ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2021
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Стохастические дифференциальные уравнения

Ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Стратоновича

К. А. Рыбаков
Московский авиационный институт
национальный исследовательский университет
e-mail: rkoffice@mail.ru

Аннотация. На основе свойств полиномов Эрмита, ортогональных относительно плотности вероятности нормального распределения, получено представление кратных стохастических интегралов Стратоновича по винеровским процессам в виде ортогональных рядов. Найдено представление кратных стохастических интегралов Стратоновича в виде суммы кратных стохастических интегралов Ито и математического ожидания интеграла Стратоновича, обобщающее известную формулу Ху – Мейера.
Ключевые слова: кратный стохастический интеграл Стратоновича, повторный стохастический интеграл Стратоновича, винеровский процесс, ортогональное разложение, формула Ху – Мейера.

1. Введение

Рассматривается задача представления кратных стохастических интегралов Стратоновича по винеровским процессам в виде ортогональных рядов, а также в виде суммы кратных стохастических интегралов Ито и константы (математического ожидания интеграла Стратоновича). Для ортогональных рядов базис выражается с помощью полиномов Эрмита векторного аргумента с подстановкой случайного вектора, координаты которого независимы и имеют стандартное нормальное распределение, где ортогональность понимается в смысле скалярного произведения в пространстве гильбертовых случайных величин. В основе этого представления лежат результаты, полученные в том числе в статье [1]. В этой статье приведены некоторые фрагменты из [1] в необходимом для изложения новых результатов объеме.

Во многих публикациях, не связанных с вопросами моделирования и аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито для численного решения стохастических дифференциальных уравнений и систем, кратные и повторные стохастические интегралы Ито определяются относительно одного винеровского процесса [2, 3, 8] или одного пуассоновского процесса [3, 4]. Кратные стохастические интегралы Стратоновича, как правило, определяются также относительно одного винеровского или пуассоновского процесса, при этом основные результаты сводятся к представлению интегралов Стратоновича в виде суммы интегралов Ито. Такие разложения называют формулами Ху – Мейера [5]. Они доказаны для кратных стохастических интегралов Стратоновича как относительно винеровского процесса [5–9], так и относительно пуассоновского процесса [10, 11]. Аналогичные результаты получены для кратных стохастических интегралов Скорохода и Огавы [9]. Формула Ху – Мейера рассматривалась для кратных стохастических интегралов Стратоновича относительно процесса Леви [12].

Если обратиться к моделированию и аппроксимации повторных стохастических интегралов для численного решения стохастических дифференциальных уравнений и систем [13–20], то возникает необходимость рассматривать повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича, которые можно трактовать как частный случай кратных. Принципиальным является то, что такие интегралы должны определяться относительно всевозможных комбинаций из набора независимых винеровских процессов, число которых совпадает с кратностью интеграла. Повторный стохастический интеграл относительно одного винеровского процесса — это только один из возможных вариантов, общее число которых быстро растет с увеличением кратности интеграла.

Полученное в этой работе разложение кратных стохастических интегралов Стратоновича относительно всевозможных комбинаций из набора независимых винеровских процессов в сумму кратных стохастических интегралов Ито обобщает известную формулу Ху – Мейера. Оно сравнимо с основным результатом из [16–18], где повторные стохастические интегралы Ито относительно всевозможных комбинаций из набора независимых винеровских процессов представлены в виде суммы повторных стохастических интегралов Стратоновича. Но здесь применяется другая методика доказательства, а в качестве определения кратного стохастического интеграла Стратоновича используется конструкция, введенная в [6] для варианта с одним винеровским процессом. Кроме того, кратные стохастические интегралы Стратоновича представляются в виде суммы ортогональных (некоррелированных) кратных стохастических интегралов Ито, а это позволяет получить простое соотношение для квадрата нормы (второго момента) интеграла Стратоновича, а также его математическое ожидание.

Как и для кратных и повторных стохастических интегралов Ито [1], представление кратных и повторных стохастических интегралов Стратоновича в виде ортогональных рядов обеспечивает простой метод точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации при переходе от ортогонального ряда к его частичной сумме (например, для спектрального представления это сделать сложнее [19–21]). Такой переход возникает при приближенном моделировании кратных и повторных стохастических интегралов Стратоновича при практической реализации численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений и систем, основанных на разложениях Тейлора – Ито и Тейлора – Стратоновича (методы Г.Н. Мильштейна, П. Клоедена и Э. Платена, Д.Ф. Кузнецова) [13–15, 18].

2. Основные определения и обозначения

Пусть $\mathbb{H} = [0, h] \subset \mathbb{R}$, где $h > 0$, $L_2(\mathbb{H}^k)$ — пространство квадратично интегрируемых функций $K(t_1, \ldots, t_k)\colon \mathbb{H}^k \to \mathbb{R}$, т.е.

$$K(t_1, \ldots, t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{\mathbb{H}^k} K^2(\tau_1, \ldots, \tau_k) d\tau_1 \ldots d\tau_k < \infty,$$

в котором норма и скалярное произведение задаются следующим образом [22]:

$$\|K(t_1, \ldots, t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)} = \left\{ \int_{\mathbb{H}^k} K^2(\tau_1, \ldots, \tau_k) d\tau_1 \ldots d\tau_k \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\big(K(t_1, \ldots, t_k), L(t_1, \ldots, t_k)\big)_{L_2(\mathbb{H}^k)} = \int_{\mathbb{H}^k} K(\tau_1, \ldots, \tau_k) L(\tau_1, \ldots, \tau_k) d\tau_1 \ldots d\tau_k.$$

Здесь и далее вместо обычной формы записи $K \in L_2(\mathbb{H}^k)$, $\|K\|_{L_2(\mathbb{H}^k)}$, $\big(K, L\big)_{L_2(\mathbb{H}^k)}$ используется более полная с указанием всех аргументов функции.

Тогда любая функция $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2(\mathbb{H}^k)$ представляется в виде ортогонального ряда:

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} C_{i_1\ldots i_k} q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k),$$

где $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система функций в пространстве $L_2(\mathbb{H})$, или базисная система, а $C_{i_1\ldots i_k}$ — коэффициенты разложения функции $K(t_1,\ldots,t_k)$:

$$\begin{aligned}C_{i_1\ldots i_k}&=\big(q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k),K(t_1,\ldots,t_k)\big)_{L_2(\mathbb{H}^k)}=\\&=\int_{\mathbb{H}^k} q(i_1,\tau_1)\ldots q(i_k,\tau_k)K(\tau_1,\ldots,\tau_k)d\tau_1\ldots d\tau_k.\end{aligned}\tag{1}$$

Будем обозначать через $\mathcal{L}_2$ пространство гильбертовых случайных величин [23]:

$$\xi\in\mathcal{L}_2 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{E}\xi^2<\infty,$$

где E означает математическое ожидание, с нормой и скалярным произведением

$$\|\xi\|_{\mathcal{L}_2}=\{\mathrm{E}\xi^2\}^{\frac{1}{2}},\quad (\xi,\eta)_{\mathcal{L}_2}=\mathrm{E}\xi\eta.$$

Определим множество $J=\{j_1,\ldots,j_k\}$, где $j_1,\ldots,j_k\in\{1,\ldots,s\}$; k,s — заданные натуральные числа. Упорядоченный набор $(j_1\ldots j_k)$ будем обозначать J^* и рассматривать его как мультимножество — множество, которое может содержать одинаковые элементы, $\#(j,J^*)$ — кратность элемента j в мультимножестве J^*. Также будем использовать обозначение $|\cdot|$ для количества разных элементов множеств или всех элементов мультимножеств: $|J|\leqslant k$, $|J^*|=k$. Введем отношение эквивалентности $\sim$ для индексов из множества $\mathrm{I}=\{i_1,\ldots,i_k\}$:

$$i_l\sim i_m \quad\Longleftrightarrow\quad j_l=j_m,\quad l,m=1,\ldots,k,$$

и обозначим через $\mathrm{I}/{\sim}$ множество всех классов эквивалентности I_j:

$$\mathrm{I}=\bigcup_{j\in J}\mathrm{I}_j,\quad \mathrm{I}_{j_l}\cap\mathrm{I}_{j_m}=\varnothing\quad \forall j_l,j_m\in J\colon j_l\neq j_m.$$

При конкретных значениях индексов $i_1,\ldots,i_k$ из классов эквивалентности I_j будем получать множества I_j и мультимножества I_j^*. Зависимость множеств I_j и мультимножеств I_j^* от $i_1,\ldots,i_k$ не указывается для упрощения обозначений. Очевидно, что $|I_j|\leqslant\#(j,J^*)$, $|I_j^*|=\#(j,J^*)$.

Такое же отношение эквивалентности $\sim$ введем для переменных из множества $\mathrm{T} = \{t_1, \ldots, t_k\}$ и обозначим через $\mathrm{T}/\!\sim$ множество всех классов эквивалентности T_j, $j \in J$. Если определить множества $N_j = \{n\colon j_n = j\}$, то $\mathrm{I}_j = \{i_n\colon n \in N_j\}$ и $\mathrm{T}_j = \{t_n\colon n \in N_j\}$, $j \in J$.

Далее будем использовать обозначения

$$\sum_{(\mathrm{I}/\sim)} \quad \text{и} \quad \sum_{(\mathrm{T}/\sim)},$$

которые предполагают суммирование коэффициентов разложения и функций по всем перестановкам индексов и переменных в каждом классе эквивалентности I_j и T_j соответственно, $j \in J$.

Определим функцию $K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k)$ с помощью симметризации:

$$K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k) = \langle K(t_1, \ldots, t_k) \rangle_{J^*} = \frac{1}{M_{J^*}^2} \sum_{(\mathrm{T}/\sim)} K(t_1, \ldots, t_k), \tag{2}$$

где величина $M_{J^*}^2$ равна числу слагаемых в правой части выражения (2):

$$M_{J^*}^2 = \prod_{j \in J} (\#(j, J^*))!. \tag{3}$$

Функция $K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k)$ представляется в виде ортогонального ряда:

$$K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1 \ldots i_k} q(i_1, t_1) \ldots q(i_k, t_k),$$

где коэффициенты разложения $\tilde{C}_{i_1 \ldots i_k}$ выражаются через коэффициенты разложения $C_{i_1 \ldots i_k}$ (зависимость $\tilde{C}_{i_1 \ldots i_k}$ от J^* для упрощения обозначений не указана) [1]:

$$\tilde{C}_{i_1 \ldots i_k} = \frac{1}{M_{J^*}^2} \sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1 \ldots i_k}. \tag{4}$$

Функции вида (2) образуют линейное подпространство в $L_2(\mathbb{H}^k)$, которое будем обозначать $L_2^{(j_1 \ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$, оператор $\langle \cdot \rangle_{J^*}\colon L_2(\mathbb{H}^k) \to L_2^{(j_1 \ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ является линейным ограниченным оператором, его норма равна единице. Если значения $j_1, \ldots, j_k$ попарно различны, т.е. $|J| = k$, то $\langle \cdot \rangle_{J^*}$ — это тождественный оператор.

3. Кратные стохастические интегралы Ито по винеровским процессам

Определим линейный оператор $\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}\colon L_2(\mathbb{H}^k) \to \mathcal{L}_2$, ставящий в соответствие функции $K(t_1,\ldots,t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k)$ кратный стохастический интеграл Ито по винеровским процессам (кратности k):

$$\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} K(t_1,\ldots,t_k) = \int_{\mathbb{H}^k} K(\tau_1,\ldots,\tau_k)dW_{j_1}(\tau_1)\ldots dW_{j_k}(\tau_k), \tag{5}$$

где $j_1,\ldots,j_k = 1,\ldots,s$; $W_1(t)$, ..., $W_s(t)$ — независимые стандартные винеровские процессы.

Пусть $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ — это разбиение отрезка $\mathbb{H}$:

$$\mathbb{H} = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i, \quad \Delta_{i'} \cap \Delta_{i''} = \varnothing \quad \forall i', i'' \in \{1,\ldots,n\}\colon i' \neq i'',$$

где Δ_i — борелевские множества. Кроме того, $\chi_\Omega(t_1,\ldots,t_k)$ — характеристическая функция множества $\Omega \subset \mathbb{H}^k$:

$$\chi_\Omega(t_1,\ldots,t_k) = \begin{cases} 1, & (t_1,\ldots,t_k) \in \Omega, \\ 0, & (t_1,\ldots,t_k) \notin \Omega. \end{cases}$$

Введем обозначение $\bar{S}(\mathbb{H}^k)$ для множества элементарных функций:

$$K(t_1,\ldots,t_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n a_{i_1\ldots i_k}\chi_{\Delta_{i_1}\times\ldots\times\Delta_{i_k}}(t_1,\ldots,t_k), \quad a_{i_1\ldots i_k} \in \mathbb{R},$$

и обозначение $S(\mathbb{H}^k) \subset \bar{S}(\mathbb{H}^k)$ для множества специальных элементарных функций [2]:

$$K(t_1,\ldots,t_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n a_{i_1\ldots i_k}\chi_{\Delta_{i_1}\times\ldots\times\Delta_{i_k}}(t_1,\ldots,t_k),$$

где $a_{i_1\ldots i_k} = 0$, если среди значений $i_1,\ldots,i_k$ найдется два совпадающих: $i_l = i_m$ для $l, m \in \{1,\ldots,k\}$, $l \neq m$.

Кратный стохастический интеграл Ито от функции $K(t_1,\ldots,t_k) \in S(\mathbb{H}^k)$ определяется следующим образом [2, 7, 12, 18]:

$$\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} K(t_1,\ldots,t_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n a_{i_1\ldots i_k} W_{j_1}(\Delta_{i_1})\ldots W_{j_k}(\Delta_{i_k}), \tag{6}$$

где

$$W_j(\Delta_i) = \int_0^h \chi_{\Delta_i}(\tau) dW_j(\tau), \quad \chi_{\Delta_i}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_i, \\ 0, & t \notin \Delta_i, \end{cases}$$

а для произвольной функции $K(t_1, \ldots, t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k)$

$$\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} K(t_1, \ldots, t_k) = \underset{m \to \infty}{\text{l.i.m.}} \mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} K_m(t_1, \ldots, t_k),$$

где последовательность функций $K_m(t_1, \ldots, t_k) \in S(\mathbb{H}^k)$ сходится к функции $K(t_1, \ldots, t_k)$ по норме пространства $L_2(\mathbb{H}^k)$.

Утверждение 1. *Пусть* $K(t_1, \ldots, t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k)$, *а* $K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k) = \langle K(t_1, \ldots, t_k) \rangle_{J^*} \in L_2^{(j_1 \ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ *— соответствующая симметризованная функция* (2). *Тогда кратные стохастические интегралы Ито по винеровским процессам от функций* $K(t_1, \ldots, t_k)$ *и* $K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k)$ *совпадают*:

$$\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} K(t_1, \ldots, t_k) = \mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k). \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть* $K(t_1, \ldots, t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k)$. *Тогда*

1) *кратный стохастический интеграл Ито по винеровским процессам от функции* $K(t_1, \ldots, t_k)$ *представляется в виде*

$$\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} K(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{\infty} C_{i_1 \ldots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}, \tag{8}$$

где $C_{i_1 \ldots i_k}$ *— коэффициенты разложения* (1) *функции* $K(t_1, \ldots, t_k)$ *относительно базисной системы* $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ *пространства* $L_2(\mathbb{H})$, $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ *— независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение,* $i_l = 0, 1, 2, \ldots$ *и* $l = 1, 2, \ldots, k$;

2) *норма кратного стохастического интеграла Ито удовлетворяет соотношению*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} K(t_1, \ldots, t_k)\|_{\mathcal{L}_2} = M_{J^*} \|\langle K(t_1, \ldots, t_k) \rangle_{J^*}\|_{L_2(\mathbb{H}^k)} \leqslant \\ \leqslant M_{J^*} \|K(t_1, \ldots, t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)}, \end{aligned} \tag{9}$$

где величина M_{J^*} *определяется формулой* (3).

Доказательства утверждения 1 и теоремы 1 приведено в [1].

Замечания 1.

1. В формуле (8) и далее знак $*$ обозначает произведение Вика [25] для двух случайных величин $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{L}_2$:

$$\xi_1 = \prod_{m=1}^{M} H_{i_m}(\zeta_m), \quad \xi_2 = \prod_{m=1}^{M} H_{j_m}(\zeta_m),$$

а именно

$$\xi_1 * \xi_2 = \prod_{m=1}^{M} H_{i_m+j_m}(\zeta_m),$$

где $M \geqslant 1$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_M$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_m, j_m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

В приведенных формулах $\{H_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ — полиномы Эрмита [24], ортогональные в пространстве $L_2(\mathbb{R}; \rho(x))$ с весом $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$:

$$\begin{aligned} H_i(x) = i! \sum_{\nu=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \frac{(-1)^{\nu} x^{i-2\nu}}{\nu!(i-2\nu)!2^{\nu}} = \\ = x^i - a_{i-2}^{(i)} x^{i-2} + a_{i-4}^{(i)} x^{i-4} - \ldots + (-1)^{\lfloor i/2 \rfloor} a_{i-2\lfloor i/2 \rfloor}^{(i)} x^{i-2\lfloor i/2 \rfloor}, \end{aligned} \tag{10}$$

где $a_{i-2}^{(i)}, a_{i-4}^{(i)}, \ldots, a_{i-2\lfloor i/2 \rfloor}^{(i)} > 0$, $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть числа.

2. Множества случайных величин

$$\mathfrak{Z}^{J^*} = \mathfrak{Z}^{(j_1 \cdots j_k)} = \{\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\}_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{\infty} \tag{11}$$

и

$$\hat{\mathfrak{Z}}^{J^*} = \hat{\mathfrak{Z}}^{(j_1 \cdots j_k)} = \left\{ \frac{\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}} \right\}_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{\infty} \tag{12}$$

образуют соответственно ортогональный и ортонормированный базисы линейного подпространства $\mathcal{L}_2^{(j_1 \cdots j_k)} = \{\mathcal{I}_h^{(j_1 \cdots j_k)} K(t_1, \ldots, t_k) \colon K(t_1, \ldots, t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k)\} \subset \mathcal{L}_2$, а линейный оператор $\mathcal{I}_h^{(j_1 \cdots j_k)}$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между линейными подпространствами $L_2^{(j_1 \cdots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ и $\mathcal{L}_2^{(j_1 \cdots j_k)}$. Важно отметить, что это множества различных элементов, т.е. все совпадающие элементы, которые отвечают разным значениям индексов $i_1, \ldots, i_k$, неразличимы.

3. Для линейного подпространства $L_2^{(j_1 \cdots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ можно определить норму

$$\|K(t_1, \ldots, t_k)\|_{L_2^{(j_1 \cdots j_k)}(\mathbb{H}^k)} = \|\langle K(t_1, \ldots, t_k) \rangle_{J^*}\|_{L_2(\mathbb{H}^k)}$$

и рассматривать его как множество классов эквивалентности:

$$K(t_1,\ldots,t_k)\sim L(t_1,\ldots,t_k) \iff \langle K(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*}=\langle L(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*}. \quad (13)$$

Все аксиомы нормы для $\|\cdot\|_{L_2^{(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)}$ выполнены. Действительно, если $\mathbb{X}$ — линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$, а $\mathcal{A}\colon \mathbb{X}\to\mathbb{Y}\subset\mathbb{X}$ — линейный оператор, где $\mathbb{Y}=\{y=\mathcal{A}x, x\in\mathbb{X}\}$, то норму в линейном подпространстве $\mathbb{Y}$ можно определить в виде $\|y\|_{\mathbb{Y}}=\|\mathcal{A}x\|_{\mathbb{X}}$.

Тогда для класса функций $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2(\mathbb{H}^k)^{(j_1\ldots j_k)}$ справедливо разложение (8), в правой части которого $C_{i_1\ldots i_k}$ — коэффициенты разложения (1) любой функции $K(t_1,\ldots,t_k)$ из этого класса (элемента пространства $L_2(\mathbb{H}^k)$).

Кроме того, $L_2^{(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ естественно принять за область определения линейного оператора $\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}$. Следовательно, линейный оператор $\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между линейными пространствами $L_2^{(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ и $\mathcal{L}_2^{(j_1\ldots j_k)}$.

Если для линейного пространства $L_2^{(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ определить норму следующим образом:

$$\|K(t_1,\ldots,t_k)\|_{L_2^{(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)}=M_{J^*}\|\langle K(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*}\|_{L_2(\mathbb{H}^k)},$$

то вместо формулы (9) получим

$$\|\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)\|_{\mathcal{L}_2}=\|\langle K(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*}\|_{L_2(\mathbb{H}^k)}.$$

4. Кратные стохастические интегралы Стратоновича по винеровским процессам

Используя обозначения, введенные в предыдущем разделе, и ограничиваясь разбиением $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ отрезка $\mathbb{H}$, при котором $\Delta_i=(\theta_{i-1},\theta_i]$, где $\theta_0=0$ и $\theta_n=h$, определим линейный оператор $\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}\colon L_2(\mathbb{H}^k)\to\mathcal{L}_2$, ставящий в соответствие функции $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2(\mathbb{H}^k)$ кратный стохастический интеграл Стратоновича по винеровским процессам (кратности k):

$$\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)=\int_{\mathbb{H}^k}K(\tau_1,\ldots,\tau_k)\circ dW_{j_1}(\tau_1)\circ\ldots\circ dW_{j_k}(\tau_k). \quad (14)$$

Кратным стохастическим интегралом Стратоновича от элементарной функции $K(t_1,\ldots,t_k)\in\bar{S}(\mathbb{H}^k)$ назовем случайную величину

$$\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}a_{i_1\ldots i_k}W_{j_1}(\Delta_{i_1})\ldots W_{j_k}(\Delta_{i_k}). \quad (15)$$

Для измеримой функции $K(t_1,\ldots,t_k)$ определим кратный стохастический интеграл Стратоновича относительно разбиения $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ как интеграл (15) от функции $\bar K_{\{\Delta_i\}_{i=1}^n}(t_1,\ldots,t_k)\in\bar S(\mathbb{H}^k)$, полученной из $K(t_1,\ldots,t_k)$ с помощью усреднения [6, 7, 9]:

$$\bar K_{\{\Delta_i\}_{i=1}^n}(t_1,\ldots,t_k)=\frac{1}{\operatorname{mes}\Delta}\int_\Delta K(\tau_1,\ldots,\tau_k)d\tau_1\ldots d\tau_k,$$
$$(t_1,\ldots,t_k)\in\Delta=\Delta_{i_1}\times\ldots\times\Delta_{i_k},$$

где $\operatorname{mes}\Delta$ — мера Лебега множества $\Delta\subset\mathbb{H}^k$. Будем обозначать такой интеграл $\mathcal{I}^{*(j_1\ldots j_k)}_{\{\Delta_i\}_{i=1}^n}K(t_1,\ldots,t_k)$.

Кратным стохастическим интегралом Стратоновича от функции $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2(\mathbb{H}^k)$ назовем среднеквадратический предел последовательности случайных величин $\mathcal{I}^{*(j_1\ldots j_k)}_{\{\Delta_i\}_{i=1}^n}K(t_1,\ldots,t_k)$ при условии $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\operatorname{mes}\Delta_i\to 0$ $(n\to\infty)$, если этот предел существует и не зависит от выбора возрастающей последовательности разбиений $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ отрезка $\mathbb{H}$:

$$\mathcal{I}^{*(j_1\ldots j_k)}_h K(t_1,\ldots,t_k)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\mathcal{I}^{*(j_1\ldots j_k)}_{\{\Delta_i\}_{i=1}^n}K(t_1,\ldots,t_k).$$

При $k=1$ стохастические интегралы Ито и Стратоновича совпадают. А при $k>1$ в отличие от кратного стохастического интеграла Ито для интеграла Стратоновича справедливо мультипликативное свойство [12]:

$$\mathcal{I}^{*(j_1\ldots j_k)}_h K(t_1,\ldots,t_k)=\mathcal{I}^{*(j_1)}_h K_1(t_1)\ldots\mathcal{I}^{*(j_k)}_h K_k(t_k)=$$
$$=\mathcal{I}^{(j_1)}_h K_1(t_1)\ldots\mathcal{I}^{(j_k)}_h K_k(t_k),$$

если $K(t_1,\ldots,t_k)=K_1(t_1)\ldots K_k(t_k)$, но при этом кратный стохастический интеграл Стратоновича определен не для всех функций $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2(\mathbb{H}^k)$.

Утверждение 2. *Пусть* $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2(\mathbb{H}^k)$ *— функция, для которой существует кратный интеграл Стратоновича, а* $K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k)=\langle K(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*}\in L_2^{(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ *— соответствующая симметризованная функция* (2)*. Тогда кратные стохастические интегралы Стратоновича по винеровским процессам от функций* $K(t_1,\ldots,t_k)$ *и* $K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k)$ *совпадают*:

$$\mathcal{I}^{*(j_1\ldots j_k)}_h K(t_1,\ldots,t_k)=\mathcal{I}^{*(j_1\ldots j_k)}_h K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k).\qquad(16)$$

Доказательство. Согласно определению (15) кратного стохастического интеграла Стратоновича

$$\mathcal{I}^{*(j_1\ldots j_k)}_h\chi_{\Delta_{i_1}\times\ldots\times\Delta_{i_k}}(t_1,\ldots,t_k)=W_{j_1}(\Delta_{i_1})\ldots W_{j_k}(\Delta_{i_k}),$$

причем любая перестановка переменных в классах эквивалентности T_j, $j \in J$, для характеристической функции $\chi_{\Delta_{i_1}\times\ldots\times\Delta_{i_k}}(t_1,\ldots,t_k)$ в левой части приведенного выражения не меняет его правую часть, так как при $t_l, t_m \in T_j$ для $l \neq m$ и некоторого $j \in J$ имеем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_l\ldots j_m\ldots j_k)}\chi_{\Delta_{i_1}\times\ldots\times\Delta_{i_l}\times\ldots\times\Delta_{i_m}\times\ldots\times\Delta_{i_k}}(t_1,\ldots,t_l,\ldots,t_m,\ldots,t_k) = \\
&\quad = W_{j_1}(\Delta_{i_1})\ldots W_{j_l}(\Delta_{i_l})\ldots W_{j_m}(\Delta_{i_m})\ldots W_{j_k}(\Delta_{i_k}) = \\
&\quad = W_{j_1}(\Delta_{i_1})\ldots W_{j_l}(\Delta_{i_m})\ldots W_{j_m}(\Delta_{i_l})\ldots W_{j_k}(\Delta_{i_k}) = \\
&\quad = \mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_l\ldots j_m\ldots j_k)}\chi_{\Delta_{i_1}\times\ldots\times\Delta_{i_l}\times\ldots\times\Delta_{i_m}\times\ldots\times\Delta_{i_k}}(t_1,\ldots,t_m,\ldots,t_l,\ldots,t_k).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}\langle\chi_{\Delta_{i_1}\times\ldots\times\Delta_{i_k}}(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*} = W_{j_1}(\Delta_{i_1})\ldots W_{j_k}(\Delta_{i_k}),$$

тогда по свойству линейности кратного стохастического интеграла Стратоновича получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}\langle K(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*} &= \frac{1}{M_{J^*}^2}\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}\sum_{(\mathrm{T}/\sim)} K(t_1,\ldots,t_k) = \\
&= \mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k) \quad \forall K(t_1,\ldots,t_k) \in \bar{S}(\mathbb{H}^k),
\end{aligned}$$

поскольку суммирование ведется только по перестановкам переменных в классах эквивалентности T_j, $j \in J$, а величина $M_{J^*}^2$ равна числу слагаемых.

Следовательно, для кратного стохастического интеграла Стратоновича от функции $K(t_1,\ldots,t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k)$ относительно разбиения $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ отрезка $\mathbb{H}$ справедливо условие

$$\mathcal{I}_{\{\Delta_i\}_{i=1}^n}^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k) = \mathcal{I}_{\{\Delta_i\}_{i=1}^n}^{*(j_1\ldots j_k)}\langle K(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*},$$

т.е. последовательности случайных величин

$$\mathcal{I}_{\{\Delta_i\}_{i=1}^n}^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k) \quad \text{и} \quad \mathcal{I}_{\{\Delta_i\}_{i=1}^n}^{*(j_1\ldots j_k)}\langle K(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*}$$

совпадают ($n \to \infty$). Отсюда получаем равенство (16). ◄

Далее введем новые обозначения. Пусть $\mathrm{I}_j^{\langle\nu_j\rangle}$ — это множество всех подмножеств I_j, представленных ν_j неупорядоченными парами индексов из I_j, $\nu_j \in \{0,\ldots,\lfloor\#(j,J^*)/2\rfloor\}$, $j \in J = \{j_{(1)},\ldots,j_{(|J|)}\}$, и

$$(\mathrm{I}/\sim)^{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle} = \mathrm{I}_{j_{(1)}}^{\langle\nu_{(1)}\rangle}\times\ldots\times\mathrm{I}_{j_{(|J|)}}^{\langle\nu_{(|J|)}\rangle}.$$

Каждый элемент ϱ множества $(\mathrm{I}/\sim)^{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}$ — это набор пар индексов из множества I, а $\bar{\varrho}$ — множество индексов, образующих эти пары:

$$\varrho=\{(i_{l_1},i_{m_1}),\ldots,(i_{l_\gamma},i_{m_\gamma})\},\quad \bar{\varrho}=\{i_{l_1},i_{m_1},\ldots,i_{l_\gamma},i_{m_\gamma}\},\qquad (17)$$
$$l_1,m_1,\ldots,l_\gamma,m_\gamma\in\{1,\ldots,k\},\quad \gamma=\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)},$$

где количество элементов $r_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}=\left|(\mathrm{I}/\sim)^{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}\right|$ этого множества зависит от $\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}$ и выражается через коэффициенты полиномов Эрмита (10):

$$r_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}=\prod_{j\in J}a^{(i)}_{i-2\nu_j}\Big|_{i=\#(j,J^*)},\quad a^{(i)}_{i-2\nu}=\frac{i!}{\nu!(i-2\nu)!2^\nu},$$

так как для количества элементов множества $\mathrm{I}_j^{\langle\nu_j\rangle}$ можно записать

$$|\mathrm{I}_j^{\langle\nu_j\rangle}|=\frac{1}{\nu_j!}\,\frac{i!}{2!(i-2)!}\,\frac{(i-2)!}{2!(i-4)!}\,\ldots\,\frac{(i-2(\nu_j-1))!}{2!(i-2\nu_j)!}\Big|_{i=\#(j,J^*)}=$$
$$=\frac{i!}{\nu_j!(i-2\nu_j)!2^{\nu_j}}=a^{(i)}_{i-2\nu_j}\Big|_{i=\#(j,J^*)}.$$

Будем обозначать $\mathrm{I}\backslash\bar{\varrho}$ множество индексов из I, которые не попали ни в одну пару из ϱ. Аналогичным образом определим множества $\mathrm{T}_j^{\langle\nu_j\rangle}$, $(\mathrm{T}/\sim)^{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}$ и $\mathrm{T}\backslash\bar{\varpi}$. Они отличаются от множеств $\mathrm{I}_j^{\langle\nu_j\rangle}$, $(\mathrm{I}/\sim)^{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}$ и $\mathrm{I}\backslash\bar{\varrho}$ только тем, что образованы парами ϖ переменных из T_j, $j\in J$, т.е. обозначениями:

$$\varpi=\{(t_{l_1},t_{m_1}),\ldots,(t_{l_\gamma},t_{m_\gamma})\},\quad \bar{\varpi}=\{t_{l_1},t_{m_1},\ldots,t_{l_\gamma},t_{m_\gamma}\},\qquad (18)$$
$$l_1,m_1,\ldots,l_\gamma,m_\gamma\in\{1,\ldots,k\},\quad \gamma=\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)},$$

Определим линейное подпространство $L_2^{*(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)\subset L_2(\mathbb{H}^k)$, образованное функциями $K(t_1,\ldots,t_k)$, коэффициенты разложения $C_{i_1\ldots i_k}$ которых удовлетворяют условию

$$\sum_{\mathrm{I}\backslash\bar{\varrho}}\Bigg(\sum_{i_{l_1},\ldots,i_{l_\gamma}=0}^{\infty}C_{i_1\ldots i_k}\Big|_{i_{l_1}=i_{m_1},\ldots,i_{l_\gamma}=i_{m_\gamma}}\Bigg)^2<\infty\qquad (19)$$
$$\forall\varrho\in(\mathrm{I}/\sim)^{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle},\quad \nu_j=0,\ldots,\lfloor\#(j,J^*)/2\rfloor\quad\forall j\in J.$$

При фиксированных значениях $\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}$ число индексов в множестве $\mathrm{I}\backslash\bar{\varrho}$ равно $n=k-2\gamma$. Если $n=0$, то в результате такой свертки коэффициентов разложения получается константа. Если $n>0$, то с их помощью нумеруются коэффициенты разложения функции из пространства $L_2(\mathbb{H}^n)$, а именно интегрального следа

$$\operatorname{tr}_{\varpi} K(t_1, \ldots, t_k) = \int_{\mathbb{H}^\gamma} K(t_1, \ldots, t_k)\Big|_{t'=t''} dt', \tag{20}$$

где $t' = [\, t_{l_1} \ \ldots \ t_{l_\gamma} \,]^{\text{т}}$, $t'' = [\, t_{m_1} \ \ldots \ t_{m_\gamma} \,]^{\text{т}}$, причем интеграл по множеству нулевой меры в $\mathbb{H}^k$ следует понимать как

$$\int_{\mathbb{H}^\gamma} K(t_1, \ldots, t_k)\Big|_{t'=t''} dt' = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{S_\gamma \varepsilon^\gamma} \int_{(t',t'') \in \mathbb{H}^{2\gamma} :\, |t'-t''| < \varepsilon} K(t_1, \ldots, t_k) dt' dt'',$$

где S_γ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^\gamma$ [26]. Интегральный след $\operatorname{tr}_{\varpi} K(t_1, \ldots, t_k)$ — это функция n переменных из множества T за исключением тех, которые являются координатами векторов t' и t'', т.е. переменные из множества $\mathrm{T} \backslash \bar{\varpi}$. Отметим, что

$$q(i_1, t_1) \ldots q(i_k, t_k) \in L_2^{*(j_1 \ldots j_k)}(\mathbb{H}^k), \quad i_1, \ldots, i_k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\{q(i,t)\}_{i=0}^\infty$ — полная ортонормированная система функций в пространстве $L_2(\mathbb{H})$.

Эти условия требуются для того, чтобы сформулировать и доказать основной результат. Однако, опираясь на утверждение 2, достаточно ограничиться симметризованными функциями, что позволяет записать приведенные выше условия более кратко.

Пусть функции $K(t_1, \ldots, t_k)$ соответствует симметризованная функция $K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k)$ и $\tilde{C}_{i_1 \ldots i_k}$ — коэффициенты разложения этой симметризованной функции (см. формулы (2) и (4)), удовлетворяющие условию, аналогичному (19), при всех допустимых значениях $\nu_{(1)}, \ldots, \nu_{(|J|)}$, но только для одного элемента $\varrho \in (\mathrm{I}/{\sim})^{\langle \nu_{(1)}, \ldots, \nu_{(|J|)} \rangle}$, который можно выбрать произвольно:

$$\sum_{\mathrm{I} \backslash \bar{\varrho}} \Bigg(\sum_{i_{l_1}, \ldots, i_{l_\gamma} = 0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1 \ldots i_k}\Big|_{i_{l_1} = i_{m_1}, \ldots, i_{l_\gamma} = i_{m_\gamma}} \Bigg)^2 < \infty, \tag{21}$$
$$\varrho \in (\mathrm{I}/{\sim})^{\langle \nu_{(1)}, \ldots, \nu_{(|J|)} \rangle}, \quad \nu_j = 0, \ldots, \lfloor \#(j, J^*)/2 \rfloor \quad \forall j \in J.$$

Соответствующий интегральный след обозначим

$$K_{\langle \nu_{(1)}, \ldots, \nu_{(|J|)} \rangle}(t_1, \ldots, t_{k-2\gamma}),$$

где величина γ зависит от значений $\nu_{(1)}, \ldots, \nu_{(|J|)}$ и определяется после формул (17) и (18). Индексы у аргументов функции $K_{\langle \nu_{(1)}, \ldots, \nu_{(|J|)} \rangle}(\,\cdot\,)$ могут быть выбраны иным способом, если это требуется (формально — это переменные из множества $\mathrm{T}\backslash\bar{\varpi}$).

Для таких интегральных следов определены кратные стохастические интегралы Ито

$$\mathcal{I}_h^{J^*_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}} K_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})}), \tag{22}$$

где $J^*_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}$ — мультимножество, полученное из J^* после исключения элементов $j_{l_1}, j_{m_1},\ldots, j_{l_\gamma}, j_{m_\gamma}$, соответствующих множеству переменных $\bar{\varpi}$.

Определим норму для функции $K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k)$:

$$\|K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k)\| = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor\#(j_{(1)},J^*)/2\rfloor}\ldots\sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor\#(j_{(|J|)},J^*)/2\rfloor} r_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}\times$$
$$\times\left\|K_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})})\right\|_{L_2(\mathbb{H}^{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})})}, \tag{23}$$

полагая

$$\mathcal{I}_h^{\varnothing}K_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle} = K_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle} = \mathrm{const},$$
$$\|K_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}\|_{L_2(\mathbb{H}^0)} = |K_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}|$$

в формулах (22) и (23) при $k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})=0$.

Далее будем использовать обозначение $L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ для линейного пространства, которое определяется как пополнение множества симметризованных функций $K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k)\in L_2^{*(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ по норме (23). Нетрудно видеть, что если $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2^{*(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$, то $K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k)\in L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$. Если значения $j_1,\ldots,j_k$ попарно различны, т.е. $|J|=k$, то $L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ совпадает с $L_2^{(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$.

Теорема 2. *Пусть $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$. Тогда*

1) *кратный стохастический интеграл Стратоновича по винеровским процессам от функции $K(t_1,\ldots,t_k)$ представляется в виде*

$$\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty}\tilde{C}_{i_1\ldots i_k}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\ldots\zeta_{i_k}^{(j_k)}, \tag{24}$$

где $\tilde{C}_{i_1\ldots i_k}$ — коэффициенты разложения (1) *функции $K(t_1,\ldots,t_k)$ относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{H})$, $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_l=0,1,2,\ldots$ и $l=1,2,\ldots,k$;*

2) *справедливо разложение*

$$\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor\#(j_{(1)},J^*)/2\rfloor}\ldots\sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor\#(j_{(|J|)},J^*)/2\rfloor}r_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}\times$$
$$\times\,\mathcal{I}_h^{J^*_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}}K_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})})\qquad(25)$$

и

$$\|\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)\|^2_{\mathcal{L}_2}=\sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor\#(j_{(1)},J^*)/2\rfloor}\ldots\sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor\#(j_{(|J|)},J^*)/2\rfloor}r^2_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}\times$$
$$\times\,\|\mathcal{I}_h^{J^*_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}}K_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})})\|^2_{\mathcal{L}_2}.\qquad(26)$$

Доказательство. Для кратного стохастического интеграла Стратоновича выполняется мультипликативное свойство [12]:

$$\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k)=\mathcal{I}_h^{*(j_1)}q(i_1,t_1)\ldots\mathcal{I}_h^{*(j_k)}q(i_k,t_k)=$$
$$=\mathcal{I}_h^{(j_1)}q(i_1,t_1)\ldots\mathcal{I}_h^{(j_k)}q(i_k,t_k)=\zeta_{i_1}^{(j_1)}\ldots\zeta_{i_k}^{(j_k)}.\quad(27)$$

Случайная величина $\zeta_{i_1}^{(j_1)}\ldots\zeta_{i_k}^{(j_k)}\in\mathcal{L}_2$ образована произведениями натуральных степеней независимых случайных величин:

$$\zeta_{i_1}^{(j_1)}\ldots\zeta_{i_k}^{(j_k)}=\prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j}(\zeta_i^{(j)})^{\#(i,I_j^*)},\qquad(28)$$

а множество

$$\mathfrak{X}^{*J^*}=\mathfrak{X}^{*(j_1\ldots j_k)}=\{\zeta_{i_1}^{(j_1)}\ldots\zeta_{i_k}^{(j_k)}\}_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty}$$

состоит из линейно независимых случайных величин (совпадающие элементы, отвечающие разным значениям индексов $i_1,\ldots,i_k$, считаются неразличимыми).

Если значения $j_1,\ldots,j_k$ попарно различны, т.е. $|J|=k$, то множество $\mathfrak{X}^{*J^*}$ совпадает с ортогональным базисом $\mathfrak{Z}^{J^*}$ и ортонормированным базисом $\hat{\mathfrak{Z}}^{J^*}$ (см. формулы (11) и (12)). Кратные стохастические интегралы Ито и Стратоновича в этом случае равны:

$$\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)=\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k),$$

а разложения (8) и (24) идентичны.

Если среди значений $j_1,\ldots,j_k$ есть совпадающие, то только часть элементов множества $\mathfrak{X}^{*J^*}$ принадлежит $\mathfrak{Z}^{J^*}$. Остальная часть может быть ортогонализована — это множество элементов $\zeta_{i_1}^{(j_1)}\ldots\zeta_{i_k}^{(j_k)}$, для которых есть хотя бы одно совпадение значений индексов в одном из мультимножеств I_j^*, $j\in J$.

Пусть

$$K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1}\tilde{C}_{i_1\ldots i_k}q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k),$$

тогда, используя выражение (27), для любого натурального L имеем

$$\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)=\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1}\tilde{C}_{i_1\ldots i_k}q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k)=$$

$$=\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1}\tilde{C}_{i_1\ldots i_k}\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k)=\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1}\tilde{C}_{i_1\ldots i_k}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\ldots\zeta_{i_k}^{(j_k)}. \quad (29)$$

Любой полином $P(x)$, $x\in\mathbb{R}$, можно разложить по полиномам Эрмита $\{H_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ и максимальная степень полинома Эрмита в разложении совпадает со степенью полинома $P(x)$. В частности,

$$\begin{aligned}x^i&=i!\sum_{\nu=0}^{\lfloor i/2\rfloor}\frac{H_{i-2\nu}(x)}{\nu!(i-2\nu)!2^{\nu}}=\\&=H_i(x)+a_{i-2}^{(i)}H_{i-2}(x)+a_{i-4}^{(i)}H_{i-4}(x)+\ldots+a_{i-2\lfloor i/2\rfloor}^{(i)}H_{i-2\lfloor i/2\rfloor}(x),\end{aligned} \quad (30)$$

например,

$$\begin{aligned}&x^0=H_0(x), && x^1=H_1(x),\\&x^2=H_2(x)+H_0(x), && x^3=H_3(x)+3H_1(x),\\&x^4=H_4(x)+6H_2(x)+3H_0(x), && x^5=H_5(x)+10H_3(x)+15H_1(x),\quad\ldots,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}&H_0(x)=1, && H_1(x)=x,\\&H_2(x)=x^2-1, && H_3(x)=x^3-3x,\\&H_4(x)=x^4-6x^2+3, && H_5(x)=x^5-10x^3+15x,\quad\ldots\end{aligned}$$

Таким образом, ортогонализация неортогональной части множества случайных величин $\mathfrak{X}^{*J^*}$ сводится к разложению мономов

$$\prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j}(x_i^{(j)})^{\#(i,I_j^*)}$$

по полиномам Эрмита векторного аргумента x с размерностями $\dim x=k,k-2,k-4,\ldots,k-2\lfloor k/2\rfloor$ на основе формулы (30). Степень этих полиномов совпадает с $\dim x$. Для элементов $\zeta_{i_1}^{(j_1)}\ldots\zeta_{i_k}^{(j_k)}$ это означает разложение по ортогональным случайным величинам, включающим $\zeta_{i_1}^{(j_1)}*\ldots*\zeta_{i_k}^{(j_k)}$.

Множество ортогональных случайных величин $\mathfrak{Z}^{*J^*}$ для представления кратного стохастического интеграла Стратоновича $\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)$ включает ортогональный базис $\mathfrak{Z}^{J^*}$ и ортогональные базисы для представления кратных стохастических интегралов Ито, кратность которых меньше k: $k-2, k-4, \ldots, k-2\lfloor k/2\rfloor > 0$. Все коэффициенты разложения кратного стохастического интеграла Стратоновича по этому базису выражаются через коэффициенты разложения $\tilde{C}_{i_1\ldots i_k}$ функции $K(t_1,\ldots,t_k)$. Если его математическое ожидание отлично от нуля, то множество $\mathfrak{Z}^{*J^*}$ включает единицу, а соответствующим коэффициентом разложения кратного стохастического интеграла Стратоновича будет это математическое ожидание. Следовательно, множество $\mathfrak{Z}^{*J^*}$ можно определить в виде

$$\mathfrak{Z}^{*J^*} = \mathfrak{Z}^{*(j_1\ldots j_k)} = \bigcup_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)},J^*)/2\rfloor} \ldots \bigcup_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor \#(j_{(|J|)},J^*)/2\rfloor} \mathfrak{Z}^{J^*_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}}, \tag{31}$$

полагая $\mathfrak{Z}^{\varnothing} = \{1\}$.

Коэффициенты разложения кратного стохастического интеграла Стратоновича $\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)$ относительно множества ортогональных случайных величин $\mathfrak{Z}^{J^*_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}}$ образовано свертками коэффициентов разложения $\tilde{C}_{i_1\ldots i_k}$:

$$\sum_{i_{l_1},\ldots,i_{l_\gamma}=0}^{L-1} \tilde{C}_{i_1\ldots i_k}\Big|_{i_{l_1}=i_{m_1},\ldots,i_{l_\gamma}=i_{m_\gamma}},$$

каждая из которых связана с некоторым элементом $\varrho \in (\mathrm{I}/\sim)^{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}$ согласно (17), а их общее число равно $r_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}$ для каждого набора значений $\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}$. Такой свертке соответствует интегральный след $\operatorname{tr}_{\varpi} K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)$, задаваемый формулой (20).

Коэффициенты разложения $\tilde{C}_{i_1\ldots i_k}$ не меняются при перестановке индексов в каждом классе эквивалентности I_j, а функция $K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)$ не меняется при перестановке переменных в каждом классе эквивалентности T_j. Поэтому достаточно произвольно выбрать один элемент $\varrho \in (\mathrm{I}/\sim)^{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}$ и записать коэффициенты разложения

$$r_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle} \sum_{i_{l_1},\ldots,i_{l_\gamma}=0}^{L-1} \tilde{C}_{i_1\ldots i_k}\Big|_{i_{l_1}=i_{m_1},\ldots,i_{l_\gamma}=i_{m_\gamma}}$$

кратного стохастического интеграла Стратоновича $\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)$, соответствующие интегральному следу

$$r_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle} K^{(L)}_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})}).$$

В результате кратный стохастический интеграл Стратоновича представляется в виде суммы кратных стохастических интегралов Ито и своего математического ожидания. При этом кратные стохастические интегралы Ито соответствуют базисным системам из правой части формулы (31):

$$\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k) = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)},J^*)/2\rfloor} \cdots \sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor \#(j_{(|J|)},J^*)/2\rfloor} r_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle} \times$$
$$\times\, \mathcal{I}_h^{J^*_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}} K^{(L)}_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})}), \qquad (32)$$

где для $\nu_{(1)} = \ldots = \nu_{(|J|)} = 0$

$$\mathcal{I}_h^{J^*} K^{(L)}_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle} = \mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k),$$

а остальные стохастические интегралы Ито имеют кратности меньше k: $k-2, k-4, \ldots, k-2\lfloor k/2\rfloor > 0$.

Следовательно, линейный оператор $\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}$ представляется в виде конечной суммы линейных операторов. Один из них — линейный оператор $\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}$, а остальные операторы ставят в соответствие функции $K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)$ кратные стохастические интегралы Ито от интегральных следов вида (20).

Все кратные стохастические интегралы Ито в правой части соотношения (32) ортогональны в пространстве $\mathcal{L}_2$, так как они представляются ортогональными разложениями [1] по разным подмножествам множества $\mathfrak{Z}^{*J^*}$, поэтому справедлива формула

$$\|\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)\|^2_{\mathcal{L}_2} = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)},J^*)/2\rfloor} \cdots \sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor \#(j_{(|J|)},J^*)/2\rfloor} r^2_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle} \times$$
$$\times\, \|\mathcal{I}_h^{J^*_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}} K^{(L)}_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})})\|^2_{\mathcal{L}_2}. \qquad (33)$$

С учетом соотношения (9), а именно

$$\|\mathcal{I}_h^{J^*_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}} K^{(L)}_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2\gamma})\|_{\mathcal{L}_2} =$$
$$= M_{J^*_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}} \|K^{(L)}_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2\gamma})\|_{L_2(\mathbb{H}^{k-2\gamma})} \leqslant$$
$$\leqslant M_{J^*}\|K^{(L)}_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2\gamma})\|_{L_2(\mathbb{H}^{k-2\gamma})}, \quad \gamma = \nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)},$$

так как при $\gamma > 0$

$$M^2_{J^*_{\langle \nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}} = M^2_{J^*}\prod_{j\in J}\frac{(i-2\nu_j)!}{i!}\Big|_{i=\#(j,J^*)} = \prod_{j\in J}(i-2\nu_j)!\Big|_{i=\#(j,J^*)} < M^2_{J^*},$$

и с учетом определения нормы (23) имеем

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)\|_{\mathcal{L}_2}=\Bigg\{\sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor\#(j_{(1)},J^*)/2\rfloor}\ldots\sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor\#(j_{(|J|)},J^*)/2\rfloor} r^2_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}\times\\
&\quad\times\|\mathcal{I}_h^{J^*_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}}K^{(L)}_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})})\|^2_{\mathcal{L}_2}\Bigg\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\\
&\leqslant\sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor\#(j_{(1)},J^*)/2\rfloor}\ldots\sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor\#(j_{(|J|)},J^*)/2\rfloor} r_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}\times\\
&\quad\times\|\mathcal{I}_h^{J^*_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}}K^{(L)}_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})})\|_{\mathcal{L}_2}\leqslant\\
&\leqslant M_{J^*}\sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor\#(j_{(1)},J^*)/2\rfloor}\ldots\sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor\#(j_{(|J|)},J^*)/2\rfloor} r_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}\times\\
&\quad\times\|K^{(L)}_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})})\|_{L_2(\mathbb{H}^{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})})}=\\
&=M_{J^*}\|K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)\|_{L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)}.
\end{aligned}\tag{34}
$$

Равенство в формуле (34), т.е.

$$
\|\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)\|_{\mathcal{L}_2}=M_{J^*}\|K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)\|_{L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)},
$$

достигается, если все интегральные следы в правой части соотношения (32) тождественно равны нулю.

Переходя к пределу при $L\to\infty$ в соотношении (34), получаем, что линейный оператор $\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}$ является ограниченным с нормой $\|\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}\|=M_{J^*}$, а из (29), (32) и (33) следует справедливость разложений (24) и (25), а также соотношения (26). ◄

Замечания 2.

1. Множество случайных величин (31) образует ортогональный базис линейного подпространства $\mathcal{L}_2^{*(j_1\ldots j_k)}=\{\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)\colon K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2^{*(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)\}\subset\mathcal{L}_2$. Соответствующий ортонормированный базис получается в результате нормировки (см. п. 2 замечаний 1).

2. Поскольку $\mathrm{E}\zeta^{2i}=(-1)^iH_{2i}(0)=(2i-1)!!$, из выражения (28) находим

$$
\|\zeta_{i_1}^{(j_1)}\ldots\zeta_{i_k}^{(j_k)}\|^2_{\mathcal{L}_2}=\left\|\prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j}(\zeta_i^{(j)})^{\#(i,I_j^*)}\right\|^2_{\mathcal{L}_2}=
$$

$$
= \prod_{j \in J} \prod_{i \in I_j} \|(\zeta_i^{(j)})^{\#(i,I_j^*)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \prod_{j \in J} \prod_{i \in I_j} (2\#(i, I_j^*) - 1)!!.
$$

Максимум нормы элементов из $\mathfrak{Z}^{*J^*}$ достигается при $|I_j| = 1\ \forall j \in J$, т.е. на элементах вида

$$
\zeta_{i_1}^{(j_1)} \ldots \zeta_{i_k}^{(j_k)} = \prod_{j \in J} (\zeta^{(j)})^{\#(j,J^*)},
$$

где $\zeta^{(j)}$ — любая случайная величина из множества $\{\zeta_i^{(j)}\}_{i=0}^{\infty}$, следовательно,

$$
\max_{i_1,\ldots,i_k} \|\zeta_{i_1}^{(j_1)} \ldots \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \left\| \prod_{j \in J} (\zeta^{(j)})^{\#(j,J^*)} \right\|_{\mathcal{L}_2}^2 =
$$

$$
= \prod_{j \in J} \|(\zeta^{(j)})^{\#(j,J^*)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \prod_{j \in J} (2\#(j, J^*) - 1)!! = M_{J^*}^{*2}.
$$

3. Теорема 2 дает ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Стратоновича от симметризованных функций. Однако это не является принципиальным ограничением и связано с тем, что для симметризованных функций более кратко записываются необходимые условия, в частности норма (23), и результат — разложение кратного стохастического интеграла Стратоновича в сумму его математического ожидания и кратных стохастических интегралов Ито. Например, для кратности $k = 3$ и $j_1 = j_2 = j_3$ при выборе функции $K(t_1, t_2, t_3) \in L_2^{*(j_1 j_2 j_3)}(\mathbb{H}^3)$ возникает необходимость рассматривать три интегральных следа

$$
\int_{\mathbb{H}} K(t_1, t_2, t_3)\Big|_{t_1=t_2} dt_1 = \int_{\mathbb{H}} K(t_1, t_1, t_3) dt_1,
$$

$$
\int_{\mathbb{H}} K(t_1, t_2, t_3)\Big|_{t_1=t_3} dt_1 = \int_{\mathbb{H}} K(t_1, t_2, t_1) dt_1,
$$

$$
\int_{\mathbb{H}} K(t_1, t_2, t_3)\Big|_{t_2=t_3} dt_2 = \int_{\mathbb{H}} K(t_1, t_2, t_2) dt_2
$$

или интегральный след

$$
\int_{\mathbb{H}} \big(K(\tau, \tau, t) + K(\tau, t, \tau) + K(t, \tau, \tau)\big) d\tau.
$$

Для соответствующей симметризованной функции $K_{J^*}(t_1, t_2, t_3) = \langle K(t_1, t_2, t_3)\rangle_{J^*} \in L_2^{\mathrm{tr}(j_1 j_2 j_3)}(\mathbb{H}^3)$ достаточно взять только один интегральный след относительно любой пары переменных из множества $\mathrm{T} = \{t_1, t_2, t_3\}$. В этом смысле симметризация эффективна, если хотя бы для одного класса эквивалентности I_j или T_j, $j \in J$, выполнено условие $|\mathrm{I}_j| = |\mathrm{T}_j| > 2$.

В общем случае вместо формулы (25) получаем

$$\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)=$$
$$=\sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)},J^*)/2\rfloor}\ldots\sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor \#(j_{(|J|)},J^*)/2\rfloor}\mathcal{I}_h^{J^*_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}}\sum_{\varpi\in(\mathrm{T}/\sim)^{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}}\mathrm{tr}_\varpi\, K(t_1,\ldots,t_k),$$

где использованы обозначения (18) и (20), причем в сумме интегральных следов предполагается единое обозначение их переменных для каждого из слагаемых, например $t_1,\ldots,t_{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})}$. Соответствующим образом можно записать и соотношение для нормы кратного стохастического интеграла Стратоновича — аналог формулы (26):

$$\|\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)\|^2_{\mathcal{L}_2}=$$
$$=\sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)},J^*)/2\rfloor}\ldots\sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor \#(j_{(|J|)},J^*)/2\rfloor}\Big\|\mathcal{I}_h^{J^*_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}}\sum_{\varpi\in(\mathrm{T}/\sim)^{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}}\mathrm{tr}_\varpi\, K(t_1,\ldots,t_k)\Big\|^2_{\mathcal{L}_2}.$$

Доказательство проводится так же, но с переопределением пространства $L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ на основе другого выражения для нормы в этом пространстве.

4. Для линейного пространства $L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ можно определить норму

$$\|K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k)\|_{L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)}=\sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)},J^*)/2\rfloor}\ldots\sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor \#(j_{(|J|)},J^*)/2\rfloor}r_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}\times$$
$$\times\|\langle K_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})})\rangle_{J^*}\|_{L_2(\mathbb{H}^{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})})}$$

вместо нормы (23) и рассматривать это пространство как множество классов эквивалентности (13) (см. п. 3 замечаний 1).

Тогда для класса функций $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ справедливо разложение вида (24), в правой части которого $C_{i_1\ldots i_k}$ — коэффициенты разложения (1) любой функции $K(t_1,\ldots,t_k)$ из этого класса (элемента линейного подпространства $L_2^{*(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$).

Действительно, пусть функция $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2(\mathbb{H}^k)$ такая, что $K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k)=\langle K(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*}\in L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ — соответствующая симметризованная функция (2). Согласно утверждению 2 и теореме 2 находим

$$\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)=\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty}\tilde{C}_{i_1\ldots i_k}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\ldots\zeta_{i_k}^{(j_k)},$$

где $\tilde{C}_{i_1\ldots i_k}$ — коэффициенты разложения (1) функции $K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k)$ относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{H})$, $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_l = 0,1,2,\ldots$ и $l=1,2,\ldots,k$. Но из равенства (4) следует, что любые частичные суммы рядов

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} C_{i_1\ldots i_k}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\ldots\zeta_{i_k}^{(j_k)} \quad \text{и} \quad \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1\ldots i_k}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\ldots\zeta_{i_k}^{(j_k)}$$

совпадают, где $C_{i_1\ldots i_k}$ — коэффициенты разложения (1) функции $K(t_1,\ldots,t_k)$ относительно той же базисной системы, т.е.

$$\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} C_{i_1\ldots i_k}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\ldots\zeta_{i_k}^{(j_k)}. \tag{35}$$

Дополнительно отметим, что $L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ целесообразно принять за область определения линейного оператора $\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}$. Следовательно, линейный оператор $\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между линейными пространствами $L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ и $\mathcal{L}_2^{*(j_1\ldots j_k)} = \{\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k) : K(t_1,\ldots,t_k) \in L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)\} \subset \mathcal{L}_2$.

Если для линейного пространства $L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ определить норму в виде

$$\|K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k)\|_{L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)} = M_{J^*}\Biggl\{\sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)},J^*)/2\rfloor}\ldots\sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor \#(j_{(|J|)},J^*)/2\rfloor}\tilde{r}^2_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}\times$$

$$\times\,\|\langle K_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})})\rangle_{J^*}\|^2_{L_2(\mathbb{H}^{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})})}\Biggr\}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\tilde{r}_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle} = r_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}\frac{M_{J^*_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}}}{M_{J^*}} =$$

$$= \prod_{j\in J}\frac{\sqrt{i!}}{\nu_j!\sqrt{(i-2\nu_j)!}2^{\nu_j}}\Big|_{i=\#(j,J^*)},$$

то в дополнение к формуле (26) получим

$$\|\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)\|_{\mathcal{L}_2} = \|\langle K(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*}\|_{L_2^{\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)}.$$

5. В другом виде разложения (25) и (35) можно записать, опираясь на основной результат из [18]: представление кратного стохастического интеграла Ито в виде суммы кратных стохастических интегралов Стратоновича и

детерминированной величины. Для этого нужно в соотношениях, указанных в [1], формально поменять местами произведение Вика (см. п. 1 замечаний 1) и обычное произведение случайных величин, а все разности заменить на суммы.

Так, на основе соотношений

$$
\begin{aligned}
&\zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_2}^{(j_2)} = \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} + \Delta_{12},\\
&\zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_2}^{(j_2)}\zeta_{i_3}^{(j_3)} = \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \Delta_{12}\zeta_{i_3}^{(j_3)} + \Delta_{13}\zeta_{i_2}^{(j_2)} + \Delta_{23}\zeta_{i_1}^{(j_1)},\\
&\zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_2}^{(j_2)}\zeta_{i_3}^{(j_3)}\zeta_{i_4}^{(j_4)} = \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \Delta_{12}\zeta_{i_3}^{(j_3)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \Delta_{13}\zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} +\\
&\quad + \Delta_{14}\zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \Delta_{23}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \Delta_{24}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \Delta_{34}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} +\\
&\quad + \Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{24} + \Delta_{14}\Delta_{23}, \quad \ldots,\\
&\Delta_{lm} = \delta_{j_l j_m}\delta_{i_l i_m}, \quad l, m = 1, \ldots, k,
\end{aligned}
$$

имеем

$$
\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1 i_2}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_2}^{(j_2)} = \sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1 i_2}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} + \delta_{j_1 j_2}\sum_{i_1=0}^{\infty} C_{i_1 i_1},
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_3}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_2}^{(j_2)}\zeta_{i_3}^{(j_3)} &= \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_3}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} +\\
&+ \delta_{j_1 j_2}\sum_{i_1,i_3=0}^{\infty} C_{i_1 i_1 i_3}\zeta_{i_3}^{(j_3)} + \delta_{j_1 j_3}\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_1}\zeta_{i_2}^{(j_2)} + \delta_{j_2 j_3}\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_2}\zeta_{i_1}^{(j_1)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_3 i_4}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_2}^{(j_2)}\zeta_{i_3}^{(j_3)}\zeta_{i_4}^{(j_4)} &= \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_3 i_4}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} +\\
&+ \delta_{j_1 j_2}\sum_{i_1,i_3,i_4=0}^{\infty} C_{i_1 i_1 i_3 i_4}\zeta_{i_3}^{(j_3)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \delta_{j_1 j_3}\sum_{i_1,i_2,i_4=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_1 i_4}\zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} +\\
&+ \delta_{j_1 j_4}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_3 i_1}\zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \delta_{j_2 j_3}\sum_{i_1,i_2,i_4=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_2 i_4}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} +\\
&+ \delta_{j_2 j_4}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_3 i_2}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \delta_{j_3 j_4}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_3 i_3}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} +\\
&+ \delta_{j_1 j_2}\delta_{j_3 j_4}\sum_{i_1,i_3=0}^{\infty} C_{i_1 i_1 i_3 i_3} + \delta_{j_1 j_3}\delta_{j_2 j_4}\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_1 i_2} + \delta_{j_1 j_4}\delta_{j_2 j_3}\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_2 i_1}, \quad \ldots
\end{aligned}
$$

6. Если значения $j_1, \ldots, j_k$ совпадают, т.е. $|J| = 1$, то соотношение (25) дает разложение Ху – Мейера для кратных стохастических интегралов Стратоновича [5–7, 9, 12].

Действительно, при условии $|J| = 1$, или $\#(j, J^*) = k$, соотношение (25) записывается в форме

$$\mathcal{I}_h^{*(j_1\ldots j_k)} K(t_1,\ldots,t_k) = \sum_{\nu=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} r_{\langle\nu\rangle} \mathcal{I}_h^{J^*_{\langle\nu\rangle}} K_{\langle\nu\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2\nu}),$$

где

$$r_{\langle\nu\rangle} = a_{k-2\nu}^{(k)} = \frac{k!}{\nu!(k-2\nu)!2^\nu}$$

и

$$\begin{aligned}
&K_{\langle 0\rangle}(t_1,\ldots,t_k) = K(t_1,\ldots,t_k) \quad \text{или} \quad K_{\langle 0\rangle}(t_1,\ldots,t_k) = K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k),\\
&K_{\langle 1\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-2}) = \int_{\mathbb{H}} K_{J^*}(t_1,\ldots,t_{k-1},t_{k-1})dt_{k-1},\\
&K_{\langle 2\rangle}(t_1,\ldots,t_{k-4}) = \int_{\mathbb{H}^2} K_{J^*}(t_1,\ldots,t_{k-3},t_{k-3},t_{k-1},t_{k-1})dt_{k-3}dt_{k-1}, \quad \ldots
\end{aligned}$$

Если k — нечетное, то

$$K_{\langle\lfloor k/2\rfloor\rangle}(t_1) = \int_{\mathbb{H}^{\lfloor k/2\rfloor}} K_{J^*}(t_1,t_2,t_2,\ldots,t_{k-3},t_{k-3},t_{k-1},t_{k-1})dt_2\ldots dt_{k-3}dt_{k-1},$$

а если k — четное, то

$$K_{\langle k/2\rangle} = \int_{\mathbb{H}^{k/2}} K_{J^*}(t_1,t_1,\ldots,t_{k-3},t_{k-3},t_{k-1},t_{k-1})dt_1\ldots dt_{k-3}dt_{k-1} = \text{const}.$$

Пример 1. Представить стохастический интеграл Стратоновича

$$\mathcal{I}_h^{*(212)} K(t_1,t_2,t_3)$$

кратности $k = 3$ в виде ортогонального разложения, $K(t_1,t_2,t_3) \in L_2^{*(212)}(\mathbb{H}^3)$.

В данном случае $j_1 = j_3 = 2$ и $j_2 = 1$, т.е. $J = \{1,2\}$ и $J^* = (212)$. Множество индексов $\mathrm{I} = \{i_1,i_2,i_3\}$ и множество переменных $\mathrm{T} = \{t_1,t_2,t_3\}$ разобьем на классы эквивалентности:

$$\mathrm{I}/\!\sim\, = \{\underbrace{\{i_2\}}_{\mathrm{I}_1},\underbrace{\{i_1,i_3\}}_{\mathrm{I}_2}\}, \quad \mathrm{T}/\!\sim\, = \{\underbrace{\{t_2\}}_{\mathrm{T}_1},\underbrace{\{t_1,t_3\}}_{\mathrm{T}_2}\},$$

$$\#(1,J^*) = 1, \quad \#(2,J^*) = 2, \quad M_{J^*}^2 = 1!2! = 2.$$

Следовательно,

$$\zeta_{i_1}^{(2)}\zeta_{i_2}^{(1)}\zeta_{i_3}^{(2)} = \begin{cases} (\zeta_{i_1}^{(2)})^2\zeta_{i_2}^{(1)} = ((\zeta_{i_1}^{(2)})^2 - 1)\zeta_{i_2}^{(1)} + \zeta_{i_2}^{(1)} = \\ \quad = H_{2,1,0}(\zeta_{i_1}^{(2)},\zeta_{i_2}^{(1)},\zeta_{i_3}^{(2)}) + H_{0,1,0}(\zeta_{i_1}^{(2)},\zeta_{i_2}^{(1)},\zeta_{i_3}^{(2)}), \quad i_1 = i_3, \\ \zeta_{i_1}^{(2)}\zeta_{i_2}^{(1)}\zeta_{i_3}^{(2)} = H_{1,1,1}(\zeta_{i_1}^{(2)},\zeta_{i_2}^{(1)},\zeta_{i_3}^{(2)}), \quad i_1 \neq i_3, \end{cases}$$

$$\|\zeta_{i_1}^{(2)}\zeta_{i_2}^{(1)}\zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \begin{cases} 3, & i_1 = i_3, \\ 1, & i_1 \neq i_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \|\zeta_{i_1}^{(2)}\zeta_{i_2}^{(1)}\zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = 1 + 2\delta_{i_1 i_3},$$

$$\mathfrak{Z}^{*(212)} = \mathfrak{Z}^{(212)} \cup \mathfrak{Z}^{(1)} = \{\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}, \zeta_{i_2}^{(1)}\}_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty},$$

$$\hat{\mathfrak{Z}}^{*(212)} = \left\{\frac{\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}}{\sqrt{1+\delta_{i_1 i_3}}}, \zeta_{i_2}^{(1)}\right\}_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty},$$

где $\zeta_{i_1}^{(2)}$ и $\zeta_{i_2}^{(1)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \ldots$

В этих соотношениях использовано обозначение полиномов Эрмита $\{H_{l_1 \ldots l_k}(x)\}_{l_1,\ldots,l_k=0}^{\infty}$ векторного аргумента $x = [\, x_1 \ \ldots \ x_k\,]^{\mathrm{т}}$, которые образованы всевозможными произведениями полиномов Эрмита $\{H_{l_1}(x_1)\}_{l_1=0}^{\infty}$, …, $\{H_{l_k}(x_k)\}_{l_k=0}^{\infty}$ [1].

Далее вместе с рядом (24) и разложением (25) (см. также п. 3 замечаний 2) записано представление кратного стохастического интеграла Ито в виде разложения по ортонормированному базису (12), которое как для общего случая, так и для ортогонального базиса $\mathfrak{Z}^{(212)}$ и интеграла $\mathcal{I}_h^{(212)}K(t_1,t_2,t_3)$ приведено в [1].

Пусть $C_{i_1 i_2 i_3}$ — коэффициенты разложения (1) функции $K(t_1,t_2,t_3)$. Тогда

$$\mathcal{I}_h^{*(212)}K(t_1,t_2,t_3) = \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_3}\zeta_{i_1}^{(2)}\zeta_{i_2}^{(1)}\zeta_{i_3}^{(2)} =$$

$$= \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_3}\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} + \sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_1}\zeta_{i_2}^{(1)} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=i_1}^{\infty} \frac{C_{i_1 i_2 i_3} + C_{i_3 i_2 i_1}}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} \, \frac{\zeta_{i_1}^{(2)}\zeta_{i_2}^{(1)}\zeta_{i_3}^{(2)}}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} +$$

$$+ \sum_{i_2=0}^{\infty}\left(\sum_{i_1=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_1}\right)\zeta_{i_2}^{(1)},$$

$$\|\mathcal{I}_h^{*(212)}K(t_1,t_2,t_3)\|_{\mathcal{L}_2} = \left\| \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_3}\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} \right\|_{\mathcal{L}_2} =$$

$$= \left\{ \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=i_1}^{\infty} \frac{(C_{i_1 i_2 i_3} + C_{i_3 i_2 i_1})^2}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}^2} + \sum_{i_2=0}^{\infty}\left(\sum_{i_1=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_1}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

или

$$
\mathcal{I}_h^{*(212)}K(t_1,t_2,t_3) = \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_3}\zeta_{i_1}^{(2)}\zeta_{i_2}^{(1)}\zeta_{i_3}^{(2)} =
$$

$$
= \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=i_1}^{\infty} \frac{C_{i_1 i_2 i_3}+C_{i_3 i_2 i_1}}{1+\delta_{i_1 i_3}}\,\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} + \sum_{i_2=0}^{\infty}\Biggl(\sum_{i_1=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_1}\Biggr)\zeta_{i_2}^{(1)} =
$$

$$
= \frac{1}{2}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty}\left(C_{i_1 i_2 i_3}+C_{i_3 i_2 i_1}\right)\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} + \sum_{i_2=0}^{\infty}\Biggl(\sum_{i_1=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_1}\Biggr)\zeta_{i_2}^{(1)},
$$

$$
\|\mathcal{I}_h^{*(212)}K(t_1,t_2,t_3)\|_{\mathcal{L}_2} = \Biggl\| \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_3}\zeta_{i_1}^{(2)}\zeta_{i_2}^{(1)}\zeta_{i_3}^{(2)}\Biggr\|_{\mathcal{L}_2} =
$$

$$
= \Biggl\{\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=i_1}^{\infty}\frac{(C_{i_1 i_2 i_3}+C_{i_3 i_2 i_1})^2}{1+\delta_{i_1 i_3}} + \sum_{i_2=0}^{\infty}\Biggl(\sum_{i_1=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_1}\Biggr)^2\Biggr\}^{\frac{1}{2}} =
$$

$$
= \Biggl\{\frac{1}{2}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty}(C_{i_1 i_2 i_3}+C_{i_3 i_2 i_1})^2 + \sum_{i_2=0}^{\infty}\Biggl(\sum_{i_1=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_1}\Biggr)^2\Biggr\}^{\frac{1}{2}}.
$$

Пример 2. Представить стохастический интеграл Стратоновича

$$
\mathcal{I}_h^{*(1122)}K(t_1,t_2,t_3,t_4)
$$

кратности $k=4$ как сумму кратных стохастических интегралов Ито, а также в виде ортогонального разложения, $K(t_1,t_2,t_3,t_4) \in L_2^{*(1122)}(\mathbb{H}^4)$.

В данном случае $j_1 = j_2 = 1$ и $j_3 = j_4 = 2$, т.е. $J = \{1,2\}$ и $J^* = (1122)$. Множество индексов $\mathrm{I} = \{i_1,i_2,i_3,i_4\}$ и множество переменных $\mathrm{T} = \{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ разобьем на классы эквивалентности:

$$
\mathrm{I}/\!\sim\, = \{\underbrace{\{i_1,i_2\}}_{\mathrm{I}_1},\underbrace{\{i_3,i_4\}}_{\mathrm{I}_2}\}, \quad \mathrm{T}/\!\sim\, = \{\underbrace{\{t_1,t_2\}}_{\mathrm{T}_1},\underbrace{\{t_3,t_4\}}_{\mathrm{T}_2}\},
$$

$$
\#(1,J^*) = \#(2,J^*) = 2, \quad M_{J^*}^2 = 2!2! = 4.
$$

Симметризованная функция $K_{J^*}(t_1,t_2,t_3,t_4)$ согласно (2) имеет вид

$$
K_{J^*}(t_1,t_2,t_3,t_4) = \frac{1}{M_{J^*}^2}\sum_{\mathrm{T}/\sim} K(t_1,t_2,t_3,t_4) =
$$

$$
= \frac{1}{4}\bigl(K(t_1,t_2,t_3,t_4)+K(t_2,t_1,t_3,t_4)+K(t_1,t_2,t_4,t_3)+K(t_2,t_1,t_4,t_3)\bigr)
$$

и пусть $\tilde{C}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ — ее коэффициенты разложения (1). Кроме того, $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_l = 0,1,2,\ldots$ и $l = 1,2,3,4$.

Так как

$$\lfloor \#(1, J^*)/2 \rfloor = \lfloor \#(2, J^*)/2 \rfloor = 1 \quad \text{и} \quad k - 2(\lfloor \#(1, J^*)/2 \rfloor + \lfloor \#(2, J^*)/2 \rfloor) = 0,$$

следует записать три кратных стохастических интеграла Ито, которые соответствуют всем парам $(\nu_{(1)}, \nu_{(2)})$ при $\nu_{(1)} = 0, 1$ и $\nu_{(2)} = 0, 1$ за исключением $\nu_{(1)} = \nu_{(2)} = 1$, а также константу, соответствующую значениям $\nu_{(1)} = \nu_{(2)} = 1$, — математическое ожидание кратного стохастического интеграла Стратоновича.

При $\nu_{(1)} = \nu_{(2)} = 0$ имеем стохастический интеграл Ито кратности $k = 4$:

$$\mathcal{I}_h^{(1122)} K(t_1, t_2, t_3, t_4) = \mathcal{I}_h^{(1122)} K_{J^*}(t_1, t_2, t_3, t_4),$$

система ортогональных случайных величин для его представления — это $\mathfrak{Z}^{(1122)} = \{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)}\}_{i_1,i_2,i_3,i_4=0}^{\infty}$.

Рассмотрим случай $\nu_{(1)} = 1$, $\nu_{(2)} = 0$: $J^*_{\langle 1,0\rangle} = (22)$. Определим функцию

$$K_{\langle 1,0\rangle}(t_3, t_4) = \int_{\mathbb{H}} K_{J^*}(t_1, t_2, t_3, t_4)\Big|_{t_1=t_2} dt_1 = \int_{\mathbb{H}} K_{J^*}(t_1, t_1, t_3, t_4) dt_1,$$

для которой получаем стохастический интеграл Ито кратности $k = 2$:

$$\mathcal{I}_h^{(22)} K_{\langle 1,0\rangle}(t_3, t_4),$$

система ортогональных случайных величин для его представления — это $\mathfrak{Z}^{(22)} = \{\zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)}\}_{i_3,i_4=0}^{\infty}$. В итоговом представлении этот интеграл будет с коэффициентом

$$r_{\langle 1,0\rangle} = a_{i-2}^{(i)}\Big|_{i=2} = \frac{2!}{1!(2-2)!2} = 1,$$

а коэффициенты разложения функции $K_{\langle 1,0\rangle}(t_3, t_4)$ вычисляются следующим образом:

$$C_{i_3 i_4}^{\langle 1,0\rangle} = \sum_{i_1=0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1 i_2 i_3 i_4}\Big|_{i_1=i_2} = \sum_{i_1=0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1 i_1 i_3 i_4}.$$

Далее случай $\nu_{(1)} = 0$, $\nu_{(2)} = 1$: $J^*_{\langle 0,1\rangle} = (11)$. Определим функцию

$$K_{\langle 0,1\rangle}(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{H}} K_{J^*}(t_1, t_2, t_3, t_4)\Big|_{t_3=t_4} dt_3 = \int_{\mathbb{H}} K_{J^*}(t_1, t_2, t_3, t_3) dt_3,$$

для нее записываем стохастический интеграл Ито кратности $k = 2$:

$$\mathcal{I}_h^{(11)} K_{\langle 0,1\rangle}(t_1, t_2),$$

система ортогональных случайных величин для его представления — это $\mathfrak{Z}^{(11)} = \{\zeta^{(1)}_{i_1} * \zeta^{(1)}_{i_2}\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$. В итоговом представлении этот интеграл будет с коэффициентом

$$r_{\langle 0,1\rangle} = a^{(i)}_{i-2}\Big|_{i=2} = \frac{2!}{1!(2-2)!2} = 1,$$

а коэффициенты разложения функции $K_{\langle 0,1\rangle}(t_1,t_2)$ вычисляются по формуле

$$C^{\langle 0,1\rangle}_{i_1 i_2} = \sum_{i_3=0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1 i_2 i_3 i_4}\Big|_{i_3=i_4} = \sum_{i_3=0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1 i_2 i_3 i_3}.$$

Наконец, случай $\nu_{(1)} = \nu_{(2)} = 1$: $J^*_{\langle 1,1\rangle} = \varnothing$. Определим константу

$$K_{\langle 1,1\rangle} = \int_{\mathbb{H}^2} K_{J^*}(t_1,t_2,t_3,t_4)\Big|_{t_1=t_2,t_3=t_4} dt_1 dt_3 = \int_{\mathbb{H}^2} K_{J^*}(t_1,t_1,t_3,t_3) dt_1 dt_3,$$

которая в итоговом представлении будет с коэффициентом

$$r_{\langle 1,1\rangle} = a^{(i)}_{i-2}\Big|_{i=2} a^{(i)}_{i-2}\Big|_{i=2} = 1$$

и ее можно представить следующим образом:

$$C^{\langle 1,1\rangle} = \sum_{i_1,i_3=0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1 i_2 i_3 i_4}\Big|_{i_1=i_2,i_3=i_4} = \sum_{i_1,i_3=0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1 i_1 i_3 i_3}.$$

Следовательно, по теореме (2) имеем

$$\mathcal{I}^{*(1122)}_h K(t_1,t_2,t_3,t_4) = \mathcal{I}^{(1122)}_h K(t_1,t_2,t_3,t_4) + \\ + \mathcal{I}^{(22)}_h K_{\langle 1,0\rangle}(t_3,t_4) + \mathcal{I}^{(11)}_h K_{\langle 0,1\rangle}(t_1,t_2) + K_{\langle 1,1\rangle},$$

где

$$K_{\langle 1,1\rangle} = C^{\langle 1,1\rangle} = \mathrm{E}\mathcal{I}^{*(1122)}_h K(t_1,t_2,t_3,t_4).$$

Ортогональный базис $\mathfrak{Z}^{*J^*} = \mathfrak{Z}^{*(1122)}$ для представления кратных стохастических интегралов Стратоновича определяется в форме

$$\mathfrak{Z}^{*(1122)} = \mathfrak{Z}^{(1122)} \cup \mathfrak{Z}^{(22)} \cup \mathfrak{Z}^{(11)} \cup \{1\} = \\ = \{\zeta^{(1)}_{i_1} * \zeta^{(1)}_{i_2} * \zeta^{(2)}_{i_3} * \zeta^{(2)}_{i_4}, \zeta^{(2)}_{i_3} * \zeta^{(2)}_{i_4}, \zeta^{(1)}_{i_1} * \zeta^{(1)}_{i_2}, 1\}_{i_1,i_2,i_3,i_4=0}^{\infty},$$

и ортогональное разложение интеграла $\mathcal{I}^{*(1122)}_h K(t_1,t_2,t_3,t_4)$ имеет вид

$$\mathcal{I}^{*(1122)}_h K(t_1,t_2,t_3,t_4) = \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \zeta^{(1)}_{i_1} * \zeta^{(1)}_{i_2} * \zeta^{(2)}_{i_3} * \zeta^{(2)}_{i_4} +$$

$$
+\sum_{i_3,i_4=0}^{\infty} C_{i_3i_4}^{\langle 1,0\rangle}\zeta_{i_3}^{(2)}*\zeta_{i_4}^{(2)}+\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1i_2}^{\langle 0,1\rangle}\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_2}^{(1)}+C^{\langle 1,1\rangle}=
$$

$$
=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=i_1}^{\infty}\sum_{i_3=0}^{\infty}\sum_{i_4=i_3}^{\infty}\frac{4\tilde{C}_{i_1i_2i_3i_4}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_2}^{(1)}*\zeta_{i_3}^{(2)}*\zeta_{i_4}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}}\,\frac{\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_2}^{(1)}*\zeta_{i_3}^{(2)}*\zeta_{i_4}^{(2)}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_2}^{(1)}*\zeta_{i_3}^{(2)}*\zeta_{i_4}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}}+
$$

$$
+\sum_{i_3=0}^{\infty}\sum_{i_4=i_3}^{\infty}\frac{2C_{i_3i_4}^{\langle 1,0\rangle}}{\|\zeta_{i_3}^{(2)}*\zeta_{i_4}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}}\,\frac{\zeta_{i_3}^{(2)}*\zeta_{i_4}^{(2)}}{\|\zeta_{i_3}^{(2)}*\zeta_{i_4}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}}+
$$

$$
+\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=i_1}^{\infty}\frac{2C_{i_1i_2}^{\langle 0,1\rangle}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_2}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}}\,\frac{\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_2}^{(1)}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_2}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}}+C^{\langle 1,1\rangle}
$$

с учетом результатов работы [1].

Пример 3. Представить стохастический интеграл Стратоновича

$$
\mathcal{I}_h^{*(12112)}K(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)
$$

кратности $k=5$ как сумму кратных стохастических интегралов Ито, а также в виде ортогонального разложения, $K(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in L_2^{*(12112)}$.

В данном случае $j_1=j_3=j_4=1$ и $j_2=j_5=2$, т.е. $J=\{1,2\}$ и $J^*=(12112)$. Множество индексов $\mathrm{I}=\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\}$ и множество переменных $\mathrm{T}=\{t_1,t_2,t_3,t_4,t_5\}$ разобьем на классы эквивалентности:

$$
\mathrm{I}/\!\sim\;=\{\underbrace{\{i_1,i_3,i_4\}}_{\mathrm{I}_1},\underbrace{\{i_2,i_5\}}_{\mathrm{I}_2}\},\quad \mathrm{T}/\!\sim\;=\{\underbrace{\{t_1,t_3,t_4\}}_{\mathrm{T}_1},\underbrace{\{t_2,t_5\}}_{\mathrm{T}_2}\},
$$

$$
\#(1,J^*)=3,\quad \#(2,J^*)=2,\quad M_{J^*}^2=3!2!=12.
$$

Симметризованная функция $K_{J^*}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)$ согласно (2) имеет вид

$$
K_{J^*}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=\frac{1}{M_{J^*}^2}\sum_{\mathrm{T}/\sim}K(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=
$$

$$
=\frac{1}{12}\big(K(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)+K(t_3,t_2,t_1,t_4,t_5)+K(t_4,t_2,t_3,t_1,t_5)+
$$

$$
+K(t_1,t_2,t_4,t_3,t_5)+K(t_3,t_2,t_4,t_1,t_5)+K(t_4,t_2,t_1,t_3,t_5)+
$$

$$
+K(t_1,t_5,t_3,t_4,t_2)+K(t_3,t_5,t_1,t_4,t_2)+K(t_4,t_5,t_3,t_1,t_2)+
$$

$$
+K(t_1,t_5,t_4,t_3,t_2)+K(t_3,t_5,t_4,t_1,t_2)+K(t_4,t_5,t_1,t_3,t_2)\big)
$$

и пусть $\tilde{C}_{i_1i_2i_3i_4i_5}$ — ее коэффициенты разложения (1). Кроме того, $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_l=0,1,2,\ldots$ и $l=1,2,3,4,5$.

Поскольку $\lfloor \#(1,J^*)/2 \rfloor = \lfloor \#(2,J^*)/2 \rfloor = 1$, следует записать четыре кратных стохастических интеграла Ито, которые соответствуют всем парам $(\nu_{(1)},\nu_{(2)})$ при $\nu_{(1)} = 0,1$ и $\nu_{(2)} = 0,1$.

Если $\nu_{(1)} = \nu_{(2)} = 0$, то получаем стохастический интеграл Ито кратности $k = 5$:

$$\mathcal{I}_h^{(12112)} K(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) = \mathcal{I}_h^{(12112)} K_{J^*}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5),$$

система ортогональных случайных величин для его представления — это $\mathfrak{Z}^{(12112)} = \{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(2)} * \zeta_{i_3}^{(1)} * \zeta_{i_4}^{(1)} * \zeta_{i_5}^{(2)}\}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=0}^{\infty}$.

Рассмотрим случай $\nu_{(1)} = 1$, $\nu_{(2)} = 0$: $J^*_{\langle 1,0\rangle} = (212)$. Определим функцию

$$K_{\langle 1,0\rangle}(t_2,t_4,t_5) = \int_{\mathbb{H}} K_{J^*}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\Big|_{t_1=t_3} dt_1 = \int_{\mathbb{H}} K_{J^*}(t_1,t_2,t_1,t_4,t_5)dt_1,$$

для которой получаем стохастический интеграл Ито кратности $k = 3$:

$$\mathcal{I}_h^{(212)} K_{\langle 1,0\rangle}(t_2,t_4,t_5),$$

система ортогональных случайных величин для его представления — это $\mathfrak{Z}^{(212)} = \{\zeta_{i_2}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(1)} * \zeta_{i_5}^{(2)}\}_{i_2,i_4,i_5=0}^{\infty}$. В итоговом представлении этот интеграл будет с коэффициентом

$$r_{\langle 1,0\rangle} = a_{i-2}^{(i)}\Big|_{i=3} = \frac{3!}{1!(3-2)!2} = 3,$$

а коэффициенты разложения функции $K_{\langle 1,0\rangle}(t_2,t_4,t_5)$ вычисляются следующим образом:

$$C_{i_2 i_4 i_5}^{\langle 1,0\rangle} = \sum_{i_1=0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}\Big|_{i_1=i_3} = \sum_{i_1=0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1 i_2 i_1 i_4 i_5}.$$

Далее случай $\nu_{(1)} = 0$, $\nu_{(2)} = 1$: $J^*_{\langle 0,1\rangle} = (111)$. Определим функцию

$$K_{\langle 0,1\rangle}(t_1,t_3,t_4) = \int_{\mathbb{H}} K_{J^*}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\Big|_{t_2=t_5} dt_2 = \int_{\mathbb{H}} K_{J^*}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_2)dt_2,$$

для нее записываем стохастический интеграл Ито кратности $k = 3$:

$$\mathcal{I}_h^{(111)} K_{\langle 0,1\rangle}(t_1,t_3,t_4),$$

система ортогональных случайных величин для его представления — это $\mathfrak{Z}^{(111)} = \{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)} * \zeta_{i_4}^{(1)}\}_{i_1,i_3,i_4=0}^{\infty}$. В итоговом представлении этот интеграл будет с коэффициентом

$$r_{\langle 0,1\rangle} = a_{i-2}^{(i)}\Big|_{i=2} = \frac{2!}{1!(2-2)!2} = 1,$$

а коэффициенты разложения функции $K_{\langle 0,1\rangle}(t_1,t_3,t_4)$ задаются формулой

$$C^{\langle 0,1\rangle}_{i_1i_3i_4}=\sum_{i_2=0}^{\infty}\tilde{C}_{i_1i_2i_3i_4i_5}\Big|_{i_2=i_5}=\sum_{i_2=0}^{\infty}\tilde{C}_{i_1i_2i_3i_4i_2}.$$

Наконец, случай $\nu_{(1)}=\nu_{(2)}=1$: $J^*_{\langle 1,1\rangle}=(1)$. Определим функцию

$$K_{\langle 1,1\rangle}(t_4)=\int_{\mathbb{H}^2}K_{J^*}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\Big|_{t_1=t_3,t_2=t_5}dt_1dt_2=$$
$$=\int_{\mathbb{H}^2}K_{J^*}(t_1,t_2,t_1,t_4,t_2)dt_1dt_2,$$

для которой имеем стохастический интеграл Ито кратности $k=1$:

$$\mathcal{I}^{(1)}_hK_{\langle 1,1\rangle}(t_4),$$

система ортогональных случайных величин для его представления — это $\mathfrak{Z}^{(1)}=\{\zeta^{(1)}_{i_4}\}_{i_4=0}^{\infty}$. В итоговом представлении такой интеграл будет с коэффициентом

$$r_{\langle 1,1\rangle}=a^{(i)}_{i-2}\Big|_{i=3}a^{(i)}_{i-2}\Big|_{i=2}=3,$$

при этом коэффициенты разложения функции $K_{\langle 1,1\rangle}(t_4)$ задаются формулой

$$C^{\langle 1,1\rangle}_{i_4}=\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty}\tilde{C}_{i_1i_2i_3i_4i_5}\Big|_{i_1=i_3,i_2=i_5}=\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty}\tilde{C}_{i_1i_2i_1i_4i_2}.$$

Пользуясь теоремой (2), можно сделать следующий вывод:

$$\mathcal{I}^{*(12112)}_hK(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=\mathcal{I}^{(12112)}_hK(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)+3\mathcal{I}^{(212)}_hK_{\langle 1,0\rangle}(t_2,t_4,t_5)+$$
$$+\mathcal{I}^{(111)}_hK_{\langle 0,1\rangle}(t_1,t_3,t_5)+3\mathcal{I}^{(1)}_hK_{\langle 1,1\rangle}(t_4).$$

Ортогональный базис $\mathfrak{Z}^{*J^*}=\mathfrak{Z}^{*(12112)}$ для представления кратных стохастических интегралов Стратоновича определяется выражением

$$\mathfrak{Z}^{*(12112)}=\mathfrak{Z}^{(12112)}\cup\mathfrak{Z}^{(212)}\cup\mathfrak{Z}^{(111)}\cup\mathfrak{Z}^{(1)}=\{\zeta^{(1)}_{i_1}*\zeta^{(2)}_{i_2}*\zeta^{(1)}_{i_3}*\zeta^{(1)}_{i_4}*\zeta^{(2)}_{i_5},$$
$$\zeta^{(2)}_{i_2}*\zeta^{(1)}_{i_4}*\zeta^{(2)}_{i_5},\zeta^{(1)}_{i_1}*\zeta^{(1)}_{i_3}*\zeta^{(1)}_{i_4},\zeta^{(1)}_{i_4}\}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=0}^{\infty},$$

и ортогональное разложение интеграла $\mathcal{I}^{*(12112)}_hK(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)$ имеет вид

$$\mathcal{I}^{*(12112)}_hK(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=0}^{\infty}\tilde{C}_{i_1i_2i_3i_4i_5}\zeta^{(1)}_{i_1}*\zeta^{(2)}_{i_2}*\zeta^{(1)}_{i_3}*\zeta^{(1)}_{i_4}*\zeta^{(2)}_{i_5}+$$

$$
+3\sum_{i_2,i_4,i_5=0}^{\infty} C_{i_2i_4i_5}^{\langle 1,0\rangle}\zeta_{i_2}^{(2)}*\zeta_{i_4}^{(1)}*\zeta_{i_5}^{(2)}+\sum_{i_1,i_3,i_4=0}^{\infty} C_{i_1i_3i_4}^{\langle 0,1\rangle}\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_3}^{(1)}*\zeta_{i_4}^{(1)}+
$$

$$
+3\sum_{i_4=0}^{\infty} C_{i_4}^{\langle 1,1\rangle}\zeta_{i_4}^{(1)}=
$$

$$
=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=i_1}^{\infty}\sum_{i_4=i_3}^{\infty}\sum_{i_5=i_2}^{\infty}\frac{12\tilde{C}_{i_1i_2i_3i_4i_5}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_2}^{(2)}*\zeta_{i_3}^{(1)}*\zeta_{i_4}^{(1)}*\zeta_{i_5}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}}\times
$$

$$
\times\frac{\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_2}^{(2)}*\zeta_{i_3}^{(1)}*\zeta_{i_4}^{(1)}*\zeta_{i_5}^{(2)}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_2}^{(2)}*\zeta_{i_3}^{(1)}*\zeta_{i_4}^{(1)}*\zeta_{i_5}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}}+
$$

$$
+\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_4=0}^{\infty}\sum_{i_5=i_2}^{\infty}\frac{6C_{i_2i_4i_5}^{\langle 1,0\rangle}}{\|\zeta_{i_2}^{(2)}*\zeta_{i_4}^{(1)}*\zeta_{i_5}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}}\,\frac{\zeta_{i_2}^{(2)}*\zeta_{i_4}^{(1)}*\zeta_{i_5}^{(2)}}{\|\zeta_{i_2}^{(2)}*\zeta_{i_4}^{(1)}*\zeta_{i_5}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}}+
$$

$$
+\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_3=i_1}^{\infty}\sum_{i_4=i_3}^{\infty}\frac{6C_{i_1i_3i_4}^{\langle 0,1\rangle}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_3}^{(1)}*\zeta_{i_4}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}}\,\frac{\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_3}^{(1)}*\zeta_{i_4}^{(1)}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_3}^{(1)}*\zeta_{i_4}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}}+\sum_{i_4=0}^{\infty}3C_{i_4}^{\langle 1,1\rangle}\zeta_{i_4}^{(1)}.
$$

Автор благодарит д.ф.-м.н., профессора Д.Ф. Кузнецова за обсуждение представленных в статье результатов и высказанные рекомендации, позволившие улучшить изложение.

Список литературы

[1] *Рыбаков, К.А.* Ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Ито // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2021. № 3. — С. 109–140.

[2] *Itô, K.* Multiple Wiener integral // Journal of the Mathematical Society of Japan. — 1951. Vol. 3. No. 1. — P. 157–169.

[3] *Hida, T.*, *Ikeda, N.* Analysis on Hilbert space with reproducing kernel arising from multiple Wiener integral // Proc. 5th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. — 1967. Vol. II, part 1. — P. 117–143.

[4] *Ogura, H.* Orthogonal functionals of the Poisson process // IEEE Transactions on Information Theory. — 1972. Vol. 18. No. 4. — P. 473–481.

[5] *Hu, Y.-Z.*, *Meyer, P.-A.* Sur les intégrales multiples de Stratonovitch // Séminaire de probabilités. — 1988. T. 22. — P. 72–81.

[6] *Solé, J.LL.*, *Utzet, F.* Stratonovich integral and trace // Stochastics and Stochastic Reports. — 1990. Vol. 29. No. 2. — P. 203–220.

[7] *Budhiraja, A.S.* Multiple stochastic integrals and Hilbert space valued traces with applications to asymptotic statistics and non-linear filtering / Ph.D. Diss., The University of North Carolina, Chapel Hill, 1994.

[8] *Houdré, C.*, *Pérez-Abreu, V.* (eds.) Chaos Expansions, Multiple Wiener – Itô Integrals, and Their Applications. — CRC Press, 1994.

[9] *Delgado, R.* Multiple Ogawa, Stratonovich and Skorohod anticipating integrals // Stochastic Analysis and Applications. — 1998. Vol. 16. No. 5. — P. 859–872.

[10] *Solé, J.LL.*, *Utzet, F.* Intégrale multiple de Stratonovich pour le processus de Poisson // Séminaire de probabilités. — 1991. T. 25. — P. 270–283.

[11] *Solé, J.LL.*, *Utzet, F.* Une note sur l'intégrale multiple de Stratonovich pour le processus de Poisson // Séminaire de probabilités. — 1992. T. 26. — P. 410–414.

[12] *Farré, M.*, *Jolis, M.*, *Utzet, F.* Multiple Stratonovich integral and Hu – Meyer formula for Lévy processes // The Annals of Probability. — 2010. Vol. 38. No. 6. — P. 2136–2169.

[13] *Milstein, G.N.* Numerical Integration of Stochastic Differential Equations. — Kluwer Academic Publ., 1995.

[14] *Kloeden, P.E.*, *Platen, E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer-Verlag, 1995.

[15] *Аверина, Т.А.* Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019.

[16] *Кузнецов, Д.Ф.* К численному моделированию многомерных динамических систем при случайных возмущениях с порядками сильной сходимости 1.5 и 2.0 // Автоматика и телемеханика. — 2018. № 7. — С. 80–98.

[17] *Кузнецов, Д.Ф.* К численному моделированию многомерных динамических систем при случайных возмущениях с порядком сильной сходимости 2.5 // Автоматика и телемеханика. — 2019. № 5. — С. 99–117.

[18] *Kuznetsov, D.F.* Mean-Square Approximation of Iterated Ito and Stratonovich Stochastic Integrals: Method of Generalized Multiple Fourier Series. Application to Numerical Integration of Itô SDEs and Semilinear SPDEs // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2021. № 4. — С. A.1–A.788.

[19] *Rybakov, K.A.* Application of Walsh series to represent Stratonovich iterated stochastic integrals // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2020. Vol. 927. Id 012080.

[20] *Rybakov, K.A.* Using spectral form of mathematical description to represent Stratonovich iterated stochastic integrals // Smart Innovation, Systems and Technologies, vol. 217. — Springer, 2021. — P. 287–304.

[21] *Rybakov, K.A.* Spectral method of analysis and optimal estimation in linear stochastic systems // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. — 2020. Vol. 11. No. 3. Id 2050022.

[22] *Балакришнан, А.В.* Прикладной функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.

[23] *Гихман, И.И.*, *Скороход, А.В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977.

[24] *Бейтмен, Г.*, *Эрдейи, А.* Высшие трансцендентные функции. Ч. II. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1966.

[25] *Добрушин, Р.Л.*, *Минлос, Р.А.* Полиномы от линейных случайных функций // Успехи математических наук. — 1977. Т. 32. № 2 (194). — С. 67–122.

[26] *Бирман, М.Ш.* Простая теорема вложения для ядер интегральных операторов следового класса в $L^2(\mathbb{R}^m)$. Применение к формуле Фредгольма для следа // Алгебра и анализ. — 2015. Т. 27. № 2. — С. 211–217.

Orthogonal expansion of multiple Stratonovich stochastic integrals

K. A. Rybakov

Moscow Aviation Institute
(National Research University)

e-mail: rkoffice@mail.ru

Abstract. Based on the properties of Hermite polynomials, which are orthogonal with respect to the probability density of the normal distribution, a representation of multiple Stratonovich stochastic integrals by Wiener processes in the form of orthogonal series is proposed. Multiple Stratonovich stochastic integrals is also represented as the sum of multiple Itô stochastic integrals and the mathematical expectation of the Stratonovich integral, i.e., the generalized Hu – Meyer formula is obtained.

Key words: multiple Stratonovich stochastic integral, iterated Stratonovich stochastic integral, Wiener process, orthogonal expansion, Hu – Meyer formula.