ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 3, 2021
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Метод получения явного решения матричных ОДУ второго порядка, основанный на диагонализации матриц уравнения с помощью спектрального разложения и кронекеровской матричной алгебры

Мадера А.Г.

ФГУ ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований
Российской академии наук
agmprof@mail.ru

Аннотация. Рассматривается метод получения явного решения матричных дифференциальных уравнений в обыкновенных производных второго порядка с постоянными матрицами. Метод позволяет привести первоначальную систему взаимосвязанных дифференциальных уравнений к системе независимых между собой дифференциальных уравнений, легко решаемых в аналитическом виде. Разработанный в статье метод основан на диагонализации всех входящих в уравнение матриц, которая осуществляется с помощью спектрального разложения матриц и кронекеровской матричной алгебры. Приведен пример применения разработанного метода.

Ключевые слова: матричные дифференциальные уравнения в обыкновенных производных, диагонализация матриц, спектральное разложение матрицы, кронекеровская матричная алгебра.

1. Введение

Математическое моделирование процессов различной физической природы [1, 2, 3, 4], таких, например, как – колебания в механических, электрических, электронных и гидравлических системах, динамика механических систем, распространение волн в термоупругих средах, тепловые напряжения, аэродинамика летательных аппаратов, управление техническими системами, и т.д., – приводят к системе дифференциальных уравнений в обыкновенных производных второго порядка, которые в матричной записи имеют вид:

$$A\frac{d^2x(t)}{dt^2}+B\frac{dx(t)}{dt}+Cx(t)=f(t),$$
$$\frac{dx(0)}{dt}=x_0',\ \ x(0)=x_0, \tag{1}$$

где A, B, C некоторые независимые от времени $m\times m$-матрицы; $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_m(t))^T$ – m-вектор искомых функций $x_i(t)$, $i=1,2,\dots,m$; $f(t)=(f_1(t),f_2(t),\dots,f_m(t))^T$ – m-вектор заданных функций; t – время; $x_0=(x_{01},x_{02},\dots,x_{0m})^T$ и $x_0'=(x_{01}',x_{02}',\dots,x_{0m}')^T$ – m-векторы начальных условий искомых функций $x_i(t)$ и их первых производных $dx_i(t)/dt$ в начальный момент времени $t=0$; $(\cdot)^T$ – операция транспонирования.

Несмотря на достаточно большое количество методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений различных порядков, в том числе и численных методов [4, 5, 6, 7, 8], значимость разработки методов аналитического решений в явном виде остается актуальной и востребованной при проведении любого содержательного анализа исследуемых физических явлений и процессов, а также описывающих их математических моделей.

Для получения аналитических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, необходимо привести систему первоначально связанных уравнений к системе независимых несвязанных между собой уравнений или, крайней мере, снизить степень их связанности [9, 10, 11]. Получение несвязанных уравнений достигается приведением всех матриц системы обыкновенных дифференциальных уравнений к полностью диагональному виду. В то же время приведение матриц системы уравнений к «почти диагональному виду», например, к канонической жордановой форме, хотя и уменьшает степень связанности уравнений, но не устраняет ее полностью [11]. В рассматриваемой статье разработан метод, при котором достигается полная диагонализация всех матриц, входящих в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1). В существующей литературе [9, 10] диагонализация матриц в матричных обыкновенных дифференциальных уравнениях рассматривается лишь применительно к уравнениям первого порядка, в то время как методы диагонализации матриц, входящих в матричные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка и выше, отсутствуют.

Отметим также, что для упрощения получения решения матричных обыкновенных дифференциальных уравнений различного порядка, в том числе и численными методами, стремятся прежде всего избавиться от матрицы A, стоящей при старшей производной, например, путем умножения обеих частей исходного уравнения (1) на обратную ей матрицу A^{-1}. Между тем, матрица A при старшей производной уравнения далеко не всегда имеет обратную, что может быть обусловлено такими, например, свойствами матрицы, как вырожденность, полуопределенность, или наличие ранга меньшего размерности матрицы. Развитый в статье метод позволяет привести исходную систему связанных уравнений (1) к системе несвязанных уравнений и получить их аналитические решения и для выроженной, и для полуопределенной матрицы перед старшей производной.

Одним из наиболее мощных методов получения аналитических решений систем дифференциальных уравнений является приведение входящих в систему уравнений матриц к диагональному виду. В этом случае система взаимосвязанных уравнений дифференциальных уравнений распадается на m независимых уравнений относительно каждой неизвестной $x_i(t)$, $i=1,2,\dots,m$, в векторе $x(t)$, решения которых легко определяются аналитически. Данный подход используется для построения аналитических решений матричных дифференциальных уравнений с одной или двумя матрицами, а именно, таких, например, матричных уравнений как $\dot{x}(t)+Cx(t)=0$ [9] и $A\ddot{x}(t)+Cx(t)=0$ [10] ($\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$ – краткие обозначения производных $dx(t)/dt$ и d^2/dt^2 соответственно).

Так, в уравнении $\dot{x}(t)+Cx(t)=0$, $x(0)=x_0$ с одной матрицей, матрица C подвергается спектральному разложению $U^TCU=\Lambda_C$ с диагональной матрицей $\Lambda_C=diag\{\lambda_{C1},\lambda_{C2},\ldots,\lambda_{Cm}\}$, состоящей из собственных значений λ_{Ci}, $i=1,2,\ldots,m$, и ортонормированной матрицей U, составленной из собственных векторов матрицы C. Спектральное разложение матрицы C позволяет привести матричное уравнение $\dot{x}(t)+Cx(t)=0$ к системе m независимых уравнений вида $\dot{y}_i(t)+\lambda_{Ci}y_i(t)=0$, $y_{0i}(0)=y_{0i}$, $i=1,2,\ldots,m$, относительно нового преобразованного вектора $y(t)=(y_1(t),y_2(t),\ldots,y_m(t))^T$, решения которых легко находятся аналитически и равны $y_i(t)=\exp(-\lambda_{Ci}t)y_{0i}$ [9].

Что касается уравнения $A\ddot{x}(t)+Cx(t)=0$, с двумя матрицами, то применение к нему рассматриваемого метода существенно затруднено тем, что в данном случае необходимо осуществлять одновременную диагонализацию матриц A и C. Данная трудность преодолевается с помощью теоремы [9, 10] о приведении двух вещественных невырожденных симметрических матриц A и C (причем матрица A – положительно определенная) одним невырожденным преобразование подобия T, преобразующим матрицу A к диагональной единичной матрице, а матрицу C – к диагональной матрице из собственных значений некоей специально определяемой матрицы [9, 10]. В результате одновременной диагонализации матриц A и C матричное уравнение $A\ddot{x}(t)+Cx(t)=0$ распадается на систему m независимых уравнений $\ddot{y}_i(t)+\lambda_i y_i(t)=0$, $i=1,2,\ldots,m$, относительно преобразованного вектора $y(t)$. Решения этих уравнений легко определяются в аналитическом виде: $y_i(t)=\alpha_i\cos(\lambda_i t+\varepsilon_i)$, где α_i и ε_i постоянные, определяемые из начальных условий [10].

В то же время, отсутствуют методы, позволяющие получать явные решения матричных дифференциальных уравнений, в которые входит более двух матриц и требующих одновременного приведения к диагональному виду более двух матриц.

В настоящей работе предлагается метод, позволяющий приводить матричные дифференциальные уравнения вида (1) к системе независимых уравнений каждое из которых легко решается в аналитическом виде. Метод основан на спектральном разложении входящих в уравнение матриц и использовании кронекеровской матричной алгебры. При этом к двум из трех матриц уравнения применяется одновременная диагонализация, при которой одна из матриц приводится к диагональной единичной матрице, а другая – к диагональному виду некоторой специально построенной матрицы. Диагонализация третьей оставшейся матрицы уравнения осуществляется путем перехода из обычного матричного пространства в кронекеровское матричное пространство, в котором действуют правила кронекеровской матричной алгебры. Для применения метода достаточно, чтобы только одна из матриц в уравнении была положительно определенной, при этом две другие матрицы могут быть несимметрическими и положительно полуопределенными. Применение разработанного метода рассмотрено на конкретном примере.

2. Диагонализация матричного дифференциального уравнения с тремя матрицами

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение второго порядка в обыкновенных производных (1) и приведем все три матрицы уравнения A, B и C к диагональному виду. Предполагается, что A, B, C – квадратные, вещественные, независящие от времени и не обязательно симметрические $m\times m$-матрицы. Одна из матриц является положительно определенной, две другие матрицы могут быть положительно полуопределенными. В уравнении (1) сначала осуществляется диагонализация той матрицы, которая является положительно определенной и которая некоторым невырожденным преобразованием подобия приводится к диагональной единичной матрице, а затем диагонализируется другая матрица уравнения. Для диагонализации третьей матрицы все уравнение с предварительно диагонализированными двумя матрицами подвергается преобразованию, при котором осуществляется переход из пространства с обычной матричной алгеброй в пространство Кронекера, в котором действует кронекеровская матричная алгебра.

Для определенности, положим далее, что матрица A при второй производной в уравнении (1) является вещественной положительно определенной (и симметрической) $m\times m$-матрицей, две другие $m\times m$-матрицы B, C – могут быть положительно полуопределенными.

2.1. Диагонализация матрицы A в матричном уравнении (1)

Пусть спектральное разложение симметрической положительно определенной матрицы A имеет вид $U^{-1}AU=\Lambda_A$, где U – трансформирующая $m\times m$-матрица подобия [10, 11], состоящая из собственных векторов матрицы A; $\Lambda_A=diag\{\lambda_{A1},\lambda_{A2},\dots,\lambda_{Am}\}$ – диагональная матрица собственных значений λ_{Ai}, $i=1,2,\dots,m$, матрицы A, причем в силу положительной определенности матрицы A, все ее собственные значения $\lambda_{A1},\lambda_{A2},\dots,\lambda_{Am}$ положительные.

Введем в уравнение (1) и начальные условия новую векторную переменную x^* согласно равенству $x=U\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}x^*$ и умножим полученное уравнение и начальные условия слева на матрицу $\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}$, получим

$$\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}AU\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}\,\frac{d^2x^*(t)}{dt^2}+\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}BU\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}\,\frac{dx^*(t)}{dt}+\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}CU\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}x^*(t)=\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}f(t),$$
$$\frac{dx^*(0)}{dt}=\Lambda_A^{\frac{1}{2}}U^{-1}x_0',\ \ x^*(0)=\Lambda_A^{\frac{1}{2}}U^{-1}x_0\,.$$

Приняв во внимание, что матрица перед второй производной в получившемся уравнении равна $\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}AU\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}=\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}\Lambda_A\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}=I$, и введя обозначения для матриц $D=\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}BU\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}$ и $E=\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}CU\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}$ получим:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x^*(t)}{dt^2}+D\frac{dx^*(t)}{dt}+Ex^*(t)=\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}f(t),\\&\frac{dx^*(0)}{dt}=\Lambda_A^{\frac{1}{2}}U^{-1}x_0',\ \ x^*(0)=\Lambda_A^{\frac{1}{2}}U^{-1}x_0\,.\end{aligned}\tag{2}$$

2.2. Диагонализация матрицы D в преобразованном уравнении (2)

Подвергнем диагонализации матрицу $D=\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}BU\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}$ перед первой производной в уравнении (2). Если спектральное разложение матрицы D имеет вид $V^{-1}DV=\Lambda_D$, то V – трансформирующая $m\times m$-матрица подобия, столбцы которой являются собственными векторами матрицы D, а $\Lambda_D=diag\{\lambda_{D1},\lambda_{D2},\dots,\lambda_{Dm}\}$ – диагональная $m\times m$-матрица собственных значений матрицы D.

Введем в уравнение (2) новую замену переменных, а именно, m-вектор $y(t)$ посредством равенства $x^*(t)=Vy(t)$ и умножим получившееся уравнение слева на матрицу V^{-1}. Тогда обозначив в уравнении (2) $m\times m$-матрицы $F=V^{-1}EV=V^{-1}\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}CU\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}V$, $G=V^{-1}\Lambda_A^{\frac{1}{2}}U^{-1}$, $H=V^{-1}\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}$ получим следующее векторное уравнение

$$\begin{aligned}&\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\Lambda_D\frac{dy(t)}{dt}+Fy(t)=Hf(t),\\&\frac{dy(0)}{dt}=Gx_0',\ \ y(0)=Gx_0\,.\end{aligned}\tag{3}$$

Таким образом, уравнение (1) с тремя матрицами приведено к уравнению (3) с двумя диагональными матрицами – диагональной единичной матрицей перед второй производной и диагональной матрицей Λ_D перед первой производной в уравнении.

Диагонализируем матрицу F.

3. Диагонализация матрицы $\boldsymbol{F}$ в преобразованном уравнении (3)

Подвергнем диагонализации $m\times m$-матрицу $F=V^{-1}\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}CU\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}V$ в уравнении (3). Для этого осуществим переход из матричного пространства с обычными правилами действий с матрицами, в кронекеровское матричное пространство, в котором действует кронекеровская матричная алгебра, существенно отличающаяся от обычной. Ниже приводятся краткие, необходимые для дальнейшего, сведения из кронекеровской матричной алгебры [6, 9, 10, 12, 13].

3.1. Некоторые сведения из кронекеровской матричной алгебры

В кронекеровской матричной алгебре произведение Кронекера двух прямоугольных $k\times l$-матрицы $A=\|a_{ij}\|\in\mathcal{F}_{k\times l}$ $(i=1,2,\dots,k;\ j=1,2,\dots,l)$ и $m\times n$-матрицы $B=\|b_{ij}\|\in\mathcal{F}_{m\times n}$ $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$ определяется как блочная матрица $C=A\otimes B$ в матричном пространстве $\mathcal{F}_{km\times ln}$, которая составлена по следующему правилу:

$$C=A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1l}B\\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2l}B\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{k1}B & a_{k2}B & \dots & a_{kl}B\end{pmatrix}\in\mathcal{F}_{km\times ln}.$$

Приведем следующие полезные утверждения из кронекеровской матричной алгебры:

(1) В кронекеровском пространстве множество решений матричного уравнения $AXB=C$ относительно неизвестной искомой матрицы X и квадратными вещественными $m\times m$-матрицами $A,X,B,C\in\mathcal{F}_{m\times m}$ совпадает с множеством решений уравнения $\mathcal{G}x=c$, в котором матрица $\mathcal{G}\in\mathcal{F}_{m^2\times m^2}$ равна $\mathcal{G}=A\otimes B^T$, а векторы $x\in\mathcal{F}_{m^2}$ и $c\in\mathcal{F}_{m^2}$ определяются выражениями

$$x=\begin{pmatrix}X_{1*}^T\\ X_{2*}^T\\ \vdots\\ X_{m*}^T\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}C_{1*}^T\\ C_{2*}^T\\ \vdots\\ C_{m*}^T\end{pmatrix},\tag{4}$$

где X_{i*}, X_{*j}, и C_{i*}, C_{*j} – i-я строка $(i=1,2,\dots,m)$ и j-й столбец $(j=1,2,\dots,m)$ матриц X и C соответственно, $*$ – обозначение совокупности элементов в i-й строке X_{i*} и C_{i*} и совокупности элементов в j-м столбце X_{*j} и C_{*j} матриц X и C.

(2) Общее линейное матричное уравнение $A_1XB_1 + A_2XB_2 + \cdots + A_kXB_k = C$, относительно неизвестной матрицы $X \in \mathcal{F}_{m\times m}$, с матрицами $A_k, X, B_k, C \in \mathcal{F}_{m\times m}$ и векторами x и c определяемыми выражениями (4), эквивалентно уравнению $\mathcal{G}x = c$, в котором матрица $\mathcal{G} \in \mathcal{F}_{m^2\times m^2}$ равна $\mathcal{G} = A_1 \otimes B_1^T + A_2 \otimes B_2^T + \cdots + A_k \otimes B_k^T$.

(3) Если $A \in \mathcal{F}_{m\times m}$ и $B \in \mathcal{F}_{n\times n}$, причем $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ – собственные значения матриц A и B соответственно, то собственными значениями матричной функции в $\mathcal{F}_{mn\times mn}$ вида $\varphi(A,B) = \sum_{i,j=0}^{p} c_{ij}\,(A^i \otimes B^j)$, будут mn чисел $\varphi(\lambda_r, \mu_s)$, где $r = 1,2,\dots,m$ и $s = 1,2,\dots,n$.

(4) Основные правила матричной алгебры Кронекера:

а) $(\mu A) \otimes B = A \otimes (\mu B) = \mu(A \otimes B)$, где μ – произвольное число, $A \in \mathcal{F}_{m\times m}$, $B \in \mathcal{F}_{n\times n}$;

б) $(A + C) \otimes B = A \otimes B + C \otimes B$, где $A, C \in \mathcal{F}_{m\times m}$, $B \in \mathcal{F}_{n\times n}$;

в) $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$, где $A \in \mathcal{F}_{m\times m}$, $B, C \in \mathcal{F}_{n\times n}$;

г) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$, где $(\cdot)^T$ – операция транспонирования;

д) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$, где $A, C \in \mathcal{F}_{m\times m}$, $B, D \in \mathcal{F}_{n\times n}$, $(\cdot)(\cdot)$ – обычное умножение матриц;

е) $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) \dots (A_k \otimes B_k) = (A_1A_2 \dots A_k) \otimes (B_1B_2 \dots B_k)$, где $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{F}_{m\times m}$ и $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{F}_{n\times n}$.

3.2. Преобразование уравнений (3) из матричного пространства с обычной матричной алгеброй в матричное пространство с кронекеровской матричной алгеброй

Для того чтобы применить кронекеровскую матричную алгебру необходимо привести матричное уравнение (3) относительно вектора неизвестных к матричному уравнению относительно матрицы неизвестных. С этой целью применим следующий прием.

Представим в уравнении (3) m-вектор $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))^T$ в виде произведения $y(t) = Y(t)\mathcal{I}$ диагональной $m \times m$-матрицы переменных $Y(t)$ и единичного m-вектора $\mathcal{I}$, а именно,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y_m(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично представим m-вектор $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))^T$ в правой части уравнения (3) в виде произведения $f(t) = \Phi(t)\mathcal{I}$ диагональной $m \times m$-матрицы $\Phi(t)$ и единичного m-вектора $\mathcal{I}$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_m(t) \end{pmatrix}.$$

Точно также m-векторы в начальных условиях $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m})^T$ и $x_0' = (x_{01}', x_{02}', \dots, x_{0m}')^T$ уравнения (3) представим в виде произведений $x_0 = X_0\mathcal{I}$ и $x_0' = X_0'\mathcal{I}$ диагональных $m \times m$-матриц X_0 и X_0' и m-вектора $\mathcal{I} = (11 \dots 1)^T$:

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_{01} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{02} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{0m} \end{pmatrix}, \quad X'_0 = \begin{pmatrix} x'_{01} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x'_{02} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x'_{0m} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (3) может быть записано в виде

$$\begin{gathered} \frac{d^2Y(t)}{dt^2}\mathcal{I} + \Lambda_D \frac{dY(t)}{dt}\mathcal{I} + FY(t)\mathcal{I} = H\Phi(t)\mathcal{I}, \\ \frac{dY(0)}{dt}\mathcal{I} = GX'_0\mathcal{I}, \;\; Y(0)\mathcal{I} = GX_0\mathcal{I}\,, \end{gathered} \tag{5}$$

в котором векторное уравнение (3) относительно вектора неизвестных $y(t)$ приведено к матричному уравнению (5) относительно матрицы неизвестных $Y(t)$.

Для перехода в кронекеровское пространство с кронекеровской матричной алгеброй преобразуем матрицы $Y(t), \Phi(t), X'_0, X_0 \in \mathcal{F}_{m\times m}$ в уравнении (5) в соответствующие им кронекеровские векторы $\mathscr{y}, \phi, x_0, x'_0 \in \mathcal{F}_{m^2}$ согласно выражениям вида (4), а именно,

$$\mathscr{y}(t) = \begin{pmatrix} Y^T_{1*}(t) \\ Y^T_{2*}(t) \\ \vdots \\ Y^T_{m*}(t) \end{pmatrix}, \;\; \phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi^T_{1*}(t) \\ \Phi^T_{2*}(t) \\ \vdots \\ \Phi^T_{m*}(t) \end{pmatrix}, \;\; x_0 = \begin{pmatrix} X^T_{01*} \\ X^T_{02*} \\ \vdots \\ X^T_{0m*} \end{pmatrix}, \;\; x'_0 = \begin{pmatrix} X'^T_{01*} \\ X'^T_{02*} \\ \vdots \\ X'^T_{0m*} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $Y_{i*}(t)$, $\Phi_{i*}(t)$, X_{0i*}, X'_{0i*} – i-е строки $(i = 1,2,\dots,m)$ матриц $Y(t), \Phi(t), X_0$, $X'_0 \in \mathcal{F}_{m\times m}$ соответственно, причем в векторах $\phi(t)$, x, x'_0 (9) соответствующие столбцы равны $\Phi^T_{i*}(t) = (0,\dots,0, f_i(t), 0,\dots,0)^T$, $X_{0i*} = (0,\dots,0, x_{0i}, 0,\dots,0)^T$, $X'_{0i*} = (0,\dots,0, x'_{0i}, 0,\dots,0)^T$.

Тогда в соответствии с утверждением (1) п. 3.1, множество решений уравнения (5) относительно искомой матрицы $Y(t) \in \mathcal{F}_{m\times m}$ в уравнении (5), совпадает с множеством решений следующего уравнения в кронекеровском пространстве относительно m^2-вектора $\mathscr{y}(t)$ (см. (6)):

$$\begin{gathered} (I\otimes \mathcal{I}^T)\frac{d^2\mathscr{y}(t)}{dt^2} + (\Lambda_D\otimes \mathcal{I}^T)\frac{d\mathscr{y}(t)}{dt} + (F\otimes \mathcal{I}^T)\mathscr{y}(t) = (H\otimes \mathcal{I}^T)\phi(t), \\ (I\otimes \mathcal{I}^T)\frac{d\mathscr{y}(0)}{dt} = (G\otimes \mathcal{I}^T)x'_0, \qquad (I\otimes \mathcal{I}^T)\mathscr{y}(0) = (G\otimes \mathcal{I}^T)x_0\,. \end{gathered} \tag{7}$$

Вводя в последнем уравнении новую векторную переменную $\mathscr{p}(t) \in \mathcal{F}_m$ согласно равенству $\mathscr{y}(t) = (I\otimes \mathcal{I})\mathscr{p}(t)$ и учитывая, что $\mathcal{I}^T\mathcal{I} = m$, получим следующее уравнение:

$$\begin{gathered} (I\otimes m)\frac{d^2\mathscr{p}(t)}{dt^2} + (\Lambda_D\otimes m)\frac{d\mathscr{p}(t)}{dt} + (F\otimes m)\mathscr{p}(t) = (H\otimes \mathcal{I}^T)\phi(t), \\ (I\otimes m)\frac{d\mathscr{p}(0)}{dt} = (G\otimes \mathcal{I}^T)x'_0, \qquad (I\otimes m)\mathscr{p}(0) = (G\otimes \mathcal{I}^T)x_0\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Замечание. Рассмотрим более подробно вопрос о множествах решений матричного векторного уравнения $Ax = b$ относительно неизвестного вектора x и преобразованного матричного уравнения $AX\mathcal{I} = B\mathcal{I}$ относительно неизвестной диагональной матрицы X (B –

диагональная матрица в правой части), и матричного уравнения $\mathcal{G}x = \mathscr{b}$, к которому приводится уравнение $AX\mathcal{J} = B\mathcal{J}$ при переходе из обычного матричного пространства в кронекеровское.

Покажем, что множество решений матричного алгебраического уравнения $Ax = b$ (или $AX\mathcal{J} = B\mathcal{J}$) с невырожденной матрицей $A \in \mathcal{F}_{m\times m}$ совпадает с множеством решений уравнения $\mathcal{P}x = \mathcal{Q}\mathscr{b}$ с матрицами $\mathcal{P} = (A \otimes \mathcal{J}^T) \in \mathcal{F}_{m\times m^2}$ и $\mathcal{Q} = (I \otimes \mathcal{J}^T) \in \mathcal{F}_{m\times m^2}$) и векторами $x \in \mathcal{F}_{m^2}$ и $\mathscr{b} \in \mathcal{F}_{m^2}$ определяемыми выражениями

$$x = \begin{pmatrix} X_{1*}^T \\ X_{2*}^T \\ \vdots \\ X_{m*}^T \end{pmatrix}, \quad \mathscr{b} = \begin{pmatrix} B_{1*}^T \\ B_{2*}^T \\ \vdots \\ B_{m*}^T \end{pmatrix}$$

где $X_{i*} = (0, \dots ,0, x_i, 0, \dots ,0)^T$ и $B_{i*} = (0, \dots ,0, b_i, 0, \dots ,0)^T$.

Иначе говоря, уравнение $Ax = b$ (или то же самое уравнение, но записанное в виде $AX\mathcal{J} = B\mathcal{J}$) будет эквивалентно уравнению $\mathcal{P}x = \mathcal{Q}\mathscr{b}$, то есть уравнению $(A \otimes \mathcal{J}^T)x = (I \otimes \mathcal{J}^T)\mathscr{b}$.

Выразим в исходном уравнении $Ax = b$ искомый вектор неизвестных $x = (x_1, x_2 \dots, x_m)^T \in \mathcal{F}_m$ и вектор в правой части $b = (b_1, b_2 \dots, b_m)^T \in \mathcal{F}_m$ через диагональные матрицы $X \in \mathcal{F}_{m\times m}$ и $B \in \mathcal{F}_{m\times m}$ в виде $x = X\mathcal{J}$ и $b = B\mathcal{J}$, где матрицы X, B и вектор $\mathcal{J} \in \mathcal{F}_m$ равны

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_m \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение $Ax = b$ может быть представлено как $AX\mathcal{J} = B\mathcal{J}$. Отметим, что преобразование уравнения $Ax = b$ для вектора неизвестных x, к уравнению $AX\mathcal{J} = B\mathcal{J}$ для матрицы неизвестных X, необходимо для того, чтобы перейти от обычного матричного пространства к кронекеровсому и применить кронекеровскую матричную алгебру (п. 3.1).

Раскрывая подробно кронекеровское умножение матриц, нетрудно убедиться в том, что

$$(A \otimes \mathcal{J}^T)x = \begin{pmatrix} a_{11}\mathcal{J}^T & a_{12}\mathcal{J}^T & \dots & a_{1m}\mathcal{J}^T \\ a_{21}\mathcal{J}^T & a_{22}\mathcal{J}^T & \dots & a_{2m}\mathcal{J}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathcal{J}^T & a_{m2}\mathcal{J}^T & \cdots & a_{mm}\mathcal{J}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1*}^T \\ X_{2*}^T \\ \vdots \\ X_{m*}^T \end{pmatrix} = Ax,$$

$$(I \otimes \mathcal{J}^T)\mathscr{b} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}^T & O^T & \dots & O^T \\ O^T & \mathcal{J}^T & \dots & O^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O^T & O^T & \cdots & \mathcal{J}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1*}^T \\ X_{2*}^T \\ \vdots \\ X_{m*}^T \end{pmatrix} = b,$$

где $\mathcal{J}^T = (1\ 1 \dots 1) \in \mathcal{F}_m$, $O^T = (0\ 0 \dots 0) \in \mathcal{F}_m$.

Таким образом, уравнения $Ax = b$ и $\mathcal{P}x = \mathcal{Q}\mathscr{b}$ эквивалентны, где $\mathcal{P} = (A \otimes \mathcal{J}^T) \in \mathcal{F}_{m\times m^2}$ и $\mathcal{Q} = (I \otimes \mathcal{J}^T) \in \mathcal{F}_{m\times m^2}$.

Рассмотрим уравнение $\mathcal{P}x = \mathcal{Q}\mathscr{b}$, или в развернутой записи уравнение $(A \otimes \mathcal{J}^T)x = (I \otimes \mathcal{J}^T)\mathscr{b}$, и покажем что оно имеет те же решения, что и уравнение $Ax = b$.

Введем в уравнении $\mathcal{P}x = \mathcal{Q}\mathscr{b}$ замену переменных $x = (A^{-1} \otimes \mathcal{I})z$, тогда $(A \otimes \mathcal{I}^T)(A^{-1} \otimes \mathcal{I})z = (I \otimes \mathcal{I}^T)\mathscr{b}$, то есть $(I \otimes m)z = (I \otimes \mathcal{I}^T)\mathscr{b}$ или $mz = (I \otimes \mathcal{I}^T)\mathscr{b}$. Откуда, учитывая, что $(I \otimes \mathcal{I}^T)\mathscr{b} = b$ (см. выше) находим, что $x = \frac{1}{m}(A^{-1} \otimes \mathcal{I})(I \otimes \mathcal{I}^T)\mathscr{b} = \frac{1}{m}(A^{-1} \otimes \mathcal{I})b$.

Умножая слева обе части последнего выражения на $(I \otimes \mathcal{I}^T)$ получим, что $(I \otimes \mathcal{I}^T)x = \frac{1}{m}(I \otimes \mathcal{I}^T)(A^{-1} \otimes \mathcal{I})b$, а учитывая, что $(I \otimes \mathcal{I}^T)x = x$, приходим к равенству $x = \frac{1}{m}(A^{-1} \otimes m)b = A^{-1}b$.

Откуда следует, что множество решений матричного уравнения $Ax = b$ в обычном матричном пространстве совпадает с множеством решений уравнения $\mathcal{P}x = \mathcal{Q}\mathscr{b}$, где $\mathcal{P} = (A \otimes \mathcal{I}^T)$ и $\mathcal{Q} = (I \otimes \mathcal{I}^T)$, в кронекеровском матричном пространстве. ◄

3.3. Диагонализация матрицы F в уравнении (8)

Представим уравнение (8) в следующем операторном виде, а именно, $\mathcal{G}(t)\wp(t) = (H \otimes \mathcal{I}^T)\phi(t)$ $(\mathcal{D} = d/dt, \mathcal{D}^2 = d^2/dt^2$ [4]) или в развернутом виде

$$\left((I \otimes m)\mathcal{D}^2 + (\Lambda_D \otimes m)\mathcal{D} + (F \otimes m)\right)\wp(t) = (H \otimes \mathcal{I}^T)\phi(t). \tag{9}$$

Определим собственные значения $\lambda(t)$ и собственные векторы $v \in \mathcal{F}_m$ операторной матрицы $\mathcal{G}(t)$ удовлетворяющие уравнению $\mathcal{G}(t)v = \lambda(t)v$. Отметим, что, как станет ясно из дальнейшего, собственные векторы v от времени не зависят.

Пусть $\lambda_{F,k}$ и $w_{F,k}$, $k = 1,2,\dots,m$ – собственные значения и отвечающие им собственные векторы невырожденной $m \times m$-матрицы F, удовлетворяющие уравнению $Fw_{F,k} = \lambda_{F,k}w_{F,k}$, причем в силу независимости элементов матрицы F от времени, ее собственные значения и собственные векторы $\lambda_{F,k}$ и $w_{F,k}$ также не зависят от времени.

Собственные значения $\lambda_k(t)$ и собственные векторы v_k матрицы $\mathcal{G}(t) \in \mathcal{F}_m$ могут быть получены в матричном кронекеровском пространстве (п. 3.1) следующим образом. Положив $v_k = (w_{F,k} \otimes 1)$ и учитывая коммутативность время независимых переменных и дифференциального оператора $\mathcal{D}$ получаем:

$$\mathcal{G}(t)v_k = \mathcal{G}(t)\left(w_{F,k} \otimes 1\right) = \left((I \otimes m)\mathcal{D}^2 + (\Lambda_D \otimes m)\mathcal{D} + (F \otimes m)\right)\left(w_{F,k} \otimes 1\right) =$$
$$= (I \otimes m)\left(w_{F,k} \otimes 1\right)\mathcal{D}^2 + (\Lambda_D \otimes m)\left(w_{F,k} \otimes 1\right)\mathcal{D} + (F \otimes m)\left(w_{F,k} \otimes 1\right).$$

Поскольку $(F \otimes m)\left(w_{F,k} \otimes 1\right) = \left(Fw_{F,k} \otimes m\right) = \left(\lambda_{F,k}w_{F,k} \otimes m\right) = \lambda_{F,k}m\left(w_{F,k} \otimes 1\right)$, можно записать, что

$$\mathcal{G}(t)v_k = (I \otimes m)\left(w_{F,k} \otimes 1\right)\mathcal{D}^2 + (\Lambda_D \otimes m)\left(w_{F,k} \otimes 1\right)\mathcal{D} + \lambda_{F,k}m\left(w_{F,k} \otimes 1\right) =$$
$$= ((I \otimes m)\mathcal{D}^2 + (\Lambda_D \otimes m)\mathcal{D} + \lambda_{F,k}(I \otimes m))\left(w_{F,k} \otimes 1\right)).$$

Для каждого значения k $(k = 1,2,\dots,m)$ собственное значение $\lambda_k(t)$ и отвечающий ему собственный вектор v_k матрицы $\mathcal{G}(t) \in \mathcal{F}_m$ равны $\lambda_k(t) = m\mathcal{D}^2 + \lambda_{D,k}m\mathcal{D} + \lambda_{F,k}m$ и $v_k = (w_{F,k} \otimes 1)$ соответственно.

Располагая найденными собственными значениями $\lambda_k(t)$ и собственными векторами $v_k = (w_{F,k} \otimes 1)$ матрицы $\mathcal{G}(t) \in \mathcal{F}_m$ можно построить спектральное разложение матрицы $\mathcal{G}(t) \in \mathcal{F}_m$, а именно

$$\mathcal{G}(t) = W\Lambda(t)W^{-1}, \tag{10}$$

где $\Lambda(t) = diag\{\lambda_1(t), \lambda_2, (t) \dots, \lambda_m(t)\}$, $\lambda_k(t) = m\mathcal{D}^2 + \lambda_{D,k} m\mathcal{D} + \lambda_{F,k} m$, $k = 1,2, \dots, m$; $\Lambda_F = diag\{\lambda_{F1}, \lambda_{F2}, \dots, \lambda_{Fm}\}$ – диагональная $m \times m$-матрица, состоящая из собственных значений $\lambda_{F,k}$, $k = 1,2, \dots, m$, матрицы F; W – трансформирующая $m \times m$-матрица подобия, состоящая из собственных столбцов матрицы $\mathcal{G}(t) \in \mathcal{F}_m$ и равная $W = (w_{F,1}, w_{F,2}, \dots, w_{F,m}) \in \mathcal{F}_m$. В матричном виде диагональная $m \times m$-матрица собственных значений матрицы $\mathcal{G}(t) \in \mathcal{F}_m$ равна $\Lambda(t) = mI\mathcal{D}^2 + m\Lambda_D\mathcal{D} + m\Lambda_F$.

Отметим, что собственные векторы матрицы $\mathcal{G}(t)$ и трансформирующая матрица подобия W не зависят от времени, а собственные значения $\lambda_k(t) = m\mathcal{D}^2 + \lambda_{D,k} m\mathcal{D} + \lambda_{F,k} m$ будучи суммой независящих от времени собственных значений $\lambda_{D,k}$ и $\lambda_{F,k}$ матриц D и F, зависят от времени только через дифференциальный оператор $\mathcal{D}$.

4. Получение матричной системы уравнений с диагональными матрицами

Подставляя спектральное разложение (10) матрицы $\mathcal{G}(t)$ в уравнение (9) и учитывая, что кронекеровское произведение произвольной матрицы на единицу равно самой матрице, получим следующее уравнение, в котором фигурируют только диагональные матрицы, а именно:

$$\begin{aligned} &W(mI\mathcal{D}^2 + m\Lambda_D\mathcal{D} + m\Lambda_F)W^{-1}\wp(t) = (H \otimes \mathcal{I}^T)\phi(t), \\ &m\frac{d\wp(0)}{dt} = (G \otimes \mathcal{I}^T)x_0', \qquad m\wp(0) = (G \otimes \mathcal{I}^T)x_0 . \end{aligned} \tag{11}$$

Вводя в последнее уравнение новую векторную переменную $z(t) = W^{-1}\wp(t)$ и умножая получившееся уравнение слева на матрицу W^{-1} получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &mI\frac{d^2z(t)}{dt^2} + m\Lambda_D\frac{dz(t)}{dt} + m\Lambda_F z(t) = W^{-1}(H \otimes \mathcal{I}^T)\phi(t), \\ &m\frac{dz(0)}{dt} = W^{-1}(G \otimes \mathcal{I}^T)x_0', \qquad mz(0) = W^{-1}(G \otimes \mathcal{I}^T)x_0 , \end{aligned} \tag{12}$$

которая распадается на m независимых уравнений вида для каждой независимой переменной $z_i(t)$, $i = 1,2, \dots, m$

$$\begin{aligned} &\frac{d^2z_i(t)}{dt^2} + \lambda_{Di}\frac{dz_i(t)}{dt} + \lambda_{Fi}z_i(t) = \frac{1}{m}\{W^{-1}(H \otimes \mathcal{I}^T)\phi(t)\}_i, \\ &\frac{dz_i(0)}{dt} = \frac{1}{m}\{W^{-1}(G \otimes \mathcal{I}^T)x_0'\}_i, \qquad z_i(0) = \frac{1}{m}\{W^{-1}(G \otimes \mathcal{I}^T)x_0\}_i, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\{W^{-1}(H \otimes \mathcal{I}^T)\phi(t)\}_i$, $\{W^{-1}(G \otimes \mathcal{I}^T)x_0'\}_i$, $\{W^{-1}(G \otimes \mathcal{I}^T)x_0\}_i$ – i-е элементы векторов $W^{-1}(H \otimes \mathcal{I}^T)\phi(t)$, $W^{-1}(G \otimes \mathcal{I}^T)x_0'$, $W^{-1}(G \otimes \mathcal{I}^T)x_0$.

Каждое из уравнений в (13) имеет аналитическое решение, которое в большинстве случаев известно и содержится в многочисленной справочной литературе [14]. По найденным элементам решения $z_i(t)$, $i = 1,2, \dots, m$, определяется вектор $z(t)$.

Искомый вектор решений $x(t)$ исходного уравнения (1) связан с матрицей неизвестных $Y(t)$ равенством $x(t) = U\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}VY(t)\mathcal{I}$. Матрица $Y(t)$, в свою очередь, при переходе из обычного матричного пространства в кронекеровское, преобразуется в кронекеровский вектор $\mathcal{y}(t)$, который трансформируется сначала в вектор $\mathcal{p}(t)$, а затем в вектор $z(t)$, определяемый уравнениями (13), то есть $Y(t) \Rightarrow \mathcal{y}(t) = (I \otimes \mathcal{I})\mathcal{p}(t) = (I \otimes \mathcal{I})Wz(t)$, где матрицы U, V, W – трансформирующие $m \times m$-матрицы подобия.

Отметим, что если в процессе диагонализации матриц в уравнении (1) одна из матриц получается диагональной, то проводить ее спектральное разложение не требуется.

5. Пример применения метода

В качестве примера применения разработанного метода рассмотрим матричное дифференциальное уравнение второго порядка в обыкновенных производных (например, уравнение Лагранжа в обобщенных координатах [4])

$$A\frac{d^2x(t)}{dt^2} + B\frac{dx(t)}{dt} + Cx(t) = 0,$$
$$\frac{dx(0)}{dt} = x_0', \ \ x(0) = x_0, \tag{14}$$

где A, B, C – невырожденные матрицы ($\det A = 3$, $\det B = 5$, $\det C = 10$)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \ \ C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \ \ x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}, \ \ x_0' = \begin{pmatrix} x_{01}' \\ x_{02}' \end{pmatrix}.$$

Применяя разработанный в статье метод, матричная система уравнений (14) сводится к системе двух независимых уравнений относительно переменных $z_i(t)$, $i = 1,2$,

$$\frac{d^2z_i(t)}{dt^2} + \lambda_{Di}\frac{dz_i(t)}{dt} + \lambda_{Fi}z_i(t) = 0,$$
$$\frac{dz_i(0)}{dt} = z_{01}' = \frac{1}{2}\{W^{-1}(G \otimes \mathcal{I}^T)x_0'\}_i, \qquad z_i(0) = z_{01} = \frac{1}{2}\{W^{-1}(G \otimes \mathcal{I}^T)x_0\}_i. \tag{15}$$

Найдем численные значения величин входящих в уравнения (15) – собственные значения (λ_{A1}, λ_{A2}), (λ_{D1}, λ_{D2}), (λ_{F1}, λ_{F2}) матриц A, D, F, трансформирующие матрицы подобия U, V, W, матрицу G в начальных условиях, а также получим необходимые спектральные разложения всех матриц.

Собственные значения (λ_{A1}, λ_{A2}), (λ_{D1}, λ_{D2}), (λ_{F1}, λ_{F2}) матриц A, D, F и трансформирующие матрицы подобия U, V, W получаются при спектральном разложении матриц A, $D = \Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}BU\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}$ и $F = V^{-1}\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}CU\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}V$, а именно,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = U\Lambda_A U^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$D = \Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}BU\Lambda_A^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix};$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{5}{3}\end{pmatrix}=V\Lambda_D V^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{3}}{3} & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{5}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 0\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix};$$

$$F=V^{-1}\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}U^{-1}CU\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}V=$$

$$=\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 0\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{3}}{3} & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{5}{3}\end{pmatrix};$$

$$F=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{5}{3}\end{pmatrix}=W\Lambda_F W^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{5}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

откуда следует, что собственные значения матриц A, D и F равны $(\lambda_{A1},\lambda_{A2})=(1,3)$, $(\lambda_{D1},\lambda_{D2})=(1,\frac{5}{3})$, $(\lambda_{F1},\lambda_{F2})=(2,\frac{5}{3})$ соответственно.

Матрицы в начальных условиях уравнений (15) равны

$$G=V^{-1}\Lambda_A^{\frac{1}{2}}U^{-1}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 0\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$(G\otimes \mathcal{J}^T)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix},$$

а начальные условия в уравнении (15) могут быть записаны в виде

$$\begin{pmatrix}z'_{01}\\ z'_{02}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\{W^{-1}(G\otimes \mathcal{J}^T)x'_0\}_i=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_{01}\\ x'_{02}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4}x'_{01}-\frac{\sqrt{3}}{4}x'_{02}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x'_{02}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}z_{01}\\ z_{02}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\{W^{-1}(G\otimes \mathcal{J}^T)x_0\}_i=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{01}\\ x_{02}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4}x_{01}-\frac{\sqrt{3}}{4}x_{02}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_{02}\end{pmatrix}.$$

Уравнения (15) определяют вектор независимых решений $z(t)=(z_1(t),z_2(t))^T$, компоненты, которого $z_1(t)$ и $z_2(t)$ находятся из решения следующих уравнений:

– компонента $z_1(t)$

$$\begin{gathered}\frac{d^2z_1(t)}{dt^2}+\frac{dz_1(t)}{dt}+2z_1(t)=0,\\ \frac{dz_1(0)}{dt}=z'_{01}=\frac{\sqrt{3}}{4}x'_{01}-\frac{\sqrt{3}}{4}x'_{02},\quad z_1(0)=z_{01}=\frac{\sqrt{3}}{4}x_{01}-\frac{\sqrt{3}}{4}x_{02},\end{gathered}\tag{16}$$

– компонента $z_2(t)$

$$\frac{d^2 z_2(t)}{dt^2} + \frac{5}{3}\frac{dz_2(t)}{dt} + \frac{5}{3} z_2(t) = 0\,,$$
$$\frac{dz_2(0)}{dt} = z'_{02} = \frac{\sqrt{3}}{2} x'_{02}, \qquad z_2(0) = z_{02} = \frac{\sqrt{3}}{2} x_{02}. \tag{17}$$

Решения уравнений (16) и (17) известны и могут быть выражены в аналитическом виде [14]

$$z_1(t) = z_{01} e^{\alpha t}\left(\cos\omega t - \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right) + \frac{1}{\omega} z'_{01} e^{\alpha t}\sin\omega t, \tag{18}$$

при $\alpha = -0{,}5$, $\omega = 1{,}322876$;

$$z_2(t) = z_{02} e^{\alpha t}\left(\cos\omega t - \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right) + \frac{1}{\omega} z'_{02} e^{\alpha t}\sin\omega t. \tag{19}$$

при $\alpha = -0{,}833$, $\omega = 0{,}986$;

Искомое решение $x(t)$ исходного уравнения (14) выражается через независимые решения $z_1(t)$ и $z_2(t)$ уравнений (16) и (17)

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = U\Lambda_A^{-\frac{1}{2}} V Y(t) \mathcal{J} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) & z_1(t) \\ z_2(t) & z_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{3}}{3} z_1(t) + \frac{2\sqrt{3}}{3} z_2(t) \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} z_2(t) \end{pmatrix}.$$

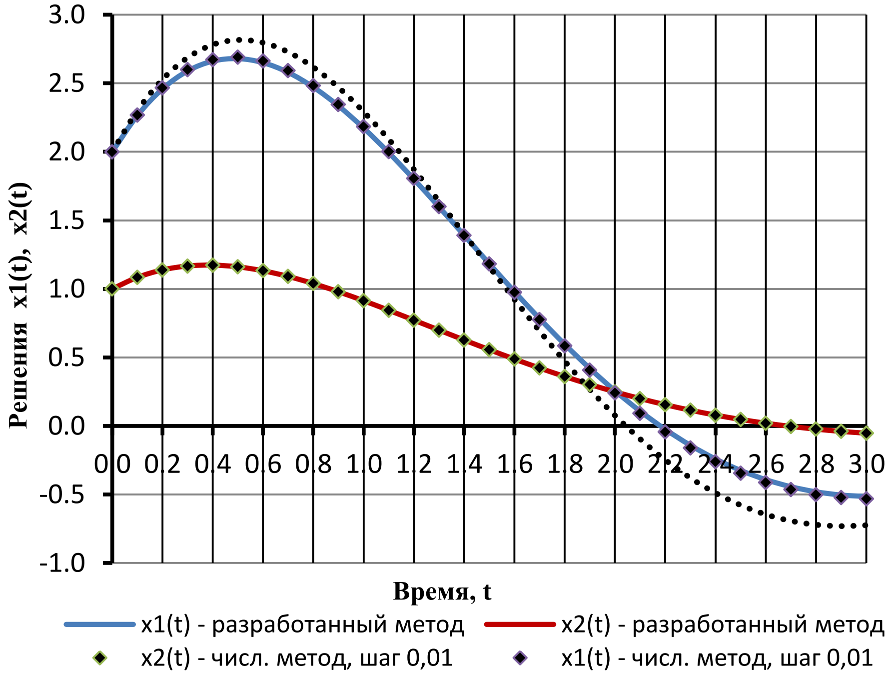

Рис. 1. Решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ примера матричного дифференциального уравнения второго порядка в обыкновенных производных рассчитанные по разработанному в статье методу и численными методами на компьютере

Искомые решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ исходного уравнения (14), полученные разработанным в статье методом, приведены на рис. 1.

На рис. 1 приведены также решения, полученные численным методом на компьютере, причем для сравнения приведены также решения, рассчитанные с шагом по времени равным 0,1 и 0,01. Сравнение решений, полученных разработанным методом с решениями, вычисленными численным методом, показывает их полное совпадение, что является следствием того, что разработанный в статье метод не содержит аппроксимирующих условий и допущений и является точным.

6. Заключение

Существующие в настоящее время методы приведения матричных систем взаимосвязанных дифференциальных уравнений в обыкновенных производных к системе независимых между собой дифференциальных уравнений, основываются на одновременной диагонализации двух симметрических матриц уравнения на основании теоремы об их одновременной диагонализации и приведении одной из них к диагональной единичной. Поскольку количество одновременно диагонализируемых матриц не превышает двух, то исходные матричные уравнения рассматриваются, как правило, в усеченном виде, когда отсутствует какой-либо из членов уравнения, чтобы общее количество матриц не превышало двух. В то же время во многих приложениях матричные дифференциальные уравнения насчитывают три и более матриц, что по существу послужило мотивацией проведенной разработки.

В настоящей статье предлагается метод, позволяющий диагонализировать три матрицы в матричном дифференциальном уравнении второго порядка и тем самым получать систему независимых между собой уравнений, решение каждого из которых легко могут быть найдены в явном аналитическом виде.

С этой целью, одна из матриц уравнения (положительно определенная) приводятся к диагональному единичному виду, а другая – подвергается спектральному разложению с помощью общего преобразования подобия. В предлагаемом в статье методе третья матрица в матричном уравнении приводится к диагональному виду с помощью перехода из обычного матричного пространства с обычной матричной алгеброй, в кронекеровское матричное пространство, в котором действуют правила кронекеровской матричной алгебры.

Разработанный в статье метод одинаково приложим как к матричным дифференциальным уравнениям второго порядка $A\frac{d^2x(t)}{dt^2}+B\frac{dx(t)}{dt}+Cx(t)=f(t)$ с тремя матрицами A, B и C, так и матричным дифференциальным уравнениям более высоких порядков, но имеющих в уравнении три матрицы, то есть

$$A\frac{d^nx(t)}{dt^n}+B\frac{d^mx(t)}{dt^m}+Cx(t)=f(t),\ \ n>m\geq 1.$$

Основным требованием к матрицам A, B, C является положительная определенность одной из матриц, которая подвергается диагонализации в первую очередь и приводится к диагональному единичному виду.

Отметим, что принципиальные возможности, заложенные в предлагаемом в статье методе, позволяют, при некоторых допущениях и дополнительных исследованиях, рассматривать матричные дифференциальные в обыкновенных производных более высокого порядка ($n\geq 3$) и количеством матриц в уравнении большим трех, то есть уравнения ($D^sx(t)=d^sx(t)/dt^s$ – дифференциальный оператор)

$$A_nD^nx(t)+A_{n-1}D^{n-1}x(t)+\cdots+A_0x(t)=f(t).$$

Публикация выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (Фундаментальные исследования 47 ГП) по теме № 0580-2021-0001 "Математическое обеспечение и инструментальные средства для моделирования, проектирования и разработки элементов сложных технических систем, программных комплексов и телекоммуникационных сетей в различных проблемно-ориентированных областях" (121031300047-6).

Литература

[1] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 615 с.
[2] Chua L.O., Pen-Min Lin Computer-aided analysis of electronic circuits. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975. 737 p.
[3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. 216 с.
[4] Frazer R.A., Duncan W.J., Collar A.R. Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations. New York: Cambridge University Press, 1960. 416 p.
[5] Duffin R.J. A minimax theory for overdamped networks. Journal of Rational Mechanics and Analysis; 1955; Vol. 4: 221-233.
[6] MacDuffee C.C. The theory matrices. N.Y.: Dover Publications, 2004, 128 p.
[7] Figotin A., Welters A. *Lagrangian Framework for Systems Composed of High-Loss and Lossless Component*s. Available at: arXiv:1401.0230v2 01.05.2014. (accessed 10.2018).
[8] Veselić K. *Modal approximations to damped linear systems*. Available at: arXiv:0907.0167v1 01.07.2009. (accessed October 01.07.2009).
[9] Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 368 с.
[10] Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1973. 280 с.
[11] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 656 с.
[12] Brewer J.W. Kronecker products and matrix calculus in system theory. IEEE Transactions on Circuits and Systems; 1978; Vol. CAS-25, No. 9, September: 772 – 781.
[13] Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: ЛИБРОКОМ, 2009. 234 р.
[14] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

A method for obtaining an explicit solution of second-order matrix ODE based on diagonalization the matrices and the Kronecker matrix algebra

Madera Alexander Georgievich

Scientific Research Institute for System Analysis of
Russia Academy of Sciences (SRISA RAS)

agmprof@mail.ru

Abstract. A method for obtaining an explicit solution of matrix differential equations in second-order ordinary derivatives with constant matrices is considered. The method allows you to reduce the initial system of interconnected differential equations to a system of independent differential equations that can be easily solved analytically. The method developed in the article is based on the diagonalization of all matrices included in the equation, which is carried out using the spectral decomposition of the matrices and Kronecker matrix algebra. An example of the application of the developed method is given.

Keywords: matrix differential equations in ordinary derivatives, diagonalization of matrices, spectral decomposition of a matrix, Kronecker matrix algebra.

Acknowledgements

The publication is made as a part of national assignment for SRISA RAS (fundamental scientific research 47 GP) on the topic No.0580-2021-0001 (121031300047-6).