, 1973.
- [10] *Гихман, И.И., Скороход, А.В., Ядренко, М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Киев: Вища школа, 1988.
- [11] *Синицын, И.Н.* Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. — М.: Торус Пресс, 2009.
- [12] *Липцер, Р.Ш., Ширяев, А.Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — М.: Наука, 1974.
- [13] *Пригарин, С.М.* Методы численного моделирования случайных процессов и полей. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005.

- [14] *Zhang, Z., Karniadakis, G.E.* Numerical Methods for Stochastic Partial Differential Equations with White Noise. — Springer, 2017.
- [15] *Кузнецов, Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MATLAB // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2018. № 4.
- [16] *Кузнецов, Д.Ф.* Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанное на обобщенных кратных рядах Фурье // Уфимский математический журнал. — 2019. Т. 11. № 4. — С. 50–78.
- [17] *Кузнецов, Д.Ф.* Аппроксимация повторных стохастических интегралов Ито второй кратности, основанная на разложении винеровского процесса с помощью полиномов Лежандра и тригонометрических функций // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2019. № 4. — С. 32–52.
- [18] *Оксендаль, Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. — М.: Мир, 2003.
- [19] *Рыбаков, К.А., Рыбин, В.В.* Алгоритмическое и программное обеспечение расчета систем автоматического управления в спектральной форме математического описания / Современная наука: теоретические, практические и инновационные аспекты развития. Т. 2. — Ростов-на-Дону: Изд-во Международного исследовательского центра «Научное сотрудничество», 2018. — С. 171–199.
- [20] *Рыбаков, К.А.* Применение спектральной формы математического описания для представления повторных стохастических интегралов // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2019. № 4. — С. 1–31.
- [21] *Рыбаков, К.А., Рыбин, В.В.* Алгоритмическое и программное обеспечение расчета спектральной характеристики оператора дробного интегрирования относительно функций Уолша // Вестник СамГТУ. Технические науки. — 2019. № 4 (64). — С. 42–57.
Алексич, Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
- [22] *Milstein, G.N., Tretyakov, M.V.* Stochastic Numerics for Mathematical Physics. — Springer-Verlag, 2004.
- [23] *Аверина, Т.А.* Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019.
- [24] *Ширяев, А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. — М.: ФАЗИС, 1998.

Modeling linear nonstationary stochastic systems by spectral method

K. A. Rybakov

Moscow Aviation Institute
(National Research University)

e-mail: rkoffice@mail.ru

Abstract. The article considers the spectral method for modeling linear one-dimensional nonstationary stochastic systems described by linear stochastic differential equations with additive and multiplicative noise. This method is based on the representation of random processes by the orthogonal series with respect to arbitrary basis systems. The main attention is paid to the approbation of the proposed method, namely, modeling typical random processes that are output signals of linear stochastic systems: Wiener process (Brownian motion), Ornstein – Uhlenbeck process, Brownian bridge, and geometric Brownian motion.

Key words: analysis of output processes, linear stochastic system, modeling, orthogonal expansion, random process, spectral method, spectral form of mathematical description, Wiener process, Brownian motion, Ornstein – Uhlenbeck process, Brownian bridge, geometric Brownian motion.