

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 3, 2021

Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>
e-mail: jodiff@mail.ru

*Теория обыкновенных
дифференциальных уравнений*

Решения в полиномах дробно-полиномиальных дифференциальных уравнений, порожденных вторым уравнением Пенлеве

Хакимова З.Н.^{1*}, Тимофеева Л.Н.^{2*} Зайцев О.В.^{3**}

^{1,2}Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург
³БГТУ «Военмех» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург

e-mail:

*vka@mail.ru

**zaytsev_oleg1997@mail.ru

Аннотация. Построена дискретная псевдогруппа точечных, Беклунда и касательных преобразований для 2-го уравнения Пенлеве, замкнутых в классах обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальной или дробно-полиномиальной правой частью. Построен 36-вершинный граф этой псевдогруппы.

Вычислены решения в полиномах всех полиномиальных и дробно-полиномиальных уравнений орбиты 2-го уравнения Пенлеве при некоторых целых значениях параметра в правой части. Кроме того, указан способ нахождения решений уравнений орбиты 2-го уравнения Пенлеве с произвольными коэффициентами в правой части.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), дискретная группа, псевдогруппа преобразований, второе уравнение Пенлеве, трансценденты Пенлеве.

1. Введение

В начале 20-го века и ранее математикам удавалось найти точные решения лишь для отдельных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В конце 20-го века В.Ф. Зайцев [1] разработал дискретно-групповой анализ ОДУ, включающий в себя, в первую очередь, нахождение дискретных групп и псевдогрупп преобразований, замкнутых в исследуемых классах уравнений, а также построение соответствующих графов; далее –

нахождение решений всех уравнений, обозначаемых вершинами графов, если известно решение хотя бы одного уравнения из некоторого подкласса рассматриваемого класса уравнений.

Благодаря этому методу «размножения» решений уравнений по графу дискретной группы или псевдогруппы, за короткий срок научной школой В.Ф. Зайцева были найдены решения тысяч дифференциальных уравнений [2], тогда как раньше были известны лишь немногочисленные разрешимые случаи в исследовавшихся классах ОДУ [3].

Французский математик П. Пенлеве со своим учеником Б. Гамбье на рубеже 19-го и 20-го веков участвовали в поиске ОДУ 2-го порядка, имеющих решения без подвижных критических особых точек (наряду с Э. Пикаром и Р. Фуксом) [4]. Ими были найдены шесть уравнений (которые позже были названы уравнениями Пенлеве), обладающих таким свойством (Р-свойством). Решения этих шести уравнений можно считать специальными функциями наряду с известными специальными функциями.

В данной работе дискретно-групповой анализ был применен к ОДУ с полиномиальными, дробно-полиномиальными правыми частями и ко второму уравнению Пенлеве. Найдены дискретные преобразования, действующие в исследуемых классах уравнений; построены дискретные группы и псевдогруппы преобразований, замкнутые в этих классах уравнений, их графы.

В работе решалась задача нахождения точных решений уравнений. В [5] одним из авторов были получены общие решения для уравнений орбиты второго уравнения Пенлеве через второй трансцендент Пенлеве. В данной работе была решена задача нахождения частных решений уравнений орбиты второго уравнения Пенлеве в полиномах, в рациональных функциях.

В статье были использованы следующие методы дискретно-группового анализа: методы построения дискретных групп и псевдогрупп, их графов; метод «расширения» класса уравнений для получения замкнутости дискретных преобразований; метод «размножения» разрешимых уравнений с помощью дискретных групп и псевдогрупп.

В качестве «отправной» точки для метода «размножения» было использовано рациональное решение второго уравнения Пенлеве, которое существует и единственно для каждого целого значения параметра в правой части второго уравнения Пенлеве [7,8,9]. В качестве примера в статье были вычислены рациональные решения всех уравнений орбиты второго уравнения Пенлеве при некотором целом значении этого параметра. Таким образом, используя рациональные решения второго уравнения Пенлеве, с помощью дискретной псевдогруппы 36-го порядка для этого уравнения были вычислены решения всех остальных 35-ти уравнений орбиты второго уравнения Пенлеве.

Кроме того, был указан способ нахождения рациональных решений уравнений орбиты второго уравнения Пенлеве с произвольными коэффициентами при слагаемых в правой части – аналогично тому, как для орбиты первого уравнения Пенлеве [10].

Все результаты данной статьи были получены авторами самостоятельно.

2. Рассматриваемые уравнения

В данной статье рассматривается 2-е уравнение Пенлеве

$$y''_{xx} = xy + 2y^3 + \alpha, \quad (1)$$

класс ОДУ 2-го порядка с полиномиальной правой частью

$$y''_{xx} = \sum_{i=1}^3 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}, \quad (2)$$

с дробно-полиномиальной правой частью

$$y_{xx}'' = [\sum_{i=1}^3 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y_x')^{m_i} (x y_x' - y)^{n_i}]^{-1}, \quad (3)$$

а также класс уравнений, обобщающий (2) и (3):

$$y_{xx}'' = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y_x')^{m_i} (x y_x' - y)^{n_i}}{\sum_{i=4}^6 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y_x')^{m_i} (x y_x' - y)^{n_i}}. \quad (4)$$

Классы уравнений (2), (3) и (4) будем обозначать, соответственно,

$$\sum_{i=1}^3 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i), \quad (5)$$

$$[\sum_{i=1}^3 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i)]^{-1}, \quad (6)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^3 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i)}{\sum_{i=4}^6 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i)}. \quad (7)$$

3. Группы преобразований для классов уравнений (2), (3), (4)

Для классов уравнений (2) и (3) были найдены точечные преобразования, замкнутые в этих классах уравнений, в частности, преобразование \mathbf{r} , «переставляющее местами» переменную x и искомую переменную y :

$$\mathbf{r}: \quad x = u, \quad y = t, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^3 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i) \xrightarrow{\mathbf{r}} \sum_{i=1}^3 (l_i, k_i, -m_i - n_i + 3, n_i | (-1)^{n_i-1} A_i), \quad (8)$$

$$[\sum_{i=1}^3 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i)]^{-1} \xrightarrow{\mathbf{r}} [\sum_{i=1}^3 (l_i, k_i, -m_i - n_i + 3, n_i | (-1)^{n_i-1} A_i)]^{-1}. \quad (9)$$

Кроме того, были найдены касательные преобразования, замкнутые в классе дробно-полиномиальных уравнений (4), но они не замкнуты в классах уравнений (2) и (3), а переводят уравнения класса (2) в (3) и наоборот, в частности, преобразование \mathbf{h} :

$$\mathbf{h}: \quad x = \frac{1}{\dot{u}_t}, \quad y = -\frac{t \dot{u}_t - u}{\dot{u}_t}, \quad y_x' = u, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^3 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i) \xrightarrow{\mathbf{h}} [\sum_{i=1}^3 (n_i, m_i, -k_i - l_i - 3, l_i | (-1)^{l_i-1} A_i)]^{-1},$$

$$[\sum_{i=1}^3 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i)]^{-1} \xrightarrow{\mathbf{h}} \sum_{i=1}^3 (n_i, m_i, -k_i - l_i - 3, l_i | (-1)^{l_i-1} A_i). \quad (11)$$

Преобразования \mathbf{r} и \mathbf{h} являются образующими группы диэдра 12-го порядка

$$D_6 = \{\mathbf{E}, \mathbf{h}, \mathbf{h}^2, \mathbf{h}^3, \mathbf{h}^4, \mathbf{h}^5, \mathbf{r}, \mathbf{hr}, \mathbf{h}^2\mathbf{r}, \mathbf{h}^3\mathbf{r}, \mathbf{h}^4\mathbf{r}, \mathbf{h}^5\mathbf{r}\}, \quad (12)$$

элементами которой являются преобразования, замкнутые в классе уравнений (4)[5].

Группа D_6 (12) имеет код $\mathbf{r}^2 = \mathbf{h}^6 = (\mathbf{rh})^2 = \mathbf{E}$ и граф, изображенный на рис. 1 [6].

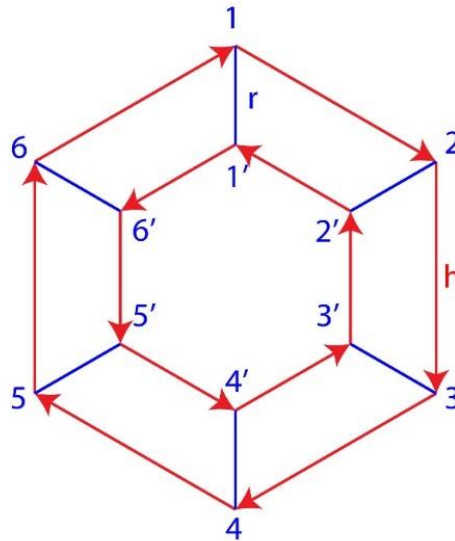


Рис. 1. Граф группы D_6

Применение группы D_6 к классу уравнений (2) даёт уравнения, соответствующие вершинам графа на рис. 1. Они помещены в таблицу 1.

Таб. 1. Уравнения-вершины графа D_6 для класса уравнений (2); уравнения с нечетными номерами принадлежат классу уравнений (2), с четными – (3)

1	$\sum_{i=1}^3 (k_i, l_i, m_i, n_i A_i)$	1'	$\sum_{i=1}^3 (l_i, k_i, -m_i - n_i + 3, n_i (-1)^{n_i-1} A_i)$
2	$\left[\sum_{i=1}^3 (n_i, m_i, -k_i - l_i - 3, l_i (-1)^{l_i-1} A_i) \right]^{-1}$	2'	$\left[\sum_{i=1}^3 (m_i, n_i, k_i, l_i A_i) \right]^{-1}$
3	$\sum_{i=1}^3 (l_i, -k_i - l_i - 3, -m_i - n_i + 3, m_i (-1)^{l_i+m_i} A_i)$	3'	$\sum_{i=1}^3 (-k_i - l_i - 3, l_i, n_i, m_i (-1)^{l_i-1} A_i)$
4	$\left[\sum_{i=1}^3 (m_i, -m_i - n_i + 3, k_i, -k_i - l_i - 3 (-1)^{k_i+m_i} A_i) \right]^{-1}$	4'	$\left[\sum_{i=1}^3 (-m_i - n_i + 3, m_i, l_i, -k_i - l_i - 3 (-1)^{l_i+m_i} A_i) \right]^{-1}$
5	$\sum_{i=1}^3 (-k_i - l_i - 3, k_i, n_i, -m_i - n_i + 3 (-1)^{k_i+n_i} A_i)$	5'	$\sum_{i=1}^3 (l_i, -k_i - l_i - 3, -m_i - n_i + 3, m_i (-1)^{k_i+m_i} A_i)$
6	$\left[\sum_{i=1}^3 (-m_i - n_i + 3, n_i, l_i, k_i (-1)^{n_i-1} A_i) \right]^{-1}$	6'	$\left[\sum_{i=1}^3 (n_i, -m_i - n_i + 3, -k_i - l_i - 3, k_i (-1)^{k_i+n_i} A_i) \right]^{-1}$

4. Псевдогруппа преобразований 36-го порядка для второго уравнения

Пенлеве

Поскольку второе уравнение Пенлеве принадлежит классу уравнений (2), то группа D_6 применима к этому уравнению.

Кроме того, было обнаружено [5], что в классе полиномиальных уравнений (2) действует преобразование Беклунда \mathbf{g}_1 , а также, соответственно, обратное преобразование \mathbf{g}_1^{-1} (они зависят от параметров уравнений):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1: \quad x &= u^{\frac{1}{k_1+1}}, y = (\dot{u}_t)^{-\frac{1}{l}}, y'_x = \frac{A_1}{k_1+1} \cdot t + \sum_{i=2}^3 \frac{A_i}{k_i+1} \cdot u^{\frac{k_i+1}{k_1+1}}, \\ (k_1, l, 0, 0 | A_1) &+ \sum_{i=2}^3 (k_i, 0, 0, 0 | A_i) \xrightarrow{\mathbf{g}_1} \\ \xrightarrow{\mathbf{g}_1} &\left(1, -\frac{k_1}{k_1+1}, \frac{2l+1}{l}, 0 \mid -\frac{l}{(k_1+1)^2} \cdot A_1\right) + \\ &+ \sum_{i=2}^3 \left(0, \frac{k_i - k_1 + 1}{k_1+1}, \frac{2l+1}{l}, 0 \mid -\frac{l}{(k_1+1)(k_i+1)} \cdot A_i\right); \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1^{-1}: \quad x &= \frac{l_1+1}{(2-m)A_1} \cdot \dot{u}_t - \sum_{i=2}^3 \frac{A_i}{A_1} t^{\frac{l_i-l_1}{l_1+1}}, y = t^{\frac{1}{l_1+1}}, y'_x = u^{2-m}, \\ (1, l_1, m, 0 | A_1) &+ \sum_{i=2}^3 (0, l_i, m, 0 | A_i) \xrightarrow{\mathbf{g}_1^{-1}} \\ \xrightarrow{\mathbf{g}_1^{-1}} &\left(-\frac{l_1}{l_1+1}, \frac{1}{m-2}, 0, 0 \mid \frac{2-m}{(l_1+1)^2} \cdot A_1\right) + \\ &+ \sum_{i=2}^3 \left(\frac{l_i - 2l_1 - 1}{l_1+1}, 0, 0, 0 \mid \frac{(l_i - l_1)(2-m)}{(l_1+1)^2} \cdot A_i\right). \end{aligned}$$

Преобразование \mathbf{g}_1^{-1} применимо ко 2-му уравнению Пенлеве (1), благодаря чему для 2-го уравнения была построена псевдогруппа 36-го порядка, граф которой изображен на рис. 2.

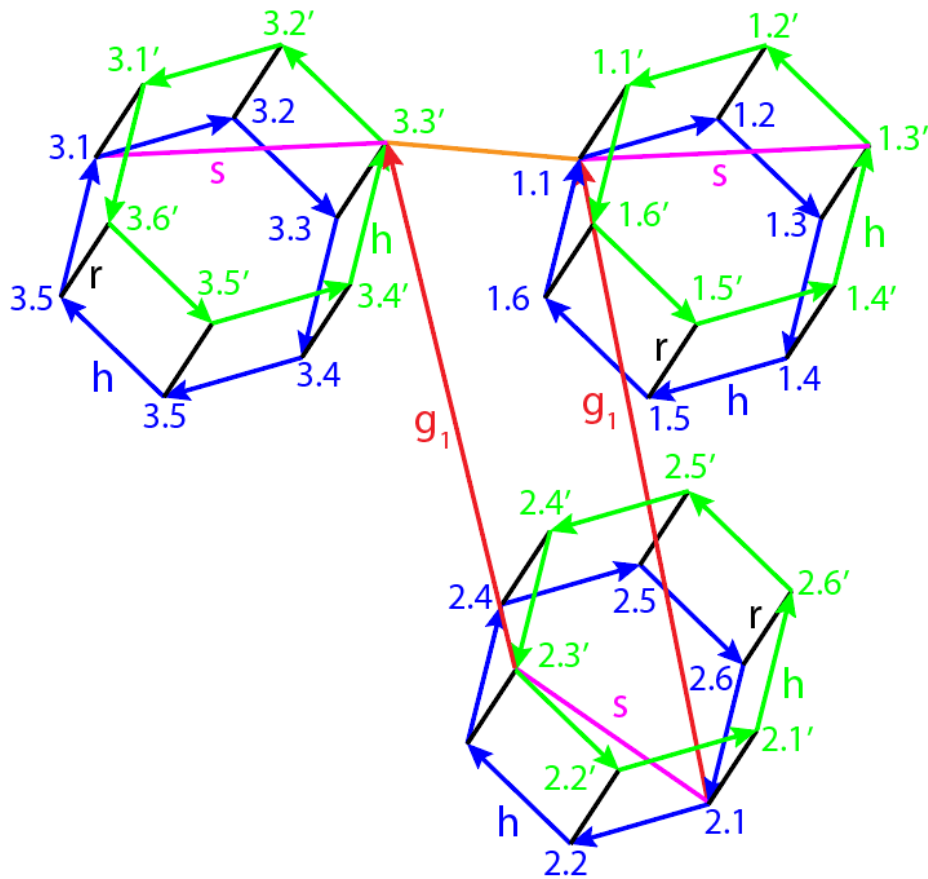


Рис. 2. Граф псевдогруппы преобразований 36-го порядка для второго уравнения Пенлеве 1.1, $s = h^2r$

В таблице 2 приведены уравнения, соответствующие вершинам графа на рис. 2.

Таб. 2 Уравнения орбиты 2-го уравнения Пенлеве

1.1	$(1,1,0,0 1) + (0,3,0,0 2) + (0,0,0,0 \alpha)$	1.1'	$(1,1,3,0 -1) + (3,0,3,0 -2) + (0,0,3,0 -\alpha)$
1.2	$\left[(0,0,-5,1 1) + (0,0,-6,3 2) + (0,0,-3,0 -\alpha) \right]^{-1}$	1.2'	$\left[(0,0,1,1 1) + (0,0,0,3 2) + (0,0,0,0 \alpha) \right]^{-1}$
1.3	$(1,-5,3,0 -1) + (3,-6,3,0 -2) + (0,-3,3,0 \alpha)$	1.3'	$(-5,1,0,0 1) + (-6,3,0,0 2) + (-3,0,0,0 -\alpha)$
1.4	$\left[(0,3,1,-5 -1) + (0,3,0,-6 2) + (0,3,0,-3 \alpha) \right]^{-1}$	1.4'	$\left[(3,0,1,-5 -1) + (3,0,3,-6 -2) + (3,0,0,-3 \alpha) \right]^{-1}$
1.5	$(-5,1,0,3 -1) + (-6,0,0,3 2) + (-3,0,0,3 \alpha)$	1.5'	$(1,-5,3,0 -1) + (3,-6,3,0 2) + (0,-3,3,0 \alpha)$
1.6	$\left[(3,0,1,1 -1) + (3,0,3,0 -2) + (3,0,0,0 -\alpha) \right]^{-1}$	1.6'	$\left[(0,3,-5,1 -1) + (0,3,-6,0 2) + (0,3,-3,0 \alpha) \right]^{-1}$
2.1	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0 \middle \frac{1}{2} \right) + (0,0,0,0 2) + \left(-\frac{3}{2}, 0, 0, 0 \middle -\frac{\alpha}{2} \right)$	2.1'	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, 0 \middle -\frac{1}{2} \right) + (0,3,0,0 -2) + \left(0, -\frac{3}{2}, 3, 0 \middle \frac{\alpha}{2} \right)$
2.2	$\left[\left(0, 0, -2, -\frac{1}{2} \middle i \frac{1}{2} \right) + (0,0,-3,0 -2) + \left(0, 0, -\frac{3}{2}, 0 \middle \frac{\alpha}{2} \right) \right]^{-1}$	2.2'	$\left[\left(0, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle \frac{1}{2} \right) + (0,0,0,0 2) + \left(0, 0, -\frac{3}{2}, 0 \middle -\frac{\alpha}{2} \right) \right]^{-1}$

2.3	$\left(-\frac{1}{2}, -2, 3, 0 \mid -i\frac{1}{2}\right) + (0, -3, 3, 0 \mid 2) +$ $+ \left(0, -\frac{3}{2}, 3, 0 \mid -\frac{\alpha}{2}\right)$	2.3'	$\left(-2, -\frac{1}{2}, 0, 0 \mid i\frac{1}{2}\right) + (-3, 0, 0, 0 \mid -2)$ $+ \left(-\frac{3}{2}, 0, 0, 0 \mid \frac{\alpha}{2}\right)$
2.4	$\left[\left(0, 3, -\frac{1}{2}, -2 \mid -i\frac{1}{2}\right) + (0, 3, 0, -3 \mid 2) + \right.$ $\left. + \left(0, 3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \mid i\frac{\alpha}{2}\right)\right]$	2.4'	$\left[\left(3, 0, -\frac{1}{2}, -2 \mid -i\frac{1}{2}\right) + (3, 0, 0, -3 \mid 2) + \right.$ $\left. + \left(3, 0, 0, -\frac{3}{2} \mid -i\frac{\alpha}{2}\right)\right]$
2.5	$\left(-2, -\frac{1}{2}, 0, 3 \mid -i\frac{1}{2}\right) + (-3, 0, 0, 3 \mid 2) +$ $+ \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 3 \mid -i\frac{\alpha}{2}\right)$	2.5'	$\left(-\frac{1}{2}, -2, 3, 0 \mid -i\frac{1}{2}\right) + (0, -3, 3, 0 \mid 2) +$ $+ \left(0, -\frac{3}{2}, 3, 0 \mid -\frac{\alpha}{2}\right)$
2.6	$\left[\left(3, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{2}\right) + (3, 0, 0, 0 \mid -2) + \right.$ $\left. + \left(3, 0, 0, -\frac{3}{2} \mid \frac{\alpha}{2}\right)\right]$	2.6'	$\left[\left(0, 3, -2, -\frac{1}{2} \mid -i\frac{1}{2}\right) + (0, 3, -3, 0 \mid 2) + \right.$ $\left. + \left(0, 3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \mid -i\frac{\alpha}{2}\right)\right]$
3.1	$\left(-2, -2, 0, 0 \mid i\frac{1}{4}\right) + \left(-3, 0, 0, 0 \mid \frac{1}{2}\right) +$ $+ \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 0 \mid -i\frac{\alpha}{2}\right)$	3.1'	$\left(-2, -2, 3, 0 \mid -i\frac{1}{4}\right) + \left(0, -3, 3, 0 \mid -\frac{1}{2}\right)$ $+ \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 3, 0 \mid i\frac{\alpha}{2}\right)$
3.2	$\left[\left(0, 0, 1, -2 \mid -i\frac{1}{4}\right) + \right.$ $\left. + \left(0, 0, 0, 0 \mid -\frac{1}{2}\right) + \right.$ $\left. + \left(0, 0, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \mid -\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}$	3.2'	$\left[\left(0, 0, -2, -2 \mid i\frac{1}{4}\right) + \right.$ $\left. + \left(0, 0, -3, 0 \mid \frac{1}{2}\right) + \right.$ $\left. + \left(0, 0, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \mid -i\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}$
3.3	$\left(-2, 1, 3, -2 \mid i\frac{1}{4}\right) + \left(0, 0, 3, 0 \mid \frac{1}{2}\right) +$ $+ \left(-\frac{3}{2}, 0, 3, 0 \mid \frac{\alpha}{2}\right)$	3.3'	$\left(1, -2, 0, 0 \mid -i\frac{1}{4}\right) + \left(0, 0, 0, 0 \mid -\frac{1}{2}\right) +$ $+ \left(0, -\frac{3}{2}, 0, 0 \mid -\frac{\alpha}{2}\right)$
3.4	$\left[\left(0, 3, -2, 1 \mid i\frac{1}{4}\right) + \left(0, 3, -3, 0 \mid -\frac{1}{2}\right) + \right.$ $\left. + \left(0, 3, -\frac{3}{2}, 0 \mid \frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}$	3.4'	$\left[\left(3, 0, -2, 1 \mid i\frac{1}{4}\right) + \left(3, 0, 0, 0 \mid \frac{1}{2}\right) + \right.$ $\left. + \left(3, 0, -\frac{3}{2}, 0 \mid \frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}$
3.5	$\left(1, -2, 0, 3 \mid i\frac{1}{4}\right) + \left(0, -3, 0, 3 \mid -\frac{1}{2}\right) +$ $+ \left(0, -\frac{3}{2}, 0, 3 \mid \frac{\alpha}{2}\right)$	3.5'	$\left(-2, 1, 3, 0 \mid i\frac{1}{4}\right) + \left(0, 0, 3, 0 \mid -\frac{1}{2}\right) +$ $+ \left(-\frac{3}{2}, 0, 3, 0 \mid \frac{\alpha}{2}\right)$
3.6	$\left[\left(3, 0, -2, -2 \mid -i\frac{1}{4}\right) + \right.$ $\left. + \left(3, 0, 0, -3 \mid -\frac{1}{2}\right) + \right.$ $\left. + \left(3, 0, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \mid i\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}$	3.6'	$\left[\left(0, 3, 1, -2 \mid i\frac{1}{4}\right) + \right.$ $\left. + \left(0, 3, 0, -3 \mid -\frac{1}{2}\right) + \right.$ $\left. + \left(0, 3, 0, -\frac{3}{2} \mid \frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}$

5. Решения уравнений орбиты 2-го уравнения Пенлеве в полиномах

Уравнения-вершины графа на рис. 2 имеют общие решения при произвольном α через

второй трансцендент Пенлеве [5]. Оказывается, существуют частные решения уравнений орбиты 2-го уравнения Пенлеве в полиномах.

А.И. Яблонский и А.П. Воробьев показали, что второе уравнение Пенлеве имеет рациональные решения только при целых значениях параметра α [7,8]. Причем, при каждом $\alpha \in \mathbb{Z}$ рациональное решение – единственно.

В справочнике [2] приведены рекуррентные формулы относительно α , позволяющие находить рациональные решения для последующих α через предыдущие. В результате получается таблица 3 [9] для рациональных решений $y(x; \alpha)$ при первых неотрицательных значениях α : $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$ ($y(x; 0) = 0$ – очевидно).

Таб. 3. Рациональные решения второго уравнения Пенлеве при $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$

$y(x; 0) = 0$
$y(x; 1) = -\frac{1}{x}$
$y(x; 2) = -\frac{2(x^3 - 2)}{x(x^3 + 4)}$
$y(x; 3) = -\frac{3x^2(x^6 + 8x^3 + 160)}{(x^3 + 4)(x^6 + 20x^3 - 80)}$
$y(x; 4) = -\frac{4(x^{15} + 50x^{12} + 1000xx^9 - 22400x^6 - 112000x^3 - 224000)}{x(x^9 + 60x^6 + 11200)(x^6 + 20x^3 - 80)}$

Все уравнения таблицы 2 связаны с уравнением Пенлеве 1.1 композициями преобразований g_1 , h и r . Этими же преобразованиями связаны и решения всех уравнений с решением уравнения Пенлеве 1.1. Но проще находить решения всех уравнений таблицы 2 редукцией к «ключевым» уравнениям 1.1, 2.1, 3.1 с помощью преобразований группы диэдра D_6 .

Если за исходное взять частное рациональное решение второго уравнения Пенлеве, то решения всех остальных 35-ти уравнений на рис. 2 являются рациональными.

Пример. Пусть $\alpha = 2$. Найдем решения всех уравнений таблицы 2 для исходного уравнения Пенлеве 1.1:

$$y''_{xx} = xy + 2y^3 + 2. \tag{14}$$

Уравнение 1.1 (14), согласно таблице 3, имеет рациональное решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \tau \\ y = P(\tau, 2) = -\frac{2(\tau^3 - 2)}{\tau(\tau^3 + 4)}. \end{cases} \tag{15}$$

Решения «ключевых» уравнений 1.1, 2.1, 3.1 приведены в таблице 4.

Таб. 4. Решения трех «ключевых» уравнений орбиты 2-го уравнения Пенлеве при $\alpha = 2$

1.1	$x = \tau, y = -\frac{2P_2}{\tau P_1}, y'_x = \frac{2P_3}{\tau^2 P_1^2}, xy'_x - y = \frac{4P_4}{\tau P_1^2}$
2.1	$x = \frac{4P_2^2}{\tau^2 P_1^2}, y = \frac{4P_4^2}{\tau^4 P_1^4}, y'_x = \frac{2P_5}{\tau^2 P_1^2 P_2}, xy'_x - y = \frac{4P_6}{\tau^4 P_1^4}$
3.1	$x = -\frac{i}{\varepsilon}, y = \frac{4iP_2^2}{\tau^2 P_1^2 \varepsilon}, y'_x = -\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}{\tau^2 P_1^2 P_2}, xy'_x - y = \frac{iP_3}{\tau P_1 P_2}$

В таблице 4: $P_1 = \tau^3 + 4$, $P_2 = \tau^3 - 2$, $P_3 = \tau^6 - 16\tau^3 - 8$,
 $P_4 = \tau^6 - 7\tau^3 - 8$, $P_5 = \tau^9 - 48\tau^6 - 32$, $P_6 = \tau^{12} - 68\tau^9 - 48\tau^6 - 320\tau^3 + 64$,
 $\varepsilon = 2\tau P^2 + 2P^4 + 4\alpha P - 2\dot{P}^2$.

Поскольку граф на рис. 2 является декартовым произведением графа группы D_6 и графа-дерева из «ключевых» точек, то из решения каждого «ключевого» уравнения можно получить решения еще 11-ти уравнений-вершин графа группы D_6 .

Вычислив преобразования, связывающие эти уравнения с «ключевым» уравнением, получим решения 11-ти уравнений через решение «ключевого» уравнения (см. таблицу 5).

Таб. 5. Решения уравнений $i.2, \dots, i.6, i.1', \dots, i.6'$ через решение уравнения $i.1$ ($i=1, 2, 3$) из орбиты 2-го уравнения Пенлеве

i.1	$x = \alpha, y = \beta, y'_x = \gamma, xy'_x - y = \delta$	i.1'	$x = \beta, y = \alpha, y'_x = \frac{1}{\gamma}, xy'_x - y = -\frac{\delta}{\gamma}$
i.2	$x = \delta, y = \gamma, y'_x = \frac{1}{\alpha}, xy'_x - y = -\frac{\beta}{\alpha}$	i.2'	$x = \gamma, y = \delta, y'_x = \alpha, xy'_x - y = \beta$
i.3	$x = -\frac{\beta}{\alpha}, y = \frac{1}{\alpha}, y'_x = \frac{1}{\delta}, xy'_x - y = -\frac{\gamma}{\delta}$	i.3'	$x = \frac{1}{\alpha}, y = -\frac{\beta}{\alpha}, y'_x = \delta, xy'_x - y = \gamma$
i.4	$x = -\frac{\gamma}{\delta}, y = \frac{1}{\delta}, y'_x = -\frac{\delta}{\gamma}, xy'_x - y = \frac{1}{\gamma}$	i.4'	$x = \frac{1}{\delta}, y = -\frac{\gamma}{\delta}, y'_x = -\frac{\beta}{\alpha}, xy'_x - y = \frac{1}{\alpha}$
i.5	$x = \frac{1}{\beta}, y = -\frac{\alpha}{\beta}, y'_x = -\frac{\delta}{\gamma}, xy'_x - y = \frac{1}{\gamma}$	i.5'	$x = -\frac{\alpha}{\beta}, y = \frac{1}{\beta}, y'_x = -\frac{\gamma}{\delta}, xy'_x - y = \frac{1}{\delta}$
i.6	$x = \frac{1}{\gamma}, y = -\frac{\delta}{\gamma}, y'_x = \beta, xy'_x - y = \alpha$	i.6'	$x = -\frac{\delta}{\gamma}, y = \frac{1}{\gamma}, y'_x = \frac{1}{\beta}, xy'_x - y = -\frac{\alpha}{\beta}$

Решения всех 36-ти уравнений-вершин графа на рис. 2 получаются если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, взятые из таблицы 4, подставить в таблицу 5.

Решения всех уравнений орбиты второго уравнения Пенлеве 1.1 (из таблицы 2) приведены в таблице 6.

Таб. 6. Решения уравнений орбиты 2-го уравнения Пенлеве при $\alpha = 2$

1.1	$x = \tau, y = -\frac{2P_2}{\tau P_1}, y'_x = \frac{2P_3}{\tau^2 P_1^2}, xy'_x - y = \frac{4P_4}{\tau P_1^2}$	1.1'	$x = -\frac{2P_2}{\tau P_1}, y = \tau, y'_x = \frac{\tau^2 P_1^2}{2P_3}, xy'_x - y = -\frac{\tau P_4}{P_3}$
1.2	$x = \frac{4P_4}{\tau P_1^2}, y = \frac{2P_3}{\tau^2 P_1^2}, y'_x = \frac{1}{\tau}, xy'_x - y = \frac{2P_2}{\tau^2 P_1}$	1.2'	$x = \frac{2P_3}{\tau^2 P_1^2}, y = \tau, y'_x = \frac{\tau^2 P_1^2}{2P_3}, xy'_x - y = -\frac{\tau P_4}{P_3}$
1.3	$x = \frac{2P_2}{\tau^2 P_1}, y = \frac{1}{\tau}, y'_x = \frac{\tau P_1^2}{4P_4}, xy'_x - y = -\frac{P_3}{2\tau P_4}$	1.3'	$x = \frac{1}{\tau}, y = \frac{2P_2}{\tau^2 P_1}, y'_x = \frac{4P_4}{\tau P_1^2}, xy'_x - y = \frac{2P_3}{\tau^2 P_1^2}$
1.4	$x = -\frac{P_3}{2\tau P_4}, y = \frac{\tau P_1^2}{4P_4}, y'_x = -\frac{2\tau P_4}{P_3}, xy'_x - y = \frac{\tau^2 P_1^2}{2P_3}$	1.4'	$x = \frac{\tau P_1^2}{4P_4}, y = -\frac{P_3}{\tau P_4}, y'_x = \frac{2P_2}{\tau^2 P_1}, xy'_x - y = \frac{1}{\tau}$
1.5	$x = -\frac{\tau P_1}{2P_2}, y = \frac{\tau^2 P_1}{2P_2}, y'_x = -\frac{2\tau P_4}{P_3}, xy'_x - y = \frac{\tau^2 P_1^2}{2P_3}$	1.5'	$x = \frac{\tau^2 P_1}{2P_2}, y = -\frac{\tau P_1}{2P_2}, y'_x = -\frac{P_3}{2\tau P_4}, xy'_x - y = \frac{\tau P_1^2}{4P_4}$
1.6	$x = \frac{\tau^2 P_1^2}{2P_3}, y = -\frac{2\tau P_4}{P_3}, y'_x = -\frac{2P_2}{\tau P_1}, xy'_x - y = \tau$	1.6'	$x = -\frac{2\tau P_4}{P_3}, y = \frac{\tau P_1^2}{2P_3}, y'_x = -\frac{\tau P_1}{2P_2}, xy'_x - y = \frac{\tau^2 P_1}{2P_2}$

2.1	$x = \frac{4P_2^2}{\tau^2 P_1^2}, y = \frac{4P_4^2}{\tau^4 P_1^4}, y'_x = \frac{2P_5}{\tau^2 P_1^2 P_2},$ $xy'_x - y = \frac{4P_6}{\tau^4 P_1^4}$	2.1'	$x = \frac{4P_4^2}{\tau^4 P_1^4}, y = \frac{4P_2^2}{\tau^2 P_1^2}, y'_x = \frac{\tau^2 P_1^2 P_2}{2P_5}, xy'_x -$ $y = -\frac{2P_2 P_6}{\tau^2 P_1^2 P_5}$
2.2	$x = \frac{4P_6}{\tau^4 P_1^4}, y = \frac{2P_5}{\tau^2 P_1^2 P_2}, y'_x = \frac{\tau^2 P_1^2}{4P_2^2},$ $xy'_x - y = \frac{P_4^2}{\tau^2 P_1^2 P_2^2}$	2.2'	$x = \frac{2P_5}{\tau^2 P_1^2 P_2}, y = \frac{4P_6}{\tau^4 P_1^4}, y'_x = \frac{4P_2^2}{\tau^2 P_1^2}, xy'_x -$ $y = \frac{4P_4^2}{\tau^4 P_1^4}$
2.3	$x = -\frac{P_4^2}{\tau^2 P_1^2 P_2^2}, y = \frac{\tau^2 P_1^2}{4P_2^2}, y'_x = \frac{\tau^4 P_1^4}{4P_6},$ $xy'_x - y = -\frac{\tau^2 P_1^2 P_5}{2P_2 P_6}$	2.3'	$x = \frac{\tau^2 P_1^2}{4P_2^2}, y = -\frac{P_4^2}{\tau^2 P_1^2 P_5}, y'_x = \frac{4P_6}{\tau^4 P_1^4},$ $xy'_x - y = \frac{2P_5}{\tau^2 P_1^2 P_2}$
2.4	$x = -\frac{\tau^2 P_1^2 P_5}{2P_2 P_6}, y = \frac{\tau^4 P_1^4}{4P_6}, y'_x =$ $-\frac{2P_2 P_6}{\tau^2 P_1^2 P_5}, xy'_x - y = \frac{\tau^2 P_1^2 P_2}{2P_5}$	2.4'	$x = \frac{\tau^4 P_1^4}{4P_6}, y = -\frac{\tau^2 P_1^2 P_5}{2P_2 P_6}, y'_x = -\frac{P_4^2}{\tau^2 P_1^2 P_5},$ $xy'_x - y = \frac{\tau^2 P_1^2}{4P_2^2}$
2.5	$x = \frac{\tau^4 P_1^4}{4P_4^2}, y = -\frac{\tau^2 P_1^2 P_5}{P_4^2}, y'_x =$ $-\frac{2P_2 P_6}{\tau^2 P_1^2 P_5}, xy'_x - y = \frac{\tau^2 P_1^2 P_2}{2P_5}$	2.5'	$x = -\frac{\tau^2 P_1^2 P_5}{P_4^2}, y = \frac{\tau^4 P_1^4}{4P_4^2}, y'_x = -\frac{\tau^2 P_1^2 P_5}{2P_2 P_6},$ $xy'_x - y = \frac{\tau^4 P_1^4}{4P_6}$
2.6	$x = \frac{\tau^2 P_1^2 P_2}{2P_5}, y = -\frac{2P_2 P_6}{\tau^2 P_1^2 P_5}, y'_x =$ $\frac{4P_4^2}{\tau^4 P_1^4}, xy'_x - y = \frac{4P_2^2}{\tau^2 P_1^2}$	2.6'	$x = -\frac{2P_2 P_6}{\tau^2 P_1^2 P_5}, y = \frac{\tau^2 P_1^2 P_2}{2P_5}, y'_x = \frac{\tau^4 P_1^4}{4P_4^2},$ $xy'_x - y = -\frac{\tau^2 P_1^2 P_2}{P_4^2}$
3.1	$x = -\frac{i}{\varepsilon}, y = \frac{4iP_2^2}{\tau^2 P_1^2 \varepsilon}, y'_x =$ $-\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}{\tau^2 P_1^2 P_2}, xy'_x - y = \frac{iP_3}{\tau P_1 P_2}$	3.1'	$x = \frac{4iP_2^2}{\tau^2 P_1^2 \varepsilon}, y = -\frac{i}{\varepsilon}, y'_x = -\frac{\tau^2 P_1^2 P_2}{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3},$ $xy'_x - y = \frac{i\tau P_1 P_3}{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}$
3.2	$x = \frac{iP_3}{\tau P_1 P_2}, y = -\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}{\tau^2 P_1^2 P_2},$ $y'_x = \varepsilon i, xy'_x - y = \frac{4P_2^2}{\tau^2 P_1^2}$	3.2'	$x = -\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}{\tau^2 P_1^2 P_2}, y = \frac{iP_3}{\tau P_1 P_2}, y'_x = -\frac{i}{\varepsilon},$ $xy'_x - y = \frac{4iP_2^2}{\tau^2 P_1^2 \varepsilon}$
3.3	$x = \frac{4P_2^2}{\tau^2 P_1^2}, y = \varepsilon i, y'_x = -\frac{i\tau P_1 P_2}{P_3},$ $xy'_x - y = -i\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}{\tau P_1 P_3}$	3.3'	$x = \varepsilon i, y = \frac{4P_2^2}{\tau^2 P_1^2}, y'_x = \frac{iP_3}{\tau P_1 P_2}, xy'_x - y =$ $-\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}{\tau^2 P_1^2 P_2}$
3.4	$x = -i\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}{\tau P_1 P_3}, y = -\frac{i\tau P_1 P_2}{P_3},$ $y'_x = \frac{i\tau P_1 P_3}{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}, xy'_x - y =$ $-\frac{\tau^2 P_1^2 P_2}{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}$	3.4'	$x = -\frac{i\tau P_1 P_2}{P_3}, y = -i\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}{\tau P_1 P_3},$ $y'_x = \frac{4P_2^2}{\tau^2 P_1^2}, xy'_x - y = -\varepsilon i$
3.5	$x = -i\frac{\tau^2 P_1^2 \varepsilon}{4P_2^2}, y = \frac{\varepsilon^2 P_1^2}{4P_2^2}, y'_x =$ $\frac{i\tau P_1 P_3}{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}, xy'_x - y =$ $-\frac{\tau^2 P_1^2 P_2}{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}$	3.5'	$x = \frac{\tau^2 P_1^2}{4P_2^2}, y = -i\frac{\tau^2 P_1^2 \varepsilon}{4P_2^2}, y'_x =$ $-i\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}{\tau P_1 P_3}, xy'_x - y = -\frac{i\tau P_1 P_2}{P_3}$
3.6	$x = -\frac{\tau^2 P_1^2 P_2}{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}, y = \frac{i\tau P_1 P_3}{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3},$ $y'_x = \frac{4iP_2^2}{\tau^2 P_1^2 \varepsilon}, xy'_x - y = -\frac{i}{\varepsilon}$	3.6'	$x = \frac{i\tau P_1 P_3}{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3}, y = -\frac{\tau^2 P_1^2 P_2}{\tau P_1 P_3 \varepsilon + 4P_2^3},$ $y'_x = -i\frac{\tau^2 P_1^2 \varepsilon}{4P_2^2}, xy'_x - y = \frac{\tau^2 P_1^2}{4P_2^2}$

В таблице 6: $P_1 = \tau^3 + 4,$ $P_2 = \tau^3 - 2,$ $P_3 = \tau^6 - 16\tau^3 - 8,$
 $P_4 = \tau^6 - 7\tau^3 - 8,$ $P_5 = \tau^9 - 48\tau^6 - 32,$ $P_6 = \tau^{12} - 68\tau^9 - 48\tau^6 - 320\tau^3 + 64,$
 $\varepsilon = 2\tau P^2 + 2P^4 + 4\alpha P - 2\dot{P}^2.$

Заключение

Найден и реализован метод вычисления решений уравнений орбиты второго уравнения Пенлеве в полиномах, рациональных функциях.

Приведен пример нахождения решений в полиномах уравнений орбиты 2-го уравнения Пенлеве при $\alpha = 2$.

С помощью операции масштабирования можно найти решения в полиномах уравнений орбиты второго уравнения Пенлеве с произвольными A_1, A_2 аналогично тому, как это делалось для орбиты первого уравнения Пенлеве (см. теоремы 1,2 в [10]).

Список литературы:

- [1] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 464с. [11]
- [2] Polyanin A. D., Zaytsev V. F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. – CRC Press. Boca Raton – London, 2018. – [19]
- [3] Kamke E. Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. – B. G. Teubner, Leipzig, 1977. – 246 p.
- [4] Painleve P. Sur les equations differentielles du second ordre et d'ordre superieur, dont l'integrale generale est uniforme // Acta Math. – 1902. – Vol. 25. – P. 1-86.
- [5] Хакимова З. Н. Дискретная псевдогруппа второго уравнения Пенлеве и решения дифференциальных уравнений через второй трансцендент Пенлеве // Перспективы науки. – Тамбов. – 2021. – № 5 (140). – С. 17-35.
- [6] H.S.M. Coxeter, W.O.J. Moser, Generators and relations for discrete groups. Fourth edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas], 14. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980. ix+169 pp. – [39]
- [7] Яблонский А. И. О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве // Вести Акад. Наук БССР, Серия Физико-технических наук. – 1959. – Т. 3. С. 30-35
- [8] Воробьев А. П. О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве // Дифференциальные уравнения. – 1965. – Т. 1. – С. 79-81
- [9] Демина М. В., Кудряшов Н. А. Специальные полиномы и рациональные решения иерархии второго уравнения Пенлеве // Теоретическая и Математическая Физика. – 2007. – Т. 153, вып. 1. – С. 58-67
- [10] Хакимова З. Н., Зайцев О. В. Дробно-полиномиальные дифференциальные уравнения: дискретные группы и решения через трансцендент 1-го уравнения Пенлеве [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2021. – N 1(4). – С. 61-92. – URL:<https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.1/article.1.4.html>

Polynomial solutions of fractional polynomial differential equations generated by the second Painleve equation

Khakimova Z.N.^{1*}, Timofeeva L.N.^{2*}, Zaytsev O.V.^{3**}

^{1,2}Mozhaisky Military Space Academy, Saint-Petersburg

³BSTU «VOENMEH» named after D.F. Ustinov, Saint-Petersburg

e-mail:

*vka@mil.ru

**zaytsev_oleg1997@mail.ru

Abstract. A discrete pseudogroup of point, Bäcklund and tangent transformations for the 2nd Painlevé equation, closed in classes of ordinary differential equations with polynomial or fractional polynomial right-hand side, is constructed. A 36-vertex graph of this pseudogroup is constructed. The solutions in polynomials of all polynomial and fractional polynomial equations of the orbit of the 2nd Painlevé equation are calculated for some integer values of the parameter of the right-hand side. In addition, a method is indicated for finding solutions of the orbital equations of the 2nd Painlevé equation with arbitrary coefficients on the right-hand side.
Keywords: ordinary differential equation (ODE), discrete group, transformation pseudogroup, second Painlevé equation, Painlevé transcendents.