

Прикладные задачи

**Крутильно-изгибный флаттер крыла: математические модели,  
исследование и предотвращение. Обзор**

Б. Р. Андриевский<sup>1,2\*</sup>, Н. В. Кузнецов<sup>1,2,3\*\*</sup>, Е. В. Кудряшова<sup>1,\*\*\*</sup>,  
О. А. Кузнецова<sup>1,\*\*\*\*</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ),  
Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Институт проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН),  
Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup> Department of Mathematical Information Technology,  
University of Jyväskylä, Finland

e-mail:

\*boris.andrievsky@gmail.com

\*\*n.v.kuznetsov@spbu.ru

\*\*\*e.kudryashova@spbu.ru

\*\*\*\*olga.kuznetsova@spbu.ru

**Аннотация.** В зависимости от режима полета, воздушный поток может либо гасить колебания самолета, либо, наоборот, колебательная механическая конструкция забирает энергию у набегающего потока, в результате чего может происходить быстрое увеличение амплитуды колебаний. Это опасное явление стало серьезным препятствием для развития высокоскоростной авиации. С 1930-х годов и по настоящее время, усилия многих исследователей направлены на описание динамики этого явления, изучение его свойств и разработку мер по его предотвращению. В данной статье дается обзор некоторых существующих результатов по упруго-изгибному

флаттеру крыла. Обзор начинается с описания различных способов моделирования упруго-изгибного флаттера крыла. Далее приведены результаты по исследованию явления упруго-изгибного флаттера крыла и описаны некоторые подходы к пассивному и активному подавлению флаттера.

**Ключевые слова:** флаттер крыла, скрытые колебания, моделирование, анализ, подавление.

## 1 Введение

### 1.1 Описание явления

Флаттер – это одна из разновидностей незатухающих упругих колебаний (автоколебаний) конструкции ЛА и является одним из проявлений *аэроупругости*: аэродинамические силы, действующие на ЛА в полете, вызывают деформации его упругой конструкции, которые приводят, в свою очередь к изменению действующих на нее аэродинамических сил. Он возникает в полете при скорости, достигшей некоторого определенного значения – т.н. *критической скорости флаттера*  $V_{кр}$ , [1–9]. Флаттер может появляться внезапно и при установившемся полете в спокойном воздухе. ЛА может быть подвержен различным формам флаттера: крыла, оперения, элеронов, рулей и др. Источником энергии флаттера служит набегающий поток, а обратная связь реализуется благодаря упругости конструкции самолета. При этом природа периодических аэродинамических сил, а следовательно, и механизма автоколебаний, определяется режимом полета. Механизм автоколебаний может быть различным: при автоколебаниях, возникающих в полете на больших скоростях с малыми углами атаки (собственно флаттер); в полете на малых скоростях при углах атаки, близких к срывным (*срывной флаттер*); при неустойчивом обтекании на трансзвуковом режиме полета (*buzz*, или «маховая тряска») и т. д.

При *изгибно-крутильном флаттере* крыло совершает маховые движения, в процессе которых периодически изменяются прогиб и угол закручивания каждого сечения крыла. Поскольку крыло колеблется в обтекающем его потоке, эти деформации и вызывают периодическое изменение внешних сил [7, 9]. Среди видов вибраций, которым подвержены ЛА, флаттер представляет особую опасность, так как возникающие при нем динамические напряжения в конструкции ЛА могут быстро (иногда в течение несколько секунд) привести к разрушению ЛА в полете.

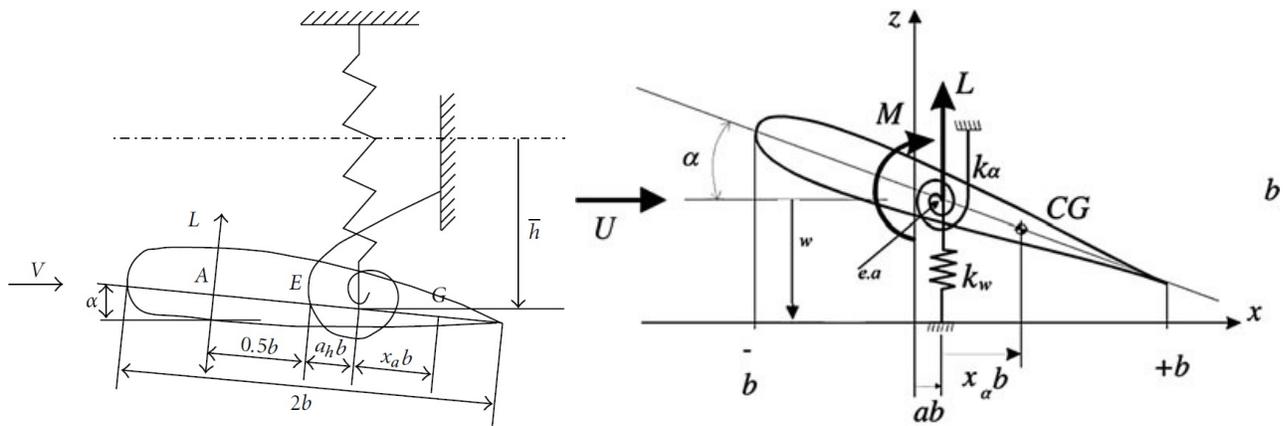


Рис. 1 — Схематическое изображение сечений крыла с упругими элементами (по [10,11])

Далее, в разделе 2, представлены модели упруго-изгибного флаттера крыла, где приведены уравнения прогиба и кручения плоского крыла, описана модель Теодорсена (*Theodorsen*) для комбинации аэродинамической поверхности крыла и элеронов, и модель неуправляемого изгибного флаттера через функцию Вагнера (*Wagner*). Также описаны некоторые модели пониженного порядка, и в качестве иллюстрации приводится моделирование изгибно-крутильных колебаний крыла. Обзор результатов по исследованию явления упруго-изгибного флаттера крыла приведен в разделе 3. Раздел 4 посвящен подходам к предотвращению (подавлению) флаттера. Описаны как пассивные, так и активные методы подавления флаттера. Заключительные замечания приведены в завершающей статью разделе 5. Внутри разделов ссылки на статьи расположены, преимущественно, в хронологическом порядке.

Отметим, что в настоящее время в системе индексирования Scopus указано более 12000 статей по техническим системам с ключевым словом «флаттер». На выбор материала для данного обзора повлияли научные интересы авторов, которые заранее приносят извинения коллегам и читателям, если не все заслуживающие внимание работы в этой широкой области отражены в обзоре.

## 2 Модели упруго-изгибного флаттера крыла

### 2.1 Уравнения изгиба и кручения плоского крыла

Рассматриваемая физическая система представляет собой двумерное сечение крыла, совершающее крутильные колебания по тангажу и изгибу

(*plunge*), см. рисунок 1. Угол наклона относительно оси упругости обозначен буквой  $\alpha$  (положительный, когда передняя кромка направлена вверх). Изгиб, обозначенный через  $\bar{h}$  положителен в направлении вниз. Ось упругости расположена на расстоянии  $a_h b$  от средней хорды крыла, а центр масс находится на расстоянии  $x_\alpha b$  от оси упругости. Оба расстояния положительны при измерении до задней кромки профиля крыла.

Для кубических восстанавливающих сил с дозвуковой аэродинамикой связанные уравнения отклонения и кручения крыла имеют вид [11,12] (см. также [13]):

$$\begin{bmatrix} I_\alpha & m_w x_\alpha b \\ m_w x_\alpha b & m_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\alpha & 0 \\ 0 & c_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_\alpha(\alpha) & 0 \\ 0 & k_h(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ -L \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $m_t$  – общая масса основного крыла и опорой конструкции,  $m_w$  – масса основной части крыла,  $x_\alpha$  – безразмерное расстояние между центром масс и осью изгиба;  $I_\alpha$  – момент инерции конструкции;  $b$  – средняя аэродинамическая хорда (с.а.х.) крыла [14–16];  $c_\alpha, c_h$  – коэффициенты демпфирования для смещения изгиба и угла тангажа соответственно;  $k_h(h)$  и  $k_\alpha(\alpha)$  – коэффициенты по смещению крыла и угловой жесткости соответственно,  $\alpha k_\alpha(\alpha)$  – нелинейное слагаемое силы упругости, которое, определяется выражением [12]

$$\alpha k_\alpha(\alpha) = k_1 \alpha^2 + k_2 \alpha^3. \quad (2)$$

В [11] коэффициент упругости принят в виде  $k_\alpha(\alpha) = k_{\alpha 0} + k_{\alpha 1} \alpha + k_{\alpha 2} \alpha^2$ .

Согласно [12], аэродинамические слагаемые  $L, M$  (подъемная сила и крутящий момент соответственно) на низких частотах и в дозвуковом полете могут быть выражены через приближение Теодорсена [17,18] в форме

$$L = \rho V^2 b c_{l_\alpha} s_p \left( \alpha + \left( \frac{\dot{h}}{V} + \left( \frac{1}{2} - A \right) b \frac{\alpha}{V} \right) \right) + \rho V^2 b c_{l_\beta} s_p \beta + \rho V^2 b c_{l_\gamma} s_p \gamma, \quad (3)$$

$$M = \rho V^2 b^2 c_{m_{\alpha\text{-eff}}} s_p \left( \alpha + \left( \frac{\dot{h}}{V} + \left( \frac{1}{2} - A \right) b \frac{\alpha}{V} \right) \right) + \rho V^2 b^2 c_{m_{\beta\text{-eff}}} s_p \beta + \rho V^2 b^2 c_{m_{\gamma\text{-eff}}} s_p \gamma, \quad (4)$$

где  $\rho$  – плотность воздуха;  $V$  – воздушная скорость полета;  $a$  – относительное расстояние между упругой осью и с.а.х. крыла (этот параметр существенно влияет на устойчивость системы),  $s_p$  – размах крыла;  $c_{l_\alpha}, c_{m_\alpha}$

– коэффициенты подъемной силы и момента на единицу угла атаки (производные подъемной силы и момента по углу атаки);  $c_{l_\beta}$ ,  $c_{m_\beta}$  – коэффициенты подъемной силы и момента на единицу угла атаки по задней кромке крыла;  $c_{l_\gamma}$ ,  $c_{m_\gamma}$  – коэффициенты подъемной силы и момента на единицу угла атаки по передней кромке крыла;  $c_{m_{\alpha\text{-eff}}}$ ,  $c_{m_{\beta\text{-eff}}}$ ,  $c_{m_{\gamma\text{-eff}}}$  обозначают производные аэродинамического момента от углов атаки: крыла, задней кромки и передней кромки крыла соответственно. Согласно [12] параметры этой модели задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} c_{m_{\alpha\text{-eff}}} &= \left( \frac{1}{2} + a \right) c_{l_\alpha} + 2c_{m_\alpha}, \\ c_{m_{\beta\text{-eff}}} &= \left( \frac{1}{2} + a \right) c_{l_\beta} + 2c_{m_\beta}, \\ c_{m_{\gamma\text{-eff}}} &= \left( \frac{1}{2} + a \right) c_{l_\gamma} + 2c_{m_\gamma}. \end{aligned} \quad (5)$$

Следуя [12], введем обозначения:  $c_1 = \rho V^2 b s_p$ ,  $c_2 = \rho V^2 b^2 s_p$ . Тогда (3), (4) принимают вид

$$L = C_1 \left( \alpha + \left( \frac{\dot{h}}{V} + \left( \frac{1}{2} - A \right) b \frac{\alpha}{V} \right) \right) + c_1 c_{l_\beta} \beta + c_1 c_{l_\gamma} \gamma, \quad (6)$$

$$M = c_2 c_{m_{\alpha\text{-eff}}} \left( \alpha + \left( \frac{\dot{h}}{V} + \left( \frac{1}{2} - A \right) b \frac{\alpha}{V} \right) \right) + c_2 c_{m_{\beta\text{-eff}}} \beta + c_2 c_{m_{\gamma\text{-eff}}} \gamma. \quad (7)$$

Введя вектор состояния  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$  как  $\mathbf{x} = \left[ \alpha \quad \dot{\alpha} \quad h \quad \dot{h} \right]^T$ , приведем уравнения (1), (2), (6), (7) к виду [12]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= c_{\alpha_1} x_1 + c_{\alpha_{\text{nonl1}}} x_1^3 + c_{\dot{\alpha}_1} x_2 + c_{h_1} x_3 + c_{\dot{h}_1} x_4 + c_{\beta_1} \beta + c_{\gamma_1} \gamma, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= c_{\alpha_2} x_1 + c_{\alpha_{\text{nonl2}}} x_1^3 + c_{\dot{\alpha}_2} x_2 + c_{h_2} x_3 + c_{\dot{h}_2} x_4 + c_{\beta_2} \beta + c_{\gamma_2} \gamma, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 c_{\alpha_1} &= c_2 m_t c_{m_{\alpha\text{-eff}}} + c_1 m_w x_{\alpha} b c_{l_{\alpha}} - m_t k_1, \\
 c_{\alpha_{\text{nonl1}}} &= -m_t k_2, \\
 c_{\dot{\alpha}_1} &= c_2 m_t c_{m_{\alpha\text{-eff}}} \left( \frac{1}{2} - a \right) b \frac{1}{V} + c_1 m_w x_{\alpha} b c_{l_{\alpha}} \left( \frac{1}{2} - a \right) b \frac{1}{V} - c_{\alpha} m_t, \\
 c_{h_1} &= k_h m_w x_{\alpha} b, \\
 c_{\dot{h}_1} &= c_2 m_t c_{m_{\alpha\text{-eff}}} \frac{1}{V} + c_1 m_w x_{\alpha} b c_{l_{\alpha}} \frac{1}{V} + c_h m_w x_{\alpha} b, \\
 c_{\beta_1} &= c_2 m_t c_{m_{\beta\text{-eff}}} + c_1 m_w x_{\alpha} b c_{l_{\beta}}, \\
 c_{\gamma_1} &= c_2 m_t c_{m_{\gamma\text{-eff}}} + c_1 m_w x_{\alpha} b c_{l_{\gamma}}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 c_{\alpha_2} &= -c_2 m_w x_{\alpha} b c_{m_{\alpha\text{-eff}}} - c_1 I_{\alpha} c_{l_{\alpha}} + m_w x_{\alpha} b k_1, \\
 c_{\alpha_{\text{nonl2}}} &= m_w x_{\alpha} b k_2, \\
 c_{\dot{\alpha}_2} &= -c_2 m_w x_{\alpha} b c_{m_{\alpha\text{-eff}}} \left( \frac{1}{2} - a \right) b \frac{1}{V} - c_1 I_{\alpha} c_{l_{\alpha}} \left( \frac{1}{2} - a \right) b \frac{1}{V} + c_{\alpha} m_w x_{\alpha} b, \\
 c_{h_2} &= -k_h I_{\alpha}, \\
 c_{\dot{h}_2} &= -c_2 m_w x_{\alpha} b c_{m_{\alpha\text{-eff}}} \frac{1}{V} - c_1 I_{\alpha} c_{l_{\alpha}} \frac{1}{V} - c_h I_{\alpha}, \\
 c_{\beta_2} &= -c_2 m_w x_{\alpha} b c_{m_{\beta\text{-eff}}} - c_1 I_{\alpha} c_{l_{\beta}}, \\
 c_{\gamma_2} &= -c_2 m_w x_{\alpha} b c_{m_{\gamma\text{-eff}}} - c_1 I_{\alpha} c_{l_{\gamma}}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

В качестве примера, в таблице 1 приведены значения параметров из [12].

Таблица 1 – Численные значения параметров модели (8)

$a$	-0.6719	$c_{m_{\gamma}}$	-0.1005
$b$	0.1905 м	$I_{\alpha}$	$(m_w x_{\alpha}^2 b^2 + 0.009039)$ кг м <sup>2</sup>
$c_{\alpha}$	0.036 кг м <sup>2</sup> /с	$k_{\alpha}(\alpha)$	$12.77 + 1003\alpha^2\alpha^2$
$c_h$	27.43 кг/с	$k_h$	2844.4 Н/м
$c_{l_{\alpha}}$	6.757	$m_t$	15.57 кг
$c_{l_{\beta}}$	3.358	$m_w$	4.34 кг
$c_{l_{\gamma}}$	-0.1566	$s_p$	0.5945 м
$c_{m_{\alpha}}$	0	$x_{\alpha}$	$-(0.0998 + a)$
$c_{m_{\beta}}$	-0.6719	$\rho$	1.225 кг/м <sup>3</sup>

В результате вычислений согласно (5), (9), (10), получим приведенные в таблице 2 параметры.

Таблица 2 — Значения параметров уравнений (10) согласно [12]

$V$	19.0625	$m_w$	4.3400	$a$	-0.6719
$x_\alpha$	0.5721	$c_{m_\gamma}$	-0.1005	$b$	0.1905
$I_\alpha$	0.0606	$c_\alpha$	0.0360	$k_1$	12.77
$k_2$	1003	$c_h$	27.4300	$k_h$	$2.844 \cdot 10^3$
$c_{l_\alpha}$	6.7570	$m_t$	15.57	$c_{l_\beta}$	3.3580
$c_{l_\gamma}$	-0.1566	$s_p$	0.5945	$c_{m_\alpha}$	0
$c_{m_\beta}$	-0.6719	$\rho$	1.2250	$c_{m_{\alpha\text{-eff}}}$	-1.1615
$c_{m_{\beta\text{-eff}}}$	-1.9210	$c_{m_{\gamma\text{-eff}}}$	-0.1741	$c_1$	50.4130
$c_2$	9.6037	$c_{\alpha_1}$	-211.39	$c_{\alpha_{\text{nonl}1}}$	-778.5
$c_{\dot{\alpha}_1}$	-0.7076	$c_{h_1}$	$1.3454 \cdot 10^3$	$c_{h_1}$	12.3153
$c_{\beta_1}$	-207.1799	$c_{\gamma_1}$	-29.7643	$c_{\alpha_2}$	-9.3225
$c_{\alpha_{\text{nonl}2}}$	23.6498	$c_{\dot{\alpha}_2}$	-0.1629	$c_{h_2}$	-172.3376
$c_{h_2}$	-2.4678	$c_{\beta_2}$	-1.5305	$c_{\gamma_2}$	1.2691

Для крыла с неуправляемыми кромками, в [11, 17] приведены следующие выражения:

$$L = \pi \rho b^2 \left( \ddot{h} + V \dot{\alpha} - ba \ddot{\alpha} \right) + 2\pi \rho V b Q C, \quad (11)$$

$$M = \pi \rho b^2 \left( ba \ddot{h} - V b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} - b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right) + 2\pi \rho b^2 V \left( a + \frac{1}{2} \right) Q C, \quad (12)$$

где  $V$  – скорость движения относительно невозмущенного потока,  $C$  – функция Теодорсена, а *эффективный угол атаки*  $Q$  определяется выражением

$$Q = V \alpha + \dot{h} + \dot{\alpha} b \left( \frac{1}{2} - a \right). \quad (13)$$

С использованием функции Вагнера (*Wagner*)  $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(k)}{ik} e^{ikt} dk$  и теоремы о свертке, в [11, 19, 20] получено следующее выражение

$$\begin{aligned} L_c &= \int_{-\infty}^{-\infty} C(k) f(\omega) e^{i\omega t} d\omega = Q(0) \varphi(\tau) + \int_0^\tau \frac{\partial Q(\sigma)}{\partial \sigma} \varphi(\tau - \sigma) d\sigma = \\ &= Q(\tau) \varphi(0) + \int_0^\tau Q(\sigma) \frac{\partial \varphi(\tau - \sigma)}{\partial \sigma} d\sigma. \end{aligned} \quad (14)$$

На основе приближения Сирса (*Sears*) [19, 21, 22], в [20] функция Вагнера представляется в виде

$$\Phi(\tau) \approx c_0 - c_1 e^{-c_2 \tau} - c_3 e^{-c_4 \tau}, \quad (15)$$

где  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 0.165$ ,  $c_2 = 0.0455$ ,  $c_3 = 0.335$ ,  $c_4 = 0.3$ . Используя далее аппроксимацию Паде [23] для экспоненты, в [11] выведена следующая формула:

$$L_c = (c_0 - c_1 - c_3)Q(t) + c_2 c_4 (c_1 + c_3) \left( \frac{V^2}{b} \right) \bar{x} + (c_1 c_2 + c_3 c_4) V \dot{\bar{x}}, \quad (16)$$

где  $\bar{x}$ ,  $\dot{\bar{x}}$  – две дополнительные переменные уравнений состояния модели, определяемые следующим уравнением [11]

$$\ddot{\bar{x}} = -c_2 c_4 \frac{V^2}{b^2} \bar{x} - (c_2 + c_4) \frac{V}{b} \dot{\bar{x}} + \frac{V}{b} \alpha + \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} + \frac{\dot{h}}{b}. \quad (17)$$

Используя (14), (16), получим уравнения для подъемной силы и момента в виде [11]:

$$L = \pi \rho b^2 \left( \ddot{h} + V \dot{\alpha} - ba \ddot{\alpha} \right) + 2\pi \rho V b (c_0 - c_1 - c_3) Q + 2\pi \rho V^3 c_2 c_4 (c_1 + c_3) \bar{x} + 2\pi \rho V^2 b (c_1 c_2 + c_3 c_4) \dot{\bar{x}}, \quad (18)$$

$$M = \pi \rho b^2 \left( ba \ddot{h} - V b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} - b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right) + 2\pi \rho b^2 V \left( a + \frac{1}{2} \right) (c_0 - c_1 - c_3) Q + 2\pi \rho b V^3 \left( a + \frac{1}{2} \right) c_2 c_4 (c_1 + c_3) \bar{x} + 2\pi \rho b^2 V^2 \left( a + \frac{1}{2} \right) (c_1 c_2 + c_3 c_4) \dot{\bar{x}}. \quad (19)$$

## 2.2 Модель Теодорсена для комбинации крыло-элерон

В [17] представлена модель комбинации крыло-элерон. Определены аэродинамические силы, действующие на колебания крыла, а также комбинации крыло-элерон с тремя степенями свободы. Задача сводится к вычислению некоторых определенных интегралов, относящихся к функциям Бесселя первого и второго рода, нулевого и первого порядков. Силы давления воздуха, действующие на крыло или крыло-элерон в произвольном колебательном движении с несколькими степенями свободы, рассматриваются в [17] в свете теории, основанной на потенциальном потоке и условии

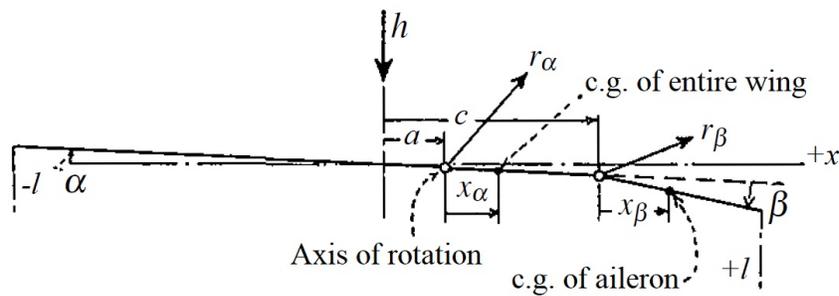


Рис. 2 — Эскиз комбинации аэродинамического профиля и элеронов (по [17])

Кутты (*Kutta*).<sup>1</sup> Эта теория движения крыла применена в [17] к случаю колебательного движения не только крыла в целом, но и элерона.

Следующие соглашения применяются к рассматриваемой комбинации аэродинамического профиля и элерона (см. рисунок 2). Положение центра тяжести крыла-элерона  $x_a$  отсчитывается от координаты оси вращения  $a$ ; положение центра тяжести элерона  $x_b$  отсчитывается от координаты шарнира  $c$ ;  $r_\alpha$  и  $r_\beta$  – радиусы вращения крыла-элерона, а ось вращения элерона обозначена как шарнир. Величины  $x_b$  и  $r_\beta$  – это некоторые “уменьшенные” значения (определенные ниже). Величины  $a$ ,  $x_\alpha$ ,  $c$  и  $x_\beta$  положительны по направлению к задней кромке (вправо),  $h$  – вертикальная координата оси вращения в  $a$  по отношению к фиксированной системе отсчета, считается положительной при смещении вниз. Углы  $\alpha$  и  $\beta$  положительны при вращении по часовой стрелке. Вектор скорости набегающего потока  $\vec{V}$  направлен вправо и горизонтально. Угол атаки  $\alpha$  относится к направлению  $\vec{V}$ , угол элерона  $\beta$  относится к положению без отклонения, а не к направлению потока. Величины  $r_\alpha$  и  $r_\beta$  всегда встречаются в квадрате. Передняя кромка расположена в положении  $-1$ , задняя – в положении  $+1$ . Величины  $a$ ,  $c$ ,  $x_\alpha$ ,  $x_\beta$ ,  $r_\alpha$ , и  $r_\beta$  безразмерны, с полухордой  $b$  в качестве эталонной единицы.

Через условия равновесия моментов всего профиля относительно  $a$ , моментов действующих на элерон относительно  $c$  и вертикальных сил, в [17] выведены следующие три уравнения комбинированного движения профиля крыла и элеронов:

$$\begin{aligned} \alpha : & -I_\alpha \ddot{\alpha} - I_\beta \ddot{\beta} - b(c-a)S_\beta \ddot{\beta} - S_\alpha \ddot{h} - \alpha C_\alpha + M_\alpha = 0, \\ \beta : & -I_\beta \ddot{\beta} - I_\alpha \ddot{\alpha} - b(c-a)S_\beta \ddot{\alpha} - S_\beta \ddot{h} - \beta C_\beta + M_\beta = 0, \\ h : & -\ddot{h}M - \ddot{\alpha}S_\alpha - \ddot{\beta}S_\beta - hC_h + P = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

<sup>1</sup> Условие Кутты [24–27] относится к движению в установившемся потоке и, вкратце, означает что тело с острой задней кромкой, движущееся сквозь поток, создает вокруг себя циркуляцию достаточной силы, чтобы удерживать заднюю точку застоя на задней кромке.

Таблица 3 — Константы нелинейных уравнений системы крыло-элерон по [17]

$\kappa = \frac{\pi \rho b^2}{M}$	– отношение массы цилиндра с воздухом диаметром, равным хорде крыла к массе крыла, оба взяты при одинаковой длине по пролету в зависимости от плотности воздуха $\rho$
$r_\alpha = \sqrt{\frac{I_\alpha}{Mb^2}}$	– радиус вращения, деленный на $b$
$x_\alpha = \frac{S_\alpha}{Mb}$	– расстояние до центра тяжести крыла от $a$ , деленное на $b$
$\omega_\alpha = \sqrt{\frac{C_\alpha}{I_\alpha l}}$	– частота крутильных колебаний относительно $a$
$r_\beta = \sqrt{\frac{I_\beta}{Mb^2}}$	– <i>уменьшенный</i> радиус вращения элерона деленный на $b$ , то есть радиус, на котором вся масса профиля должна быть сосредоточена, чтобы получить момент инерции элерона $I_\beta$
$x_\beta = \frac{S_\beta}{Mb}$	– <i>уменьшенное</i> расстояние до центра тяжести от $c$
$\omega_\beta = \sqrt{\frac{C_\beta}{I_\beta}}$	– частота крутильных колебаний элерона относительно $c$
$\omega_h = \sqrt{\frac{C_h}{M}}$	– частота колебаний крыла

где  $M$  – масса крыла на единицу его длины;  $S_\alpha$ ,  $S_\beta$  – статические моменты крыла на единицу длины крыла-элерона и элерона соответственно. Первый из них относится к оси  $a$  а второй – к оси подвески элерона  $c$ .  $I_\alpha$ ,  $I_\beta$  - моменты инерции на единицу длины крыльев-элеронов и элеронов относительно осей  $a$  и  $c$  соответственно;  $C_\alpha$  – крутильная жесткость крыла вокруг  $a$  на единицу длины;  $C_\beta$  – крутильная жесткость элерона вокруг  $c$  на единицу длины;  $C_h$  – жесткость крыла при изгибе, соответствующая единице длины.

Введенные в [17] константы нелинейных уравнений системы крыло-элерон приведены в таблице 3.

После некоторых замен и приведения к безразмерному виду, в [17] получена следующая система нелинейных уравнений динамики

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} \left( r_\alpha^2 + \kappa \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \right) + \dot{\alpha} \frac{v}{b} \kappa \left( \frac{1}{2} - a \right) + \alpha \frac{C_\alpha}{Mb^2} + \\ + \ddot{\beta} \left( r_\beta^2 + (c - a)x_\beta - \frac{T_7}{\pi} \kappa - (c - a) \frac{T_1}{\pi} \kappa \right) + \\ + \frac{1}{\pi} \dot{\beta} \frac{v}{b} \left( -2p - \left( \frac{1}{2} - a \right) T_4 \right) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\alpha} \left( r_\beta^2 + (c-a)x_\beta - \kappa \frac{T_7}{\pi} - (c-a) \frac{T_1}{\pi} \kappa \right) + \dot{\alpha} \left( p - T_1 - \frac{1}{2} T_4 \right) \frac{v \kappa}{b \pi} + \ddot{\beta} \left( r_\beta^2 - \frac{1}{\pi^2} \kappa T_3 \right) - \\ & - \frac{1}{2\pi^2} \dot{\beta} T_4 T_{11} \frac{v}{b} \kappa + \beta \left( \frac{C_\beta}{M b^2} + \frac{1}{\pi^2} \frac{v^2}{b^2} \kappa (T_5 - T_4 T_{10}) \right) + \ddot{h} \left( x_\beta - \frac{1}{\pi} \kappa T_1 \right) \frac{1}{b} \\ & + \frac{T_{12}}{\pi} \kappa \frac{v c(k)}{b} \left( \frac{v \alpha}{b} + \frac{\dot{h}}{b} + \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} + \frac{T_{10} v}{\pi b} \beta + \frac{T_{11}}{2\pi} \dot{\beta} \right) = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\ddot{\alpha} (x_\alpha - \kappa a) + \dot{\alpha} \frac{v}{b} \kappa + \ddot{\beta} \left( x_\beta - \frac{1}{\pi} T_1 \kappa \right) - \dot{\beta} \frac{v}{b} T_4 \kappa \frac{1}{\pi} + h(1 + \kappa) \frac{1}{b} + h \frac{C_h}{M} \frac{1}{b} = 0, \quad (23)$$

где введены следующие обозначения:

$$T_1 = \frac{1}{3} \sqrt{1 - c^2} (2 + c^2) + c \cos^{-1} c,$$

$$T_2 = c(1 - c^2) - \sqrt{1 - c^2} (1 + c^2) \cos^{-1} c + c (\cos^{-1} c)^2,$$

$$T_3 = - \left( \frac{1}{8} + c^2 \right) (\cos^{-1} c)^2 + \frac{1}{4} c \sqrt{1 - c^2} \cos^{-1} c (7 + 2c^2) - \frac{1}{8} (1 - c^2) (5c^2 + 4),$$

$$T_4 = - \cos^{-1} c + c \sqrt{1 + c^2}, \quad T_5 = -(1 - c^2) - (\cos^{-1} c)^2 + 2c \sqrt{1 - c^2} \cos^{-1} c,$$

$$T_6 = T_2, \quad T_7 = - \left( \frac{1}{8} + c^2 \right) \cos^{-1} c + \frac{1}{8} c \sqrt{1 - c^2} (7 + 2c^2),$$

$$T_8 = - \frac{1}{3} \sqrt{1 - c^2} (2c^2 + 1) + c \cos^{-1} c,$$

$$T_9 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \left( \sqrt{1 - c^2} \right)^3 + a T_4 \right) = \frac{1}{2} (-p + a T_4), \quad \text{где } p = - \frac{1}{3} \left( \sqrt{1 - c^2} \right)^3,$$

$$T_{10} = \sqrt{1 - c^2} \cos^{-1} c, \quad T_{11} = \cos^{-1} c (1 - 2c) + \sqrt{1 - c^2} (2 - c),$$

$$T_{12} = \sqrt{1 - c^2} (2 + c) - \cos^{-1} c (2c + 1), \quad T_{13} = 2(-T_7 - (c - a)T_1), \quad T_{14} = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} ac.$$

Функция  $C(k)$  в (22) определяется как

$$C(k) = \frac{\int_1^\infty \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} e^{-ikx_0} dx_0}{\int_1^\infty \frac{x_0 + 1}{\sqrt{x_0^2 - 1}} e^{-ikx_0} dx_0} = F + iG, \quad (24)$$

где  $k$  – положительная постоянная, определяющая длину волны;  $F(k)$ ,  $G(k)$  выражаются через функции Бесселя (более подробные сведения приведены в [17]).

### 2.3 Приближенное описание подъемной весовой функции крыльев в несжимаемом потоке

В теории аэроупругости подъемная сила, вызванная порывом ветра, может быть выражена с помощью функции индикационной (*indicial*) подъемной силы, которая представляет собой отношение кратковременной подъемной силы к установившейся подъемной силе на профиле, пересекающем резкий порыв ветра, перпендикулярный траектории полета. Эта функция, возникающая в результате скачка угла атаки крыла, является фундаментальной для расчета переходных процессов самолета [28]. Первоначальное представление было предложено Вагнером (*Wagner*) в 1925 году. С тех пор были разработаны некоторые упрощенные приближения.

При резком увеличении угла атаки  $\alpha$  сила граничного (подъемного) вихря увеличивается на  $\Gamma$ . Поскольку полная циркуляция вихря в поле течения должна сохранять значение, которое было до скачка вдоль  $\alpha$ , на задней кромке крыла образуется силовой контрвихрь ( $-\Gamma$ ). Вагнер получил выражение для подъемной силы, вызванной скачкообразным изменением угла атаки  $\alpha$ , применив конформное преобразование и физический принцип, согласно которому скорость на задней кромке в каждый момент времени конечна (условие Кутты, [24–27]). Вагнер вывел следующее выражение для подъемной силы как функции безразмерного расстояния  $\bar{s} = Vt/(c/2)$ :

$$l = 2\pi\rho V w k_1(\bar{s}), \quad (25)$$

где  $k_1(\bar{s})$  – функция Вагнера,  $l$  – относительная подъемная сила на единицу размаха крыла.

Подъемную силу крыла при произвольном изменении угла атаки можно найти через весовую функцию и интеграл Дюамеля.

$$C_L(t) = \int_0^t (\Delta C_L(t - \tau) \dot{\alpha}(\tau)) d\tau, \quad (26)$$

где  $\Delta C_L(t)$  – импульсная функция подъемной силы. Отсюда можно записать изображение по Лапласу

$$C_L(s) = \Delta C_L(s) \mathcal{L}\{\dot{\alpha}(t)\}, \quad (27)$$

( $s \in \mathbb{C}$  – аргумент преобразования Лапласа).

В [29], импульсная функция для некоторых эллиптических крыльев представлена в виде следующего экспоненциального ряда

$$C_L(s) = a_0 + a_1 e^{-b_1(Vt/(c_r/2))} + a_2 a_1 e^{-b_2(Vt/(c_r/2))} + \dots \quad (28)$$

В [28], выражение (28) аппроксимируется только одним экспоненциальным членом. В этой работе также приведены приближения для трехмерного воздушного потока вокруг крыла.

## 2.4 Модель неуправляемого изгибного флаттера с помощью функции Вагнера

В безразмерном виде, уравнения неуправляемого изгибного флаттера записываются в [30] следующим образом

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + x_\alpha \ddot{\alpha} + 2\zeta_\xi \frac{\bar{\omega}}{V^*} \dot{\xi} + \left(\frac{\bar{\omega}}{V^*}\right)^2 G(\xi) &= -\frac{1}{\pi\mu} C_L(t) + \frac{P(t)b}{mV^2}, \\ \frac{x_\alpha}{r_\alpha^2} \ddot{\xi} + \ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha \frac{1}{V^*} \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{V^*}\right)^2 M(\alpha) &= \frac{2}{\pi\mu r_\alpha^2} C_M(t) + \frac{Q(t)}{mV^2 r_\alpha^2}, \end{aligned} \quad (29)$$

где знак “.” означает дифференцирование по безразмерному времени  $t = Vt/b$ ;  $t_1$  – реальное время;  $V$  – воздушная скорость;  $\xi = \bar{h}/b$  – безразмерное смещение (*plunge*);  $V^* = V/(b\omega_\alpha)$  – безразмерная скорость потока;  $\bar{\omega} = \omega_\xi/\omega_\alpha$ , где  $\omega_\xi$  и  $\omega_\alpha$  – собственные частоты изолированных изгибных и крутильных колебаний соответственно;  $\zeta_\xi$  и  $\zeta_\alpha$  – коэффициенты демпфирования;  $r_\alpha$  обозначает радиус кругового движения относительно оси упругости;  $G(\xi)$  и  $M(\alpha)$  – коэффициенты жесткости на нелинейный изгиб и крутильную жесткость соответственно. Внешняя сила и момент обозначаются  $P(t)$  и  $Q(t)$ ;  $m$  – масса крыла на единицу длины;  $\mu$  – отношение масс крыла и воздуха.  $C_L$  и  $C_M$  обозначают коэффициенты подъемной силы и момента тангажа, соответственно.

В [10] предполагается, что  $G(\xi) = \xi$ ,  $M(\alpha) = \alpha + \eta\alpha^3$ , где  $\eta$  – коэффициент кубической составляющей крутильной жесткости. В [30] для  $G(\xi)$  также используется кубическая нелинейная зависимость  $G(\xi) = \xi + \gamma\xi^3$ , хотя в основной части, в [30] используется и линейное приближение (в котором  $\gamma = 0$ ).

Для несжимаемого потока выражения для  $C_L$  и  $C_M$ , согласно [10, 30], имеют вид:

$$\begin{aligned} C_L(t) &= \pi \left( \ddot{\xi} - a_h \ddot{\alpha} + \dot{\alpha} \right) + 2\pi \left( \alpha(0) + \dot{\xi}(0) + \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \dot{\alpha}(0) \right) \varphi(\tau) + \\ &+ 2\pi \int_0^t \varphi(\tau - \sigma) \cdot \left( \dot{\alpha}(\sigma) + \ddot{\xi}(\sigma) + \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \ddot{\alpha}(\sigma) \right) d\sigma, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
 C_M(t) = & \pi \left( \frac{1}{2} + a_h \right) \left( \alpha(0) + \dot{\xi}(0) + \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \dot{\alpha}(0) \right) \varphi(t) \\
 & + \pi \left( \frac{1}{2} + a_h \right) \int_0^t \varphi(t-\sigma) \cdot \left( \dot{\alpha}(\sigma) + \dot{\xi}(\sigma) + \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \ddot{\alpha}(\sigma) \right) d\sigma \quad (31) \\
 & + \frac{\pi}{2} a_h \left( \ddot{\xi} - a_h \ddot{\alpha} \right) - \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \frac{\pi}{2} \dot{\alpha} - \frac{\pi}{16} \ddot{\alpha},
 \end{aligned}$$

где функция Вагнера  $\Phi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} C(k) k e^{iks}$  представляется следующей аппроксимацией Джона (John) [31]:  $\Phi(t) = 1 - \psi_1 e^{-\varepsilon_1 t} - \psi_2 e^{-\varepsilon_2 t}$ ,  $\psi_1 = 0.165$ ,  $\psi_2 = 0.335$ ,  $\varepsilon_1 = 0.0455 V/b$ ,  $\varepsilon_2 = 0.3 V/b$ .

Чтобы исключить интегральные члены в (29), (30), вводятся новые переменные [30, 32, 33]:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \int_0^t e^{\varepsilon_1(t-\sigma)} \alpha(\sigma) d\sigma, & w_2 &= \int_0^t e^{\varepsilon_2(t-\sigma)} \alpha(\sigma) d\sigma, \\
 w_3 &= \int_0^t e^{\varepsilon_1(t-\sigma)} \xi(\sigma) d\sigma, & w_4 &= \int_0^t e^{\varepsilon_2(t-\sigma)} \xi(\sigma) d\sigma.
 \end{aligned} \quad (32)$$

Тогда система (29) принимает вид [10]

$$\begin{aligned}
 c_0 \ddot{\xi} + c_1 \ddot{\alpha} + c_2 \dot{\xi} + c_3 \dot{\alpha} + c_4 \xi + c_5 + c_6 w_1 + c_7 w_2 + c_8 w_3 + \\
 + c_9 w_4 + c_{10} G(\xi) = f(t), \\
 d_0 \ddot{\xi} + d_1 \ddot{\alpha} + d_2 \dot{\xi} + d_3 \dot{\alpha} + d_4 \xi + d_5 \alpha + d_6 w_1 + d_7 w_2 + d_8 w_3 + \\
 + d_9 w_4 + d_{10} M(\alpha) = g(t),
 \end{aligned} \quad (33)$$

где функции  $f(t)$ ,  $g(t)$  зависят от начальных условий, функции Вагнера и внешних воздействий.

Нелинейные восстанавливающие силы  $G(\xi)$  и  $M(\alpha)$  имеют вид  $G(\xi) = \gamma \xi^3$ ,  $M(\alpha) = \eta \alpha^3$  с коэффициентами  $\gamma$ ,  $\eta$ , а коэффициенты  $c_i$ ,  $d_i$ ,  $i = 0, \dots, 10$

описываются следующими выражениями [10]:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= 1 + \frac{1}{\mu}, \quad c_1 = x_\alpha - \frac{a_h}{\mu}, \quad c_2 = \frac{2}{\mu}(1 - \psi_1 - \psi_2) + 2\zeta_\xi \frac{\bar{\omega}}{V^*}, \\
 c_3 &= \frac{1}{\mu} (1 + (1 - 2a_h)(1 - \psi_1 - \psi_2)), \quad c_4 = \frac{2}{\mu} (\varepsilon_1 \psi_1 + \varepsilon_2 \psi_2), \\
 c_5 &= \frac{2}{\mu} \left( 1 - \psi_1 - \psi_2 + \left( \frac{1}{2} - a_h \right) (\varepsilon_1 \psi_1 + \varepsilon_2 \psi_2) \right), \\
 c_6 &= \frac{2}{\mu} \varepsilon_1 \psi_1 \left( 1 - \varepsilon_1 \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \right), \quad c_7 = \frac{2}{\mu} \varepsilon_2 \psi_2 \left( 1 - \varepsilon_2 \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \right), \\
 c_8 &= -\frac{2}{\mu} \varepsilon_1^2 \psi_1, \quad c_9 = -\frac{2}{\mu} \varepsilon_2^2 \psi_2, \quad c_{10} = \left( \frac{\bar{\omega}}{V^*} \right)^2, \\
 d_0 &= \frac{x_\alpha^2}{r_\alpha} - \frac{a_h}{\mu r_\alpha^2}, \quad d_1 = 1 + \frac{1 + 8a_h^2}{8\mu r_\alpha^2}, \quad d_2 = -\frac{1 + 2a_h}{\mu r_\alpha^2} (\varepsilon_1 \psi_1 + \varepsilon_2 \psi_2), \\
 d_3 &= \frac{1 - 2a_h}{2\mu r_\alpha^2} - \frac{(1 - 4a_h^2)(1 - \psi_1 - \psi_2)}{2\mu r_\alpha^2} + \frac{2\zeta_\alpha}{V^*}, \\
 d_4 &= -\frac{1 + 2a_h}{\mu r_\alpha^2} (\varepsilon_1 \psi_1 + \varepsilon_2 \psi_2), \\
 d_5 &= -\frac{1 + 2a_h}{\mu r_\alpha^2} (1 - \psi_1 - \psi_2) - \frac{(1 + 2a_h)(1 - 2a_h)(\psi_1 \varepsilon_1 - \psi_2 \varepsilon_2)}{2\mu r_\alpha^2}, \\
 d_6 &= -\frac{(1 + 2a_h)\psi_1 \varepsilon_1}{\mu r_\alpha^2} \left( 1 - \varepsilon_1 \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \right), \\
 d_7 &= \frac{(1 + 2a_h)\psi_2 \varepsilon_2}{\mu r_\alpha^2} \left( 1 - \varepsilon_2 \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \right), \\
 d_8 &= \frac{(1 + 2a_h)\psi_1 \varepsilon_1^2}{\mu r_\alpha^2}, \quad d_9 = \frac{(1 + 2a_h)\psi_2 \varepsilon_2^2}{\mu r_\alpha^2}, \quad d_{10} = \left( \frac{1}{V^*} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Вводя вектор переменных состояния  $x \in \mathbb{R}^8$  с компонентами  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = \dot{\alpha}$ ,  $x_3 = \xi$ ,  $x_4 = \dot{\xi}$ ,  $x_5 = w_1$ ,  $x_6 = w_2$ ,  $x_7 = w_3$ ,  $x_8 = w_4$  и предполагая сначала, что нет внешних сил,  $f(t) = g(t) = 0$ , можно переписать систему (33) в следующем виде [10]

$$M\ddot{x} + \mu\dot{x} + Kx + CW(x) + F(x) = 0, \tag{36}$$

где  $x = [\xi, \alpha]^T$ ,  $W(x) = [w_1, w_2, w_3, w_4]^T$ ,

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \\ d_0 & d_1 \end{bmatrix}, & \mu &= \begin{bmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{bmatrix}, \\
 K &= \begin{bmatrix} c_4 + c_{10} & c_5 \\ d_4 & d_5 + d_{10} \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} c_6 & c_7 & c_8 & c_9 \\ d_6 & d_7 & d_8 & d_9 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{37}$$

$$F(x) = [d_{10}\gamma\xi^3, d_{10}\eta\alpha^3]^T = [d_{10}\gamma x_1^3, d_{10}\eta x_3^3]^T.$$

В форме Коши система (37) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = v_2, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = v_1, \\ \dot{x}_5 = -\varepsilon_1 x_5 + x_1, \\ \dot{x}_6 = -\varepsilon_2 x_6 + x_1, \\ \dot{x}_7 = -\varepsilon_1 x_7 + x_3, \\ \dot{x}_8 = -\varepsilon_2 x_8 + x_3, \end{cases} \quad (38)$$

где  $v = [v_1 \ v_2]^T = -M^{-1}(\mu \cdot [x_2 \ x_4]^T + K[x_1 \ x_3]^T + CW + F(x))$ .

Как указано в [30], если взять функцию Вагнера  $\Phi \equiv 1$ , т. е.  $\psi_1 = \psi_2 = 0$  в выражении для  $\Phi$ , то уравнения для  $C_L(t)$ ,  $C_M(t)$  принимают вид

$$\begin{aligned} C_L(t) &= \pi \left( \ddot{\xi} - a_h \ddot{\alpha} + 2\dot{\xi}((2 - 2a_h)\dot{\alpha}) + 2\alpha, \right. \\ C_M(t) &= \frac{\pi}{2} \left( a_h \ddot{\xi} - \left( \frac{1}{8} + A_h^2 \right) \ddot{\alpha} + (1 + 2a_h)\dot{\xi} + A_h(1 - 2a_h)\dot{\alpha} + (1 + 2a_h)\alpha \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Затем исходная аэроупругая система описывается как система из четырех дифференциальных уравнений первого порядка. Но в таком приближении второе явление бифуркации не может быть обнаружено [30].

## 2.5 Модели пониженного порядка

Петерс (*Peters*) [34, 35] представил аэродинамическую теорию конечного состояния для несжимаемого двумерного обтекания тонких профилей. Теория была получена непосредственно из теории потенциального потока без каких-либо предположений о динамике движения профиля во времени. Аэродинамические состояния являются коэффициентами набора расширенных индуцированного потока. Для получения набора уравнений состояния первого порядка из теории потенциального потока использован метод наименьших квадратов. В результате уравнения конечного состояния имеют иерархический вид и их коэффициенты представлены в замкнутой форме. Полученная модель может содержать столько переменных состояния, сколько требуется для описания исследуемой пространственной структуры

в требуемом частотном диапазоне, без промежуточного численного анализа. Набор уравнений состояния первого порядка легко сочетается с уравнениями структуры и законом управления и может быть реализован в частотной или лапласовской, а также во временной области. В [35] приведены результаты сравнения с теорией Теодорсена и теорией Вагнера.

Танг и др. (*Tang et al.*) [36] исследовали, как сохранить точность аэродинамической модели Петерса при использовании минимального количества состояний. Вторым шагом, следуя [37], было извлечение наиболее важных собственных аэродинамических мод из уравнений состояния первого порядка, которые затем соединяются уравнениями конструкции. В [36], исходя из модели конечного состояния для двумерного аэродинамического обтекания профиля, определены собственные моды аэродинамического потока. Используя небольшое количество этих аэродинамических собственных мод (то есть модель пониженного порядка), модель аэроупругости сформирована путем их связывания с типичной моделью конструкции сечения с закрылком задней кромки. Моделировалась нелинейность вида «нечувствительность» (*free-play*). В [36] исследованы нелинейные аэроупругие явления типового сечения профиля с нечувствительностью руля с использованием предложенной аэродинамической модели. Теоретический анализ указал как на высокоамплитудные (низкочастотные), так и на низкоамплитудные (высокочастотные) установившиеся колебания предельного цикла. Показано, что когда воздушная скорость достигает определенного значения, между этими двумя колебаниями предельного цикла существует резкое изменение амплитуды, особенно для движения изгиба. Низкочастотный предельный цикл внезапно становится неустойчивым, и в системе возникает устойчивый высокочастотный аттрактор. В [36] также обсуждается влияние начальных условий на поведение нелинейной модели системы.

Авторы [38] занимались моделированием высотных самолетов дальнего действия (*high-altitude long-endurance*, HALE). Аэродинамика, распределение инерции и даже расположение и направление тяги для этих самолетов могут быть существенно изменены, что приведет к изменению аэроупругих характеристик, условий дифферента и общей механики полета. В [38] была предложена комплексная структура для моделирования и анализа сопряженной нелинейной аэроупругости и динамики полета очень гибкого самолета с учетом требований моделирования во временной области и оценки характеристик на этапе предварительного проектирования самолета HALE. Отправной точкой структуры работы [38] являлась динамика

трехмерной модели нелинейной балки с одновременным вращением, которая является низкоуровневой и способна фиксировать нелинейные упругие деформации и движения твердого тела в вычислительно эффективной формулировке, ориентированной на вычислительные затраты и быстрый анализ при эскизном проектировании. Исходные уравнения вектора узловых инерционной силы элемента модифицированы для повышения его универсальности. Связь между осевыми, изгибающими и крутильными эффектами была добавлена к традиционным балкам Эйлера – Бернулли, чтобы уловить некоторые из наиболее важных характеристик реальной конструкции крыла.

Подход нелинейного моделирования пониженного порядка для аэродинамических систем с множеством входов и выходов представлен в [39]. Модель включает конечную сумму каскадных моделей винеровского типа. Подход с использованием нелинейной модели пониженного порядка начинается с подбора каскадного пути винеровского типа между входами и выходами аэродинамической системы. Затем согласно подходу, вычисляются выходные данные пути, которые вычитаются из измеренных выходных данных. Затем подбирается второй путь между входами и выходными остатками. Этот процесс повторяется до тех пор, пока остатки не будут содержать только шум. Чтобы получить оптимальный путь на каждом этапе, в качестве каскадной модели винеровского типа выбирается линейный динамический элемент пространства состояний, за которым следует модель однослойной нейронной сети. Каскадная модель винеровского типа может быть оптимизирована с помощью алгоритма Левенберга-Марквардта. Чтобы продемонстрировать эффективность предложенной модели пониженного порядка при моделировании статически нелинейного и динамически линеаризованного поведения нелинейной аэродинамической системы, было представлено нестационарное трансзвуковое сжимаемое течение над сечением крыла с двумя степенями свободы с профилем *NACA 64A010*. Численные результаты показывают, что модель может точно идентифицировать выходы аэродинамических систем, подверженных слабому возбуждению. Затем эта модель была применена к трансзвуковому анализу флаттера модели крыла Изогаи (*Isogai*) [40, 41]. Продемонстрировано, что по сравнению с прямым расчетом гидродинамики и линейной моделью пониженного порядка, предложенная в [39] модель является точной и эффективной для предсказания трансзвукового флаттера нелинейных аэроупругих систем.

Взаимодействие гибкой конструкции с текущей жидкостью изучает-

Таблица 4 — Значения исходных параметров (по [10])

$\mu = 100$	$r_\alpha = 0.5,$	$a_h = -0.5$	$\zeta_\alpha = 0$	$\zeta_\xi = 0$
$\bar{\omega} = 0.25$	$x_\alpha = 0.25$	$\gamma = 50$	$\eta = 80$	$V^* = 6.0385$
$V = 1.2 V^*$	$\psi_1 = 0.165$	$\psi_2 = 0.335$	$\varepsilon_1 = 0.0455$	$\varepsilon_2 = 0.3$

ся в [42], где рассмотрены существующие разработки в этой области. В статье дано описание различных физических моделей меняющихся от времени потоков жидкости, затем обсуждаются различия между линейными и нелинейными моделями, линеаризованными по времени моделями и их решениями во временной или частотной областях, а также различными методами обработки нелинейных моделей, включая шаговый по времени (*time marching*) метод [43], гармонический баланс и идентификацию систем. Также дается расширенное рассмотрение модального характера зависящих от времени течений и построение моделей пониженного порядка, основанных на расширении в терминах мод жидкости. Обзор результатов моделирования и понимания нелинейных аэроупругих явлений был дополнительно расширен в [44], где показано, что ряд физических эффектов может привести к нелинейному аэроупругому отклику, включая воздействие статической жидкости или статических структурных нелинейностей на изменение границы флаттера аэроупругой системы.

## 2.6 Моделирование изгибно-крутильных колебаний крыла

В качестве примера, приведем результаты моделирования изгибно-крутильных колебаний крыла.

### 2.6.1 Параметры модели динамики

На основе данных, приведенных в работах [10, 30, 32], для моделирования использованы приведенные в таблице 4 значения исходных параметров. В таблице 5 приведены результаты вычислений по формулам (34), (35).

### 2.6.2 Результаты моделирования

Для моделирования было взято начальное значение  $\alpha(0) = 1/57.3$  рад = 1.0 град., остальные начальные условия приняты нулевыми. Процессы

Таблица 5 — Результирующие значения параметров для моделирования

$c_0 = 1.01$	$c_1 = 0.255$	$c_2 = 0.01$	$c_3 = 0.02$
$c_4 = 0.00216$	$c_5 = 0.01216$	$c_6 = 0.0001433$	$c_7 = 0.001407$
$c_8 = -6.832 \cdot 10^{-6}$	$c_9 = -0.000603$	$c_{10} = 0.00119$	
$d_0 = 1.02$	$d_1 = 1.015$	$d_2 = 0$	$d_3 = 0.04$
$d_4 = 0$	$d_5 = 0$	$d_6 = 0$	$d_7 = 0$
$d_8 = 0$	$d_9 = 0$	$d_{10} = 0.01904$	

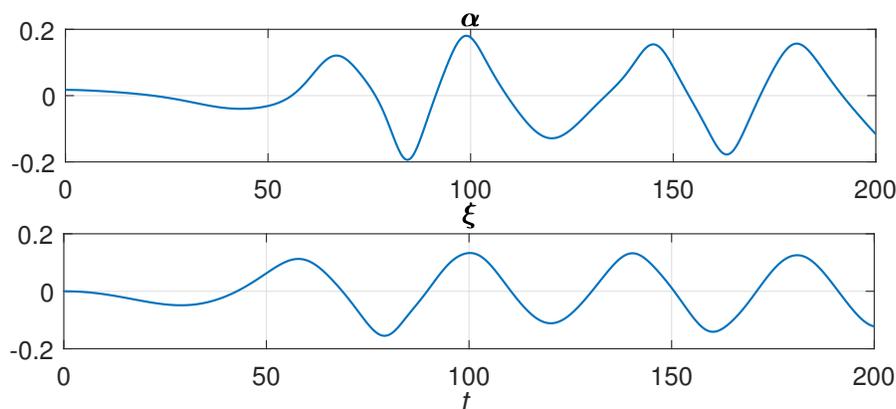


Рис. 3 — Процессы изменения  $\alpha(t)$ ,  $\xi(t)$

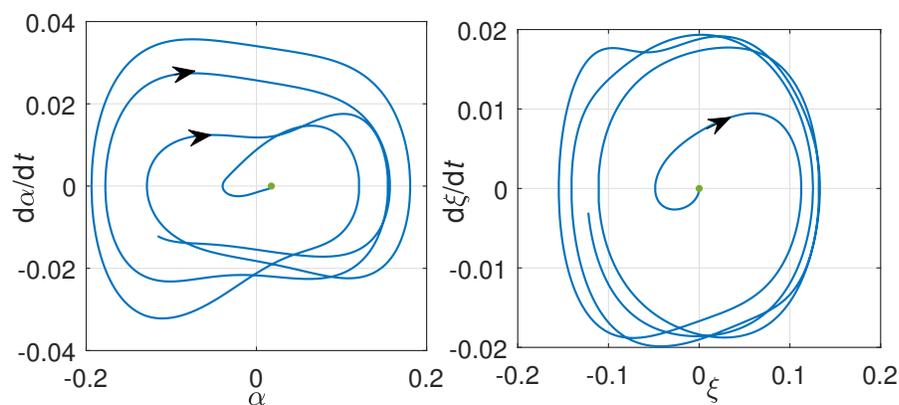


Рис. 4 — Проекция фазовых траекторий на плоскость  $(\alpha, \dot{\alpha})$ ,  $(\xi, \dot{\xi})$ .

изменения переменных  $\alpha(t)$ ,  $\xi(t)$  и проекции фазовых траекторий на плоскости  $(\alpha, \dot{\alpha})$ ,  $(\xi, \dot{\xi})$  изображены на рисунках 3, 4. Как видно из графиков, состояние равновесия системы неустойчиво, и появляется устойчивый предельный цикл.

## 3 Работы по исследованию упруго-изгибного флаттера крыла

### 3.1 Численные и экспериментальные исследования

Применительно к задачам флаттера рулевых поверхностей и шимми колес самолета, авторы [45] рассмотрели алгоритм расчета периодических решений для линейных систем и систем с локальными нелинейностями, основанный на методе D-разбиения и частотных характеристиках динамической жесткости. Приведен пример расчета устойчивости движения ориентирующихся колес стойки шасси самолета, оснащенной демпфером шимми с линейной и нелинейной характеристиками силы сопротивления.

В [46] приведены результаты экспериментального исследования флаттера управляемого стабилизатора при электромеханическом моделировании действующих на него аэродинамических сил. Варьировались величины люфта в проводке управления и трения на оси вращения стабилизатора. Представлены результаты определения критической скорости и частоты флаттера, величины порога возбуждения и амплитуд предельных циклов автоколебаний, а также декременты колебаний на докритических режимах полета в зависимости от величины люфта в проводке управления, трения на оси вращения и статического момента. Показано, что наличие люфта в проводке управления приводит к возникновению флаттера управляемого стабилизатора при скорости полета, меньшей критической для того же стабилизатора без люфта. Получено, что флаттер не возникает при отсутствии внешнего возбуждения, порог которого зависит от величины люфта, трения, скорости полета и частоты возбуждения.

Ли и Леблан (*Lee, LeBlanc*) [47] изучали флаттер двумерного крылового профиля с кубической нелинейной восстанавливающей силой, а степени свободы по углу атаки были выполнены с использованием схемы интегрирования по конечной разнице во времени. Флаттер определяется условиями, которые приводят либо к расходящемуся решению, либо к предельному циклу. Приводятся практические примеры с использованием различных параметров профиля и коэффициентов нелинейных слагаемых в восстанавливающей силе. Влияние начальных условий изучается путем изменения смещения от равновесного угла атаки в начале движения профиля. Было обнаружено, что для “мягкой” пружины увеличение начального углового смещения может приводить к появлению флаттера ниже скоро-

сти флаттера с линейно-упругой моделью. Исследованы факторы, оказывающие стабилизирующее и дестабилизирующее действие. Для жесткой пружины расходящегося флаттера не возникает. Вместо этого поддерживаются автоколебания с амплитудой, не зависящей от начального углового отклонения. В статье исследуются эффекты влияния параметров аэродинамических профилей на амплитуды движений по углам крена и атаки. Авторы [47] показали, что смещение вниз, вызванное колебаниями предельного цикла, увеличивается с ростом скорости полета при наличии жесткой упругости по углу атаки. Исследование устойчивых и неустойчивых режимов, выполненное в [48], показало, что расположение упругой оси и значение скорости полета можно использовать для прогнозирования колебаний предельного цикла в зависимости от заданной скорости полета и начального состояния системы.

В [49] приводятся в зависимости от числа  $M$  результаты расчетов коэффициента давления и аэродинамической производной колеблющихся крыльев прямой и обратной стреловидности при околосвуковых скоростях по программе, разработанной на основе численного метода решения нестационарных уравнений Эйлера. С использованием этой программы для расчета аэродинамических производных и программы метода многочленов, в предположении гипотезы «одномерной стационарности» (ГОС) [50] решена задача определения критического скоростного напора трансзвукового флаттера самолета. Результаты расчетов сопоставляются с результатами, полученными панельным методом при дозвуковых скоростях полета.

Бифуркационный анализ двумерного профиля со структурной нелинейностью по тангажу и несжимаемом потоке представлен в [51]. Рассматриваемая нелинейность – аналитическая рациональная кривая третьего порядка, подогнанная по характеристике зоны нечувствительности конструкции. Аэроупругие уравнения движения переформулированы в систему из восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Анализ собственных значений линеаризованных уравнений использовался для определения продольной скорости флаттера. Нелинейные уравнения движения либо интегрируются численно с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка, либо анализируются с помощью программного пакета AUTO (см. [52]). Неподвижные точки системы найдены аналитически, а области колебаний предельного цикла обнаружены для скоростей значительно ниже расходящейся границы флаттера. Рассчитаны бифуркационные диаграммы, показывающие как устойчивые, так и неустойчи-

вые периодические решения, и оценены типы бифуркаций через множители Флоке. В случаях, когда предварительная нагрузка конструкции мала, были получены области хаотического движения, что продемонстрировано бифуркационными диаграммами, спектральными плотностями мощности, графиками фазовой плоскости и сечениями Пуанкаре движения профиля крыла; существование хаоса было подтверждено также расчетом показателей Ляпунова. Общее поведение системы объяснялось эффектом зоны нечувствительности нелинейности в полном цикле колебаний. Результаты, полученные с использованием этой переформулированной системы уравнений и аналитической нелинейности, находятся в хорошем соответствии с ранее полученными на основе конечных разностей результатами для нелинейностей произвольной формы [53].

Нелинейный аэроупругий анализ треугольного крыла с малым удлинением, смоделированного как пластина постоянной толщины, приведенный в [54] продемонстрировал, что возможны колебания предельного цикла с амплитудой порядка толщины пластины. Структурная нелинейность возникает из-за двойного изгиба как по хорде, так и по размаху. Результаты с использованием аэродинамической модели вихревой решетки для потока с низким числом Маха дополняют более ранние исследования платформ с прямоугольным крылом, которые показали аналогичные качественные результаты. Теоретические результаты для границы флаттера (за которой возникает колебания предельного цикла) были подтверждены в [54] по сравнению с известными из литературы экспериментальными данными для треугольных крыльев с малым удлинением. В [54] использовались аэродинамические и структурные модели пониженного порядка, чтобы существенно снизить вычислительные затраты без потери точности. Протестирована модель аэродинамической трубы, чтобы обеспечить количественную экспериментальную корреляцию с теоретическими результатами для колебаний предельного цикла.

В [55–57] показано, что хаотические эффекты могут возникать в зависимости от конкретного расположения упругой оси с нелинейной упругостью по углу атаки, когда скорость полета превышает определенный порог. Авторы [55] проанализировали хаотическое самовозбуждение двумерных профилей с кубической жесткостью по тангажу в несжимаемом потоке. Использована следующая модель в безразмерном времени  $t = \omega_\alpha \tau$  (где  $\tau$  – реальное время в секундах,  $\omega_\alpha = 62.8$  Гц – частота собственных колебаний системы с одной степенью свободы, связанная с линейной продольной

упругостью)

$$\begin{aligned}\mu\ddot{h} + \mu x_\alpha \ddot{\alpha} + \mu(\omega_h/\omega_\alpha)^2 h &= -2Q\alpha, \\ \mu x_\alpha \ddot{h} + \mu r_\alpha^2 \ddot{\alpha} + \mu r_\alpha^2 &= (1 + 2\alpha)Q\alpha,\end{aligned}\quad (40)$$

где  $h$  – смещение изгиба (*plunging*) крыла, разделенное на  $b$ ;  $\alpha$  – угол тангажа;  $Q = (V/b\omega_\alpha)^2$ ;  $V$  – воздушная скорость;  $\omega_h = 28.1$  Гц – собственная частота колебаний системы с одной степенью свободы, связанная с линейной упругостью;  $(\omega_h/\omega_\alpha)^2 = 0, 2$ ;  $\mu = m/(\pi\rho b^2) = 20$ ,  $\rho$  – плотность воздуха,  $m$  – масса;  $a = -0, 1$  м;  $b = 1$  м – длина полухорды;  $x_\alpha = 0, 25$ ,  $r_\alpha^2 = 0, 5$ ;  $ab$  обозначает расстояние упругой оси  $\mathcal{E}$  от середины хорды;  $(0, 5 + a) b$  – расстояние  $\mathcal{E}$  из аэродинамического фокуса  $\mathcal{F}$ ;  $x_\alpha b$  – расстояние от центра тяжести до  $\mathcal{E}$ ;  $r_\alpha b$  – радиус вращения профиля крыла относительно  $\mathcal{E}$ . В [55], уравнения (40) преобразуются к следующему виду

$$\begin{aligned}\ddot{h} + 0.25\ddot{\alpha} + 0.1\dot{h} + 0.2h + 0.1Q\alpha &= 0, \\ 0.25\ddot{h} + 0.5\ddot{\alpha} + 0.1\dot{\alpha} + 0.5\alpha + e\alpha^3 - 0.04Q\alpha &= 0,\end{aligned}\quad (41)$$

где  $e$  обозначает коэффициент нелинейной жесткости.

Технический отчет [58] мотивирован необходимостью лучше прогнозировать и понимать колебания предельного цикла истребителя, а также быстрым развитием методологии вычислительной гидродинамики (*Computational-fluid-dynamics*, CFD) в области аэроупругости, см. [59]. Известны два потенциальных вычислительных подхода для прогнозирования/исследования колебаний предельного цикла: шаговый по времени подход с использованием высокоуровневого кода вычислительной гидродинамики, такого как CFL3D [60], разработанный и поддерживаемый NASA/Langley, и правильное ортогональное разложение в частотной области (*Proper Orthogonal Decomposition*, POD). Этот метод, также известный как разложение Карунена–Лоэва (*Karhunen–Loève*) [61–63], был первоначально введен для определения и моделирования когерентных структур в полях турбулентного потока. Используя подход POD, исследуют серию “снимков” экспериментальных или расчетных данных, каждый в разный момент времени. Эти моментальные снимки решения используются для формирования небольшой и более компактной задачи на собственные значения, которая решается для определения набора оптимальных базисных функций для представления поля потока.

Холл и др. (*Hall et al.*) [64] разработали частотную форму метода POD, и применили его к околосзвуковому обтеканию профилей крыла. Аэродинамическая модель пониженного порядка была объединена с динамической

моделью конструкции, в результате чего получена компактная, но точная, модель флаттера.

В [58] метод POD/ROM был продемонстрирована для анализа флаттера трехмерной трансзвуковой конфигурации крыла. Показано, что количество степеней свободы ROM, необходимое для создания точных моделей, составляет порядка нескольких десятков, как в случае с двумерными измерениями, и что нет необходимости вычислять совершенно новый ансамбль моментальных снимков решения на основе форм колебаний для каждой новой конфигурации конструкции, которая подлежит рассмотрению.

В [30] был проведен бифуркационный анализ рассматриваемой системы. Было обнаружено, что скачок амплитуды и частоты предельного цикла происходит при увеличении скорости набегающего потока выше первого значения бифуркации. Однако скорость потока, при которой происходит вторая бифуркация, может изменяться при изменении начальных условий. Например, было получено что для  $\alpha(0) = 1.0^\circ$  и остальных нулевых начальных условиях, амплитуда угловых колебаний испытывает скачок при  $V^*/V_L^* = 1.99$ , угловые колебания изменяются от одного положительного экстремума в одном цикле до трех положительных экстремумов в другом, а частота собственных колебаний падает с  $\omega = 0.062$  до  $\omega = 0.043$ . Но при других начальных условиях:  $\dot{\xi}(0) = 0.05$  (с нулевым другим) – амплитуда и частота предельного цикла меняются плавно, и явление скачка не возникает до тех пор, пока не наступает  $V^*/V_L^* = 2.34$ . Амплитуда угловых колебаний резко меняется от одного положительного экстремума за цикл до трех, а частота собственных колебаний падает с  $\omega = 0.050$  до  $\omega = 0.043$ . Для движений перед скачком частота монотонно уменьшается с увеличением расхода, в то время как при движении за скачком частота остается неизменной от  $\omega = 0.043$  до скорости потока  $3V_L^*$ , см. [30] для более подробной информации.

Следуя [65] (см. также [13, 30, 33, 58]), используется метод *гармонической линейризации (гармонический баланс)* путем введения слагаемого  $K_{\text{eq}}\alpha$  вместо кубической нелинейности  $0.5\alpha + e\alpha^3$  в (41), где  $K_{\text{eq}}$  – *эквивалентная линейная жесткость*. Этим методом было обнаружено, что для начального значения  $\alpha_0$ , превышающего амплитуду устойчивого предельного цикла  $A$ , конечное состояние всегда имеет фазовый график с одной петлей. Для меньшего значения  $\alpha_0$  фазовый график по-прежнему будет представлять собой одиночный цикл почти до  $Q = 15$ . В [55] было продемонстрировано, что крыловой профиль в несжимаемом потоке с

постоянной воздушной силой будет демонстрировать хаотическое движение только тогда, когда воздушная скорость выше линейной расходящейся скорости, а диапазон хаотической воздушной скорости довольно узок. Для скоростей полета ниже линейной расходящейся скорости  $Q_D$  эквивалентный анализ линеаризации дает удовлетворительные результаты. Если воздушная скорость принадлежит интервалу  $[Q_D, Q_{FD}]$ , где  $Q_{FD}$  обозначает линейную верхнюю критическую скорость аэродинамического профиля, колеблющегося вокруг состояния равновесия после дивергенции, точки покоя не существует, и все конечные состояния профиля представляют собой циклическое флаттерное движение. Профиль с продольной пружиной кубической жесткости достаточно устойчив, и чем ниже скорость линейного отклонения, тем выше степень устойчивости. Это означает, что профиль в несжимаемом потоке менее подвержен хаосу, чем изгибающаяся панель, погруженная в сверхзвуковой поток.

В [66] рассматриваются два различных аэроупругих явления – дивергенция и флаттер, а также связанные с ними колебания предельного цикла. Для облегчения интерпретации сложных по своей природе явлений, для случая дивергенции изучена только одна конструктивная степень свободы, а для исследования флаттера представлены системы с одной и двумя степенями свободы. Благодаря использованию метода вычислительной гидродинамики (*computational fluid dynamic, CFD*) основанного на уравнениях Эйлера нелинейной невязкой аэродинамической теории, для моделирования нелинейных установившихся и нестационарных трансзвуковых течений в сочетании с линейной структурной моделью, исследование [66] позволило выяснить, как нелинейная аэродинамика может влиять на расхожимость, флаттер, и характеристики колебаний предельного цикла трансзвуковой конфигурации профиля крыла. Модель с одной степенью свободы исследована с точки зрения расхожимости, а модель с одной и двумя степенями свободы – по отношению к флаттеру и колебаний предельного цикла. Метод гармонического баланса в сочетании с процедурой вычислительной гидродинамики используется чтобы определить аэродинамику для нестационарных возбуждений конечной амплитуды заданной частоты. Также представлена процедура определения решений предельного цикла. Было обнаружено, что для исследуемой конфигурации нелинейные аэродинамические эффекты создают благоприятные условия для трансзвуковой расхожимости и неустойчивые и устойчивые колебания предельного цикла для моделей с одной и двумя степенями свободы, соответственно. Исследования продолжены в следующей работе этих авторов [67], где представлено численное

исследование колебательного поведения предельного цикла истребителя F-16 с использованием нелинейного частотного метода гармонического баланса в частотной области. Основным физическим эффектом при исследовании в [67] было относительно большое движение ударной волны по мере того, как амплитуда смещения профиля становится достаточно большой. Это, в свою очередь, приводит к смещению центра давления. Рассмотрено влияние угла атаки, геометрии законцовки крыла, кручения крыла и описание статических аэроупругих эффектов при возникновении флаттера и отклик в виде колебаний предельного цикла. Показано, что факт появления флаттера, и особенно – параметры возникающих колебаний предельного цикла, очень чувствительны к этим величинам.

В [68] установлено, что игнорирование нелинейности конструкции или аэродинамики приведет к неточному предсказанию связанных с ними нелинейных аэроупругих явлений. В [68] выполнена разработка и представлены результаты высокоточного анализа, который точно предсказывает колебания предельного цикла аэроупругой системы с комбинированными структурными и аэродинамическими нелинейностями. Измерения в аэродинамической трубе были проведены для подтверждения результатов исследования, сосредоточенного на предсказании критических физических условий, которые доминируют в механизме колебаний предельного цикла. Расчеты аэроупругости в [68] предсказали амплитуды и частоты предельного цикла, находящиеся в очень хорошем согласии с экспериментальными данными.

Доуэлл и др. [69] использовали профиль крыла с люфтом управляющей поверхности (типичная конструктивная нелинейность) для исследования трансзвукового флаттера и колебаний предельного цикла. Аэродинамическая модель пониженного порядка использовалась в предположении, что ударное движение мало и пропорционально движениям конструкции.

Расчет колебаний предельного цикла истребителя F-16 с использованием нелинейного частотного метода гармонического баланса продемонстрирован в [67]. Изучена чувствительность модели к различным параметрам, таким как средний угол атаки, геометрия законцовки крыла, кручение крыла и статическая аэроупругая деформация. Результаты, полученные численно, сравнивались с экспериментальными, продемонстрировав хорошее согласие.

Идентификация нелинейных аэроупругих систем на основе теории нелинейных систем Вольтерра представлена в [70]. Рассмотрены некоторые приложения теории к задачам вычислительной и экспериментальной аэро-

упругости. Результаты вычислений включают разработку эффективных с вычислительной точки зрения моделей пониженного порядка с использованием решателя Эйлера/Навье-Стокса потоков и аналитического вывода ядер Вольтерра для нелинейной аэроупругой системы. Экспериментальные результаты включают идентификацию аэродинамических импульсных характеристик, применение спектров более высокого порядка к данным о флаттере в аэродинамической трубе и идентификацию нелинейных аэроупругих явлений по данным испытаний на флаттер в полете самолета с активным аэроупругим крылом (*active aeroelastic wing, AAW*).

В [71] описан циклический метод пониженного порядка, предназначенный для вычисления колебаний предельного цикла для больших, нелинейных, междисциплинарных систем уравнений. Эффективность метода продемонстрирована на двух упрощенных моделях: профиле типичного сечения с нелинейной структурной связью и нелинейной панели в высокоскоростном потоке. Циклический метод был проверен для поддержания точности второго порядка по времени, получения сходящихся предельных циклов примерно за 10 ньютоновских итераций и получения точных оценок частоты цикла.

В [72] бифуркации Хопфа и колебания предельных циклов исследованы для профиля с кубической нелинейностью в сверхзвуковом/гиперзвуковом потоке. Метод гармонического баланса и теория Флоке были применены для анализа колебаний предельных циклов профиля крыла. В этой системе были обнаружены четыре различных случая откликов в виде колебаний предельного циклов: (I) суперкритическая бифуркация Хопфа, (II) единственная докритическая бифуркация Хопфа, (III) две субкритические бифуркации Хопфа и (IV) отсутствие бифуркации Хопфа. Варианты параметров области, разделяющие суперкритические и субкритические бифуркации Хопфа, представлены с помощью теории сингулярности. Также было доказано, что отношение частот, статическая неуравновешенность и структурная нелинейность не зависят от критического изменения числа Маха. Для суперкритической и субкритической бифуркаций Хопфа теория сингулярностей используется как мощный инструмент для аналитического определения областей параметров бифуркаций. Подкритическая бифуркация Хопфа может появиться, когда аэродинамическая система демонстрирует характер жесткой пружины, если учтена аэродинамическая нелинейность.

Различные типы структурных и аэродинамических нелинейностей, ча-

сто встречающиеся в авиационной технике, обсуждались в работе Ли, Прайс и Вонг (*Lee, Price, Wong*) [73]. На основе теории дозвуковой аэродинамики выведены уравнения движения колеблющегося по тангажу и погружению двумерного крылового профиля для конструктивной нелинейности. Подробно были изучены три классические нелинейности, такие как кубическая, люфт и гистерезис. Основные уравнения сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, пригодной для численного моделирования и аналитической проверки устойчивости. Возникновение бифуркации Хопфа, амплитуда и частота колебаний предельного цикла исследуются на примере кубической пружины. Для различных геометрий свободного движения, бифуркации и хаос рассмотрены с использованием фазовой плоскости, спектра отображений Пуанкаре и Ляпунова. Переход к хаосу исследован с помощью бифуркационных диаграмм, и для свободного прохождения нелинейности было показано, что удвоение частоты является наиболее часто наблюдаемым переходом. Примеры аэродинамических нелинейностей возникают из-за трансзвукового обтекания и динамического сваливания, особое внимание уделяется численным результатам моделирования динамического сваливания с использованием метода нестационарной аэродинамики во временной области. Продольная атмосферная турбулентность введена, чтобы продемонстрировать ее влияние как на границу флаттера, так и на начало бифуркации Хопфа для кубической восстанавливающей силы.

В [74] теоретическая основа проблемы взаимодействия жидкости и конструкции была установлена для последовательного анализа, который учитывает 1) анизотропию материала, 2) геометрическую нелинейность конструкции, 3) поведение нестационарного потока и 4) динамическую потерю скорости всего самолета. Приводится формулировка аэроупругого анализа всего самолета в дозвуковом потоке. Линейные результаты представлены и подтверждены для крыла Голанда (*Goland*) [75]. Были получены дополнительные результаты, которые подчеркивают влияние структурной и аэродинамической нелинейностей на поведение дифферента, скорость флаттера и амплитуду колебаний предельного цикла. Эти результаты дают представление о различных исследуемых нелинейных аэроупругих явлениях: 1) влияние установившейся подъемной силы и сопутствующей деформации на скорость, при которой возникают неустойчивости, 2) влияние на нелинейности ограничения амплитуды колебаний при возникновении неустойчивости, и 3) дестабилизирующие эффекты нелинейностей для конечных возмущений при устойчивых условиях.

Теория нестационарной аэродинамики деформируемых тонких профилей представлена в [76, 77], где была разработана теория Теодорсена и Гаррика [17, 78, 79], которая ограничивалась движением твердого тела. Выражения для подъемной силы, тангажа и тяги в частотной области получены для профиля, испытывающего гармонические колебания и деформации, в виде полиномов Чебышева. Первые два полинома задают движение твердого тела, а остальные – деформацию. Результаты проверены с помощью нестационарной аэродинамической теории временной области Петерса (*Peters*) [80, 81]. Представлены численные результаты для нескольких комбинаций движения профиля, которые выявили различные возможности создания тяги с помощью деформируемого профиля.

В [82] отмечено, что хотя обычно принято считать, что неустойчивость флаттера и дивергенции возможна в упругих структурах с кулоновским трением, но никаких прямых экспериментальных доказательств получено не было. Более того, те же самые типы неустойчивости могут быть вызваны касательными следящими силами, но обычно считается, что они имеют чрезвычайно сложную, если не невозможную практическую реализацию. Таким образом, как отмечено в [82], отсутствовала четкая экспериментальная база для флаттера и расходимости, вызванного трением или следящей нагрузкой. В [82] приведены экспериментальные результаты, показывающие, как следящая сила тангенциального типа может быть реализована посредством кулоновского трения и как это, в полном согласии с теорией, может вызвать взрывное колебательное движение с возрастающей амплитудой (флаттер) или экспоненциально растущее движение (дивергенция). Кроме того, результаты [82] показывают пределы применимости анализа, основанного на линеаризованных уравнениях, так что нелинейности дают начальную взрывную вибрацию флаттера для достижения в конечном итоге установившегося состояния. Представленные в [82] результаты дают полное доказательство потенциальных проблем при проектировании механических систем, подверженных трению, открывают новую перспективу в реализации ведомых систем нагружения и инновационных структур, демонстрирующих «необычные» динамические характеристики.

В [83] определена критическая скорость полета самолета Ан-124-100С при которой возникает флаттер крыла с помощью модели крыла, совершающего изгибно-крутильные колебания. Рассмотрен механизм возникновения автоколебаний крыла самолета при горизонтальном движении с постоянной скоростью. При флаттере крыло совершает сложные гармонические ко-

лебания. В первом приближении авторы ограничиваются рассмотрением плоских колебания крыла в потоке воздуха. Так как конструкция реального крыла, состоящая из разного рода элементов (закрылки, элероны и т.д.), достаточно сложная, то оно рассмотрено в виде жесткой модели с упругими связями.

Вычислительный метод исследования аэроупругости, который включает нелинейную модель пластины фон Кармана [84,85], применен в [86] для моделирования колебаний предельного цикла обрезанного обрезанного треугольного крыла. Вычисленные частоты и амплитуды отклика колебаний предельного цикла сравнивались с предыдущими результатами по линейной модели и экспериментальными измерениями.

В исследовании [87] рассмотрена проблема описания явления флаттера в полностью движущемся аэродинамическом профиле, который имеет нелинейность люфта в жесткости вращательного движения. Применялось как к жесткой двумерной модели, так и к гибкой трехмерной модели. Основными целями [87] были введение и проверка нелинейной модели люфта, которая позволяет лучше использовать методы нелинейного системного анализа, проектирование и проверку последующей двумерной модели, применение новых инструментов идентификации системы для получения аэродинамической модели пониженного порядка, которая была бы достаточно точной для трехмерного моделирования и вычислительно эффективной, а также введение двух новых подходов к проблеме трехмерного моделирования. Структура обратной связи использована для анализа динамики системы, состоящей из уникальных устойчивых фиксированных точек, нескольких устойчивых состояний и колебаний предельного цикла. Бифуркация Хопфа была идентифицирована с помощью анализа, и результаты вывода продемонстрировали, что они обеспечивают точные предсказания поведения флаттера.

В [88] изложены некоторые результаты исследований *Nationaal Lucht en Ruimtevaartlaboratorium* (Национальная аэрокосмическая лаборатория, Нидерланды, NLR) по трансзвуковым колебаниям предельного цикла конфигураций истребителя. Включены следующие результаты моделирования динамической нелинейности аэродинамики: описание аэроупругой системы с учетом нестационарной аэродинамики, динамики конструкции, синхронизации жидкость/конструкция, итерационной процедуры жидкость/конструкция; результаты моделирования флаттера и невязких колебаний предельного цикла крыла НАСА-64A010 (максимальная толщи-

на 10% при 40% хорде, максимальный изгиб 0% при 0% хорде), флаттер *Advisory Group for Aerospace Research & Development* (AGARD), колебаний предельного цикла околосвукового профиля NLR-7301 (максимальная толщина 16.5% при хорде 35%) и конфигурации загрузки тяжелого магазина самолета F-16. В [88] обсуждаются вычислительные аэроупругие модели конфигураций самолетов-истребителей в сложных условиях трансзвукового потока, включая отрыв потока. Были выделены важные детали метода моделирования, который применен к стандартным тестовым примерам для колебаний предельного цикла из-за ударного движения (тестовый пример ISOGAI) и отрыва потока, вызванного ударной волной (тестовый пример DLR). Наконец, продемонстрирована возможность метода моделирования захвата колебаний предельного цикла самолета F-16 в конфигурации с тяжелой загрузкой при умеренных углах атаки в трансзвуковом потоке. Полученные результаты подтверждают роль ударного отрыва потока как одной из возможных причин колебаний предельного цикла для конкретных конфигураций истребителя.

В [89] исследован флаттер и поведение предельного цикла крыла в слабом дозвуковом потоке при малых установившихся углах атаки. Проведено сравнение экспериментальных результатов с предсказанными на основе теоретической аэроупругой модели с учетом только нелинейности конструкции. Результаты экспериментов и теории показали изменение критической скорости флаттера в зависимости от постоянного угла атаки. Кроме того, величина колебаний предельного цикла увеличивалась с заданной скоростью по мере увеличения угла атаки как при эксперименте, так и в теории.

Нелинейные аэроупругие характеристики крыла самолета с рулевой поверхностью исследованы в [90]. Дублетно-гибридный метод [91] использовался для расчета дозвуковых нестационарных аэродинамических сил, а приближение минимального состояния использовалось для аппроксимации аэродинамических сил. Анализ свободных колебаний выполнен с использованием методов конечных элементов и фиктивных масс. Конструктивная нелинейность в шарнире управляющей поверхности была представлена как люфтом, так и билинейной нелинейностью.

Де-Мин (*De-Min*) и Ки-Чанг (*Qi-Chang*) [56] изучали динамику аэроупругого крылового профиля с двумя степенями свободы с комбинированными нелинейностями свободной подъемной силы и кубической жесткости в сверхзвуковом и гиперзвуковом потоках. Для анализа флаттера колеба-

ний предельного цикла и хаотического движения этой системы использовались метод отображения Пуанкаре и теория Флоке. Результат показал, что колебания предельного цикла можно точно предсказать, используя множитель Флоке. Получены фазовые траектории как для кручения, так и изгиба, и результаты показали, что движение изгиба намного сложнее, чем кручения. Также показано, что начальные условия имеют важное влияние на динамический характер движения системы крыла. В определенном диапазоне скоростей полета и при одинаковых параметрах системы можно обнаруживать устойчивые колебания предельного цикла, хаотические и многопериодические движения при различных начальных условиях.

Аэроупругая система аэродинамического профиля с гистерезисной нелинейностью по кручению исследована в [92] методом *инкрементального гармонического баланса* (*incremental harmonic balance*, ИНВ), см. [93, 94]. При выводе итеративной схемы, метод неопределенного коэффициента в ИНВ был расширен, чтобы справиться с проблемой расширения гистерезисной нелинейности. Численные примеры показали, что колебания предельного цикла, полученные при помощи ИНВ, находятся в хорошем соответствии с результатами численного моделирования. С помощью теории Флоке подробно проанализированы бифуркации достигнутых колебаний предельного цикла относительно скорости потока, предварительной нагрузки и свободного хода гистерезисной нелинейности. При изменении скорости потока обнаружено нарушение симметрии и бифуркация седло-узел.

Используя модель нейронной сети с радиальной базисной функцией (*Radial Basis Function*, RBF), в [95] построена нелинейная нестационарная аэродинамическая модель пониженного порядка. Моделирование с пониженным порядком использовалось для анализа поведения предельного цикла для двух линейных структурных моделей с большим скачком в трансзвуковом потоке. В [95] автоколебания аэроупругой системы действовали как входные сигналы. Комбинируя уравнения движения конструкции и нелинейное аэродинамическое моделирование в установленном порядке, определялись отклики системы путем изменения основных уравнений с течением времени с использованием своего рода гибридного линейного многоступенчатого алгоритма, а поведение предельного цикла изменялось в зависимости от скорости (динамического давления). Два примера трансзвуковой аэроупругости показали, что как характеристики конструкции, так и характеристики колебаний предельного цикла, смоделированные на

основе пониженного порядка, хорошо согласуются с данными, полученными с использованием прямого метода вычислительной гидродинамики, в то время как метод повышения вычислительной эффективности, основанный на уменьшении порядка при моделировании показал повышение эффективности на 1–2 порядка по сравнению с прямым методом вычислительной гидродинамики.

Результаты экспериментов по флаттеру для сверхкритического профиля NLR 7301 в условиях обтекания вблизи трансзвукового спада (*transonic dip*) представлены в [96].<sup>2</sup> Профиль был закреплен с двумя степенями свободы в адаптивной аэродинамической трубе с твердой стенкой, и переход пограничного слоя был отключен. Для сравнения с численным моделированием были выполнены два варианта тестирования предельного цикла, полученные в адаптивной тестовой сечении. Результаты связывают поведение глобальной аэродинамической силы с наблюдаемыми колебаниями предельного цикла и идентифицированным трансзвуковым спадом. По-видимому, запаздывание отклика подъемной силы на качание профиля крыла является причиной характерной формы трансзвукового спада. Ограничение амплитуды колебаний предельного цикла является результатом слегка нелинейной зависимости подъемной силы и момента от амплитуды движения профиля. Колебания предельного цикла могли управляться относительно небольшими силами, но амплитуда сильно зависит от демпфирования аэроупругой системы.

Димитриадис (*Dimitriadis*) [98] представил подробное описание нескольких вариантов метода гармонического баланса и основы для их развития, позволяющей методам отслеживать реакцию динамических систем от точки бифуркации до любого желаемого значения параметра, при этом успешно преодолевая дальнейшие бифуркации складок. Основы развития были описаны для систем, претерпевающих докритические и сверхкритические бифуркации Хопфа, а также особый тип взрывных бифуркаций. Методы, исследованные в [98], применены к нелинейной аэроупругой модели типового транспортного самолета с полиномиальной нелинейностью или нелинейности свободного хода жесткости управляющей поверхности. Показано, что решения гармонического баланса высокого порядка точно отражают полное бифуркационное поведение этой системы для обоих типов нелинейностей. Решения низкого порядка могут стать неточными при

<sup>2</sup> "Трансзвуковой спад" – явление, влияющее на устойчивость самолета, при котором критическая скорость флаттера может приближаться к скорости полета [97].

наличии многочисленных складок в ветви колебаний предельного цикла, но все же могут дать практическую инженерную информацию за небольшую часть затрат для получения решений более высокого порядка.

Расчетно-экспериментальная коррекция результатов измерений при кинематическом или силовом возбуждении колебаний, позволяющая уточнить парциальные частоты, формы и декременты колебаний изгиба и вращения рулей. Экспериментальное определение плоскости главных колебаний корпуса путем возбуждения колебаний в двух перпендикулярных плоскостях и подбора сил возбуждения в разных сечениях представлена в [99]. Расчет на флаттер проводится с использованием экспериментальных данных, полученных при колебаниях в главных плоскостях. Приведены примеры результатов эксперимента и расчета.

Веденеев в [100] изучал *панельный флаттер*. Панельный флаттер представляет собой явление предельного цикла колебаний обшивки самолета на высоких скоростях полета, см., напр. [101]. Такие колебания предельного цикла обычно имеют большую амплитуду и вызывают усталостное повреждение панелей. В [100] одномодовый флаттер численно исследуется для определения границ флаттера и их трансформаций из-за изменений параметров системы.

Аппаратные и программные средства расчетно-экспериментальных исследований аэроупругости ракет класса «воздух-воздух» наземных резонансных испытаний, расчетов на флаттер и исследований устойчивости упругого летательного аппарата (ЛА) совместно с системой автоматического управления (САУ) рассмотрены в [102].

Типичная система профилей крыла со свободным ходом была исследована в [103]. Для расчета аэродинамики использовалась классическая квазистационарная модель потока. Для характеристики нелинейности была принята модель кусочной упругости. В [103] обнаружены две важные воздушные скорости: более низкая критическая скорость, более высокая которой система может генерировать колебания предельного цикла, и верхняя критическая скорость, выше которой в системе возникает флаттер. Отображение Пуанкаре построено для колебаний предельного цикла с использованием кусочно-линейных решений с контактом и без контакта в системе. Применяя подход отображения Пуанкаре, в работе получен ряд уравнений, определяющих период колебаний предельного цикла частоты в предельных значениях при любой скорости полета. Аналитические результаты сопоставлены с результатами численного моделирования, показав

хорошее соответствие. Влияние величины свободного хода и коэффициента контактной жесткости на колебаниях предельного цикла также были исследованы посредством численного моделирования исходной системы. Продемонстрирована возможность возникновения многопериодных колебаний предельного цикла и хаотических колебаний, которые обычно встречаются в гладких нелинейных динамических системах.

Работа [104] базируется на опыте расчетно-экспериментальной оценки устойчивости упругих колебаний ЛА с системой автоматического управления и является продолжением публикаций ее авторов, относящихся к обеспечению устойчивости контура «упругий ЛА — САУ» и безопасности от флаттера маневренных беспилотных ЛА. Отмечено, что в процессе разработки ЛА, от начального этапа проектирования до изготовления опытного образца, проводится ряд расчетных и экспериментальных исследований аэроупругости. С учетом ограничений достоверности предварительных расчетов и необходимости корректирования расчетной динамической схемы по данным наземно-го эксперимента каждая такая последующая «итерация» дополняет и уточняет ранее полученные результаты. Конечным результатом являются выводы о безопасности летных испытаний. Рассматриваемые в [104] ЛА крестообразной схемы имеют ряд особенностей, определяющих методику как расчета, так и стендового эксперимента. Основными являются модульность конструкции, высокие собственные частоты, малая масса и габариты органов управления, несимметрия упруго-массовых характеристик относительно плоскостей несущих и управляющих поверхностей, быстродействующий электропривод, комбинированные (аналоговые и цифровые) элементы контура стабилизации. Наибольшее внимание в [104] уделено вопросам, относящимся к экспериментальной стороне исследований, которая представляется относительно более сложной и менее освещенной в литературе.

В [105] применение аэродинамического моделирования пониженного порядка, основанного на нейронных сетях с радиальной базисной функцией продемонстрировано к сверхкритическому профилю NLR 7301. Показано применение описанного в [106] подхода с помощью моделей пониженного порядка RBF (*RBF-reduced-order models*, ROM). Продемонстрировано, что подход на основе нейронных сетей может адекватно прогнозировать как линейные, так и нелинейные аэродинамические эффекты, в том числе анализ предельных циклов колебаний с аэродинамическим источником в околосзвуковом режиме полета. Кроме того, анализ общей вычислительной

потребности показал, что существует большой потенциал для экономии времени моделирования.

Подход к моделированию пониженного порядка (*reduced-order modeling*, ROM), основанный на динамических локальных линейных нейронных нечетких моделях, представлен в [107] для вычисления обобщенных аэродинамических сил во временной области. Нестационарные аэродинамические силы моделируются как функция структурных возмущений, связанных с собственными модами. В отличие от предыдущих подходов к модели аэродинамического ввода-вывода, обученной с помощью высокоточного моделирования потока, число Маха считается дополнительным вводом модели для учета изменений в условиях свободного потока. Для обучения зависимостям между входами и соответствующими нагрузками, вызванными потоком, использовался алгоритм *Local Linear Model Tree* (LOLIMOT). Метод ROM применен к конфигурации AGARD 445.6 в дозвуковом и околозвуковом режимах полета. Показано хорошее согласие между результатами ROM и соответствующим решением вычислительной гидродинамики полного порядка.

Аэроупругое поведение нескольких моделей, основанных на системе крыла 250-местного самолета PrandtlPlane, было изучено Кавалларо и др., см. [108, 109]. Когда рассматривался вариант конструкции из алюминия, флаттер связан с слиянием первых двух упругих мод, первая из которых характеризуется классическим изгибом обоих крыльев вверх, а вторая – изгибом в противофазе двух крыльев и наклоном бокового сочленения. Анализы показали, что энергия вводилась в конструкцию в основном в конце переднего крыла, рядом с элероном. Были оценены эффекты свободного хода подвижных поверхностей, показывающие, как в некоторых случаях наблюдается увеличение критической скорости флаттера. Когда анализ флаттера был повторен с учетом конфигурации, свободной от кручения и изгиба, скорость флаттера действительно увеличивается из-за особого взаимодействия между качанием твердого тела и упругими модами. Некоторые из вышеперечисленных результатов были продемонстрированы на более подробных моделях конструкций с учетом также местного распределения жесткости, а также с учетом эффектов сжимаемости. Когда использовались композитные материалы, проблемы флаттера были полностью устранены.

Нелинейное аэроупругое поведение трапецевидной крыло в гиперзвуковом потоке исследовано в [110]. Динамические уравнения аэроупругости

построены на основе теории больших деформаций фон Кармана [84, 85] и теории поршня третьего порядка. Подход Рэлея – Ритца [111] в сочетании с аффинным преобразованием был сформулирован и использован для преобразования уравнений трапециевидной конструкции крыла, моделируемой как свободносущая крыловидная пластина. Сопротивление флаттера и нелинейное динамическое поведение были проанализированы для пластин различной геометрии. В [110] были сделаны следующие выводы: геометрические параметры, такие как относительное сужение крыла  $TR = c_t/c_r$ , где  $c_r$ ,  $c_t$  – длина корневой хорды и длина концевой хорды, соответственно, и полуразмах  $l$ , оказали существенное влияние на границу возникновения флаттера системы. При фиксированном отношении корневой хорды к полуразмаху  $c_r/l$  и углу стреловидности  $\alpha$  передней кромки скорость и частота флаттера уменьшаются с увеличением относительного сужения  $TR$ . Для разных  $c_r/l$  изменения границы флаттера имели заметную разницу с увеличением  $\alpha$ . Для прямоугольной крыловидной пластины  $c_r/l = 1$ ,  $TR = 1$  и  $\alpha = 0$  град путь к хаосу лежит через удвоение периода, то есть отклики период-1, период-3 и период-6. Хаотические области были разделены несколькими периодическими окнами. Для параллелограммной крыловой пластины с  $c_r/l = 1$ ,  $TR = 1$  и  $\alpha = 30$  град, пластина показала более сложный процесс пути к хаосу. Для трапециевидной крыловидной пластины с  $c_r/l = 1$ ,  $TR = 0.5$  и  $\alpha = 30$  град путь от периодического движения к хаосу пролегал через излом квазипериодического тора.

Исследование аэроупругого поведения в гиперзвуковом режиме с использованием анализа во временной области и метода продолжения представлено в [112] на основе рассмотрения типичного поперечного сечения с обычными степенями свободы кручения и изгиба. Аэродинамические силы для различных параметров были рассчитаны с использованием теории поршня, а аэроупругая устойчивость системы на различных высотах рассчитывалась с помощью программного пакета AUTO-97 [52]. Эти результаты были проверены путем сравнения с решениями, выполненными с помощью анализа во временной области. Затем конструктивные нелинейности были введены через кубическую жесткость в модели конструкции. Это привело к развитию колебаний предельного цикла в аэроупругой системе вблизи бифуркации Хопфа на границе флаттера. В [112] продемонстрировано, что результаты, полученные с помощью программного обеспечения AUTO-97 по существу идентичны результатам, рассчитанным во временной области. Пакет метода продолжения AUTO-97 может также использоваться для отслеживания неустойчивых путей через границу устойчивости, а

также для независимого изучения влияния изменения параметров на поведение системы. Этот факт был использован в [112] для изучения эволюции частот и высот колебаний предельного цикла в диапазоне чисел Маха с вариациями физических и конструктивных параметров.

Метод гомотопического анализа (*homotopy analysis method*, НАМ) расширен в [113] для нелинейной аэроупругой задачи профиля крыла с двумя степенями свободы. Чтобы избежать определения параметра для сложной задачи минимизации высокого порядка, была предложена модифицированная версия НАМ, основанная на идее минимизации квадрата невязки. Этот метод использован в [113], чтобы найти нелинейное аэроупругое поведение сверхзвукового крылового профиля с нестационарной аэродинамической нагрузкой, рассчитанной по теории поршня.

Как отмечено в [114], компания Boeing провела испытания модели аэродинамической трубы крыла с подвесной опорой для исследования дозвукового ультра-зеленого самолета (*Subsonic Ultra-Green Aircraft Research Truss-Braced Wing*) в туннеле трансзвуковой динамики исследовательского центра NASA в Лэнгли. Этот тест привел к получению большого количества данных акселерометра, которые указывают на динамическое поведение модели перед началом флаттера. Для испытания модели крыла со скрепленными фермами началу флаттера предшествовало большое число Маха/область динамического давления, в которой модель представляла аэроупругие колебания крыла/гондолы двигателя предельного цикла. Статья [114] посвящена анализу этих полученных данных колебаний предельного цикла, чтобы обеспечить дополнительное понимание аэроупругого поведения модели. Спектральный анализ показывает слияние нескольких мод крыльев в одночастотное колебание с предельным циклом. Отображение колебаний предельного цикла на этой частоте при нарастающих амплитудах указывает на существенное изменение возникновения с углом атаки. Спектральный анализ также подтвердил нелинейность как в аэродинамической динамике, так и в динамике конструкции.

Данные колебательного отклика крыла, измеренные на самолете F-16A во время испытаний на флаттер для нескольких конфигураций внешнего магазина представлены в [115]. В ходе испытаний были обнаружены колебания предельного цикла, а также внезапное возникновение высокоамплитудных колебаний. Этот внезапный высокоамплитудный отклик очень напоминал классический флаттер. Во время испытаний были выявлены три различные категории поведения реакции: классический флаттер, типичные

колебания предельного цикла и нетипичные колебания предельного цикла. Сильная корреляция между реакцией на летные испытания и модальным составом аналитического механизма флаттера была продемонстрирована в [115]. Однако было показано, что линейный анализ не смог обеспечить понимание амплитуды колебаний или начальной скорости, которые имеют первостепенное значение для сертификации внешнего магазина на истребителях. В [115] результаты анализа флаттера представлены вместе с деталями аналитической модели, конфигураций магазина и массовых свойств магазина для использования в качестве реалистичных контрольных примеров для валидации методов нелинейного анализа флаттера.

### **3.2 Аналитические исследования упруго-изгибного флаттера крыла**

Метод определения аэродинамических сил для расчета крыльев на флаттер при конечных числах Струхала в дозвуковом потоке предложен в [116]. Система линейных уравнений для определения аэродинамических сил получена из интегрального уравнения, связывающего нормальные скорости на крыле с распределением давления. В частности сделан вывод что что степень влияния числа Струхала на флаттерные характеристики крыла малого удлинения будет разная для разных форм флаттера: для консольных форм флаттера слабее, чем для фюзеляжных. В [117] предлагается основанная на [116] методика расчета аэродинамических нагрузок в исследовании флаттера при малых числах Струхала в дозвуковом сжимаемом потоке.

Буньковым в [118] улучшены известные к тому времени методы решения полной проблемы собственных значений произвольных матриц, что позволило рассчитывать полный спектр собственных колебаний неконсервативных систем с числом степеней свободы до тридцати. В работе упрощены формулы в методе Гивенса, служащего для получения характеристического полинома матрицы; разработан метод вычисления корней полинома на основе комбинации известного метода спуска и метода квадратичной интерполяции; осуществлено определение собственных векторов по найденным значениям корней полинома.

В [119] рассматривается стреловидное крыло, крепление которого к фюзеляжу осуществляется с помощью нежесткой штанги с учетом упругости жесткость проводки управления. Для описания колебаний однородного стреловидного крыла в потоке воздуха использована модель квазистационарной аэродинамики работы [6]. Эта система, совместно с граничными

условиями представляют собой однородную краевую задачу на собственные значения относительно критической частоты и числа Струхала на границе устойчивости. Решение краевой задачи ищется в [119] с использованием фундаментальной системы частных решений. Фундаментальная система частных решений определялась с помощью аналоговой вычислительной машины, а вычисление характеристического определителя проводилось на цифровой машине. Показано, что учет колебаний крыла в горизонтальной плоскости приводит к появлению еще одной области неустойчивости.

В [50] показан расчет системы из двух крыльев, в частности крыло – горизонтальное оперение. Аэродинамические силы определяются в виде матрицу коэффициентов влияния, связывающих силы в заданных узлах с амплитудами колебаний в узлах (метод конечных элементов). Каждое из крыльев рассчитывается с помощью метода потенциала скоростей как наиболее корректного из известных линейных методов. Интерференция между крыльями определяется методом потенциала ускорений и сводится к расчету возмущенных скоростей в узлах заднего крыла, индуцированных передним крылом, что для сверхзвуковых скоростей оправдано. Предложенная методика применена к расчету на флаттер, что иллюстрируется двумя простыми примерами, на которых показаны недопустимо большие ошибки в случае применения теории поршня при  $M \leq 1.4$ .

Вывод критериев и формул для параметрического исследования изгибно-крутильного флаттера на основе анализа форм и частот собственных колебаний приведен в [120], где установлены некоторые общие закономерности и приводятся рабочие графики. Исследования продолжены в [121], где исследована возможность анализа различных форм двухступенного флаттера на основе одной, выбранной за базовую, динамической модели. Излагается алгоритм идентификации параметров модели, приводятся некоторые результаты анализа применительно к изгибно-крутильному флаттеру несущих и управляемых поверхностей летательного аппарата.

В [122] разработан один из вариантов математической модели движения упругого самолета с органами управления в трансзвуковом потоке. Математическая модель основана на «полиномиальном методе Ритца». В частотной области применяется итерационный метод расчета трансзвукового флаттера. При вычислении обобщенных аэродинамических сил используется принцип гармонической линеаризации. Получены уравнения движения упругого самолета с органами управления с учетом нестационарных нелинейных аэродинамических сил при трансзвуковом обтекании. Разработаны

метод и алгоритм решения уравнений во временной области. Предложенные методы иллюстрируются расчетом характеристик флаттера двух крыльев в зависимости от различных параметров. Приведены сравнительные результаты расчетов линейной, линеаризованной и нелинейной систем.

В курсе лекций профессора Х.М. Атаси (*H.M. Atassi*) [123], широко представлены положения теории стационарных и нестационарных течений, связанные с аэроакустикой и аэроупругостью, задачи Вагнера, Теодорсена и Сирса, изгибные и крутильные режимы конструкции и явление флаттера.

Авторами [124] представлена версия панельного метода расчета нестационарных аэродинамических нагрузок на систему колеблющихся поверхностей, лежащих в разных плоскостях. По аналогии с методом дипольной решетки, применяемым при дозвуковых скоростях, несущая поверхность может быть разделена на большое количество панелей, на каждой из которых разность давлений считается постоянной. Метод основан на использовании интегрального соотношения, связывающего величину возмущенной скорости (скос) на одной панели от разности давления на другой панели при произвольной ориентации панелей относительно друг друга. Разработана гибкая вычислительная процедура для обеспечения высокой точности результатов при различных сочетаниях числа Маха, числа Струхалья  $k$  и размеров панели. Разработанная программа включена в комплекс КС-2 расчета на флаттер, причем организация исходных данных одинакова как при  $M > 1$ , так и при  $M < 1$ .

Авторами [125] предложено реобразование методами теории подобия семейств кривых, получаемых при параметрических исследованиях флаттера. Сопоставление преобразованных семейств с целью обнаружения в них кривых, отвечающих требованиям подобия. Обоснована возможность упрощения в таких случаях экспериментальных работ при исследованиях флаттера.

Танг (*Tang*) и Доуел (*Dowell*) [126] исследовали влияние постоянного угла атаки на нелинейный флаттер и колебания предельного цикла модели треугольной пластины крыла в слабом дозвуковом потоке. В [126] обсуждается, какой нелинейный физический механизм отвечает за колебания предельного цикла. Отмечено (на момент публикации статьи) что еще не определено, связана ли нелинейность в основном с гибкой упругой конструкцией самолета или из-за поведения жидкости в окружающем аэродинамическом потоке. В результате летных испытаний было выявлено, что при изменении угла атаки самолета скорость полета, при которой на-

чинаются колебания предельного цикла, может быть увеличена или уменьшена, а амплитуда колебаний предельного цикла может быть уменьшена. Ранее было высказано предположение, что эта чувствительность к углу атаки указывает на нелинейность в жидкости, а не в конструкции. Показано, что такие эффекты изменения угла атаки могут быть результатом конструктивной нелинейности. В частности, было проведено исследование для определения влияния постоянного угла атаки на нелинейный флаттер и колебания предельного цикла модели треугольного крыла с пластиной в слабом дозвуковом потоке. Была использована трехмерная аэродинамическая модель вихревой решетки во временной области и аэродинамический метод пониженного порядка, а конструкция моделировалась с использованием теории пластин Кармана [84, 85], которая учитывает геометрические нелинейности деформации-смещения в конструкции треугольного крыла. Результаты дают новое понимание нелинейных аэроупругих явлений, ранее не получивших широкого признания, то есть появление колебаний предельного цикла для крыльев с низким удлинением, которые имеют пластинчатую нелинейную конструкцию. Установлено, что влияние постоянного угла атаки как на границу флаттера, так и на колебания предельного цикла является значительным. Для небольшого устойчивого угла атаки, не более 0.1 град., скорость возникновения флаттера увеличивается, тогда как для большего угла атаки она уменьшается. Более того, с увеличением угла атаки максимальная амплитуда колебаний предельного цикла существенно уменьшается. Такие эффекты наблюдались Бантоном (*Bunton*) и Денегри (*Denegri*) [127] в летных экспериментах по флаттеру. Следует отметить, что полученные в [126] теоретические результаты не доказывают, что наблюдаемые в полете явления колебания предельного цикла обусловлены конструктивными нелинейностями, однако результаты проведенного в [126] анализа согласуются с результатами, наблюдаемыми в полете, и показывают, что конструктивная нелинейность может привести к наблюдаемым эффектам влияния угла атаки на колебания предельного цикла.

Численный метод расчета флаттера, позволяющий учесть влияние углов атаки и скольжения и углов отклонения органов управления на критические параметры флаттера предложен в [128]. В качестве базового используется метод, основанный на модификации метода вихревой решетки и учитывающий силы индуктивного сопротивления. Поскольку выражение для сил индуктивного сопротивления имеет нелинейный характер, осуществляется линеаризация уравнений в окрестности точки линеаризации. В точке линеаризации находится решение задачи обтекания самолета с из-

вестными конечными отклонениями его органов управления при конечных значениях углов атаки и скольжения с наложенными бесконечно малыми возмущениями формы самолета при его малых упругих колебаниях. Получено хорошее соответствие результатов расчетов экспериментальным данным для динамически подобной модели  $T$ -образного оперения самолета Ту-154.

Авторы [129] рассмотрели метод решения многопараметрических задач на основе принципов теории подобия, и представили применение метода при исследовании фюзеляжных форм флаттера, дали обоснование допустимости применения стендов для исследования фюзеляжных форм флаттера, снижение трудоемкости работ при моделировании флаттера в аэродинамических трубах.

В [130] рассмотрена пространственная задача о флаттере маневренного беспилотного летательного аппарата (БЛА) крестообразной схемы. Отмечено, что при расчетном анализе флаттера маневренного БЛА крестообразной схемы с четырьмя независимыми рулями методом заданных форм предполагают наличие двух плоскостей конструктивной симметрии – плоскостей рулей и рассматривают «плоские» колебания отдельно в каждой из них. Практически расчеты проводятся неоднократно на разных этапах разработки БЛА. Предварительный анализ и расчет на флаттер проводится на раннем этапе и использует в качестве исходных данных конструкторскую документацию. В исполнительном расчете появляется возможность использования экспериментальных данных. Исходными данными для исполнительного расчета на флаттер являются параметры корпуса и рулей, полученные экспериментально в ходе наземных резонансных («частотных») испытаний: парциальные частоты, формы, декременты колебаний, приведенные массы, а также зависимости аэродинамических коэффициентов, полученные при «статических» продувках моделей БЛА в аэродинамических трубах. В [130] предложена модификация традиционного подхода (в котором рассматриваются лишь «плоские» колебания БЛА), позволяющая учитывать пространственные колебания корпуса в двух главных плоскостях. При этом методика эксперимента по определению характеристик собственных колебаний предусматривает введение дополнительных сил возбуждения в поперечном направлении. Путем подбора сил в каждом сечении корпуса направление результирующей силы в пространстве меняется до совпадения с главным направлением (во всех сечениях — с главной плоскостью). Таким образом, выделяется собственный тон с независимыми колебания-

ми в каж-дой из главных плоскостей. В работе приведены алгоритмы и результаты решения методом заданных форм при колебаниях в главных плоскостях БЛА с четырьмя органами управления при учете тринадцати собственных тонов.

В работе [131] излагается методика расчета критической скорости флаттера самолета, позволяющая учесть влияние частоты колебаний конструкции и сжимаемости воздуха. Отмечено, что из-за неучета реальных частот колебаний конструкции ЛА, возникающих в полете, гипотеза квазистационарности приводит к ошибкам, из-за чего не соблюдается массовое совершенство конструкции ЛА. Влияние частоты колебаний конструкции ЛА позволяет учесть использование расширенной гипотезы гармоничности. Для ее применения необходимо точно определять реакцию самолета на гармонические возмущения, т.е. аэродинамические передаточные функции. Вычислить передаточные функции можно через аппроксимацию импульсной части переходных функций на бесконечности либо непосредственным расчетом, дающим более достоверные результаты.

Авторы [11] отметили, что, согласно экспериментальным данным, флаттер происходит со скоростью меньшей, чем предсказывается квазистатической аэродинамической моделью [132–134]. В [11] выполнен нелинейный анализ, чтобы выявить сосредоточенную нелинейность в упругости кручения двухмерной типовой сечения с использованием экспериментально полученной базы данных периодических откликов по кручению, содержащих более одной частоты и полученных при скоростях выше скорости флаттера. Сосредоточенная нелинейность моделируется квадратичными и кубическими нелинейными членами в упругости кручения. Используются два разных представления для аэродинамических нагрузок: квазистационарное и нестационарное. Результаты показывают, что для этой системы квазистационарное представление не может правильно предсказать частоту и скорость флаттера. С другой стороны, нестационарное представление, который учитывает эффекты возбуждения, дает отличное согласие с экспериментально полученными частотой и скоростью флаттера. На основе численного интегрирования, идентифицированы нелинейные коэффициенты пружины крутильных колебаний. Представительная модель и идентифицированные коэффициенты проверены путем сравнения результатов численного интегрирования основных уравнений с экспериментально полученными откликами. Более того, чтобы характеризовать тип неустойчивости, определена нормальная форма бифуркации Хопфа. Результаты показывают, что бифур-

кация Хопфа является сверхкритической, что подтверждается экспериментально.

Г.А. Леонов и Н.В. Кузнецов в [135] обратили внимание на то, что с вычислительной точки зрения в нелинейных динамических системах аттракторы можно рассматривать как самовозбуждающиеся и как скрытые аттракторы. Самовозбуждающиеся аттракторы могут быть локализованы численно с помощью стандартной вычислительной процедуры, в которой после переходного процесса траектория, начавшаяся из точки неустойчивого многообразия в окрестности равновесия, достигает состояния колебания, поэтому ее можно легко идентифицировать. Напротив, для скрытого аттрактора область притяжения не пересекается с небольшими окрестностями равновесий. Сначала проблема исследования скрытых колебаний возникла во второй части 16-й проблемы Гильберта (1900 г.). Первые нетривиальные результаты были получены в работах Баутина, посвященных построению вложенных предельных циклов в квадратичных системах. Также работы Маркуса – Ямабе, Айзермана и Калмана по абсолютной устойчивости привели к обнаружению скрытых колебаний в системах автоматического управления с уникальной устойчивой стационарной точкой. В [135] и в цикле других работ этих авторов и их коллег [135–146], отражены современные тенденции в синтезе аналитических и численных методов исследования скрытых аттракторов.

В [147] рассматривается некоторый специальный класс абстрактных нелинейных уравнений гиперболического типа, включающий в себя основные краевые задачи из теории панельного флаттера. Исследуются вопросы существования и устойчивости в этих уравнениях параметрических колебаний, бифурцирующих из нулевого положения равновесия в случае малого затухания.

В [148] показано, что задача анализа классического флаттера аналогична задаче анализа устойчивости замкнутой системы регулирования со многими входами и выходами при наличии между ними перекрестных связей. Показано также, что многосвязную разомкнутую систему, соответствующую ей, можно свести к совокупности односвязных контуров, роль передаточных функций которых играют собственные числа передаточной матрицы системы. Это позволяет использовать для анализа устойчивости каждого из контуров классические частотные методы. Приведен вычислительный пример, иллюстрирующий эквивалентность традиционного и рассмотренного в работе подходов. Показано, что из разработанных положе-

ний вытекает метод расчетно-экспериментального исследования флаттера, опирающийся непосредственно на экспериментальные частотные характеристики конструкции и не требующий предварительного определения частот и форм собственных колебаний.

## 4 Подавление флаттера

### 4.1 Пассивное подавление флаттера

В [149] исследуется зависимость критической скорости флаттера крыла большого удлинения от положения на нем двигателей. Предлагается приближенный способ параметрических исследований, основанный на принципе Рэлея. Рациональное положение двигателей по отношению к основным осям крыла определяется с помощью упрощенной модели, в которой массовые и жесткостные характеристики крыла приводятся к выбранному сечению. Приведен числовой пример расчета критической скорости флаттера в зависимости от положения двигателей на крыле.

Как отмечено в [150], стратегии пассивного управления для подавления флаттера по сравнению с активными имеют важное преимущество с точки зрения сведения полезной нагрузки к минимуму и исключения проблем, связанных с задействованием датчиков и управляющих поверхностей. В [150] основное внимание уделяется стратегии пассивного управления, а именно нелинейному поглощению энергии (*nonlinear energy sink*, NES), направленному на подавление или уменьшение амплитуды колебаний предельного цикла аэроупругих систем. Рассматриваемая система состоит из жесткого аэродинамического профиля, упруго установленного на линейных и нелинейных рессорах. Это крыло имеет две степени свободы: вертикальное поступательное движение, называемое изгиб (*plunge*) и обозначенное  $h$ , и вращательное движение по часовой стрелке, называемое кручением (*pitch*), обозначенное  $\theta$ . Смещение массы для нелинейного поглотителя энергии относительно крыла обозначено  $y_2$ . Параметры  $k_h(h)$ ,  $k_\theta(\theta)$  и  $k_n(y_2)$  используются, соответственно, для представления жесткости изгиба, кручению и гасителя энергии. Они задаются следующими выраже-

НИЯМИ:

$$k_h(h) = k_{h_0} + k_{h_1}h + k_{h_2}h^2, \quad (42)$$

$$k_\theta(\theta) = k_{\theta_0} + k_{\theta_1}\theta + k_{\theta_2}\theta^2, \quad (43)$$

$$k_n(y_2) = k_{n_2}y_2^2. \quad (44)$$

В [150] на основе энергетического подхода и формализма Лагранжа в предположении, что  $y_2$  отсчитывается от начала координат, получены следующие безразмерные уравнения движения системы «спаренное крыло/поглотитель энергии»:

$$\begin{aligned} \ddot{h} + e^*\ddot{\theta} \cos \theta + \frac{\sigma^2}{V^2} (h + \eta_1^h h^2 + \eta_2^h h^3) + \bar{\eta} \frac{\sigma^2}{V^2} (-y_2 - d^* \sin \theta + h)^3 + \frac{\bar{C}_1}{V} \dot{h} + \\ + \bar{C}_{y_2} \frac{\sigma}{V} (\dot{y}_2 + d^* \dot{\theta} \cos \theta - \dot{h}) = -\bar{L}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} r^2 \ddot{\theta} + e^* \cos(\theta) \ddot{h} + \bar{\varepsilon} d^{*2} \ddot{\theta} + \frac{r^2}{V^2} (\theta + \eta_1^\theta \theta^2 + \eta_2^\theta \theta^3) - \\ - \bar{\eta} \frac{\sigma^2}{V^2} d^* \cos \theta (-y_2 - d \sin \theta + h)^3 + \frac{\bar{C}_2}{V} \dot{\theta} + \\ + \bar{C}_{y_2} \frac{\sigma}{V} d^* \cos \theta (\dot{y}_2 + d^* \dot{\theta} \cos \theta - \dot{h}) = \bar{M}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\bar{\varepsilon} \ddot{y}_2 + \bar{\eta} \frac{\sigma^2}{V^2} (y_2 + d^* \sin \theta - h)^3 + \bar{C}_{y_2} \frac{\sigma}{V} (\dot{y}_2 + d^* \dot{\theta} \cos \theta - \dot{h}) = 0, \quad (47)$$

где  $\bar{\varepsilon}$  – отношение массы поглотителя энергии к общей массе системы,  $\sigma$  – отношение частот,  $V$  – приведенная скорость,  $d$  – безразмерное расположение поглотителя энергии относительно упругой оси,  $\bar{\eta}$  – безразмерная жесткость, связанная с гасителем энергии,  $e^*$  – эксцентриситет,  $\eta_{i=1,2}^h$  – квадратичная и кубическая компоненты жесткости изгиба,  $\eta_{i=1,2}^\theta$  – квадратичная и кубическая жесткость по кручению,  $\bar{L}$  – безразмерная подъемная сила и  $\bar{M}$  – безразмерный момент. Нелинейная квазистационарная аэродинамика использованы для представления аэродинамических нагрузок. Чтобы найти подъемную силу и момент, в [150] используются выражения, подобные (11) – (13). Параметры, включая массу и размещение пассивного поглотителя варьируются, чтобы проверить его эффективность в подавлении нежелательного аэроупругого поведения в различных условиях. Получена количественная оценка аэродинамической, конструктивной и стоковой нелинейностей от типа неустойчивости. По результатам [150], в зависимости от массы и положения вдоль профиля, нелинейный поглотитель может быть более эффективным с точки зрения изменения докритической бифуркации на сверхкритическую. Однако изменение очень ограничено тем, что

система восстанавливает подкритический отклик при увеличении скорости свободного потока. Для случая, когда исходная система демонстрирует сверхкритическое поведение, результаты показывают, что нелинейный поглотитель может уменьшить амплитуды основного тона и изгиба. Однако это уменьшение ограничено очень небольшой областью скоростей набегающего потока выше скорости флаттера. Результаты для нормальной формы показывают, что нелинейный поглотитель имеет характеристики затухания и, как таковой, не может поддерживать энергию, которую он отбирает из сечения аэродинамического профиля. Это приводит к модулированным характеристикам как аэродинамического сечения, так и нелинейного поглотителя.

Добавление относительно небольшой массы к основной системе, прикрепленной через линейную пружину и демпфер (*linear tuned vibration absorber*, LTVA), значительно улучшает стабильность механической системы. Использование чисто нелинейной пружины в поглотителе увеличивает полосу частот поглотителя, снижает колебания предельного цикла и позволяет избежать докритических бифуркаций с потерей устойчивости. В [151] предложен нелинейный настроенный поглотитель колебаний (*nonlinear tuned vibration absorber*, NLTVA), возвращающая сила которого настраивается в соответствии с функциональной формой нелинейности первичной системы. NLTVA разработан, чтобы использовать положительные особенности как LTVA, так и нелинейного поглотителя. В [151] показано, что NLTVA может компенсировать вредное влияние нелинейностей первичной системы, то есть связанная система демонстрирует линейную динамику, подобную той же системе без структурных нелинейностей. Рассматривая осциллятор Ван дер Поля – Дуффинга как первичную систему, аналитически получено решение в замкнутой форме для локальной компенсации нелинейностей. Методы численного продолжения показали, что компенсация действительна также для больших амплитуд отклика.

Конфигурация с внешним магазином истребителя F-16 рассмотрена в [152] с использованием программы расчета аэроупругости во временной области. Программа использовала решатель потока Эйлера средней точности в сочетании с линейным модальным представлением структуры. Ключевой особенностью кода программы было то, что он позволял пользователю указывать нелинейные профили демпфирования. Четыре профиля демпфирования были исследованы, чтобы определить их влияние на эффективность рассматриваемого подхода для прогнозирования аэроупругих

колебаний предельного цикла. Затухание было указано как функция колебательного отклика, и результаты решения сравнивались с откликами летных испытаний в зависимости от числа Маха. Для трех исследованных профилей демпфирования получены реалистичные колебания предельного цикла.

## 4.2 Активное подавление флаттера

Существует большое количество работ, посвященных активному подавлению флаттера крыла, см., напр. [12, 132, 133, 150, 153–162], и этот список далеко не полон.

Статья Г.А. Леонова и Н.В. Кузнецова [163] посвящена модели подавления флаттера описанной М.В. Келдышем [164] и строгому подходу к ее математическому анализу. Для решения задачи стабилизации в модели Келдыша использовался аналог прямого метода Ляпунова для дифференциальных включений. Результаты сравнивались с результатами Келдыша, полученными методом гармонического баланса. Показаны ограничения использования метода гармонического баланса для исследования систем с сухим трением и участком покоя, в которых возникают скрытые колебания.

### 4.2.1 Активное подавление флаттера линейно-квадратичными оптимальными регуляторами

В статье [165] представлены результаты, полученные с помощью модели работы [166] в ходе испытаний, проведенных в калибровочной (CWT) и низкоскоростной (LSWT) аэродинамической трубах в Совете по научным и промышленным исследованиям (*Council for Scientific and Industrial Research, CSIR*).<sup>3</sup>

В [165] принята следующая линеаризованная модель системы изгибно-упругих колебаний профиля крыла (см. также раздел 2.2):

$$m\ddot{h} + mx_\alpha b\ddot{\alpha} + mx_\beta b\ddot{\beta} + C_h \dot{h} + K_h h = L, \quad (48)$$

$$mx_\alpha b\ddot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + ((c - a)b^2 mx_\beta + I_\beta) \ddot{\beta} + C_\alpha \dot{\alpha} + K_\alpha \alpha = M_\alpha, \quad (49)$$

$$mx_\beta b\ddot{h} + ((c - a)b^2 mx_\beta + I_\beta) \ddot{\alpha} + I_\beta \ddot{\beta} + C_\beta \dot{\beta} + K_\beta (\beta - \beta_c) = M_\beta \quad (50)$$

<sup>3</sup> «Совет по научным и промышленным исследованиям» (CSIR) – ведущая научно-исследовательская организация, занимающаяся исследованиями, разработкой, локализацией и распространением технологий для ускорения социально-экономического процветания в Южной Африке, <https://www.csir.co.za/>.

где силы, действующие на крыло, – это нестационарная подъемная сила  $L$  (предполагается, что она действует на расстоянии четверти хорды крыла), нестационарный момент тангажа  $M_\alpha$  и нестационарный шарнирный момент управляющей поверхности  $M_\beta$ . Для моделирования этих сил использовался метод Теодорсена [17]. В [165] члены  $T_j$  модели (21) – (23) рассматривались как функции положения поверхности управления. Функция  $C(k)$  учитывающая подъемную силу из-за вихрей, сходящих с задней кромки крыла при его движении, была выражена через функции Бесселя. Чтобы смоделировать эти эффекты аэродинамического запаздывания, рациональное приближение к функции Теодорсена было получено путем решения двухчленного приближения функции Вагнера  $\Phi = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{C(k)}{i\omega} \right\}$ , где  $\mathcal{F}$  означает преобразование Фурье, ср. [167]:

$$\Phi = 1 - \delta_1 e^{\frac{-\lambda_1 V t}{b}} - \delta_2 e^{\frac{-\lambda_2 V t}{b}}, \quad (51)$$

где  $\delta_1 = 0.165$ ,  $\lambda_1 = 0.041$ ,  $\delta_2 = 0.335$ ,  $\lambda_2 = 0.320$  взяты как в [167], см. также (15). Уравнения (48) – (50) (уравнения конструкции системы) использованы в сочетании с уравнениями обобщенных аэродинамических сил работы [17]. Уравнение (51) используется для аппроксимации вклада циркуляционной подъемной силы в нестационарные аэродинамические силы. Затем модель системы записывается в форме пространства состояний  $\dot{X} = AX + Bu$ ,  $Y = CX$ , где  $u = \beta_c$  – заданный угол поворота закрылка, вектор  $X \in \mathbb{R}^8$  переменных состояния определяется как  $X = [\dot{h}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, h, \alpha, \beta, l_1, l_2]^T$ , где два состояния аэродинамического запаздывания  $l_1$  и  $l_2$  предназначены для двухчленного приближения к функции Вагнера. Во время испытаний в аэродинамической трубе были измерены изгиб, угол тангажа (кручения) и угол отклонения управляющей поверхности, а остальные пять переменных состояния оценивались с использованием фильтра Калмана. Для подавления флаттера разработан линейно-квадратичный гауссовский (LQG) регулятор, включающий собственно линейно-квадратичный регулятор для расчета коэффициентов обратной связи и фильтр Калмана для оценки неизмеряемых переменных состояния системы. В [165] подробно описаны лабораторная установка с аэродинамической трубой и ее программное обеспечение, а также представлены и проанализированы экспериментальные результаты по подавлению флаттера.

Линейно-квадратичный регулятор также использован в [160], где взят статический закон управления с обратной связью по состоянию  $u = -K_{fb}x$

с измеряемым вектором состояния объекта  $x$  вида (6),  $K_{fb}$  – матрица  $(1 \times 4)$  (вектор-строка) параметров регулятора. Линейно-квадратичная функция потерь  $J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$  использовалась с заданной положительно-определенной  $(4 \times 4)$  матрицей  $Q = Q^T > 0$  и неотрицательным скаляром  $R \geq 0$ . Коэффициент усиления вектора обратной связи по состоянию  $K_{fb}$ , минимизирующий функцию потерь  $J$ , был найден с помощью стандартной процедуры MATLAB *lqr*. Для  $Q = \text{diag}\{1, 0.01, 1, 2 \cdot 10^{-3}\}$ ,  $R = 0.5$ . При указанных параметрах коэффициент  $K_{fb}$  имеет значение  $K_{fb} = \begin{bmatrix} -0.93 & -0.17 & -7.22 & 0.062 \end{bmatrix}$  и обеспечивает асимптотическую сходимость переменных состояния в окрестности состояния равновесия. В [160] использованы значения:  $\bar{\delta} = 0.0873$  рад = 5 град,  $\dot{\bar{\delta}} = 8.73$  рад/с = 500 град/с,  $\xi_{act} = 0.6$ ,  $\omega_{act} = 50$  рад/с. Если начальные условия достаточно велики, то регулятор с обратной связью теряет свои стабилизирующие свойства и возникают колебания предельного цикла. Эти колебания не могут быть обнаружены линеаризацией модели системы в окрестности начала координат и поэтому относятся к «скрытым». Применяя процедуру локализации скрытых колебаний работ [135, 138, 139, 142, 168, 169], локализована точка, принадлежащая предельному циклу с координатами  $\alpha(0) = -0.109$  рад,  $\dot{\alpha}(0) = -3.55$  рад/с,  $h(0) = -9.33 \cdot 10^{-4}$  м,  $\dot{h}(0) = 0.031$  м/с,  $\delta(0) = -0.0873$  рад,  $\dot{\delta}(0) = -8.723$  рад/с.

#### 4.2.2 Активное подавление флаттера с помощью регуляторов с переменной структурой и адаптивных регуляторов

Устойчивость малоприводной (*underactuated*) нелинейной аэроупругого сечения крыла рассматривается в [157] с использованием робастного подхода к управлению с непрерывным скользящим режимом на основе пассивности. Показано, что регулятор способен стабилизировать систему при наличии больших согласованных и несогласованных неопределенностях и значительных входных возмущениях. Численный пример, основанный на экспериментальной установке Техасского университета A&M, использован для демонстрации стабилизации системы с полностью развитым колебанием предельного цикла и отклонением закрылка, ограниченным величиной 20 град.

Детальная аэроупругая модель крыла с тремя степенями свободы в сочетании с нелинейной моделью балочной конструкции и линейной аэродинамикой, которая считается достаточной для описания низкоскоростных

аэроупругих процессов, представлена в [170]. В отличие от внутреннего описания, где доминирующие нелинейности, возникающие из-за больших деформаций, имеют кубическую форму, в модели на основе величины смещения они появляются до значения второго порядка [171]. В статье [170] основное внимание уделяется созданию нелинейных редуцированных моделей для снижения вычислительных затрат адаптивного регулятора на основе схемы адаптивного управления эталонной моделью (БНС с ЭМ) [172], а также прогнозированию порывов ветра для нелинейных аэроупругих систем. Представлена стратегия управления, разработанная на основе нелинейной модели пониженного порядка для смягчения влияния порывов ветра, не зависящая от исходных уравнений. Приведено сравнение с результатами, полученными с использованием исходной модели с двумя степенями свободы, изложенной в [173].

В [154] предлагается так называемый метод «адаптивного управления со структурной эталонной моделью» (*structured model reference adaptive control, SMRAC*) для подавления колебаний предельного цикла, возникающих в сечении крыла, обладающего нелинейной крутильной жесткостью. Для сравнения результаты приведены активного управления на основе адаптивной линеаризации обратной связью, предложенной в [133]. Оба адаптивных регулятора реализованы экспериментально в аэродинамической трубе. Колебания предельного цикла подавляются обоими регуляторами для условий, превышающих на 20% скорость, при которой колебания предельного цикла происходят без управления.

В [12] предлагается нелинейная система управления для подавления флаттера в аэроупругой системе. Поскольку отдельные управляющие поверхности имеют ограниченную эффективность, в [12] предлагается управление с помощью передних и задних управляющих поверхностей. В [12], предлагается и исследуется управление со скользящим режимом высокого порядка (*high order sliding mode control, HOSMC*), рассчитанного на основе метода бэкстеппинга, которое обеспечивает устойчивость системы и исключение колебаний предельного цикла.

Авторы [174] отметили, что, хотя линейный регулятор может стабилизировать нелинейную систему при некоторых обстоятельствах, эмпирические данные показывают, что эти методы управления окажутся ненадежными в сильно нелинейных режимах и что поэтому устойчивость не гарантируется. Разработка стратегий управления, подходящих для этих нелинейных систем, описана в [174], где также представлен метод адаптивного

управления, гарантирующий устойчивость. В [174] приведены экспериментальные результаты, полученные с использованием адаптивной системы управления.

В [159] предлагается и численно исследуется простое адаптивное управление (SAC) низкого порядка с неявной эталонной моделью (НЭМ, *Implicit Reference Model*, IRM) для модели сечения крыла работы [12]. Для адаптивных регуляторов с НЭМ порядок эталонной модели может быть небольшим, даже если управляемый объект описывается уравнением высокого порядка. Кроме того, на этапе разработки алгоритма управления порядок модели объекта может быть неизвестен, что является отличительной чертой систем с НЭМ по сравнению с традиционными системами БСНС с ЭМ (см. [175–177]). Еще одним достоинством подобных адаптивных контроллеров является возможность их использования при нулевом опорном сигнале, т.е. для задач стабилизации. В [159] общий закон адаптивного управления с НЭМ был применен к задаче подавления флаттера для объекта, модель динамики которого имеет вид (7), в предположении, что угол тангажа  $\alpha(t)$  был измерен вместе со своей первой производной по времени  $\dot{\alpha}(t)$ . Для разработки адаптивного регулятора, уравнение (7) было линеаризовано в окрестности нуля для «номинальных» (рабочих) условий полета. В результате вычислений были получены следующие многочлены (подробное изложение приведено в [159]):

$$A(p) = p^4 + 3.18p^3 + 387p^2 + 978p + 4.9 \cdot 10^4, \quad (52)$$

$$B(p) = -(207p^2 + 530p + 3.78 \cdot 10^4). \quad (53)$$

Видно, что относительная степень  $k = n - m$  системы с многочленами (52), (53)  $k = 2$ . Следовательно, количество выходных производных по времени  $l$  должно быть равным  $l = 1$ , а  $G(p)$  должен быть полиномом первого порядка,  $G(p) = p + g_0$ . Очевидно, полином  $B(p)$  гурвицев, и условия применимости адаптивного закона управления (см. [178–181]) справедливы для любого  $g_0 > 0$ .

Окончательно, получен следующий пропорционально-дифференциальный адаптивный закон управления с НЭМ:

$$u(t) = k_p(t)\alpha(t) + k_d(t)\dot{\alpha}(t), \quad (54)$$

$$\sigma(t) = \dot{\alpha}(t) + g_0\alpha(t), \quad (55)$$

$$\dot{k}_p(t) = \gamma\sigma(t)\alpha(t) - \lambda(k_p(t) - k_p^0), \quad k_p(0) = k_p^0, \quad (56)$$

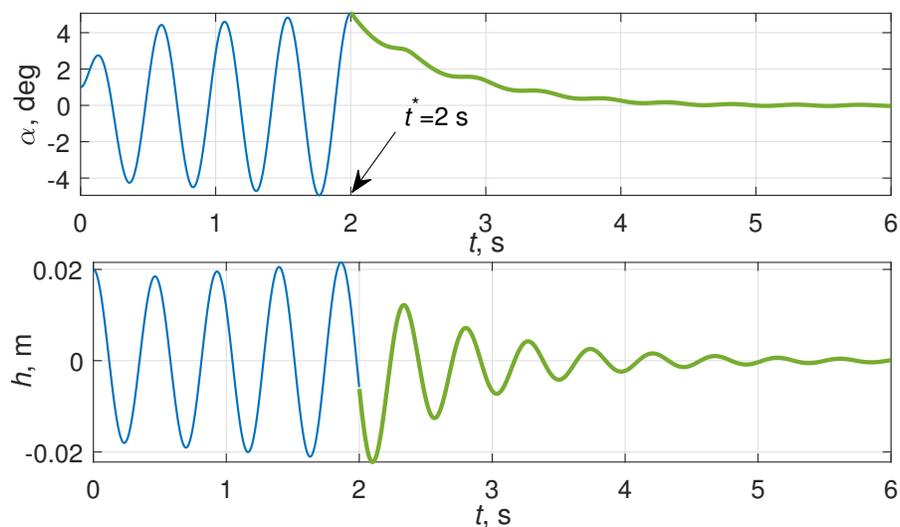
$$\dot{k}_d(t) = \gamma\sigma(t)\dot{\alpha}(t) - \lambda(k_d(t) - k_d^0), \quad k_d(0) = k_d^0. \quad (57)$$

В [159] также рассматривался более реалистичный случай, когда учитывается динамика привода. Привод моделировался передаточной функцией первого порядка  $W_u^\beta(s) = \frac{1}{Ts + 1}$  от управляющего сигнала  $u(t)$  до отклонения управляющей поверхности  $\beta(t)$ , где постоянная времени  $T = 0.05$  с. В этом случае условие на  $l$  не выполняется и адаптивный регулятор (54) – (57) не стабилизирует систему. Чтобы частично компенсировать инерцию привода, форсирующая цепочка с передаточной функцией  $W_c(s) = \frac{\tau_1 s + 1}{\tau_2 s + 1}$  была последовательно включена в систему. Постоянные времени  $\tau_1, \tau_2$  были взяты равными  $\tau_1 = 0.05$  с,  $\tau_2 = 10^{-3}$  с.

Некоторые результаты моделирования для адаптивного управления [159] показаны на рисунках 5, 6. Для иллюстрации работы системы показано, что, начиная с начальной точки  $\alpha(0) = 1.0$  град,  $h(0) = 0.02$  м, колебания предельного цикла свободно развивались до момента  $t^* = 2$  с и после этого момента времени подавлялись с помощью адаптивного регулятора (54) – (57).

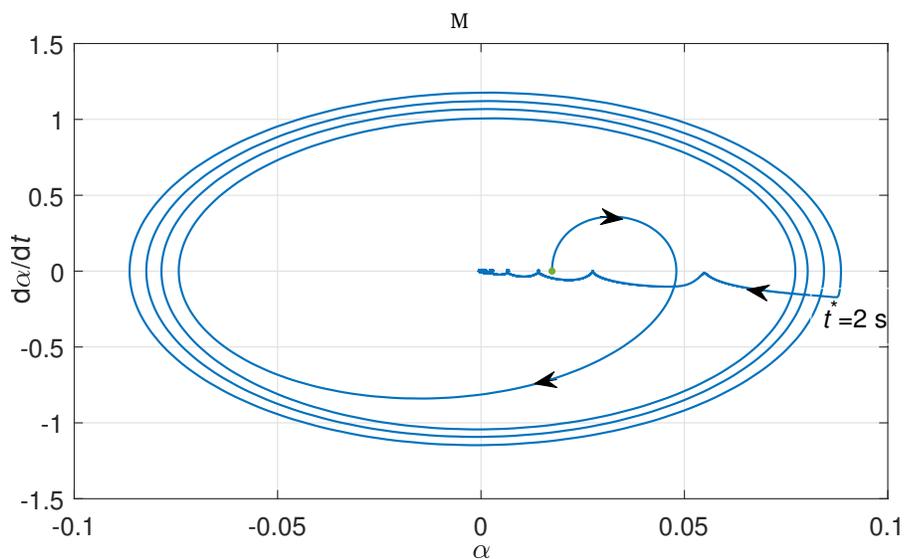
## 5 Заключение

В статье представлен обзор существующих результатов по упруго-изгибному флаттеру крыла. Приведены модели упруго-изгибного флаттера крыла, включая уравнения прогиба и кручения плоского крыла, модель Теодорсена для аэродинамической комбинации профиля и элерона, приближенное описание подъемно-весовой функции сходящихся крыльев в несжимаемом потоке, модель неконтролируемого изгибного флаттера через функцию Вагнера, а также модели пониженного порядка. Изложение проиллюстрировано результатами моделирования изгибно-крутильных колебаний крыла. Описаны исследования явления упруго-изгибного флаттера крыла, в том числе численные и экспериментальные. Рассмотрены несколько подходов к пассивному и активному подавлению флаттера, включая управление, оптимальное по линейно-квадратичному интегральному функционалу, управление с переменной структурой и адаптивное управление.



Алгоритм управления (54) – (57) включается при  $t^* = 2$  с

Рис. 5 —  $\alpha(t)$ ,  $h(t)$  процессы для адаптивного регулятора (54) – (57) работы [159].



Алгоритм управления (54) – (57) включается при  $t^* = 2$  с

Рис. 6 — Проекция фазовых траекторий на плоскость  $(\alpha, \dot{\alpha})$  для адаптивного регулятора (54) – (57) работы [159].

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Ведущих научных школ Российской Федерации на 2020–2021 гг., проект НШ-2624.2020.1 (главы 1, 2) и Санкт-Петербургского государственного университета, проект Pure ID 75207094 (главы 3–5).

## Список литературы

- [1] Birnbaum W. Das ebene Problem des schlagenden Flügels // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1924. S. 277–291. (In German).
- [2] Blenk H., Liebers F. Gekoppelte Biegungs- Torsions- und Biegungsschwingungen von Freitragenden und halbjreitragenden Flügeln // LuftfahrtForschungs. 1929. Bd. 4. S. 69–93. (In German).
- [3] Blenk H., Liebers F. Gekoppelte Torsions- und Biegungsschwinguneen von Tragflügeln // Z. Flugtech. und Motorluftschif. 1925. S. 479–486. (In German).
- [4] Гроссман Е. П., Кричевский С. С., Борин А. А. К вопросу о потере устойчивости конструкций крыла в полете // Труды ЦАГИ. 1935. Т. 202.
- [5] Гроссман Е.П. Флаттер // Тр. ЦАГИ. 1937. № 284.
- [6] Гроссман Е.П. Курс вибраций частей самолета. Учебное пособие. М.: Оборонгиз, 1940.
- [7] Борин А.А. Из истории решения проблемы флаттера // Из истории авиации и космонавтики. 1978. Вып. Библиотека по астрономии и космонавтике, № 32. URL: <http://12apr.su/books/item/f00/s00/z0000030/st019.shtml>.
- [8] Авиация. Энциклопедия / Под ред. Свищёва Г.П. М.: ЦАГИ им. Н.Е.Жуковского, 1994. Большая Российская Энциклопедия. 766 с.

- [9] Егер С.М., Матвеев А.М., Шаталов И.А. Основы авиационной техники: Учебник / Под ред. И.А. Шаталова. М.: Машиностроение, 2003.
- [10] Zhang Y., Chen Y., Liu J., Meng G. Highly Accurate Solution of Limit Cycle Oscillation of an Airfoil in Subsonic Flow // *Advances in Acoustics and Vibration*. 2011. Vol. 2011, no. ID 926271. P. 1–10.
- [11] Abdelkefi A., Vasconcellos R., Nayfeh A., Hajj M. An analytical and experimental investigation into limit-cycle oscillations of an aeroelastic system // *Nonlinear Dynamics*. 2013. Vol. 71, no. 1-2. P. 159–173.
- [12] Chen C.-L., Peng C. C., Yau H.-T. High-order sliding mode controller with backstepping design for aeroelastic systems // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2012. Vol. 17, no. 4. P. 1813 – 1823. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570411005028>.
- [13] Dowell E. *A Modern Course in Aeroelasticity*. Dordrecht: Kluwer, 1995.
- [14] ГОСТ. 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере: Термины, определения и обозначения. М.: Изд-во стандартов, 1981.
- [15] Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987. С. 230.
- [16] Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1979.
- [17] Theodorsen T. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter: Tech. Rep. 496: National Advisory Committee for Aeronautics, 1935. URL: <https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc53413/>.
- [18] Theodorsen T., Garrick I. Mechanism of flutter: a theoretical and experiment investigation of the flutter problem: Tech. Rep. 685: National Advisory Committee for Aeronautics, 1940. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19930091762>.
- [19] Bisplinghoff R., Ashley H., Halfman R. *Aeroelasticity*. New York: Dover, 1996.

- [20] Edwards J., Ashley A., Breakwell J. Unsteady aerodynamic modeling for arbitrary motions // *AIAA J.* 1979. Vol. 17. P. 365–374.
- [21] Sears R. W. A systematic presentation of the theory of thin airfoils in non-uniform motion: Ph. D. thesis / California Institute of Technology. Pasadena, California, 1938.
- [22] Li M., Yang Y., Li M., Liao H. Direct measurement of the Sears function in turbulent flow // *J. Fluid Mechanics.* 2018. — June. Vol. 847. P. 768–785.
- [23] Бейкер Дж. мл., Грейвс М. П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1968.
- [24] Kutta M. W. *Lifting Forces in Flowing Fluids.* 1902.
- [25] Houghton E., Carpenter P. *Aerodynamics for engineering students.* – 5th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2003.
- [26] Mohebbi F., Evans B., Sellier M. On the Kutta Condition in Compressible Flow over Isolated Airfoils // *Fluids.* 2019. Vol. 4, no. 2. URL: <https://www.mdpi.com/2311-5521/4/2/102>.
- [27] Mohebbi F., Sellier M. On the Kutta Condition in Potential Flow over Airfoil // *Journal of Aerodynamics.* 2014.
- [28] Queijo M. J., Wells W. R., Keskar D. A. Approximate indicial lift function for tapered, swept wings in incompressible flow. USA: NASA. Scientific and Technical Information Office, Langley Research Center, Wright State University, 1978. NASA Technical Paper 1241.
- [29] Jones R. T. The Unsteady Lift of a Wing of Finite Aspect Ratio: Tech. Rep. 681: National Advisory Committee for Aeronautics, 1940.
- [30] Liu L. P., Dowell E. H. The secondary bifurcation of an aeroelastic airfoil motion: effect of high harmonics // *Nonlinear Dynamics.* 2004. Vol. 37, no. 1. P. 31–49.
- [31] Jones R. T. Operational Treatment of the Non-Uniform Lift Theory in Airplane Dynamics // *NACA Technical Note 667.* NASA, 1938.
- [32] Lee B. H. K., Liu L., Chung K. W. Airfoil motion in subsonic flow with strong cubic nonlinear restoring forces // *J. Sound and Vibration.* 2005. Vol. 281, no. 3–5. P. 699–717.

- [33] Liu L. P., Dowell E. H., Thomas J. P. A high dimensional harmonic balance approach for an aeroelastic airfoil with cubic restoring forces // *J. Fluids and Structures*. 2005. Vol. 23, no. 3. P. 351–363.
- [34] Peters D. A. Finite-State Airloads for Deformable Airfoils on Fixed and Rotating Wings // *Proc. Symp. Aeroelasticity and Fluid/ Structure Interaction, ASME Winter Annual Meeting, Chicago, IL*. 1994. — Nov.
- [35] Peters D. A., Karunamoorthy S., Cao W.-M. Finite state induced flow models. I – Two-dimensional thin airfoil // *J. Aircraft*. 1995. — mar. Vol. 32, no. 2. P. 313–322.
- [36] Tang D., Conner M. D., Dowell E. H. Reduced-Order Aerodynamic Model and Its Application to a Nonlinear Aeroelastic System // *J. Aircraft*. 1998. Vol. 35, no. 2. P. 332–338. URL: <https://doi.org/10.2514/2.2304>.
- [37] Dowell E. H. Eigenmode analysis in unsteady aerodynamics – Reduced-order models // *AIAA Journal*. 1996. Vol. 34, no. 8. P. 1578–1583. URL: <https://doi.org/10.2514/3.13274>.
- [38] Zhang C., Zhou Z., Zhu X., Qiao L. A Comprehensive Framework for Coupled Nonlinear Aeroelasticity and Flight Dynamics of Highly Flexible Aircrafts // *Applied Sciences*. 2020. Vol. 10, no. 3. URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/10/3/949>.
- [39] Huang R., Hu H., Zhao Y. Nonlinear Reduced-Order Modeling for Multiple-Input/Multiple-Output Aerodynamic Systems // *AIAA Journal*. 2014. Vol. 52, no. 6. P. 1219–1231. <https://doi.org/10.2514/1.J052323>. URL: <https://doi.org/10.2514/1.J052323>.
- [40] Isogai K. On the Transonic-Dip Mechanism of Flutter of a Sweptback Wing // *AIAA Journal*. 1979. Vol. 17, no. 7. P. 793–795.
- [41] Isogai K. Transonic dip mechanism of flutter of a sweptback wing. II // *AIAA Journal*. 1981. Vol. 19, no. 9. P. 1240–1242.
- [42] Dowell E., Hall K. Modeling of fluid-structure interaction // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2001. Vol. 33. P. 445–490.
- [43] Lomax H., Pulliam T., Zingg D. Time-Marching Methods for ODEs // *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics* / Ed. by J.-J. Chattot,

- P. Colella, R. Glowinski et al. Berlin, Heidelberg: Springer, 2001. Ser. Scientific Computation.
- [44] Dowell E., Edwards J., Strganac T. Nonlinear aeroelasticity // J. Aircraft. 2003. Vol. 40, no. 5. P. 857–874.
- [45] Крапивко А. В. Применение метода Д-разбиения для построения алгоритма расчета на ЭВМ устойчивости линейных систем и систем с локальными нелинейностями // Ученые записки ЦАГИ. 1981. Т. XII, № 2. С. 129–136.
- [46] Баранов Н. И., Васильев К. И., Кутин Д. Б., Нарижный А. Г., Смыслов В. И. Экспериментальное исследование флаттера управляемого стабилизатора с нелинейными характеристиками в проводке управления при электромеханическом моделировании аэродинамических сил // Ученые записки ЦАГИ. 1983. Т. XIV, № 3. С. 94–100.
- [47] Lee B., LeBlanc P. Flutter Analysis of a Two-dimensional Airfoil with Cubic Non-linear Restoring Force. Aeronautical note. National Research Council Canada, 1986. URL: <https://books.google.ru/books?id=Kkc7PwAACAAJ>.
- [48] O’Neil T., Strganac T. W. Aeroelastic Response of a Rigid Wing Supported by Nonlinear Springs // J. of Aircraft. 1998. — July–Aug. Vol. 35, no. 4. P. 616–622.
- [49] Расчетные исследования трансзвукового флаттера самолета // Ученые записки ЦАГИ. 1989. Т. XX, № 6. С. 110–115.
- [50] Буньков В. Г. Комбинированный метод расчета аэродинамических сил на колеблющемся летательном аппарате в сверхзвуковом потоке // Ученые записки ЦАГИ. 1984. Т. XV, № 3. С. 11–22.
- [51] Alighanbari H., Price S. J. The Post-Hopf-Bifurcation Response of an Airfoil in Incompressible Two-Dimensional Flow // Nonlinear Dynamics. 1996. Vol. 10. P. 381–400.
- [52] Doedel E. J., Champneys A. R., Fairgrieve T. F. et al. AUTO 97: Continuation And Bifurcation Software For Ordinary Differential Equations (with HomCont). <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.44.9955>.

- [53] Price S. J., Lee B. H. K., Alighanbari H. An analysis of the post instability behaviour of a two dimensional airfoil with a structural nonlinearity // *J. of Aircraft*. 1995. Vol. 31. P. 1395–1401.
- [54] Tang D., Henry J., Dowell E. Limit cycle oscillations of delta wing models in low subsonic flow // *AIAA journal*. 1999. Vol. 37, no. 11. P. 1355–1362.
- [55] Zhao L., Yang Z. Chaotic Motion of An Airfoil with Nonlinear Stiffness in Incompressible Flow // *J. of Sound and Vibration*. 1990. Vol. 138. P. 245–254.
- [56] Zhao D.-M., Zhang Q.-C. Bifurcation and chaos analysis for aeroelastic airfoil with freeplay structural nonlinearity in pitch // *Chinese Physics B*. 2010. Vol. 19, no. 3. P. 030518–10.
- [57] Zhou L., Chen Y., Chen F. Chaotic motions of a two-dimensional airfoil with cubic nonlinearity in supersonic flow // *Aerospace Science and Technology*. 2013. Vol. 25, no. 1. P. 138 – 144. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S127096381200003X>.
- [58] Chen P. C., Liu D. D., Hall K. C., Dowell E. H. Nonlinear Reduced Order Modeling of Limit Cycle Oscillations of Aircraft Wings. Final report. Scottsdale, AZ., USA: Ft. Belvoir Defense Technical Information Center, 2000. — Aug. Vol. AFRL-SR-BL-TR-00-. P. 107. Performing Organization: ZONA Technology, Inc.; In collaboration with Duke Univ., Durham, NC., USA. URL: [InternetResource, handle.dtic.mil](http://InternetResource.handle.dtic.mil).
- [59] Raveh D. E. Computational-fluid-dynamics-based aeroelastic analysis and structural design optimization – a researcher’s perspective // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005. Vol. 194, no. 30. P. 3453–3471. Structural and Design Optimization.
- [60] Krist S., Biedron R., Rumsey C. CFL3D User’s Manual Version 5.0: Tech. rep. Hampton, VA: NASA Langley Research Center, 1997. — Sep.
- [61] Cho H., Venturi D., Karniadakis G. Karhunen–Loève expansion for multi-correlated stochastic processes // *Probabilistic Engineering Mechanics*. 2013. Vol. 34. P. 157–167.

- [62] Bendiksen O. Role of Shock Dynamics in Transonic Flutter // Proc. AIAA Dynamics Specialists Conference, Dallas, TX. No. AIAA-92-2121-CP. 1992. — Jan. 1.
- [63] Sapatnekar S. S. Overcoming Variations in Nanometer-Scale Technologies // IEEE J. Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems. 2011. Vol. 1, no. 1. P. 5–18.
- [64] Hall K., Thomas J., Dowell E. Reduced-Order Modeling of Unsteady Small Disturbance Flows Using a Frequency-Domain Proper Orthogonal Decomposition Technique // Proc. 37th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. No. AIAA 99-0655. 1999. — Jan.
- [65] Dowell E. Flutter of a buckled plate as an example of chaotic motion of a deterministic autonomous system // J. Sound and Vibration. 1982. Vol. 85. P. 333–344.
- [66] Thomas J., Dowell E., Hall K. Nonlinear Inviscid Aerodynamic Effects on Transonic Divergence, Flutter, and Limit-Cycle Oscillations // AIAA Journal. 2002. — April. Vol. 40, no. 4. P. 638–646.
- [67] Thomas J., Dowell E., Hall K., Denegri C. Modeling Limit Cycle Oscillation Behavior of the F-16 Fighter Using a Harmonic Balance Approach // Proc. 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference. Palm Springs, California, USA: 2004. — 19 – 22 April.
- [68] Sheta E., Harrand V., Thompson D., Strganac T. Computational and experimental investigation of limit cycle oscillations of nonlinear aeroelastic systems // J. Aircraft. 2002. Vol. 39, no. 1. P. 133–141.
- [69] Dowell E., Thomas J., Hall K. Transonic limit cycle oscillation analysis using reduced order aerodynamic models // J. Fluids and Structures. 2004. Vol. 19, no. 1. P. 17–27.
- [70] Silva W. Identification of nonlinear aeroelastic systems based on the Volterra theory: Progress and opportunities // Nonlinear Dynamics. 2005. Vol. 39, no. 1-2. P. 25–62.
- [71] Beran P., Lucia D. A reduced order cyclic method for computation of limit cycles // Nonlinear Dynamics. 2005. Vol. 39, no. 1-2. P. 143–158.

- [72] Guo H., Chen Y. Supercritical and subcritical Hopf bifurcation and limit cycle oscillations of an airfoil with cubic nonlinearity in supersonic/hypersonic flow // *Nonlinear Dyn.* 2012. Vol. 67. P. 2637–2649.
- [73] Lee B., Price S., Wong Y. Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils: bifurcation and chaos // *Progress in Aerospace Sciences.* 1999. Vol. 35, no. 3. P. 205 – 334. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042198000153>.
- [74] Patil M., Hodges D., Cesnik C. Nonlinear aeroelastic analysis of complete aircraft in subsonic flow // *Journal of Aircraft.* 2000. Vol. 37, no. 5. P. 753–760.
- [75] Goland M. The Flutter of a Uniform Cantilever Wing // *J. Applied Mechanics.* 1945. Vol. 12, no. 4. P. A197–A208.
- [76] Walker W. P. Unsteady Aerodynamics of Deformable Thin Airfoils. Master's thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2009. — August 5.
- [77] Walker W. P., Patil M. J. Unsteady Aerodynamics of Deformable Thin Airfoils // *J. Aircraft.* 2014. Vol. 51, no. 6.
- [78] Garrick I. Propulsion of a Flapping and Oscillating Airfoil: Tech. Rep. 567: National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), 1936.
- [79] Theodorsen T., Garrick I. Flutter Calculations in Three Degrees of Freedom: Tech. Rep. 741: National Advisory Committee for Aeronautics, 1942. URL: <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19930090938>.
- [80] Peters D. A., Hsieh M.-C. A., Torrero A. A state-space airloads theory for flexible airfoils // *Annual Forum Proc. – AHS International.* Vol. III. Phoenix, AZ, US: 2006. — May 9–11. P. 1806–1823.
- [81] Peters D. Two-dimensional incompressible unsteady airfoil theory – An overview // *J. Fluids and Structures.* 2008. Vol. 24, no. 3. P. 295–312.
- [82] Bigoni D., Noselli G. Experimental evidence of flutter and divergence instabilities induced by dry friction // *J. Mechanics and Physics of Solids.* 2011. Vol. 59, no. 10. P. 2208–2226.

- [83] Кузнецов А. А., Матросов А. А. Условия возникновения флаттера крыла самолета Ан-124-100 // Молодой исследователь Дона. 2016. Т. XX, № 1. С. 110–115.
- [84] Tauchert T. R. Large Plate Deflections, von Kármán Theory, Statical Problems // Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. by R. B. Hetnarski. Dordrecht: Springer Netherlands, 2014. P. 2697–2704. URL: [https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7\\_177](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_177).
- [85] Ghassemi A., Hassani M., Oveissi S. Comparison of nonlinear Von Karman and Cosserat theories in very large deformation of skew plates // Int. J. Adv. Struct. Eng. 2018. Vol. 10. P. 73–84.
- [86] Gordnier R. Computation of limit-cycle oscillations of a delta wing // J. Aircraft. 2003. Vol. 40, no. 6. P. 1206–1208.
- [87] Asjes D. C. Nonlinear analysis of a two- and three-degree-of-freedom aeroelastic system with rotational stiffness free-play: Ph.D. thesis / Iowa State University. 2015.
- [88] Prananta B. B., Kok J., Spekrijse S. et al. Simulation of limit cycle oscillation of fighter aircraft at moderate angle of attack // Int. Forum Aeroelasticity and Structural Dynamics, Amsterdam, The Netherlands. 2003. — 4-6 June.
- [89] Attar P., Dowell E., Tang D. A theoretical and experimental investigation of the effects of a steady angle of attack on the nonlinear flutter of a delta wing plate model // J. Fluids and Structures. 2003. Vol. 17, no. 2. P. 243–259.
- [90] Bae J.-S., Inman D., Lee I. Effects of structural nonlinearity on subsonic aeroelastic characteristics of an aircraft wing with control surface // J. Fluids and Structures. 2004. Vol. 19, no. 6. P. 747–763.
- [91] Eversman W., Pitt D. M. Hybrid doublet lattice/doublet point method for lifting surfaces in subsonic flow // J. Aircraft. 1991. — Sep. Vol. 28, no. 9. P. 572–578.
- [92] Liu J., Chen F., Chen Y. Bifurcation analysis of aeroelastic systems with hysteresis by incremental harmonic balance method // Applied Mathematics and Computation. 2012. Vol. 219, no. 5. P. 2398 – 2411. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300312008272>.

- [93] Raghothama A., Narayanan S. Non-linear dynamics of a two-dimensional airfoil by incremental harmonic balance method // *J. Sound Vibration*. 1999. Vol. 226, no. 3. P. 493 – 517. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X99922605>.
- [94] Chen Y., Liu J., Meng G. Incremental harmonic balance method for nonlinear flutter of an airfoil with uncertain-but-bounded parameters // *Applied Mathematical Modelling*. 2012. Vol. 36, no. 2. P. 657 – 667. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X11003969>.
- [95] Zhang W., Wang B., Ye Z., Quan J. Efficient Method for Limit Cycle Flutter Analysis Based on Nonlinear Aerodynamic Reduced-Order Models // *AIAA Journal*. 2012. — May. Vol. 50, no. 5. P. 1019–1028.
- [96] Dietz G., Schewe G., Mai H. Experiments on heave/pitch limit-cycle oscillations of a supercritical airfoil close to the transonic dip // *J. Fluids and Structures*. 2004. Vol. 19, no. 1. P. 1–16.
- [97] Farmer M., Hanson P. Comparison of Supercritical and Conventional Wing Flutter Characteristics // *Proc. 17th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conf., King of Prussia, U.S.A.* 1976. — 05 – 07 May.
- [98] Dimitriadis G. Continuation of higher-order harmonic balance solutions for nonlinear aeroelastic systems // *J. Aircraft*. 2008. Vol. 45, no. 2. P. 523–537.
- [99] Быков А. В., Смыслов В. И. Об использовании экспериментальных данных в расчете на флаттер беспилотных маневренных летательных аппаратов // *Ученые записки ЦАГИ*. 2008. Т. XXXIX, № 4. С. 91–100.
- [100] Vedeneev V. V. Panel flutter at low supersonic speeds // *J. Fluids and Structures*. 2012. Vol. 29. P. 79–96.
- [101] Куликов А. Н. Нелинейный панельный флаттер. Резонансы собственных частот – одна из возможных причин жесткого возбуждения колебаний // *Вестн. Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. Общая и прикладная механика*. 2011. № 4 (2). С. 193–194.

- [102] Быков А. В. Средства расчетно-экспериментальных исследований аэроупругой устойчивости высокоманевренных ракет // Вестник Московского авиационного института. 2012. Т. 19, № 1. С. 65–74.
- [103] Zhang S.-J., Wen G.-L., Peng F., Liu Z.-Q. Analysis of limit cycle oscillations of a typical airfoil section with freeplay // Acta Mechanica Sinica. 2013. Vol. 29, no. 4. P. 583–592.
- [104] Нарижный А. Г., Смыслов В. И., Сычев С. И. Исследование аэроупругой устойчивости летательного аппарата крестообразной схемы // Ученые записки ЦАГИ. 2013. Т. XLIV, № 6. С. 116–134.
- [105] Winter M., Breitsamter C. Reduced-Order Modeling of Unsteady Aerodynamic Loads Using Radial Basis Function Neural Networks // Proc. Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress (DLRK). 2014. — Sep. P. 1–10. Doc. ID: 340013.
- [106] Reimer L., Boucke A., Ballmann J., Behr M. Computational Analysis of High Reynolds Number Aero-Structural Dynamics (HIRENASD) Experiments // Proc. Int. Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics (IFASD 2009), Stockholm, Sweden. 2009. Art. # IFASD-2009-130.
- [107] Winter M., Breitsamter C. Nonlinear reduced-order modeling of unsteady aerodynamic loads based on dynamic local linear neuro-fuzzy models // Proc. Int. Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics 2015, Saint Petersburg, Russia. 2015. — June 28 – July 02. P. 1–20. Art. # IFASD-2015-82.
- [108] Cavallaro R., Bombardieri R., Demasi L., Iannelli A. PrandtlPlane Joined Wing: Body freedom flutter, limit cycle oscillation and freeplay studies // J. Fluids and Structures. 2015. Vol. 59. P. 57 – 84. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889974615002157>.
- [109] Cavallaro R., Bombardieri R., Silvani S. et al. Aeroelasticity of the PrandtlPlane: Body Freedom Flutter, Freeplay, and Limit Cycle Oscillation // Variational Analysis and Aerospace Engineering / Ed. by A. Frediani, B. Mohammadi, O. Pironneau, V. Cipolla. Springer Int. Publishing, 2016. Springer Optimization and Its Applications. P. 65–94.

- [110] Tian W., Yang Z., Gu Y., Wang X. Analysis of nonlinear aeroelastic characteristics of a trapezoidal wing in hypersonic flow // *Nonlinear Dynamics*. 2017. — Apr. P. 1205–1232.
- [111] Leissa A. The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods // *J. Sound and Vibration*. 2005. Vol. 287, no. 4. P. 961 – 978. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X05000362>.
- [112] Cao X., Taylor N. A fundamental study of the aeroelastic behaviors of vehicles in hypersonic range // *Proc. 16th AIAA/DLR/DGLR Int. Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conf.* 2009. URL: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2009-7398>.
- [113] Niu Y., Wang Z., Wang D., Liu B. Modified Homotopy Analysis Method for Nonlinear Aeroelastic Behavior of Two Degree-of-Freedom Airfoils // *Int. J. Structural Stability and Dynamics*. 2016. Vol. 16, no. 9.
- [114] Bartels R. E., Funk C. J., Scott R. C. Limit-Cycle Oscillation of the Subsonic Ultra-Green Aircraft Research Truss-Braced Wing Aeroelastic Model // *J. Aircraft*. 2017. Vol. 54, no. 5. P. 1605–1613.
- [115] Denegri Jr. C. Limit cycle oscillation flight test results of a fighter with external stores // *J. Aircraft*. 2000. Vol. 37, no. 5. P. 761–769.
- [116] Набиуллин Э. Н. Метод расчета нестационарных аэродинамических нагрузок на тонкое крыло конечного удлинения, совершающее упругие гармонические колебания в дозвуковом потоке // *Ученые записки ЦАГИ*. 1972. Т. III, № 6. С. 94–100.
- [117] Набиуллин Э. Н., Рыбаков А. А. Об определении обобщенных аэродинамических сил в расчете на флаттер в дозвуковом потоке при малых числах Струхаля // *Ученые записки ЦАГИ*. 1974. Т. V, № 5. С. 111–113.
- [118] Буньков В. Г. Полная проблема собственных значений матриц в расчетах на флаттер // *Ученые записки ЦАГИ*. 1975. Т. VI, № 2. С. 82–92.
- [119] Баранов Н. И., Комаров А. И., Махлин И. М., Пономарев Ю. В., Стрелков С. П. О влиянии жесткости крепления крыла на устойчивость аэроупругих колебаний // *Ученые записки ЦАГИ*. 1975. Т. VI, № 6. С. 82–88.

- [120] Булычев Г. А. Некоторые критерии и формулы для анализа изгибно-крутильного флаттера // Ученые записки ЦАГИ. 1984. Т. XV, № 3. С. 143–150.
- [121] Булычев Г. А. О возможности анализа различных форм флаттера на одной динамической модели // Ученые записки ЦАГИ. 1986. Т. XVII, № 3. С. 126–132.
- [122] Ишмуратов Ф. З., Кузьмина С. И., Мосунов В. А. Расчетные исследования трансзвукового флаттера // Ученые записки ЦАГИ. 1999. Т. XX, № 3–4. С. 151–163.
- [123] Atassi H. Unsteady Two-Dimensional Thin Airfoil Theory // Unsteady Aerodynamics and Aeroacoustics, AME 90934. Aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame. Teaching Notes. P. 1–23. URL: [https://www3.nd.edu/~atassi/Teaching/Unsteady\\\_Aero\\\_AME\\\_90934\\\_f2010/Notes/uthin111101.pdf](https://www3.nd.edu/~atassi/Teaching/Unsteady\_Aero\_AME\_90934\_f2010/Notes/uthin111101.pdf).
- [124] Кузьмин В. П., Кузьмина С. И., Мосунов В. А. Определение аэродинамических сил, действующих в сверхзвуковом потоке на колеблющиеся несущие поверхности, расположенные в разных плоскостях // Ученые записки ЦАГИ. 2000. Т. XXXI, № 1–2. С. 92–110.
- [125] Лыщинский В. В., Рыбаков А. А. Применение преобразований подобия при параметрических исследованиях флаттера // Ученые записки ЦАГИ. 2009. Т. XL, № 4. С. 71–77.
- [126] Tang D., Dowell E. Effects of angle of attack on nonlinear flutter of a delta wing // AIAA journal. 2001. Vol. 39, no. 1. P. 15–21.
- [127] Bunton R. W., Jr. C. M. D. Limit Cycle Oscillation Characteristics of Fighter Aircraft // J. Aircraft. 2000. — Sep. Vol. 37, no. 5. P. 916–918.
- [128] Чубань В. Д. Метод расчета флаттера  $T$ -образного оперения, учитывающий влияние угла атаки и угла установки стабилизатора на критические параметры флаттера // Ученые записки ЦАГИ. 2004. Т. XXXV, № 3–4. С. 90–99.
- [129] Лыщинский В. В., Мосунов В. А., Рыбаков А. А. Метод решения многопараметрических задач аэроупругости на основе теории подобия // Ученые записки ЦАГИ. 2011. Т. XLII, № 4. С. 84–92.

- [130] Быков А. В., Смыслов В. И. Задача о флаттере маневренного летательного аппарата с учетом его колебаний в двух плоскостях // Ученые записки ЦАГИ. 2011. Т. XLII, № 3. С. 92–100.
- [131] Овчинников В. В., Попов В. М., Филимонов С. В. Применение расширенной гипотезы гармоничности для расчета флаттерных характеристик самолета // Научный вестник МГТУ ГА. 2013. Т. XLIV, № 9 (195). С. 93–100.
- [132] Strganac T., Ko J., Thompson D., Kurdila A. Identification and control of limit cycle oscillations in aeroelastic systems // Proc. 40th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit. 1999. AIAA Paper No. 99–1463.
- [133] Ko J., Strganac T., Kurdila A. Adaptive Feedback Linearization for the Control of a Typical Wing Section with Structural Nonlinearity // Nonlinear Dynamics. 1999. — March. Vol. 18, no. 3. P. 289–301.
- [134] Gilliatt H., Straganac T., Kurdilla A. An investigation of internal resonance in aeroelastic systems // Nonlinear Dynamics. 2003. Vol. 31. P. 1–22.
- [135] Leonov G., Kuznetsov N. Hidden attractors in dynamical systems: From hidden oscillations in hilbert-kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in chua circuits // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2013. Vol. 23, no. 1.
- [136] Kuznetsov N., Leonov G. Hidden attractors in dynamical systems: systems with no equilibria, multistability and coexisting attractors // IFAC Proceedings Volumes. 2014. Vol. 47. P. 5445–5454. (survey lecture, 19th IFAC World Congress).
- [137] Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M. et al. The birth of the global stability theory and the theory of hidden oscillations // 2020 European Control Conference Proceedings. 2020. P. 769–774.
- [138] Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Vagaitsev V. I. Hidden attractor in smooth Chua systems // Physica D. 2012. Vol. 241, no. 18. P. 1482–1486.
- [139] Брагин В.О., Вагайцев В.И, Кузнецов Н.В., Леонов Г.А. Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы

- Айзермана и Калмана и цепи Чуа // Известия РАН. Теория и Системы Управления. 2011. no. 4. P. 3–36. [V.O. Bragin, V.I. Vagaitsev, N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, Algorithms for Finding Hidden Oscillations in Nonlinear Systems. The Aizerman and Kalman Conjectures and Chua's Circuits, Journal of Computer and Systems Sciences International, 50(4), 2011, pp. 511-543 (doi:10.1134/S106423071104006X)].
- [140] Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Vagaitsev V. I. Localization of hidden Chua's attractors // Physics Letters A. 2011. Vol. 375, no. 23. P. 2230–2233.
- [141] Kuznetsov N. Theory of hidden oscillations and stability of control systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2020. Vol. 59, no. 5. P. 647–668.
- [142] Leonov G., Kuznetsov N., Yuldashev M., Yuldashev R. Hold-in, pull-in, and lock-in ranges of PLL circuits: rigorous mathematical definitions and limitations of classical theory // IEEE Trans. Circuits Syst. I. 2015. Vol. 62, no. 10. P. 2454–2464.
- [143] Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T. et al. Hidden attractors in dynamical systems // Physics Reports. 2016. Vol. 637. P. 1 – 50. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157316300928>.
- [144] Kiseleva M., Kuznetsov N., Leonov G. Hidden and self-excited attractors in electromechanical systems with and without equilibria // IFAC-PapersOnLine. 2016. — 01. Vol. 49.
- [145] Kuznetsov N., Kuznetsova O., Leonov G., Vagaitsev V. Hidden attractor in Chua's circuits // Proc. 8th Int. Conf. Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO 2011). Vol. 1. 2011. — 01. P. 279–283.
- [146] Singh J., Lochan K., Kuznetsov N., Roy B. Coexistence of single- and multi-scroll chaotic orbits in a single-link flexible joint robot manipulator with stable spiral and index-4 spiral repeller types of equilibria // Nonlinear Dynamics. 2017. — 10. Vol. 90. P. 1–23.
- [147] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Об одном механизме жесткого возбуждения колебаний в нелинейных флаттерных системах // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 1. С. 32–44.

- [148] Моргунов С.В. Частотный подход к анализу флаттера и его использование при расчетно-экспериментальных исследованиях // Ученые записки ЦАГИ. 2014. Т. XLV, № 1. С. 113–118.
- [149] Дулина Н.Г. Исследование влияния параметров компоновки крыла с двигателями на величину критической скорости флаттера // Ученые записки ЦАГИ. 1979. Т. X, № 6. С. 90–98.
- [150] Bichiou Y., Hajj M., Nayfeh A. Effectiveness of a nonlinear energy sink in the control of an aeroelastic system // *Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 86, no. 4. P. 2161–2177.
- [151] Habib G., Kerschen G. Passive flutter suppression using a nonlinear tuned vibration absorber // *Proc. 33rd IMAC Conference and Exposition on Structural Dynamics*. Vol. 1 of Conf. Proc. Society for Experimental Mechanics Series. 2016. — 2–5 Feb. P. 133–144.
- [152] Denegri J., C.M., Sharma V., Northington J. F-16 limit-cycle oscillation analysis using nonlinear damping // *J. Aircraft*. 2016. Vol. 53, no. 1. P. 243–250.
- [153] Edwards J. *Unsteady Aerodynamic Modeling and Active Aeroelastic Control*. Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University., 1977. URL: <https://books.google.ru/books?id=dNYDAAAAIAAJ>.
- [154] Ko J., Strganac T., Junkins J. et al. Structured Model Reference Adaptive Control for a Wing Section with Structural Nonlinearity // *J. Vibration and Control*. 2002. — July. Vol. 8, no. 5. P. 553–573.
- [155] Li D., Guo S., Xiang J. Aeroelastic Dynamic Response and Control of an Airfoil Section with Control Surface Nonlinearities // *J. Sound and Vibration*. 2010. — Oct. Vol. 329, no. 22. P. 4756–4771.
- [156] Piovanelli F., Paoletti P., Innocenti G. Enhanced nonlinear model and control design for a flexible wing // *European Control Conference (ECC 2016)*. Aalborg, Denmark: EUCA, 2016. — June 29 – July 1. P. 80–85.
- [157] Wei X., Mottershead J. E. Robust passivity-based continuous sliding-mode control for under-actuated nonlinear wing sections // *Aerospace Science and Technology*. 2017. Vol. 60. P. 9 – 19.

- [158] Fazelzadeh S., Azadi M., Azadi E. Suppression of nonlinear aeroelastic vibration of a wing/store under gust effects using an adaptive-robust controller // *J. Vibration and Control*. 2017. Vol. 23, no. 7. P. 1206–1217.
- [159] Andrievsky B., Kudryashova E., Kuznetsov N. et al. Simple adaptive control for airfoil flutter suppression // *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*. 2018. Vol. 9, no. 1. P. 5–20.
- [160] Andrievsky B., Kudryashova E., Kuznetsov N. et al. Hidden nonlinear oscillations in aircraft stabilization system with restrictions at the actuator control // *AIP Conference Proceedings*. Vol. 2046. 2018.
- [161] Andrievsky B., Kuznetsov N., Kuznetsova O. Hidden Nonlinear Oscillations in Controlled Aircraft with Saturated Inputs // *Proc. 2018 15th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, ICARCV 2018*. 2018. P. 704–709.
- [162] Andrievsky B., Kudryashova E., Kuznetsov N. et al. Hidden oscillations in an active flutter suppression system and flight of a manned aircraft // *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*. 2019. Vol. 10, no. 3. P. 357–371.
- [163] Leonov G. A., Kuznetsov N. V. On the Keldysh problem of flutter suppression // *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 1959, no. 1. P. 020002. <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.5034578>. URL: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.5034578>.
- [164] Келдыш М.В. О демпферах с нелинейной характеристикой // *Тр. ЦАГИ*. 1944. Т. 557. С. 26–37.
- [165] Sutherland A. A Demonstration of Pitch-Plunge Flutter Suppression using LQG Control // *Proc. 27th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences (ICAS 2010)*, Nice, France. 2010.
- [166] Sutherland A. A Small Scale Pitch-Plunge Flutter Model for Active Flutter Control Research // *Proc. 26th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences (ICAS 2008)*, Anchorage, Alaska. 2008.

- [167] Rodden W. P., Stahl B. A strip method for prediction of damping in subsonic wind tunnel and flight flutter tests. // *J. Aircraft*. 1969. Vol. 6, no. 1. P. 9–17. URL: <https://doi.org/10.2514/3.43994>.
- [168] Kiseleva M., Kondratyeva N., Kuznetsov N. et al. Hidden periodic oscillations in drilling system driven by induction motor // *IFAC Proceedings Volumes*. 2014. Vol. 47, no. 19. P. 5872–5877.
- [169] Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N. Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion // *The European Physical Journal Special Topics*. 2015. Vol. 224, no. 8. P. 1421–1458.
- [170] Tantaroudas N. D., Da Ronch A., Gai G., Badcock K. J. An Adaptive Aeroelastic Control Approach using Non Linear Reduced Order Models // *Proc. 14th AIAA Aviation Technology, Integration, and Operations Conference, Atlanta, GA, 16–20 June 2014*. 2014. P. 1–21. AIAA 2014-2590.
- [171] Wang Y., Wynn A., Palacios R. Robust Aeroelastic Control of Very Flexible Wings using Intrinsic Models // *Proc. 54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Boston, Massachusetts. 2013. — 08–11 Apr. AIAA 2013-1485*.
- [172] Yucelen T., Calise A. J. Derivative-Free Model Reference Adaptive Control of a Generic Transport Model // *Proc. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Toronto, Ontario, Canada. AIAA, 2010. — August 02–05. P. 1–17*.
- [173] Da Ronch A., Badcock K. J., Wang Y. et al. Nonlinear Model Reduction for Flexible Aircraft Control Design // *Proc. AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Minneapolis, MN. 2012. — 13–16 August. AIAA Paper 2012–4404*.
- [174] Strganac T., Ko J., Thompson D., Kurdila A. Identification and control of limit cycle oscillations in aeroelastic systems // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2000. Vol. 23, no. 6. P. 1127–1133.
- [175] Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н., Земляков С.Д. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. М.: Машиностроение, 1972.

- [176] Landau Y. D. Adaptive control: The model reference approach. New York: Marcel Dekker, 1979.
- [177] Khalil H. K. Nonlinear Systems. New York: Macmillan, 1992.
- [178] Fradkov A. L. Synthesis of an adaptive system for linear plant stabilization // Autom. Remote Control. 1974. Vol. 35, no. 12. P. 1960–1966.
- [179] Andrievskii B. R., Fradkov A. L. Method of Passification in Adaptive Control, Estimation, and Synchronization // Autom. Remote Control. 2006. Vol. 67, no. 11. P. 1699–1731.
- [180] Andrievskii B., Selivanov A. New Results on the Application of the Passification Method. A Survey // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79, no. 6. P. 957–995.
- [181] Andrievsky B., Selivanov A. Historical Overview of the Passification Method and its Applications to Nonlinear and Adaptive Control Problems // Proc. European Control Conference 2020, ECC 2020. 2020. P. 791–794.

## **Elastic-Flexural Wing Flutter: Modeling, Investigation, and Prevention. A Survey**

B. Andrievsky (SPbSU, IPME RAS)

N. V. Kuznetsov (SPbSU, IPME RAS, University of Jyväskylä, Finland)

E. V. Kudryashova (SPbSU)

O. A. Kuznetsova (SPbSU)

**Abstract.** Depending on the flight mode, the airflow can either damp aircraft oscillations, or, conversely, the oscillating structure takes energy from the incoming flow, as a result of which a rapid increase in amplitude of oscillations may occur. This dangerous phenomenon has become a significant obstacle to the development of high-speed aviation. Since the 1930s and up to the present time, the efforts of many researchers are aimed at describing the dynamics of this phenomenon, studying its properties and developing measures to prevent it. In the present paper, some existing results on elastic-flexural wing flutter are surveyed. The paper starts from various ways of modeling the elastic-flexural wing flutter. The results on investigations of the elastic-flexural wing flutter phenomenon are reviewed, and several approaches of passive and active flutter suppression methods are described.

**Key words:** wing flutter, hidden oscillations, modeling, analysis, suppression.

### **Acknowledgements**

This work was supported by a grant from Leading Scientific schools of the Russian Federation for 2020–2021, project NSh-2624.2020.1 (chapters 1, 2) and St. Petersburg State University, project Pure ID 75207094 (chapters 3–5).