



Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ЧАСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОБОБЩЕННО-КОНСЕРВАТИВНЫХ
ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.Ф. Проневич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
pranevich@grsu.by

Аннотация. В работе для обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой обыкновенной дифференциальной системы получены достаточные признаки построения первых интегралов по вещественным полиномиальным частным интегралам, кратным вещественным полиномиальным частным интегралам, условным частным интегралам, комплекснозначным полиномиальным частным интегралам и кратным комплекснозначным полиномиальным частным интегралам. Выделены классы полиномиальных гамильтоновых дифференциальных систем, у которых первые интегралы аналитически выражаются через вещественные полиномиальные и условные частные интегралы, комплекснозначные полиномиальные и условные частные интегралы, вещественные и комплекснозначные полиномиальные частные интегралы. Приведены примеры на которых проиллюстрированы теоретические исследования, выполненные в данной работе.

Ключевые слова: гамильтонова система, первый интеграл, частный интеграл.

Введение. Рассмотрим обобщенно-консервативную гамильтонову систему

$$\frac{dq_i}{dt} = \partial_{p_i} H(q, p), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\partial_{q_i} H(q, p), \quad i = 1, \dots, n, \quad (0.1)$$

где $q = (q_1, \dots, q_n)$ и $p = (p_1, \dots, p_n)$ — точки арифметического пространства \mathbb{R}^n , $t \in \mathbb{R}$, а функция $H: (q, p) \rightarrow H(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ суть полином по переменным $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ степени $\deg H(q, p) = h \geq 2$ с вещественными коэффициентами.

Система (0.1) определяется функцией Гамильтона (гамильтонианом) $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$.

В конце XIX века французским математиком Ж.Г. Дарбу (J.G. Darboux) был сфор-

мулирован подход о построении первого интеграла по известным частным интегралам [1], который в настоящее время называется задачей Дарбу. В дальнейшем нахождение интегралов типа Дарбу получило свое развитие, как в постановке задачи, так и в разнообразии методов ее решения. Для полиномиальных (обыкновенных и многомерных) дифференциальных систем в работах [2 – 9; 10, с. 94 – 194; 11, с. 161 – 238] с целью решения задачи Дарбу разработан метод частных интегралов построения первых интегралов и последних множителей. На основании метода частных интегралов получены спектральные методы нахождения интегральных базисов для линейных обыкновенных дифференциальных систем [12; 13] и систем уравнений в полных дифференциалах [11, с. 239 – 272; 14 – 16], а также для линейных однородных систем уравнений в частных производных [17; 18].

В данной работе для обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой системы (0.1) разработан метод частных интегралов решения задачи Дарбу. При этом для построения первых интегралов используется только аппарат теории скобок Пуассона.

Подробный обзор научной литературы и современное состояние по теории интегралов дифференциальных систем приведены в монографиях В.Н. Горбузова [10; 11], В.В. Козлова [19], А.В. Борисова и И.С. Мамаева [20], А. Goriely [21], X. Zhang [22].

С целью однозначного толкования, следуя в основном работам [11] и [19], определим используемые в статье понятия и оговорим принятую терминологию.

Скобками Пуассона непрерывно дифференцируемых функций $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ и $v: D \rightarrow \mathbb{R}$ гамильтоновых переменных $(t, q, p) \in D \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ назовем скалярную функцию

$$[u, v]: (t, q, p) \rightarrow \sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} u(t, q, p) \partial_{p_i} v(t, q, p) - \partial_{p_i} u(t, q, p) \partial_{q_i} v(t, q, p)) \quad \forall (t, q, p) \in D.$$

Бинарную операцию $[\]$ на линейном пространстве $C^1(D)$ скалярных функций также будем называть *скобками Пуассона*. Основными свойствами скобок Пуассона являются:

1) *кососимметричность* $[u, v] = -[v, u] \quad \forall u, v \in C^1(D)$;

2) *билинейность* ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, u, v, w \in C^1(D)$)

$$[u, \alpha v + \beta w] = \alpha [u, v] + \beta [u, w], \quad [\alpha u + \beta v, w] = \alpha [u, w] + \beta [v, w].$$

3) *тождество Якоби* $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0 \quad \forall u, v, w \in C^2(D)$;

3) *тождество Лейбница* (скобки Пуассона произведения функций)

$$[u, vw] = w[u, v] + v[u, w] \quad \forall u, v, w \in C^1(D)$$
;

4) скобки Пуассона сложной функции

$$[u(t, q, p), v(w_1(t, q, p), \dots, w_s(t, q, p))] = \sum_{k=1}^s \partial_{w_k} v(w_1, \dots, w_s) \Big|_{w=w(t, q, p)} [u(t, q, p), w_k(t, q, p)]$$

$$\forall (t, q, p) \in D, \quad \forall u, v, w_1, \dots, w_s \in C^1(D).$$

Будем говорить, что функции $u, v \in C^1(D)$ находятся в *инволюции* на области D , если скобки Пуассона $[u(t, q, p), v(t, q, p)] = 0 \quad \forall (t, q, p) \in D$.

Обобщенно-консервативная гамильтонова система (0.1) индуцирует как автономный линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$\mathfrak{A}(q, p) = \sum_{i=1}^n (\partial_{p_i} H(q, p) \partial_{q_i} - \partial_{q_i} H(q, p) \partial_{p_i}) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n},$$

так и неавтономный линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$\mathfrak{B}(t, q, p) = \partial_t + \mathfrak{A}(q, p) \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}.$$

Действие как оператора \mathfrak{A} , так и оператора \mathfrak{B} будем называть *производной Ли в силу обобщенно-консервативной гамильтоновой системы* (0.1).

Непрерывно дифференцируемая функция $F: D' \rightarrow \mathbb{R}$ является *первым интегралом на области* $D' \subset D$ системы Гамильтона (0.1), если имеет место тождество

$$\mathfrak{B}F(t, q, p) = 0 \quad \forall (t, q, p) \in D'. \quad (0.2)$$

Тождество (0.2) связывает первый интеграл F системы (0.1) с соответствующей функцией Гамильтона H . С помощью скобок Пуассона тождество (0.2) можно записать в виде

$$\partial_t F(t, q, p) + [F(t, q, p), H(q, p)] = 0 \quad \forall (t, q, p) \in D'.$$

Функцию $F \in C^1(G)$ назовем *автономным* первым интегралом на области $G \subset \mathbb{R}^{2n}$ системы Гамильтона (0.1), если выполняется тождество $\mathfrak{A}F(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in G$, которое посредством скобок Пуассона можно записать в виде

$$[F(q, p), H(q, p)] = 0 \quad \forall (q, p) \in G. \quad (0.3)$$

Из тождества (0.3) следует, что гамильтониан H является автономным полиномиальным первым интегралом обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1).

Гамильтонова полиномиальная система (0.1) на окрестности любой точки расширенного фазового пространства \mathbb{R}^{2n+1} имеет интегральный базис размерности $2n$ (см., например, [23, с. 367 – 368]). При этом на окрестности любой точки фазового пространства \mathbb{R}^{2n} , не содержащей положений равновесия, обобщенно-консервативная гамильтонова система (0.1) имеет [24, с. 184] базис автономных первых интегралов размерности $2n - 1$.

Работа имеет следующую структуру. В первом параграфе доказаны достаточные признаки построения первых интегралов гамильтоновой системы (0.1) по вещественным полиномиальным частным интегралам. Классы обобщенно-консервативных полиномиальных гамильтоновых систем, у которых первые интегралы строятся с учетом кратных вещественных полиномиальных частных интегралов, выделены во втором параграфе. В третьем параграфе введено понятие условного частного интеграла для гамильтоновой системы и рассмотрены случаи построения первых интегралов по вещественным полиномиальным (с учетом кратности) и условным частным интегралам. Четвертый и пятый параграфы посвящены комплекснозначным полиномиальным частным интегралам и кратным комплекснозначным полиномиальным частным интегралам. Выделены классы обобщенно-консервативных полиномиальных гамильтоновых систем, у которых первые интегралы аналитически выражаются через комплекснозначные полиномиальные и условные частные интегралы, вещественные и комплекснозначные полиномиальные частные интегралы.

1. Вещественные полиномиальные частные интегралы

Определение 1.1. *Полином*

$$w: (q, p) \rightarrow w(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad Ew \subset \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

назовем **вещественным полиномиальным частным интегралом** гамильтоновой дифференциальной системы (0.1), если скобки Пуассона

$$[w(q, p), H(q, p)] = w(q, p) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (1.2)$$

где полином $M: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет степень $\deg M(q, p) \leq h - 2$. При этом полином M будем называть **сомножителем частного интеграла** w .

Так, например, полиномиальная дифференциальная система (0.1) с гамильтонианом [25]

$$H: (q, p) \rightarrow \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - f(p_1, p_2)(\alpha_1 p_1 q_1 + \alpha_2 p_2 q_2) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (1.3)$$

где $f: (p_1, p_2) \rightarrow f(p_1, p_2) \quad \forall (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ есть некоторый вещественный полином, имеет вещественные полиномиальные частные интегралы $w_l: (q, p) \rightarrow p_l \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ с сомножителями $M_l: (q, p) \rightarrow \alpha_l f(p_1, p_2) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$, $l = 1, 2$, так как на пространстве \mathbb{R}^4 скобки Пуассона

$$[p_l, H(q, p)] = \partial_{q_1} p_l \partial_{p_1} H(q, p) - \partial_{p_1} p_l \partial_{q_1} H(q, p) + \partial_{q_2} p_l \partial_{p_2} H(q, p) - \partial_{p_2} p_l \partial_{q_2} H(q, p) = p_l \cdot (\alpha_l f(p_1, p_2)).$$

Из свойства билинейности скобок Пуассона следует

Свойство 1.1. *Полином $w: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ является вещественным полиномиальным частным интегралом дифференциальной системы Гамильтона (0.1), если и только если при вещественном ненулевом λ полином $\lambda w: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ является вещественным полиномиальным частным интегралом гамильтоновой дифференциальной системы (0.1).*

В соответствии со свойством 1.1, говоря о двух и более вещественных полиномиальных частных интегралах, будем считать их попарно линейно независимыми функциями.

Свойство 1.2. *Пусть $w_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, s$, есть вещественные полиномиальные частные интегралы гамильтоновой системы (0.1) такие, что*

$$[w_l(q, p), H(q, p)] = w_l(q, p) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad l = 1, \dots, s. \quad (1.4)$$

Тогда функция

$$w: (q, p) \rightarrow \sum_{l=1}^s \lambda_l w_l(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n},$$

где λ_l , $l = 1, \dots, s$, — вещественные числа и $\sum_{l=1}^s |\lambda_l| \neq 0$, будет вещественным полиномиальным частным интегралом гамильтоновой дифференциальной системы (0.1).

Доказательство. Используя систему тождеств (1.4), на основании свойства билинейности скобок Пуассона получаем, что

$$[w(q, p), H(q, p)] = \left[\sum_{l=1}^s \lambda_l w_l(q, p), H(q, p) \right] = \sum_{l=1}^s \lambda_l [w_l(q, p), H(q, p)] =$$

$$= \sum_{l=1}^s \lambda_l w_l(q, p) M(q, p) = w(q, p) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}. \quad \square$$

По определению 1.1, полиномы

$$w_l: (q, p) \rightarrow w_l(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad E w_l \subset \mathbb{R}, \quad l = 1, \dots, s, \quad (1.5)$$

являются вещественными полиномиальными частными интегралами гамильтоновой дифференциальной системы (0.1) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств

$$[w_l(q, p), H(q, p)] = w_l(q, p) M_l(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad l = 1, \dots, s, \quad (1.6)$$

где сомножители $M_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, s$, суть полиномы.

Свойство 1.3. Произведение не являющихся линейно связанными на арифметическом пространстве \mathbb{R}^{2n} полиномов (1.5)

$$F: (q, p) \rightarrow \prod_{l=1}^s w_l(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n} \quad (1.7)$$

является вещественным полиномиальным частным интегралом системы Гамильтона (0.1), если и только если полиномы (1.5) являются вещественными полиномиальными частными интегралами системы Гамильтона (0.1).

Доказательство основано на свойстве Лейбница для скобок Пуассона, тождествах (1.6), определении вещественного полиномиального частного интеграла и том, что

$$\left[\prod_{l=1}^s w_l(q, p), H(q, p) \right] = \sum_{\xi=1}^s \prod_{\substack{l=1, \\ l \neq \xi}}^s w_l(q, p) [w_\xi(q, p), H(q, p)] = \prod_{l=1}^s w_l(q, p) \sum_{\xi=1}^s M_\xi(q, p). \quad \square \quad (1.8)$$

Теорема 1.1. Пусть полиномы (1.5) являются вещественными полиномиальными частными интегралами гамильтоновой системы (0.1). Тогда функция (1.7) будет первым интегралом системы Гамильтона (0.1), если и только если в тождествах (1.6) полиномы $M_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, s$, такие, что имеет место тождество

$$\sum_{l=1}^s M_l(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (1.9)$$

Доказательство утверждения непосредственно следует из вычислений (1.8) и определения автономного первого интеграла гамильтоновой дифференциальной системы \square

По теореме 1.1, для дифференциальной системы с гамильтонианом (1.3) при $\alpha_2 = -\alpha_1$ строим дополнительный первый интеграл $F: (q, p) \rightarrow p_1 p_2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$.

Свойство 1.4. Полином $w: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ является вещественным полиномиальным частным интегралом системы (0.1), если и только если при натуральном k полином w^k является вещественным полиномиальным частным интегралом этой системы.

Действительно, основываясь на (1.2), примененных к полиномам w и w^k , получаем:

$$[w^k(q, p), H(q, p)] = k w^{k-1}(q, p) [w(q, p), H(q, p)] = k w^k(q, p) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}. \quad \square$$

Из свойств 1.3 и 1.4 следует следующее утверждение.

Свойство 1.5. Произведение степеней не являющихся линейно связанными на арифметическом пространстве \mathbb{R}^{2n} полиномов (1.5)

$$Q: (q, p) \rightarrow \prod_{l=1}^s w_l^{k_l}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad k_l \in \mathbb{N}, \quad l = 1, \dots, s,$$

является вещественным полиномиальным частным интегралом гамильтоновой системы (0.1) в том и только в том случае, когда полиномы (1.5) являются вещественными полиномиальными частными интегралами гамильтоновой системы (0.1).

Теорема 1.2. Пусть полиномы (1.5) являются вещественными полиномиальными частными интегралами гамильтоновой системы (0.1). Тогда функция

$$F: (q, p) \rightarrow \prod_{l=1}^s w_l^{\gamma_l}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad \gamma_l \in \mathbb{R}, \quad l = 1, \dots, s, \quad \sum_{l=1}^s |\gamma_l| \neq 0, \quad (1.10)$$

будет первым интегралом на области $G \subset \mathbb{R}^{2n}$ гамильтоновой системы (0.1), если и только если в тождествах (1.6) полиномы $M_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad l = 1, \dots, s$, такие, что

$$\sum_{l=1}^s \gamma_l M_l(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (1.11)$$

Доказательство. Используя тождество Лейбница, вычислим скобки Пуассона в силу системы Гамильтона (0.1) функции (1.10) на области G :

$$\begin{aligned} [F(q, p), H(q, p)] &= \left[\prod_{l=1}^s w_l^{\gamma_l}(q, p), H(q, p) \right] = \sum_{\xi=1}^s \prod_{\substack{l=1, \\ l \neq \xi}}^s w_l^{\gamma_l}(q, p) \left[w_\xi^{\gamma_\xi}(q, p), H(q, p) \right] = \\ &= \sum_{\xi=1}^s \gamma_\xi w_\xi^{\gamma_\xi - 1}(q, p) \prod_{\substack{l=1, \\ l \neq \xi}}^s w_l^{\gamma_l}(q, p) [w_\xi(q, p), H(q, p)] = \prod_{l=1}^s w_l^{\gamma_l}(q, p) \sum_{\xi=1}^s \gamma_\xi M_\xi(q, p). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Отсюда с учетом определения первого интеграла получаем, что функция (1.10) является первым интегралом на области G системы Гамильтона (0.1) тогда и только тогда, когда выполняется тождество (1.11). \square

По теореме 1.2, для дифференциальной системы с гамильтонианом (1.3) строим дополнительный первый интеграл $F: (q, p) \rightarrow p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{P}$, где вещественные числа γ_1 и γ_2 находятся из линейного уравнения $\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 = 0$ при $|\gamma_1| + |\gamma_2| \neq 0$, а область $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$.

Относительно дополнительного первого интеграла F гамильтоновой системы (1.3) отметим следующие моменты: 1) если $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}$, то дополнительный интеграл является полиномиальным; 2) если $\gamma_1, -\gamma_2 \in \mathbb{N}$ или $-\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}$, то дополнительный первый интеграл является рациональной функцией; 3) если $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Q}$, то дополнительный первый интеграл является иррациональной функцией; 4) если $\gamma_1 \in \mathbb{I}, \gamma_2 \in \mathbb{Q}$ или $\gamma_1 \in \mathbb{Q}, \gamma_2 \in \mathbb{I}$, то дополнительный первый интеграл есть трансцендентная функция, где \mathbb{N}, \mathbb{Q} и \mathbb{I} — соответственно множество натуральных, рациональных и иррациональных чисел. Поэтому дополнительный первый интеграл F дифференциальной системы (0.1) с полиномиальным гамильтонианом H может быть как алгебраической (полином, рациональная функция, иррациональная функция), так и трансцендентной функцией.

Теорема 1.3. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) такие, что

$$[w_l(q, p), H(q, p)] = \lambda_l w_l(q, p) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \lambda_l \in \mathbb{R}, \quad l = 1, \dots, s, \quad s \geq 2, \quad (1.13)$$

где $M: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ есть полином. Тогда скалярная функция (1.10), где вещественные числа γ_l , $l = 1, \dots, s$, находятся из линейного однородного уравнения $\sum_{l=1}^s \lambda_l \gamma_l = 0$ при $\sum_{l=1}^s |\gamma_l| \neq 0$, является первым интегралом на области $G \subset \mathbb{R}^{2n}$ системы Гамильтона (0.1).

Доказательство. Если верны тождества (1.13), то с учетом (1.12) получаем

$$[F(q, p), H(q, p)] = \left[\prod_{l=1}^s w_l^{\gamma_l}(q, p), H(q, p) \right] = \prod_{l=1}^s w_l^{\gamma_l}(q, p) \sum_{l=1}^s \lambda_l \gamma_l M(q, p) \quad \forall (q, p) \in G.$$

Выбирая γ_l , $l = 1, \dots, s$, так, чтобы $\sum_{l=1}^s \lambda_l \gamma_l = 0$ при условии $\sum_{l=1}^s |\gamma_l| \neq 0$, получаем, что функция (1.10) будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1). \square

Из теоремы 1.3 при $s = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2$, получаем

Следствие 1.1. Если гамильтонова система (0.1) имеет такие вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) при $s = 2$, что

$$\frac{[w_1(q, p), H(q, p)]}{[w_2(q, p), H(q, p)]} = \frac{w_1(q, p)}{w_2(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G,$$

то функция

$$F: (q, p) \rightarrow \frac{w_1(q, p)}{w_2(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G, \quad G \subset \{(q, p): w_2(q, p) \neq 0\},$$

будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1).

Из теоремы 1.3 при $s = 2$, $\lambda_1 = -\lambda_2$, $j = 1, \dots, m$, имеем

Следствие 1.2. Если гамильтонова система (0.1) имеет такие вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) при $s = 2$, что

$$\frac{[w_1(q, p), H(q, p)]}{[w_2(q, p), H(q, p)]} = -\frac{w_1(q, p)}{w_2(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n},$$

то функция

$$F: (q, p) \rightarrow w_1(q, p) w_2(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$$

будет первым интегралом на пространстве \mathbb{R}^{2n} системы Гамильтона (0.1).

Обобщенно-консервативная дифференциальная система (0.1) с гамильтонианом

$$H: (q, p) \rightarrow q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4, \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (1.14)$$

имеет вещественные линейные частные интегралы $w_1: (q, p) \rightarrow p_1 - a q_1$, $w_2: (q, p) \rightarrow p_2 - b q_2$, $w_3: (q, p) \rightarrow q_1$ и $w_4: (q, p) \rightarrow q_2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ с $\lambda_1 = \lambda_4 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $M: (q, p) \rightarrow 1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$.

По вещественным линейным частным интегралам w_1, \dots, w_4 строим автономные первые ин-

тегралы гамильтоновой системы (1.14): $F_{12}: (q, p) \rightarrow (p_1 - aq_1)(p_2 - bq_2)$, $F_{13}: (q, p) \rightarrow q_1(p_1 - aq_1)$ $\forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ (следствие 1.2), $F_{14}: (q, p) \rightarrow \frac{p_1 - aq_1}{q_2} \forall (q, p) \in G$ (следствие 1.1), где область G из множества $\{(q, p): q_2 \neq 0\} \subset \mathbb{R}^4$. Первые интегралы F_{12} , F_{13} и F_{14} , будучи функционально независимыми, образуют интегральный базис гамильтоновой системы (1.14) на области G .

Для построения интегрального базиса системы (0.1) может быть использовано

Следствие 1.3. Пусть выполняются условия теоремы 1.3. Тогда функции

$$F_{\zeta\xi}: (q, p) \rightarrow w_{\zeta}^{\gamma_{\zeta}}(q, p)w_{\xi}^{\gamma_{\xi}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G_{\zeta\xi} \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \zeta = 1, \dots, s, \quad \xi = 1, \dots, s, \quad \xi \neq \zeta,$$

где вещественные числа γ_{ζ} и γ_{ξ} находятся из уравнений $\lambda_{\zeta}\gamma_{\zeta} + \lambda_{\xi}\gamma_{\xi} = 0$ при $\gamma_{\zeta}^2 + \gamma_{\xi}^2 \neq 0$, будут первыми интегралами на областях $G_{\zeta\xi}$, $\zeta = 1, \dots, s$, $\xi = 1, \dots, s$, $\xi \neq \zeta$, обобщенно-консервативной дифференциальной системы Гамильтона (0.1), соответственно.

По следствию 1.3, для полиномиальной дифференциальной системы (0.1) с гамильтонианом

$$H: (q, p) \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mu_i p_i^2 - f(p) \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i q_i \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \mu_i, \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.15)$$

где $f: p \rightarrow f(p) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n$ есть некоторый вещественный полином по переменным p_1, \dots, p_n , по вещественным полиномиальным частным интегралам $w_l: (q, p) \rightarrow p_l \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ с сомножителями $M_l: (q, p) \rightarrow \alpha_l f(p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, $l = 1, \dots, n$, строим дополнительные первые интегралы

$$F_{1\xi}: (q, p) \rightarrow p_1^{\gamma_{1\xi}} p_{\xi}^{\gamma_{\xi}} \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^n \times G_{\xi}, \quad G_{\xi} \subset \mathbb{R}^n, \quad \xi = 2, \dots, n.$$

где вещественные числа $\gamma_{1\xi}$ и γ_{ξ} находятся из линейных однородных уравнений $\alpha_1 \gamma_{1\xi} + \alpha_{\xi} \gamma_{\xi} = 0$ при $|\gamma_{1\xi}| + |\gamma_{\xi}| \neq 0$, $\xi = 2, \dots, n$. Первые интегралы H и $F_{1\xi}$ являются функционально независимыми и находятся в инволюции на некоторой области $\mathbb{R}^n \times G$, где область $G \subset G_{\xi}$, $\xi = 2, \dots, n$. Следовательно, обобщенно-консервативная полиномиальная гамильтонова система (1.15) является вполне интегрируемой (интегрируема по Лиувиллю) [19, с. 83].

Теорема 1.4. Если гамильтонова система (0.1) имеет такой вещественный полиномиальный частный интеграл (1.1), что в тождестве (1.2) функция

$$M(q, p) = \lambda \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (1.16)$$

то скалярная функция

$$F: (t, q, p) \rightarrow w(q, p) \exp(-\lambda t) \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$$

будет неавтономным первым интегралом гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. Учитывая тождество (1.2) при условии (1.16), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} F(t, q, p) &= \partial_t F(t, q, p) + [F(t, q, p), H(q, p)] = F(t, q, p) \partial_t (-\lambda t) + \\ &+ \exp(-\lambda t) [w(q, p), H(q, p)] = 0 \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция F есть первый интеграл гамильтоновой системы (0.1). \square

Дифференциальная система, заданная посредством полиномиального гамильтониана

$$H: (q, p) \rightarrow \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 - q_1^2 - q_2^2) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4, \quad (1.17)$$

имеет на фазовом пространстве \mathbb{R}^4 вещественные полиномиальные частные интегралы

$$w_1: (q, p) \rightarrow q_1 - p_1, \quad w_2: (q, p) \rightarrow q_2 - p_2, \quad w_3: (q, p) \rightarrow q_1 + p_1, \quad w_4: (q, p) \rightarrow q_2 + p_2$$

с постоянными сомножителями $M_1(q, p) = M_2(q, p) = -1$, $M_3(q, p) = M_4(q, p) = 1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$.

По теореме 1.4, для гамильтоновой системы (1.17) строим неавтономные первые интегралы

$$F_1: (t, q, p) \rightarrow (q_1 - p_1)e^t, \quad F_2: (t, q, p) \rightarrow (q_2 - p_2)e^t, \quad F_3: (t, q, p) \rightarrow (q_1 + p_1)e^{-t}, \quad F_4: (t, q, p) \rightarrow (q_2 + p_2)e^{-t},$$

которые образуют ее интегральный базис на расширенном фазовом пространстве \mathbb{R}^5 .

Свойство 1.6. Пусть для гамильтоновой системы (0.1) с полиномиальным частным интегралом (1.1) существует голоморфизм пространства \mathbb{R}^{2n} на \mathbb{R}^{2n}

$$\xi: (q, p) \rightarrow \xi(q, p), \quad \zeta: (q, p) \rightarrow \zeta(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad E\xi \subset \mathbb{R}^n, \quad E\zeta \subset \mathbb{R}^n,$$

такой, что выполняется система тождеств

$$\left[\xi_i(q, p), H(q, p) \right] = \lambda \partial_{\zeta_i} H(\xi, \zeta) \Big|_{\substack{\xi = \xi(q, p), \\ \zeta = \zeta(q, p)}}, \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.18)$$

$$\left[\zeta_i(q, p), H(q, p) \right] = -\lambda \partial_{\xi_i} H(\xi, \zeta) \Big|_{\substack{\xi = \xi(q, p), \\ \zeta = \zeta(q, p)}}, \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где λ — некоторое ненулевое вещественное число. Тогда полином

$$\tilde{w}: (q, p) \rightarrow w(\xi(q, p), \zeta(q, p)) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$$

будет полиномиальным частным интегралом системы (0.1) и выполняется тождество

$$\left[\tilde{w}(q, p), H(q, p) \right] = \lambda \tilde{w}(q, p) M(\xi(q, p), \zeta(q, p)) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Доказательство. Основываясь на вычислении скобок Пуассона сложной функции

$$\left[u(q, p), v(\nu_1(q, p), \dots, \nu_s(q, p)) \right] = \sum_{k=1}^s \partial_{\nu_k} v(\nu_1, \dots, \nu_s) \Big|_{\nu=\nu(q, p)} \left[u(q, p), \nu_k(q, p) \right],$$

с учетом тождеств (1.18) и (1.2) получаем:

$$\begin{aligned} \left[\tilde{w}(q, p), H(q, p) \right] &= \left[w(\xi(q, p), \zeta(q, p)), H(q, p) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\left[\xi_i(q, p), H(q, p) \right] \partial_{\xi_i} w(\xi, \zeta) \Big|_{\substack{\xi = \xi(q, p), \\ \zeta = \zeta(q, p)}} + \left[\zeta_i(q, p), H(q, p) \right] \partial_{\zeta_i} w(\xi, \zeta) \Big|_{\substack{\xi = \xi(q, p), \\ \zeta = \zeta(q, p)}} \right) = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \left(\partial_{\zeta_i} H(\xi, \zeta) \partial_{\xi_i} w(\xi, \zeta) - \partial_{\xi_i} H(\xi, \zeta) \partial_{\zeta_i} w(\xi, \zeta) \right) \Big|_{\substack{\xi = \xi(q, p), \\ \zeta = \zeta(q, p)}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda \left[w(\xi, \zeta), H(\xi, \zeta) \right] \Big|_{\substack{\xi = \xi(q, p), \\ \zeta = \zeta(q, p)}} = \lambda w(\xi, \zeta) M(\xi, \zeta) \Big|_{\substack{\xi = \xi(q, p), \\ \zeta = \zeta(q, p)}} = \\
 &= \lambda w(\xi(q, p), \zeta(q, p)) M(\xi(q, p), \zeta(q, p)) = \lambda \tilde{w}(q, p) M(\xi(q, p), \zeta(q, p)) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Обобщенно-консервативная полиномиальная гамильтонова система [26]

$$H: (q, p) \rightarrow \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \mu_i p_i^2 - \frac{1}{2} a^2(q_1) + b(q_2, \dots, q_n) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \mu_i \in \mathbb{R}, \quad i = 2, \dots, n, \quad (1.19)$$

где $a: q_1 \rightarrow a(q_1) \quad \forall q_1 \in \mathbb{R}, \deg a(q_1) > 1$, и $b: (q_2, \dots, q_n) \rightarrow b(q_2, \dots, q_n) \quad \forall (q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ есть произвольные вещественные полиномы, имеет вещественный полиномиальный частный интеграл $w: (q, p) \rightarrow p_1 + a(q_1) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ с множителем $M: (q, p) \rightarrow \partial_{q_1} a(q_1) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, ибо

$$\begin{aligned}
 [w(q, p), H(q, p)] &= [p_1 + a(q_1), H(q, p)] = \sum_{i=1}^n \left(\partial_{q_i} (p_1 + a(q_1)) \partial_{p_i} H(q, p) - \partial_{p_i} (p_1 + a(q_1)) \partial_{q_i} H(q, p) \right) = \\
 &= \partial_{q_1} a(q_1) \partial_{p_1} H(q, p) - \partial_{q_1} H(q, p) = (p_1 + a(q_1)) \partial_{q_1} a(q_1) = w(q, p) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}.
 \end{aligned}$$

На основании голоморфизма $\xi: (q, p) \rightarrow (q_1, \dots, q_n), \zeta: (q, p) \rightarrow (-p_1, \dots, -p_n) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ такого, что для него верна система тождеств (1.18) при $\lambda = -1$, по свойству 1.6, строим дополнительный вещественный полиномиальный частный интеграл $\tilde{w}: (q, p) \rightarrow -p_1 + a(q_1)$ с множителем $\tilde{M}: (q, p) \rightarrow -\partial_{q_1} a(q_1) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ гамильтоновой системы (1.19).

По теореме 1.1, для гамильтоновой системы (1.19) строим дополнительный первый интеграл

$$F: (q, p) \rightarrow (p_1 + a(q_1))(-p_1 + a(q_1)) = a^2(q_1) - p_1^2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

При $n = 2$ из того, что первые интегралы H и F являются функционально независимыми на пространстве \mathbb{R}^4 за исключением множеств меры нуль и находятся в инволюции получаем, что полиномиальная гамильтонова дифференциальная система (1.19) интегрируема по Лиувиллю.

2. Кратные вещественные полиномиальные частные интегралы

Определение 2.1. *Вещественный полиномиальный частный интеграл (1.1) обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой системы (0.1) является кратным и его кратность $\varkappa = 1 + \sum_{\xi=1}^{\varepsilon} r_{\xi}$, если существуют полиномы*

$$Q_{f_{\xi} g_{\xi}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{и} \quad R_{f_{\xi} g_{\xi}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{\xi} \in \mathbb{N}, \quad g_{\xi} = 1, \dots, r_{\xi}, \quad \xi = 1, \dots, \varepsilon,$$

которые удовлетворяют системе тождеств

$$[K_{f_{\xi} g_{\xi}}(q, p), H(q, p)] = R_{f_{\xi} g_{\xi}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad f_{\xi} \in \mathbb{N}, \quad g_{\xi} = 1, \dots, r_{\xi}, \quad \xi = 1, \dots, \varepsilon, \quad (2.1)$$

где скалярные функции

$$K_{f_{\xi} g_{\xi}}: (q, p) \rightarrow \frac{Q_{f_{\xi} g_{\xi}}(q, p)}{w^{f_{\xi}}(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G, \quad f_{\xi} \in \mathbb{N}, \quad g_{\xi} = 1, \dots, r_{\xi}, \quad \xi = 1, \dots, \varepsilon,$$

область G из фазового пространства \mathbb{R}^{2n} такая, что $w(q, p) \neq 0 \quad \forall (q, p) \in G$. При этом

каждый полином $Q_{f_\xi g_\xi}$, $f_\xi \in \mathbb{N}$, $g_\xi = 1, \dots, r_\xi$, $\xi = 1, \dots, \varepsilon$, взаимно прост с частным интегралом (1.1), а полиномы $R_{f_\xi g_\xi j}$, $f_\xi \in \mathbb{N}$, $g_\xi = 1, \dots, r_\xi$, $\xi = 1, \dots, \varepsilon$, такие, что $\max \{ \deg R_{f_\xi g_\xi} : f_\xi \in \mathbb{N}, g_\xi = 1, \dots, r_\xi, \xi = 1, \dots, \varepsilon \} \leq h - 2$.

Обобщенно-консервативная полиномиальная система (0.1), заданная гамильтонианом

$$H: (q, p) \rightarrow \frac{1}{2} (-7q_1^2 + 8q_1 q_2 - q_2^2 + p_2^2) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4 \quad (2.2)$$

имеет кратный вещественный полиномиальный частный интеграл $w: (q, p) \rightarrow q_1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$, ибо существуют полиномы $Q_{11}(q, p) = \frac{1}{9} (p_1 + 4p_2)$ и $R_{11}(q, p) = -1$, $\deg R_{11} = 0$, такие, что

$$[K_{11}(q, p), H(q, p)] = \left[\frac{p_1 + 4p_2}{9q_1}, \frac{1}{2} (-7q_1^2 + 8q_1 q_2 - q_2^2 + p_2^2) \right] = -1 \quad \forall (q, p) \in G \subset \{(q, p) : q_1 \neq 0\}.$$

Свойство 2.1. Если вещественный полиномиальный частный интеграл (1.1) гамильтоновой дифференциальной системы (0.1) такой, что

$$[w(q, p), H(q, p)] = w^{m+1}(q, p) P(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (2.3)$$

где m — некоторое натуральное число, а $P: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ есть некоторый полином, то частный интеграл (1.1) является кратным (кратности, не меньшей двух).

Доказательство. Пусть функция $K_{m1}(q, p) = \frac{\lambda}{w^m(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$.

Вычислим на области $G \subset \{(q, p) : w(q, p) \neq 0\}$ скобки Пуассона

$$[K_{m1}(q, p), H(q, p)] = -m \lambda w^{-m-1}(q, p) [w(q, p), H(q, p)] = -m \lambda P(q, p) \quad \forall (q, p) \in G.$$

Из тождества (2.3) получаем, что $\deg P < h - 2$. По определению 2.1, вещественный полиномиальный частный интеграл (1.1) системы (0.1) является кратным. \square

Согласно определению 2.1, вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) полиномиальной гамильтоновой системы (0.1) будут кратными соответственно кратностей $\varkappa_l = 1 + \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} r_{\xi_l}$, $l = 1, \dots, s$, тогда и только тогда, когда существуют полиномы $Q_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ и $R_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_{\xi_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\xi_l} = 1, \dots, r_{\xi_l}$, $\xi_l = 1, \dots, \varepsilon_l$, $l = 1, \dots, s$, которые удовлетворяют на областях $G_{0l} \subset \{(q, p) : w_l(q, p) \neq 0\}$ системе тождеств

$$\left[K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p), H(q, p) \right] = R_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p), \quad f_{\xi_l} \in \mathbb{N}, g_{\xi_l} = 1, \dots, r_{\xi_l}, \xi_l = 1, \dots, \varepsilon_l, l = 1, \dots, s, \quad (2.4)$$

где скалярные функции

$$K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) = \frac{Q_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p)}{w_l^{f_{\xi_l}}(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G_{0l}, \quad f_{\xi_l} \in \mathbb{N}, g_{\xi_l} = 1, \dots, r_{\xi_l}, \xi_l = 1, \dots, \varepsilon_l, l = 1, \dots, s.$$

При этом каждый полином $Q_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}$ взаимно прост с вещественным полиномиальным част-

ным интегралом w_l , а $\deg R_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} \leq h - 2$, $f_{\xi_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\xi_l} = 1, \dots, r_{\xi_l}$, $\xi_l = 1, \dots, \varepsilon_l$, $l = 1, \dots, s$.

Теорема 2.1. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) кратностей $\varkappa_l = 1 + \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} r_{\xi_l}$, $l = 1, \dots, s$, такие, что выполняются тождества (1.6) и (2.4). Тогда скалярная функция

$$F: (q, p) \rightarrow \prod_{l=1}^s w_l^{\gamma_l}(q, p) \exp \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\tilde{\varepsilon}_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{\tilde{r}_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (2.5)$$

где вещественные числа γ_l , $l = 1, \dots, s$, и $\alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}$, $f_{\xi_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\xi_l} = 1, \dots, \tilde{r}_{\xi_l}$, $\tilde{r}_{\xi_l} \leq r_{\xi_l}$, $\xi_l = 1, \dots, \tilde{\varepsilon}_l$, $\tilde{\varepsilon}_l \leq \varepsilon_l$, $l = 1, \dots, s$, такие, что $\sum_{l=1}^s |\gamma_l| + \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\tilde{\varepsilon}_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{\tilde{r}_{\xi_l}} |\alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}| \neq 0$, будет первым интегралом системы (0.1), если и только если имеет место тождество

$$\sum_{l=1}^s \gamma_l M_l(q, p) + \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\tilde{\varepsilon}_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{\tilde{r}_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} R_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in G. \quad (2.6)$$

Доказательство. С учетом тождеств (1.6) и (2.4), вычислим скобки Пуассона

$$\begin{aligned} [F(q, p), H(q, p)] &= \exp \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\tilde{\varepsilon}_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{\tilde{r}_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) \cdot \left[\prod_{l=1}^s w_l^{\gamma_l}(q, p), H(q, p) \right] + \\ &+ \prod_{l=1}^s w_l^{\gamma_l}(q, p) \cdot \left[\exp \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\tilde{\varepsilon}_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{\tilde{r}_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p), H(q, p) \right] = \\ &= \exp \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\tilde{\varepsilon}_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{\tilde{r}_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) \sum_{l=1}^s \gamma_l w_l^{\gamma_l-1}(q, p) \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq l}}^s w_k^{\gamma_k}(q, p) \cdot [w_l(q, p), H(q, p)] + \\ &+ \prod_{l=1}^s w_l^{\gamma_l}(q, p) \exp \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\tilde{\varepsilon}_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{\tilde{r}_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\tilde{\varepsilon}_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{\tilde{r}_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} \left[K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p), H(q, p) \right] = \\ &= F(q, p) \left(\sum_{l=1}^s \gamma_l M_l(q, p) + \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\tilde{\varepsilon}_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{\tilde{r}_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} R_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) \right) \quad \forall (q, p) \in G. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что функция (2.5) является первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1), если и только если выполняется тождество (2.6). \square

Теорема 2.2. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) кратностей $\varkappa_l = 1 + \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} r_{\xi_l}$, $l = 1, \dots, s$, такие, что выполняются тождества (1.13) и в тождествах (2.4) полиномы

$$R_{lf_{\xi_l}g_{\xi_l}}(q, p) = \lambda_{lf_{\xi_l}g_{\xi_l}} M(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad \lambda_{lf_{\xi_l}g_{\xi_l}} \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

$$f_{\xi_l} \in \mathbb{N}, \quad g_{\xi_l} = 1, \dots, \tilde{r}_{\xi_l}, \quad \tilde{r}_{\xi_l} \leq r_{\xi_l}, \quad \xi_l = 1, \dots, \tilde{\varepsilon}_l, \quad \tilde{\varepsilon}_l \leq \varepsilon_l, \quad l = 1, \dots, s.$$

Тогда скалярная функция (2.5), где вещественные числа γ_l , $l = 1, \dots, s$, и $\alpha_{lf_{\xi_l}g_{\xi_l}}$, $f_{\xi_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\xi_l} = 1, \dots, \tilde{r}_{\xi_l}$, $\xi_l = 1, \dots, \tilde{\varepsilon}_l$, $l = 1, \dots, s$, находятся из линейного однородного уравнения

$$\sum_{l=1}^s \lambda_l \gamma_l + \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\tilde{\varepsilon}_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{\tilde{r}_{\xi_l}} \lambda_{lf_{\xi_l}g_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l}g_{\xi_l}} = 0 \quad \text{при} \quad \sum_{l=1}^s |\gamma_l| + \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\tilde{\varepsilon}_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{\tilde{r}_{\xi_l}} |\alpha_{lf_{\xi_l}g_{\xi_l}}| \neq 0, \quad (2.8)$$

будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1).

Действительно, при выполнении тождеств (1.13) и (2.4) при (2.7) условие существования (2.6) первого интеграла гамильтоновой системы (0.1) равносильно (2.8). \square

Для построения интегрального базиса системы (0.1) может быть использовано

Следствие 2.1. Если выполняются условия теоремы 2.2, то функции

$$F_{\zeta l}: (q, p) \rightarrow w_{\zeta}^{\gamma_{\zeta}}(q, p) \exp\left(\alpha_{lf_{\xi_l}g_{\xi_l}} K_{lf_{\xi_l}g_{\xi_l}}(q, p)\right) \quad \forall (q, p) \in G, \quad \zeta = 1, \dots, s, \quad l = 1, \dots, s,$$

где фиксированные числа $f_{\xi_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\xi_l} \in \{1, \dots, \tilde{r}_{\xi_l}\}$, $\xi_l \in \{1, \dots, \tilde{\varepsilon}_l\}$, $l = 1, \dots, s$, а вещественные числа γ_{ζ} и $\alpha_{lf_{\xi_l}g_{\xi_l}}$ находятся из линейных уравнений $\lambda_{\zeta} \gamma_{\zeta} + \lambda_{lf_{\xi_l}g_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l}g_{\xi_l}} = 0$ при условиях $|\gamma_{\zeta}| + |\alpha_{lf_{\xi_l}g_{\xi_l}}| \neq 0$, $\zeta = 1, \dots, s$, $l = 1, \dots, s$, будут первыми интегралами обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

Для полиномиальной гамильтоновой системы (2.2), по следствию 2.1, используя вещественный полиномиальный частный интеграл $w_1: (q, p) \rightarrow 4q_1 - q_2 + p_2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ с множителем $M_1: (q, p) \rightarrow -1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ и двукратный вещественный полиномиальный частный интеграл $w_2: (q, p) \rightarrow q_1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ с функциями $K_{2,11}(q, p) = \frac{p_1 + 4p_2}{9q_1}$ и $R_{2,11}(q, p) = -1$ строим дополнительный автономный первый интеграл ($M(q, p) = 1$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,11} = -1$, $\gamma_1 = 1$, $\alpha_{2,11} = -1$)

$$F: (q, p) \rightarrow (4q_1 - q_2 + p_2) \exp\left(-\frac{p_1 + 4p_2}{9q_1}\right) \quad \forall (q, p) \in G \subset \{(q, p): q_1 \neq 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Теорема 2.3. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) кратностей $\varkappa_l = 1 + \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} r_{\xi_l}$, $l = 1, \dots, s$, соответственно, относительно которых на области G имеет место система тождеств (2.4) и существуют такие числа $\xi_l \in \{1, \dots, \varepsilon_l\}$, $l = 1, \dots, s$, что при фиксированных

$g_{\xi_l} \in \{1, \dots, r_{\xi_l}\}$, $l = 1, \dots, s$, выполняются тождества

$$R_{l f_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) = \lambda_l M(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad \lambda_l \in \mathbb{R}, \quad l = 1, \dots, s, \quad M: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Тогда скалярная функция

$$F: (q, p) \rightarrow \sum_{l=1}^s \alpha_l K_{l f_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad (2.10)$$

где вещественные числа α_l , $l = 1, \dots, s$, находятся из уравнения $\sum_{l=1}^s \lambda_l \alpha_l = 0$ при условии $\sum_{l=1}^s \alpha_l^2 \neq 0$, будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. Если выполняются тождества (2.4) при (2.9), то

$$[F(q, p), H(q, p)] = \left[\sum_{l=1}^s \alpha_l K_{l f_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p), H(q, p) \right] = \sum_{l=1}^s \alpha_l [K_{l f_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p), H(q, p)] = \sum_{l=1}^s \lambda_l \alpha_l M(q, p).$$

Выбирая α_l , $l = 1, \dots, s$, так, чтобы $\sum_{l=1}^s \lambda_l \alpha_l = 0$ при $\sum_{l=1}^s \alpha_l^2 \neq 0$, получаем, что функция (2.10), образованная на основании кратных вещественных полиномиальных частных интегралов (1.5), является первым интегралом гамильтоновой системы (0.1). \square

Следствие 2.2. Пусть выполняются условия теоремы 2.3. Тогда функции

$$F_{\zeta \varrho}: (q, p) \rightarrow \alpha_{\zeta} K_{\zeta f_{\xi_{\zeta}} g_{\xi_{\zeta}}}(q, p) + \alpha_{\varrho} K_{\varrho f_{\xi_{\varrho}} g_{\xi_{\varrho}}}(q, p), \quad \zeta = 1, \dots, s, \quad \varrho = 1, \dots, s, \quad \zeta \neq \varrho,$$

где вещественные числа α_{ζ} , $\zeta = 1, \dots, s$, и α_{ϱ} , $\varrho = 1, \dots, s$, $\varrho \neq \zeta$, находятся из уравнений $\lambda_{\zeta} \alpha_{\zeta} + \lambda_{\varrho} \alpha_{\varrho} = 0$ при $\alpha_{\zeta}^2 + \alpha_{\varrho}^2 \neq 0$, $\zeta = 1, \dots, s$, $\varrho = 1, \dots, s$, $\zeta \neq \varrho$, будут первыми интегралами на областях $G_{\zeta \varrho}$ гамильтоновой системы (0.1) соответственно.

Теорема 2.4. Если гамильтонова система (0.1) имеет кратный вещественный полиномиальный частный интеграл (1.1) кратности $\varkappa = 1 + \sum_{\xi=1}^{\varepsilon} r_{\xi}$ и существует такое $\xi \in \{1, \dots, \varepsilon\}$, что в тождествах (2.1) при фиксированном $g_{\xi} \in \{1, \dots, r_{\xi}\}$ полином

$$R_{f_{\xi} g_{\xi}}(q, p) = \lambda \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

то скалярная функция

$$F: (t, q, p) \rightarrow K_{f_{\xi} g_{\xi}}(q, p) - \lambda t \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R} \times G \quad (2.12)$$

будет неавтономным первым интегралом гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. С учетом тождеств (2.1) при условии (2.11), вычислим на области $\mathbb{R} \times G$ производную Ли функции (2.12) в силу гамильтоновой системы (0.1):

$$\mathfrak{B} F(t, q, p) = \partial_t F(t, q, p) + [F(t, q, p), H(q, p)] = -\partial_t (\lambda t) + [K_{f_{\xi} g_{\xi}}(q, p), H(q, p)] = 0. \quad \square$$

По теореме 2.4, используя двукратный вещественный полиномиальный частный интеграл $w: (q, p) \rightarrow q_1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ с функциями $K_{11}(q, p) = \frac{p_1 + 4p_2}{9q_1}$ и $R_{11}(q, p) = -1$ для обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (2.2) строим неавтономный первый интеграл

$$\tilde{F}: (t, q, p) \rightarrow \frac{p_1 + 4p_2}{9q_1} + t \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R} \times G, \quad G \subset \{(q, p): q_1 \neq 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

3. Условные частные интегралы

3.1. Определение и свойства условных частных интегралов

Определение 3.1. Экспоненциальную функцию

$$\omega: (q, p) \rightarrow \exp v(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (3.1)$$

где $v: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ есть некоторый полином, назовем **условным частным интегралом** полиномиальной гамильтоновой системы (0.1), если имеет место тождество

$$[v(q, p), H(q, p)] = S(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (3.2)$$

где $S: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ суть полином такой, что его степень $\deg S \leq h - 2$.

Например, полиномиальная гамильтонова система [20, с. 48; 24]

$$H: (q, p) \rightarrow \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + 2q_2 p_1 p_2 - q_1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4, \quad (3.3)$$

имеет условный частный интеграл $\omega: (q, p) \rightarrow \exp p_1^2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$, ибо скобки Пуассона

$$[v(q, p), H(q, p)] = \left[p_1^2, \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + 2q_2 p_1 p_2 - q_1 \right] = 2p_1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{и} \quad \deg(2p_1) = 1 \leq 3 - 2 = 1.$$

Свойство 3.1. Экспоненциальная функция (3.1) является **условным частным интегралом** гамильтоновой системы (0.1) в том и только в том случае, когда при вещественном ненулевом числе β функция $\omega_\beta: (q, p) \rightarrow \exp(\beta v(q, p)) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ является **условным частным интегралом** этой гамильтоновой системы.

Действительно, основываясь на тождестве (3.2), примененных к функциям v и βv , получаем, что скобки Пуассона:

$$[\beta v(q, p), H(q, p)] = \beta [v(q, p), H(q, p)] = \beta S(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}. \quad \square$$

В соответствии со свойством 3.1, говоря о двух и более условных частных интегралах полиномиальной гамильтоновой дифференциальной системы (0.1), будем считать их построенными на основании попарно линейно независимых полиномов.

Экспоненциальные функции

$$\omega_\nu: (q, p) \rightarrow \exp v_\nu(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad (3.4)$$

где $v_\nu: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu = 1, \dots, m$, есть полиномы, согласно определению 3.1 будут условными частными интегралами гамильтоновой системы (0.1) тогда и только тогда, когда

$$[v_\nu(q, p), H(q, p)] = S_\nu(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad (3.5)$$

где $S_\nu: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ есть полиномы степеней $\deg S_\nu \leq h - 2$, $\nu = 1, \dots, m$.

Свойство 3.2. Пусть экспоненциальные функции (3.4) являются условными частными интегралами полиномиальной гамильтоновой системы (0.1). Тогда функция

$$\omega: (q, p) \rightarrow \exp \sum_{\nu=1}^m \beta_{\nu} v_{\nu}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n},$$

где β_{ν} , $\nu = 1, \dots, m$, — вещественные числа такие, что $\sum_{\nu=1}^m |\beta_{\nu}| \neq 0$, будет условным частным интегралом полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

Действительно, с учетом определения 3.1 и тождеств (3.5) вычисляем скобки Пуассона

$$\left[\sum_{\nu=1}^m \beta_{\nu} v_{\nu}(q, p), H(q, p) \right] = \sum_{\nu=1}^m \beta_{\nu} [v_{\nu}(q, p), H(q, p)] = \sum_{\nu=1}^m \beta_{\nu} S_{\nu}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n},$$

где степень полинома $\deg \sum_{\nu=1}^m \beta_{\nu} S_{\nu} \leq h - 2$. \square

Теорема 3.1. Пусть экспоненциальные функции (3.4) являются условными частными интегралами полиномиальной гамильтоновой системы (0.1). Тогда функция

$$F: (q, p) \rightarrow \sum_{\nu=1}^m \beta_{\nu} v_{\nu}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \beta_{\nu} \in \mathbb{R}, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad \sum_{\nu=1}^m |\beta_{\nu}| \neq 0, \quad (3.6)$$

будет дополнительным первым интегралом гамильтоновой системы (0.1), если и только если в тождествах (3.5) полиномы $S_{\nu}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu = 1, \dots, m$, такие, что

$$\sum_{\nu=1}^m \beta_{\nu} S_{\nu}(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (3.7)$$

Доказательство. В соответствии с определением 3.1, вычислим скобки Пуассона

$$[F(q, p), H(q, p)] = \left[\sum_{\nu=1}^m \beta_{\nu} v_{\nu}(q, p), H(q, p) \right] = \sum_{\nu=1}^m \beta_{\nu} [v_{\nu}(q, p), H(q, p)] = \sum_{\nu=1}^m \beta_{\nu} S_{\nu}(q, p).$$

Отсюда получаем, что функция (3.6) является первым интегралом гамильтоновой системы (0.1) тогда и только тогда, когда выполняется тождество (3.7). \square

Теорема 3.2. Пусть полиномиальная гамильтонова система (0.1) имеет условные частные интегралы (3.4) такие, что в тождествах (3.5) полиномы

$$S_{\nu}(q, p) = \mu_{\nu} M(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \mu_{\nu} \in \mathbb{R}, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad (3.8)$$

где $M: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ есть некоторый полином степени $\deg M \leq h - 2$. Тогда функция (3.6), где вещественные числа β_{ν} , $\nu = 1, \dots, m$, находятся из уравнения $\sum_{\nu=1}^m \mu_{\nu} \beta_{\nu} = 0$ при условии $\sum_{\nu=1}^m |\beta_{\nu}| \neq 0$, является первым интегралом гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. Если верны представления (3.8), а числа β_{ν} , $\nu = 1, \dots, m$, являются решением линейного однородного уравнения $\sum_{\nu=1}^m \mu_{\nu} \beta_{\nu} = 0$ при $\sum_{\nu=1}^m |\beta_{\nu}| \neq 0$, то сумма

$$\sum_{\nu=1}^m \beta_{\nu} S_{\nu}(q, p) = \sum_{\nu=1}^m \beta_{\nu} \mu_{\nu} M(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Таким образом, выполняется условие (3.7), а значит, согласно теореме 3.1 функция (3.6) будет первым интегралом полиномиальной гамильтоновой системы (0.1). \square

Например, из теоремы 3.2 при $m = 2$, $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$ получаем

Следствие 3.1. Если гамильтонова система (0.1) имеет такие условные частные интегралы $\omega_1: (q, p) \rightarrow \exp v_1(q, p)$ и $\omega_2: (q, p) \rightarrow \exp v_2(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, что

$$\frac{[v_1(q, p), H(q, p)]}{[v_2(q, p), H(q, p)]} = \frac{v_1(q, p)}{v_2(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n},$$

то дополнительным первым интегралом гамильтоновой системы (0.1) будет полином

$$F: (q, p) \rightarrow v_1(q, p) - v_2(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

При $m = 2$, $\mu_1 = -\mu_2 \neq 0$ из теоремы 3.2 получаем

Следствие 3.2. Если гамильтонова система (0.1) имеет такие условные частные интегралы $\omega_1: (q, p) \rightarrow \exp v_1(q, p)$ и $\omega_2: (q, p) \rightarrow \exp v_2(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, что

$$\frac{[v_1(q, p), H(q, p)]}{[v_2(q, p), H(q, p)]} = -\frac{v_1(q, p)}{v_2(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n},$$

то дополнительным первым интегралом гамильтоновой системы (0.1) будет полином

$$F: (q, p) \rightarrow v_1(q, p) + v_2(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Заметим, что следствия 3.1 и 3.2 могут быть получены и из теоремы 3.1.

Следствие 3.3. Если выполняются условия теоремы 3.2, то функции

$$F_{\xi\zeta}: (q, p) \rightarrow \beta_{\xi} v_{\xi}(q, p) + \beta_{\zeta} v_{\zeta}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \xi = 1, \dots, m, \quad \zeta = 1, \dots, m, \quad \zeta \neq \xi,$$

где вещественные числа β_{ξ} и β_{ζ} находятся из линейных уравнений $\mu_{\xi} \beta_{\xi} + \mu_{\zeta} \beta_{\zeta} = 0$ при условиях $|\beta_{\xi}| + |\beta_{\zeta}| \neq 0$, $\xi = 1, \dots, m$, $\zeta = 1, \dots, m$, $\zeta \neq \xi$, соответственно, будут дополнительными первыми интегралами полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

Как по теореме 1.3 при $s = 1$ (т.е. при наличие только одного вещественного полиномиального частного интеграла), так и по теореме 3.2 при $m = 1$ (т.е. при наличие только одного условного частного интеграла) построить дополнительный первый интеграл обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой системы (0.1) не представляется возможным. В этом случае может быть использовано следующее утверждение.

Теорема 3.3. Пусть обобщенно-консервативная гамильтонова система (0.1) имеет вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) при условиях (1.13) и условные частные интегралы (3.4) при условиях (3.8). Тогда скалярные функции

$$F_{\xi\zeta}: (q, p) \rightarrow w_{\xi}^{\gamma_{\xi}}(q, p) \exp(\beta_{\zeta} v_{\zeta}(q, p)) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \xi = 1, \dots, s, \quad \zeta = 1, \dots, m, \quad (3.9)$$

где вещественные числа γ_{ξ} и β_{ζ} находятся из уравнений $\lambda_{\xi} \gamma_{\xi} + \mu_{\zeta} \beta_{\zeta} = 0$ при $|\gamma_{\xi}| + |\beta_{\zeta}| \neq 0$,

$\xi = 1, \dots, s, \zeta = 1, \dots, t$, будут первыми интегралами гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. С учетом тождеств (1.13) и (3.5) при (3.8), вычислим скобки Пуассона

$$\begin{aligned} [F_{\xi\zeta}(q, p), H(q, p)] &= [w_\xi^{\gamma_\xi}(q, p), H(q, p)] \cdot \exp(\beta_\zeta v_\zeta(q, p)) + w_\xi^{\gamma_\xi}(q, p) \cdot [\exp(\beta_\zeta v_\zeta(q, p))] = \\ &= \gamma_\xi w_\xi^{\gamma_\xi - 1}(q, p) \exp(\beta_\zeta v_\zeta(q, p)) [w_\xi(q, p), H(q, p)] + \beta_\zeta w_\xi^{\gamma_\xi}(q, p) \exp(\beta_\zeta v_\zeta(q, p)) [v_\zeta(q, p), H(q, p)] = \\ &= (\lambda_\xi \gamma_\xi + \mu_\zeta \beta_\zeta) M(q, p) w_\xi^{\gamma_\xi}(q, p) \exp(\beta_\zeta v_\zeta(q, p)) \quad \forall (q, p) \in G, \quad \xi = 1, \dots, s, \zeta = 1, \dots, t. \end{aligned}$$

Выбирая вещественные числа γ_ξ и β_ζ так, чтобы $\lambda_\xi \gamma_\xi + \mu_\zeta \beta_\zeta = 0$, получаем, что функции (3.9) являются первыми интегралами гамильтоновой системы (0.1). \square

Для полиномиальной гамильтоновой системы (3.3), по теореме 3.3, на основании вещественного полиномиального частного интеграла $w: (q, p) \rightarrow p_2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ с множителем $M: (q, p) \rightarrow -2p_1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ и условного частного интеграла $\omega: (q, p) \rightarrow \exp p_1^2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ функцией $S: (q, p) \rightarrow 2p_1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ строим дополнительный первый интеграл

$$F: (q, p) \rightarrow p_2 \exp p_1^2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4.$$

Первые интегралы H и F гамильтоновой системы (3.3) являются функционально независимыми на пространстве \mathbb{R}^4 за исключением множеств меры нуль и находятся в инволюции. Следовательно, полиномиальная гамильтонова система (3.3) интегрируема по Лиувиллю.

Как по теореме 2.2 при $s = \tilde{r}_{\xi_l} = \tilde{\varepsilon}_l = 1$ (т.е. при наличие только одного двукратного полиномиального частного интеграла), так и по теореме 3.2 при $t = 1$ (т.е. при наличие только одного условного частного интеграла) построить первый интеграл гамильтоновой системы (0.1) не представляется возможным. В этом случае может быть использована

Теорема 3.4. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) кратностей $\varkappa_l = 1 + \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} r_{\xi_l}$, $l = 1, \dots, s$, такие, что имеют место тождества (2.4) при (2.7). Кроме этого гамильтонова система (0.1) имеет условные частные интегралы (3.4) при условиях (3.8). Тогда функции

$$F_{l\zeta}: (q, p) \rightarrow \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) + \beta_\zeta v_\zeta(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad l = 1, \dots, s, \zeta = 1, \dots, t, \quad (3.10)$$

где фиксированные числа $f_{\xi_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\xi_l} \in \{1, \dots, \tilde{r}_{\xi_l}\}$, $\xi_l \in \{1, \dots, \tilde{\varepsilon}_l\}$, $l = 1, \dots, s$, а вещественные числа $\alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}$ и β_ζ находятся из уравнений $\lambda_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} + \mu_\zeta \beta_\zeta = 0$ при $|\alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}| + |\beta_\zeta| \neq 0$, $l = 1, \dots, s, \zeta = 1, \dots, t$, будут первыми интегралами системы (0.1).

Доказательство. При выполнении системы тождеств (2.4) при (2.7) и (3.5) при (3.8) относительно функций (3.4) вычислим скобки Пуассона функций (3.10):

$$\begin{aligned} [F_{l\zeta}(q, p), H(q, p)] &= \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} \cdot [K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p), H(q, p)] + \beta_\zeta \cdot [v_\zeta(q, p), H(q, p)] = \\ &= \left(\lambda_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} + \mu_\zeta \beta_\zeta \right) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad l = 1, \dots, s, \zeta = 1, \dots, t. \end{aligned}$$

Если числа $\alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}$, $l = 1, \dots, s$, и β_ζ , $\zeta = 1, \dots, m$, такие, что $\lambda_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} + \mu_\zeta \beta_\zeta = 0$, то функции (3.10) являются первыми интегралами гамильтоновой системы (0.1). \square

Для построения неавтономного первого интеграла может быть использована

Теорема 3.5. *Если обобщенно-консервативная гамильтонова система (0.1) имеет такой условный частный интеграл (3.1), что в тождестве (3.2) полином*

$$S(q, p) = \lambda \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (3.11)$$

то неавтономным первым интегралом гамильтоновой системы (0.1) будет функция

$$F: (t, q, p) \rightarrow v(q, p) - \lambda t \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}.$$

Доказательство. Учитывая тождество (3.2) при условии (3.11), на \mathbb{R}^{2n+1} получаем:

$$\mathfrak{B} F(t, q, p) = \partial_t F(t, q, p) + [F(t, q, p), H(q, p)] = \partial_t (-\lambda t) + [v(q, p), H(q, p)] = 0.$$

Следовательно, функция F есть первый интеграл гамильтоновой системы (0.1). \square

4. Комплекснозначные полиномиальные частные интегралы

4.1. Свойства комплекснозначных полиномиальных частных интегралов

Определение 4.1. *Полином*

$$\mathfrak{m}: (q, p) \rightarrow \mathfrak{m}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \mathfrak{E} \mathfrak{m} \subset \mathbb{C}, \quad (4.1)$$

назовем **комплекснозначным полиномиальным частным интегралом** обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1), если скобки Пуассона

$$[\mathfrak{m}(q, p), H(q, p)] = \mathfrak{m}(q, p) \mathfrak{M}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (4.2)$$

где $\mathfrak{M}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ есть полином с комплексными коэффициентами и $\deg \mathfrak{M}(q, p) \leq h - 2$.

Например, дифференциальная система, заданная полиномиальным гамильтонианом

$$H: (q, p) \rightarrow \frac{\beta}{2} (q_2^2 - q_1^2 + p_2^2 - p_1^2) + \alpha (q_1 p_2 + q_2 p_1) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4.3)$$

имеет комплекснозначные полиномиальные (линейные) частные интегралы

$$\mathfrak{m}_1: (q, p) \rightarrow q_1 + q_2 + i(p_1 - p_2) \quad \text{и} \quad \mathfrak{m}_2: (q, p) \rightarrow q_1 - q_2 + i(p_1 + p_2) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$$

с множителями $\mathfrak{M}_1: (q, p) \rightarrow \alpha + \beta i$ и $\mathfrak{M}_2: (q, p) \rightarrow -\alpha + \beta i \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$, соответственно.

Свойство 4.1. *Гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (4.1), если и только если выполняется система тождеств*

$$[\operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p), H(q, p)] = \operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) - \operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (4.4)$$

$$[\operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p), H(q, p)] = \operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p) + \operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Доказательство. Гамильтонова дифференциальная система (0.1), по определению 4.1, имеет комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (4.1) тогда и только тогда, когда выполняется тождество (4.2). Тождества (4.2) верно в том и только в том случае,

когда имеет место система тождеств (4.4). По свойству транзитивности отношения эквивалентности получаем утверждение свойства 4.1. \square

Свойство 4.2. Если гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (4.1), то ему комплексно сопряженный полином

$$\bar{\mathfrak{w}} : (q, p) \rightarrow \operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) - i \operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$$

также будет комплекснозначным полиномиальным частным интегралом этой гамильтоновой системы (0.1). При этом имеет место тождество

$$[\bar{\mathfrak{w}}(q, p), H(q, p)] = \bar{\mathfrak{w}}(q, p) \overline{\mathfrak{M}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (4.5)$$

где $\overline{\mathfrak{M}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ есть комплексно сопряженный полином с $\mathfrak{M}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ из (4.2).

Доказательство. По свойству билинейности скобок Пуассона, с учетом (4.4) имеем:

$$\begin{aligned} [\bar{\mathfrak{w}}(q, p), H(q, p)] &= [\operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) - i \operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p), H(q, p)] = [\operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p), H(q, p)] - i [\operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p), H(q, p)] = \\ &= \operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) - \operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p) - i (\operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p) + \operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p)) = \\ &= (\operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) - i \operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p)) (\operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) - i \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p)) = \bar{\mathfrak{w}}(q, p) \overline{\mathfrak{M}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}. \quad \square \end{aligned}$$

По свойству 4.2, устанавливаем, что гамильтонова дифференциальная система (4.3) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы

$$\bar{\mathfrak{m}}_1 : (q, p) \rightarrow q_1 + q_2 - i(p_1 - p_2), \quad \bar{\mathfrak{m}}_2 : (q, p) \rightarrow q_1 - q_2 - i(p_1 + p_2) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$$

с сомножителями $\overline{\mathfrak{M}}_1 : (q, p) \rightarrow \alpha - \beta i$, $\overline{\mathfrak{M}}_2 : (q, p) \rightarrow -\alpha - \beta i \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$, соответственно.

Символом \mathbb{K} обозначим как поле вещественных чисел \mathbb{R} , так и комплексных \mathbb{C} .

Свойство 4.3. Произведение $u_1 u_2$ полиномов $u_1: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{K}$ и $u_2: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{K}$ является вещественным или комплекснозначным полиномиальным частным интегралом гамильтоновой системы (0.1), если и только если полиномы-сомножители u_1 и u_2 являются полиномиальными частными интегралами гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство основано на определениях 1.1 и 4.1 и том, что верно тождество

$$[u_1(q, p) u_2(q, p), H(q, p)] = u_2(q, p) [u_1(q, p), H(q, p)] + u_1(q, p) [u_2(q, p), H(q, p)]. \quad \square$$

Теорема 4.1. Гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (4.1) тогда и только тогда, когда гамильтонова система (0.1) имеет вещественный полиномиальный частный интеграл

$$P : (q, p) \rightarrow \operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}(q, p) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (4.6)$$

При этом имеет место следующее тождество

$$[P(q, p), H(q, p)] = 2P(q, p) \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (4.7)$$

где полином $\mathfrak{M}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ определяется из тождества (4.2).

Доказательство основано на свойстве билинейности скобок Пуассона, тождестве Лейбница для скобок Пуассона, свойствах 4.1 и 4.2, а также на том, что

$$\mathfrak{w}(q, p) \overline{\mathfrak{w}}(q, p) = \operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}(q, p) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Учитывая тождества (4.4), имеем:

$$\begin{aligned} [P(q, p), H(q, p)] &= [\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}(q, p) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}(q, p), H(q, p)] = \\ &= 2 \operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) [\operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p), H(q, p)] + 2 \operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p) [\operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p), H(q, p)] = \\ &= 2 \operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) (\operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) - \operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p)) + \\ &\quad + 2 \operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p) (\operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p) + \operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p)) = \\ &= 2(\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}(q, p) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}(q, p)) \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) = 2P(q, p) \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}. \quad \square \end{aligned}$$

Так, по теореме 4.1, обобщенно-консервативная полиномиальная гамильтонова дифференциальная система (4.3) имеет вещественные полиномиальные частные интегралы

$$P_1: (q, p) \rightarrow (q_1 + q_2)^2 + (p_1 - p_2)^2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{и} \quad P_2: (q, p) \rightarrow (q_1 - q_2)^2 + (p_1 + p_2)^2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$$

с сомножителями $M_1: (q, p) \rightarrow 2\alpha \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ и $M_2: (q, p) \rightarrow -2\alpha \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$, соответственно.

Как следствие из теоремы 4.1, основываясь на определении первого интеграла полиномиальной гамильтоновой системы (0.1), получаем следующее утверждение.

Теорема 4.2. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (4.1), такой, что в тождестве (4.2) у сомножителя $\mathfrak{M}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ вещественная часть $\operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in G$. Тогда полином (4.6) является первым интегралом обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1).

Теорема 4.3. Если гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (4.1), то у скалярной функции

$$A: (q, p) \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G, \quad G \subset \{(q, p): \operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (4.8)$$

скобки Пуассона в силу гамильтоновой системы (0.1) равны

$$[A(q, p), H(q, p)] = \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad (4.9)$$

где полином $\mathfrak{M}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ определяются из тождества (4.2).

Доказательство. Используя свойство скобок Пуассона сложной функции, с учетом системы тождеств (4.4), на области G получаем, что скобки Пуассона

$$\begin{aligned} [A(q, p), H(q, p)] &= \left[\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p)}, H(q, p) \right] = \\ &= \partial_{\zeta_1} \left(\operatorname{arctg} \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right) \Big|_{\substack{\zeta_1 = \operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p), \\ \zeta_2 = \operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p)}} \cdot [\operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p), H(q, p)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \partial_{\zeta_2} \left(\operatorname{arctg} \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right) \Big|_{\substack{\zeta_1 = \operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p), \\ \zeta_2 = \operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p)}} \cdot [\operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p), H(q, p)] = \\
 & = \frac{-\operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p) [\operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p), H(q, p)] + \operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) [\operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p), H(q, p)]}{\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}(q, p) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}(q, p)} = \\
 & = \frac{1}{\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}(q, p) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}(q, p)} \cdot \left(-\operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p) (\operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) - \operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p)) + \right. \\
 & \quad \left. + \operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) (\operatorname{Re} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p) + \operatorname{Im} \mathfrak{w}(q, p) \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p)) \right) = \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p). \quad \square
 \end{aligned}$$

4.2. Построение дополнительных первых интегралов гамильтоновой системы по комплекснозначным полиномиальным частным интегралам

Теорема 4.4. Пусть обобщенно-консервативная полиномиальная гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы

$$\mathfrak{m}_l: (q, p) \rightarrow \mathfrak{m}_l(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \operatorname{E} \mathfrak{m}_l \subset \mathbb{C}, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad (4.10)$$

такие, что в тождествах

$$[\mathfrak{m}_l(q, p), H(q, p)] = \mathfrak{m}_l(q, p) \mathfrak{M}_l(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad (4.11)$$

полиномы

$$\mathfrak{M}_l(q, p) = \rho_l \mathfrak{M}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \rho_l \in \mathbb{C}, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad (4.12)$$

где $\mathfrak{M}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ есть комплекснозначный полином. Тогда скалярные функции

$$F_1: (q, p) \rightarrow \prod_{l=1}^{\mathfrak{s}} P_l^{\widehat{\eta}_l}(q, p) \exp \left(-2 \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \widetilde{\eta}_l A_l(q, p) \right) \quad \forall (q, p) \in G \quad (4.13)$$

и

$$F_2: (q, p) \rightarrow \prod_{l=1}^{\mathfrak{s}} P_l^{\widetilde{\eta}_l}(q, p) \exp \left(2 \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \widehat{\eta}_l A_l(q, p) \right) \quad \forall (q, p) \in G, \quad (4.14)$$

где полиномы

$$P_l: (q, p) \rightarrow \operatorname{Re}^2 \mathfrak{m}_l(q, p) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{m}_l(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad (4.15)$$

скалярные функции

$$A_l: (q, p) \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{m}_l(q, p)}{\operatorname{Re} \mathfrak{m}_l(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad (4.16)$$

а комплексные числа $\eta_l = \widehat{\eta}_l + i \widetilde{\eta}_l$ ($\widehat{\eta}_l = \operatorname{Re} \eta_l$, $\widetilde{\eta}_l = \operatorname{Im} \eta_l$), $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из уравнения $\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \rho_l \eta_l = 0$ при $\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} |\eta_l|^2 \neq 0$, будут первыми интегралами на любой области G из множества $\{(q, p): \operatorname{Re} \mathfrak{m}_l(q, p) \neq 0, l = 1, \dots, \mathfrak{s}\}$ гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. Если функции (4.10) являются комплекснозначными полиномиальными частными интегралами гамильтоновой системы (0.1), то полиномы (4.15) и функции (4.16) такие, что имеют место тождества (теоремы 4.1 и 4.3)

$$[P_l(q, p), H(q, p)] = 2P_l(q, p) \operatorname{Re} \mathfrak{M}_l(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad l = 1, \dots, s, \quad (4.17)$$

и

$$[A_l(q, p), H(q, p)] = \operatorname{Im} \mathfrak{M}_l(q, p) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad l = 1, \dots, s, \quad (4.18)$$

где $\mathfrak{M}_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, $l = 1, \dots, s$, суть полиномы из системы тождеств (4.11).

С учетом того, что условия (4.12) равносильны системе тождеств

$$\operatorname{Re} \mathfrak{M}_l(q, p) = \hat{\rho}_l \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) - \tilde{\rho}_l \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad l = 1, \dots, s,$$

$$\operatorname{Im} \mathfrak{M}_l(q, p) = \hat{\rho}_l \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p) + \tilde{\rho}_l \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad l = 1, \dots, s,$$

где $\hat{\rho}_l = \operatorname{Re} \rho_l$, $\tilde{\rho}_l = \operatorname{Im} \rho_l$, $l = 1, \dots, s$, на основании тождеств (4.17) и (4.18) получаем:

$$\begin{aligned} [F_1(q, p), H(q, p)] &= \exp\left(-2 \sum_{l=1}^s \tilde{\eta}_l A_l(q, p)\right) \sum_{l=1}^s \hat{\eta}_l P_l^{\hat{\eta}_l-1}(q, p) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^s P_k^{\tilde{\eta}_k}(q, p) [P_l(q, p), H(q, p)] - \\ &\quad - 2 \prod_{l=1}^s P_l^{\hat{\eta}_l}(q, p) \exp\left(-2 \sum_{l=1}^s \tilde{\eta}_l A_l(q, p)\right) \left[\sum_{l=1}^s \tilde{\eta}_l A_l(q, p), H(q, p) \right] = \\ &= 2 \sum_{l=1}^s (\hat{\eta}_l \operatorname{Re} \mathfrak{M}_l(q, p) - \tilde{\eta}_l \operatorname{Im} \mathfrak{M}_l(q, p)) F_1(q, p) = \\ &= 2 \sum_{l=1}^s \left(\hat{\eta}_l (\hat{\rho}_l \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) - \tilde{\rho}_l \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p)) - \tilde{\eta}_l (\hat{\rho}_l \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p) + \tilde{\rho}_l \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p)) \right) F_1(q, p) = \\ &= 2 \sum_{l=1}^s \left((\hat{\rho}_l \hat{\eta}_l - \tilde{\rho}_l \tilde{\eta}_l) \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) - (\tilde{\rho}_l \hat{\eta}_l + \hat{\rho}_l \tilde{\eta}_l) \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p) \right) F_1(q, p) \quad \forall (q, p) \in G; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [F_2(q, p), H(q, p)] &= \exp\left(2 \sum_{l=1}^s \hat{\eta}_l A_l(q, p)\right) \sum_{l=1}^s \tilde{\eta}_l P_l^{\tilde{\eta}_l-1}(q, p) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^s P_k^{\tilde{\eta}_k}(q, p) [P_l(q, p), H(q, p)] + \\ &\quad + 2 \prod_{l=1}^s P_l^{\tilde{\eta}_l}(q, p) \exp\left(2 \sum_{l=1}^s \hat{\eta}_l A_l(q, p)\right) \left[\sum_{l=1}^s \hat{\eta}_l A_l(q, p), H(q, p) \right] = \\ &= 2 \sum_{l=1}^s (\tilde{\eta}_l \operatorname{Re} \mathfrak{M}_l(q, p) + \hat{\eta}_l \operatorname{Im} \mathfrak{M}_l(q, p)) F_2(q, p) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \left(\tilde{\eta}_{\mathfrak{l}} (\hat{\rho}_{\mathfrak{l}} \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) - \tilde{\rho}_{\mathfrak{l}} \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p)) + \hat{\eta}_{\mathfrak{l}} (\hat{\rho}_{\mathfrak{l}} \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p) + \tilde{\rho}_{\mathfrak{l}} \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p)) \right) F_2(q, p) = \\
 &= 2 \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \left((\tilde{\rho}_{\mathfrak{l}} \hat{\eta}_{\mathfrak{l}} + \hat{\rho}_{\mathfrak{l}} \tilde{\eta}_{\mathfrak{l}}) \operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) + (\hat{\rho}_{\mathfrak{l}} \hat{\eta}_{\mathfrak{l}} - \tilde{\rho}_{\mathfrak{l}} \tilde{\eta}_{\mathfrak{l}}) \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p) \right) F_2(q, p) \quad \forall (q, p) \in G.
 \end{aligned}$$

Выбирая числа $\eta_{\mathfrak{l}} = \hat{\eta}_{\mathfrak{l}} + i \tilde{\eta}_{\mathfrak{l}}$ ($\hat{\eta}_{\mathfrak{l}} = \operatorname{Re} \eta_{\mathfrak{l}}$, $\tilde{\eta}_{\mathfrak{l}} = \operatorname{Im} \eta_{\mathfrak{l}}$), $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, так чтобы $\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \rho_{\mathfrak{l}} \eta_{\mathfrak{l}} = 0$, т.е. $\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} (\hat{\rho}_{\mathfrak{l}} \hat{\eta}_{\mathfrak{l}} - \tilde{\rho}_{\mathfrak{l}} \tilde{\eta}_{\mathfrak{l}}) = 0$, $\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} (\tilde{\rho}_{\mathfrak{l}} \hat{\eta}_{\mathfrak{l}} + \hat{\rho}_{\mathfrak{l}} \tilde{\eta}_{\mathfrak{l}}) = 0$ при $\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} |\eta_{\mathfrak{l}}|^2 \neq 0$, получаем, что функции (4.13) и (3.14) будут первыми интегралами на области G гамильтоновой системы (0.1). \square

Для построения интегрального базиса гамильтоновой системы (0.1) применимо

Следствие 4.1. Пусть выполняются условия теоремы 4.4. Тогда функции

$$F_{1\zeta\xi} : (q, p) \rightarrow P_{\zeta}^{\hat{\eta}_{\zeta}}(q, p) P_{\xi}^{\hat{\eta}_{\xi}}(q, p) \exp\left(-2(\tilde{\eta}_{\zeta} A_{\zeta}(q, p) + \tilde{\eta}_{\xi} A_{\xi}(q, p))\right) \quad \forall (q, p) \in G_{1\zeta\xi},$$

и

$$F_{2\zeta\xi} : (q, p) \rightarrow P_{\zeta}^{\tilde{\eta}_{\zeta}}(q, p) P_{\xi}^{\tilde{\eta}_{\xi}}(q, p) \exp\left(2(\hat{\eta}_{\zeta} A_{\zeta}(q, p) + \hat{\eta}_{\xi} A_{\xi}(q, p))\right) \quad \forall (q, p) \in G_{2\zeta\xi},$$

где числа $\eta_{\zeta} = \hat{\eta}_{\zeta} + i \tilde{\eta}_{\zeta}$ и $\eta_{\xi} = \hat{\eta}_{\xi} + i \tilde{\eta}_{\xi}$, $\zeta, \xi = 1, \dots, \mathfrak{s}$, $\xi \neq \zeta$, находятся соответственно из уравнений $\rho_{\zeta} \eta_{\zeta} + \rho_{\xi} \eta_{\xi} = 0$ при $|\eta_{\zeta}|^2 + |\eta_{\xi}|^2 \neq 0$, $\zeta, \xi = 1, \dots, \mathfrak{s}$, $\xi \neq \zeta$, будут первыми интегралами на областях $G_{1\zeta\xi}$ и $G_{2\zeta\xi}$ гамильтоновой системы (0.1).

Теорема 4.5. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) такие, что в тождествах (4.11) у полиномов $\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, вещественные части связаны тождествами

$$\operatorname{Re} \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}}(q, p) = \rho_{\mathfrak{l}} M(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \rho_{\mathfrak{l}} \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad (4.20)$$

где $M: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ есть полином. Тогда скалярная функция

$$F : (q, p) \rightarrow \prod_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} P_{\mathfrak{l}}^{\eta_{\mathfrak{l}}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (4.21)$$

где полиномы $P_{\mathfrak{l}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся по формулам (4.15), а вещественные числа $\eta_{\mathfrak{l}}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из уравнения $\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \rho_{\mathfrak{l}} \eta_{\mathfrak{l}} = 0$ при $\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \eta_{\mathfrak{l}}^2 \neq 0$, будет дополнительным первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. На основании тождеств (4.17) при условиях (4.20) вычислим скобки Пуассона функции (4.21) в силу гамильтоновой системы (0.1):

$$[F(q, p), H(q, p)] = \left[\prod_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} P_{\mathfrak{l}}^{\eta_{\mathfrak{l}}}(q, p), H(q, p) \right] = \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \eta_{\mathfrak{l}} P_{\mathfrak{l}}^{\eta_{\mathfrak{l}}-1}(q, p) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \mathfrak{l}}}^{\mathfrak{s}} P_k^{\eta_k}(q, p) [P_{\mathfrak{l}}(q, p), H(q, p)] =$$

$$= 2 \sum_{l=1}^s \rho_l \eta_l \prod_{l=1}^s P_l^{\eta_l}(q, p) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in G.$$

Выбирая числа η_l , $l = 1, \dots, s$, так, чтобы уравнение $\sum_{l=1}^s \rho_l \eta_l = 0$ при $\sum_{l=1}^s \eta_l^2 \neq 0$, получаем, что функция (4.21) будет первым интегралом на области G системы (0.1). \square

Из теоремы 4.5 при $s = 2$, $\rho_1 = \rho_2$ получаем

Следствие 4.2. Если гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) при $s = 2$ такие, что у полиномов $\mathfrak{M}_1: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{M}_2: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ из тождеств (4.11) вещественные части

$$\operatorname{Re} \mathfrak{M}_1(q, p) = \operatorname{Re} \mathfrak{M}_2(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n},$$

то скалярная функция

$$F: (q, p) \rightarrow \frac{\operatorname{Re}^2 \mathfrak{m}_1(q, p) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{m}_1(q, p)}{\operatorname{Re}^2 \mathfrak{m}_2(q, p) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{m}_2(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}$$

будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1).

Из теоремы 4.5 при $s = 2$, $\rho_1 = -\rho_2$ получаем

Следствие 4.4. Если гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) при $s = 2$ такие, что у полиномов $\mathfrak{M}_1: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{M}_2: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ из тождеств (4.11) вещественные части

$$\operatorname{Re} \mathfrak{M}_1(q, p) = -\operatorname{Re} \mathfrak{M}_2(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n},$$

то скалярная функция

$$F: (q, p) \rightarrow (\operatorname{Re}^2 \mathfrak{m}_1(q, p) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{m}_1(q, p))(\operatorname{Re}^2 \mathfrak{m}_2(q, p) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{m}_2(q, p)) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$$

будет первым интегралом на пространстве \mathbb{R}^{2n} гамильтоновой системы (0.1).

Для построения интегрального базиса гамильтоновой системы (0.1) применимо

Следствие 4.4. Пусть выполняются условия теоремы 4.5. Тогда функции

$$F_{\zeta\xi}: (q, p) \rightarrow P_{\zeta}^{\eta_{\zeta}}(q, p) P_{\xi}^{\eta_{\xi}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G_{\zeta\xi} \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \zeta = 1, \dots, s, \quad \xi = 1, \dots, s, \quad \xi \neq \zeta,$$

где вещественные числа η_{ζ} и η_{ξ} , $\zeta = 1, \dots, s$, $\xi = 1, \dots, s$, $\xi \neq \zeta$, находятся соответственно из уравнений $\rho_{\zeta} \eta_{\zeta} + \rho_{\xi} \eta_{\xi} = 0$ при $\eta_{\zeta}^2 + \eta_{\xi}^2 \neq 0$, $\zeta = 1, \dots, s$, $\xi = 1, \dots, s$, $\xi \neq \zeta$, будут первыми интегралами на областях $G_{\zeta\xi}$ гамильтоновой системы (0.1).

Теорема 4.6. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) такие, что в тождествах (4.11) у полиномов $\mathfrak{M}_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, $l = 1, \dots, s$, мнимые части связаны тождествами

$$\operatorname{Im} \mathfrak{M}_l(q, p) = \rho_l M(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \rho_l \in \mathbb{R}, \quad l = 1, \dots, s, \quad (4.22)$$

где $M: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ есть полином. Тогда скалярная функция

$$F: (q, p) \rightarrow \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \tau_{\mathfrak{l}} A_{\mathfrak{l}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (4.23)$$

где функции $A_{\mathfrak{l}}: G \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся по формулам (4.16), а вещественные числа $\tau_{\mathfrak{l}}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из уравнения $\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \rho_{\mathfrak{l}} \tau_{\mathfrak{l}} = 0$ при $\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \tau_{\mathfrak{l}}^2 \neq 0$, будет первым интегралом на области G полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. На основании тождеств (4.18) при условиях (4.22) вычислим скобки Пуассона на области G функции (4.23) в силу гамильтоновой системы (0.1):

$$[F(q, p), H(q, p)] = \left[\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \tau_{\mathfrak{l}} A_{\mathfrak{l}}(q, p), H(q, p) \right] = \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \tau_{\mathfrak{l}} [A_{\mathfrak{l}}(q, p), H(q, p)] = \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \rho_{\mathfrak{l}} \tau_{\mathfrak{l}} M(q, p).$$

Выбирая числа $\tau_{\mathfrak{l}}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, так, чтобы $\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \rho_{\mathfrak{l}} \tau_{\mathfrak{l}} = 0$ при $\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \tau_{\mathfrak{l}}^2 \neq 0$, получаем, что функция (4.23) будет первым интегралом на G гамильтоновой системы (0.1). \square

Из теоремы 4.6 при $\mathfrak{s} = 2$, $\rho_1 = \rho_2$ получаем

Следствие 4.5. Если гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) при $\mathfrak{s} = 2$ такие, что у полиномов $\mathfrak{M}_1: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{M}_2: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ из тождеств (4.11) мнимые части связаны тождествами

$$\text{Im } \mathfrak{M}_1(q, p) = \text{Im } \mathfrak{M}_2(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (4.24)$$

то функция

$$F: (q, p) \rightarrow \frac{\text{Re } \mathfrak{m}_1(q, p) \text{Im } \mathfrak{m}_2(q, p) - \text{Im } \mathfrak{m}_1(q, p) \text{Re } \mathfrak{m}_2(q, p)}{\text{Re } \mathfrak{m}_1(q, p) \text{Re } \mathfrak{m}_2(q, p) + \text{Im } \mathfrak{m}_1(q, p) \text{Im } \mathfrak{m}_2(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n} \quad (4.25)$$

будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. С учетом (4.24), согласно теореме 4.6 получаем, что функция

$$F: (q, p) \rightarrow \text{arctg} \frac{\text{Im } \mathfrak{m}_1(q, p)}{\text{Re } \mathfrak{m}_1(q, p)} - \text{arctg} \frac{\text{Im } \mathfrak{m}_2(q, p)}{\text{Re } \mathfrak{m}_2(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G$$

является первым интегралом на области $G \subset \mathbb{R}^{2n}$ гамильтоновой системы (0.1). Используя тригонометрические преобразования, эту функцию приводим к виду (4.25). \square

Из теоремы 4.6 при $\mathfrak{s} = 2$, $\rho_1 = -\rho_2$ получаем

Следствие 4.6. Если гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) при $\mathfrak{s} = 2$ такие, что у полиномов $\mathfrak{M}_1: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{M}_2: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ из тождеств (4.11) мнимые части связаны тождествами

$$\text{Im } \mathfrak{M}_1(q, p) = -\text{Im } \mathfrak{M}_2(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n},$$

то функция

$$F: (q, p) \rightarrow \frac{\text{Re } \mathfrak{m}_1(q, p) \text{Im } \mathfrak{m}_2(q, p) + \text{Im } \mathfrak{m}_1(q, p) \text{Re } \mathfrak{m}_2(q, p)}{\text{Re } \mathfrak{m}_1(q, p) \text{Re } \mathfrak{m}_2(q, p) - \text{Im } \mathfrak{m}_1(q, p) \text{Im } \mathfrak{m}_2(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}$$

будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство аналогично доказательству следствия 4.5 с той лишь разницей, что первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1) будет функция

$$F: (q, p) \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathbf{m}_1(q, p)}{\operatorname{Re} \mathbf{m}_1(q, p)} + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathbf{m}_2(q, p)}{\operatorname{Re} \mathbf{m}_2(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G. \quad \boxtimes$$

Для построения интегрального базиса гамильтоновой системы (0.1) применимо

Следствие 4.7. Пусть выполняются условия теоремы 4.6. Тогда функции

$$F_{\zeta\xi}: (q, p) \rightarrow \tau_\zeta A_\zeta(q, p) + \tau_\xi A_\xi(q, p) \quad \forall (q, p) \in G_{\zeta\xi} \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \zeta, \xi = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad \xi \neq \zeta,$$

где вещественные числа τ_ζ и τ_ξ , $\zeta = 1, \dots, \mathfrak{s}$, $\xi = 1, \dots, \mathfrak{s}$, $\xi \neq \zeta$, находятся соответственно из уравнений $\rho_\zeta \tau_\zeta + \rho_\xi \tau_\xi = 0$ при $\tau_\zeta^2 + \tau_\xi^2 \neq 0$, $\zeta = 1, \dots, \mathfrak{s}$, $\xi = 1, \dots, \mathfrak{s}$, $\xi \neq \zeta$, будут первыми интегралами на областях $G_{\zeta\xi}$ гамильтоновой системы (0.1).

Для обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой системы

$$H: (q, p) \rightarrow \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4 \quad (4.26)$$

по комплекснозначным линейным частным интегралам

$$\mathfrak{w}_1: (q, p) \rightarrow q_1 - ip_1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{и} \quad \mathfrak{w}_2: (q, p) \rightarrow q_2 - ip_2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$$

с сомножителями $\mathfrak{M}_1(q, p) = \mathfrak{M}_2(q, p) = i \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ строим дополнительные первые интегралы

$$F_1: (q, p) \rightarrow q_1^2 + p_1^2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4, \quad F_2: (q, p) \rightarrow q_2^2 + p_2^2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4 \quad (\text{Теорема 4.2})$$

и на любой области $G \subset \{(q, p): q_1 \neq 0, q_2 \neq 0, q_1 q_2 + p_1 p_2 \neq 0\}$ (Теорема 4.6 или Следствие 4.5)

$$F_3: (q, p) \rightarrow \arctan \frac{p_1}{q_1} - \arctan \frac{p_2}{q_2} = \frac{q_1 p_2 - q_2 p_1}{q_1 q_2 + p_1 p_2} \quad \forall (q, p) \in G.$$

Будучи функционально независимыми, первые интегралы F_1, F_2 и F_3 образуют автономный интегральный базис гамильтоновой системы (4.26) на любой области G . Отметим и то, что гамильтониан системы $H = \frac{1}{2} (F_1 + F_2)$ есть линейная комбинация первых интегралов F_1 и F_2 .

Теорема 4.7. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) такие, что в тождествах (4.11) у полиномов $\mathfrak{M}_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, вещественные части удовлетворяют тождествам (4.20). Кроме этого система (0.1) имеет комплекснозначные частные интегралы

$$\mathfrak{m}_{l_1}^{(1)}: (q, p) \rightarrow \mathfrak{m}_{l_1}^{(1)}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \mathfrak{E} \mathfrak{m}_{l_1}^{(1)} \subset \mathbb{C}, \quad l_1 = 1, \dots, \mathfrak{s}_1, \quad (4.27)$$

такие, что в тождествах

$$[\mathfrak{m}_{l_1}^{(1)}(q, p), H(q, p)] = \mathfrak{m}_{l_1}^{(1)}(q, p) \mathfrak{M}_{l_1}^{(1)}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad l_1 = 1, \dots, \mathfrak{s}_1, \quad (4.28)$$

у полиномов $\mathfrak{M}_{l_1}^{(1)}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, $l_1 = 1, \dots, \mathfrak{s}_1$, мнимые части

$$\operatorname{Im} \mathfrak{M}_{l_1}^{(1)}(q, p) = \rho_{l_1}^{(1)} M(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \rho_{l_1}^{(1)} \in \mathbb{R}, \quad l_1 = 1, \dots, \mathfrak{s}_1, \quad (4.29)$$

где полином $M: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда скалярная функция

$$F: (q, p) \rightarrow \prod_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} P_{\mathfrak{l}}^{\eta_{\mathfrak{l}}}(q, p) \exp\left(\sum_{\mathfrak{l}_1=1}^{\mathfrak{s}_1} \tau_{\mathfrak{l}_1}^{(1)} A_{\mathfrak{l}_1}^{(1)}(q, p)\right) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (4.30)$$

где $P_{\mathfrak{l}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, суть полиномы (4.15), функции

$$A_{\mathfrak{l}_1}^{(1)}: (q, p) \rightarrow \arctg \frac{\operatorname{Im} m_{\mathfrak{l}_1}^{(1)}(q, p)}{\operatorname{Re} m_{\mathfrak{l}_1}^{(1)}(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G, \quad \mathfrak{l}_1 = 1, \dots, \mathfrak{s}_1, \quad (4.31)$$

а вещественные числа $\eta_{\mathfrak{l}}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, $\tau_{\mathfrak{l}_1}^{(1)}$, $\mathfrak{l}_1 = 1, \dots, \mathfrak{s}_1$, находятся из линейного однородного уравнения $\sum_{\mathfrak{l}_1=1}^{\mathfrak{s}_1} \rho_{\mathfrak{l}_1}^{(1)} \tau_{\mathfrak{l}_1}^{(1)} + 2 \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \rho_{\mathfrak{l}} \eta_{\mathfrak{l}} = 0$ при $\sum_{\mathfrak{l}_1=1}^{\mathfrak{s}_1} (\tau_{\mathfrak{l}_1}^{(1)})^2 \neq 0$, $\sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \eta_{\mathfrak{l}}^2 \neq 0$, будет первым интегралом на области G полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. Если функции (4.10) являются комплекснозначными полиномиальными частными интегралами гамильтоновой системы (0.1), то, по теореме 4.1, полиномы (4.15) будут вещественными полиномиальными частными интегралами гамильтоновой системы (0.1). При этом имеет место система тождеств (4.17). Если функции (4.27) являются комплекснозначными полиномиальными частными интегралами гамильтоновой системы (0.1), то, по теореме 4.3, функции (4.31) такие, что выполняются тождества

$$[A_{\mathfrak{l}_1}^{(1)}(q, p), H(q, p)] = \operatorname{Im} \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_1}^{(1)}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \mathfrak{l}_1 = 1, \dots, \mathfrak{s}_1, \quad (4.32)$$

где $\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_1}^{(1)}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathfrak{l}_1 = 1, \dots, \mathfrak{s}_1$, суть полиномы из системы тождеств (4.28).

Тогда на основании системы тождеств (4.17) при условиях (4.20) и тождеств (4.32) при условиях (4.29) вычислим скобки Пуассона функции (4.30) в силу системы (0.1):

$$\begin{aligned} [F(q, p), H(q, p)] &= \left[\prod_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} P_{\mathfrak{l}}^{\eta_{\mathfrak{l}}}(q, p) \exp\left(\sum_{\mathfrak{l}_1=1}^{\mathfrak{s}_1} \tau_{\mathfrak{l}_1}^{(1)} A_{\mathfrak{l}_1}^{(1)}(q, p)\right), H(q, p) \right] = \\ &= \exp\left(\sum_{\mathfrak{l}_1=1}^{\mathfrak{s}_1} \tau_{\mathfrak{l}_1}^{(1)} A_{\mathfrak{l}_1}^{(1)}(q, p)\right) \left[\prod_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} P_{\mathfrak{l}}^{\eta_{\mathfrak{l}}}(q, p), H(q, p) \right] + \prod_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} P_{\mathfrak{l}}^{\eta_{\mathfrak{l}}}(q, p) \left[\exp\left(\sum_{\mathfrak{l}_1=1}^{\mathfrak{s}_1} \tau_{\mathfrak{l}_1}^{(1)} A_{\mathfrak{l}_1}^{(1)}(q, p)\right), H(q, p) \right] = \\ &= \exp\left(\sum_{\mathfrak{l}_1=1}^{\mathfrak{s}_1} \tau_{\mathfrak{l}_1}^{(1)} A_{\mathfrak{l}_1}^{(1)}(q, p)\right) \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \eta_{\mathfrak{l}} P_{\mathfrak{l}}^{\eta_{\mathfrak{l}}-1}(q, p) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \mathfrak{l}}}^{\mathfrak{s}} P_k^{\eta_k}(q, p) [P_{\mathfrak{l}}(q, p), H(q, p)] + \\ &+ \prod_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} P_{\mathfrak{l}}^{\eta_{\mathfrak{l}}}(q, p) \exp\left(\sum_{\mathfrak{l}_1=1}^{\mathfrak{s}_1} \tau_{\mathfrak{l}_1}^{(1)} A_{\mathfrak{l}_1}^{(1)}(q, p)\right) \sum_{\mathfrak{l}_1=1}^{\mathfrak{s}_1} \tau_{\mathfrak{l}_1}^{(1)} [A_{\mathfrak{l}_1}^{(1)}(q, p), H(q, p)] = \\ &= \left(\sum_{\mathfrak{l}_1=1}^{\mathfrak{s}_1} \rho_{\mathfrak{l}_1}^{(1)} \tau_{\mathfrak{l}_1}^{(1)} + 2 \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \rho_{\mathfrak{l}} \eta_{\mathfrak{l}}\right) \prod_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} P_{\mathfrak{l}}^{\eta_{\mathfrak{l}}}(q, p) \exp\left(\sum_{\mathfrak{l}_1=1}^{\mathfrak{s}_1} \tau_{\mathfrak{l}_1}^{(1)} A_{\mathfrak{l}_1}^{(1)}(q, p)\right) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in G. \end{aligned}$$

Выбирая вещественные числа η_l , $l = 1, \dots, s$, $\tau_{l_1}^{(1)}$, $l_1 = 1, \dots, s_1$, так, чтобы $\sum_{l_1=1}^{s_1} \rho_{l_1}^{(1)} \tau_{l_1}^{(1)} + 2 \sum_{l=1}^s \rho_l \eta_l = 0$ при $\sum_{l_1=1}^{s_1} (\tau_{l_1}^{(1)})^2 \neq 0$, $\sum_{l=1}^s \eta_l^2 \neq 0$, получаем, что функция (4.30) будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1). \square

Из теоремы 4.7 при $l = l^{(1)}$, $s = s_1$, $w_l = w_{l_1}^{(1)}$, $l = 1, \dots, s$, получаем, что имеет место

Следствие 4.8. Пусть обобщенно-консервативная гамильтонова системы (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10). Тогда функция

$$F: (q, p) \rightarrow \prod_{l=1}^s P_l^{\eta_l}(q, p) \exp \sum_{l=1}^s \tau_l A_l(q, p) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n},$$

где числа $\eta_l \in \mathbb{R}$, $\tau_l \in \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, s$, $\sum_{l=1}^s |\eta_l| + \sum_{l=1}^s |\tau_l| \neq 0$, скалярные функции $P_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ и $A_l: G \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, s$, находятся по формулам (4.15) и (4.16), соответственно, будет дополнительным первым интегралом гамильтоновой системы (0.1), если и только если в тождествах (4.11) полиномы $\mathfrak{M}_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, $l = 1, \dots, s$, такие, что

$$2 \sum_{l=1}^s \eta_l \operatorname{Re} \mathfrak{M}_l(q, p) + \sum_{l=1}^s \tau_l \operatorname{Im} \mathfrak{M}_l(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Для обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (4.3), по следствию 4.8, на основании комплекснозначного линейного частного интеграла $w_1: (q, p) \rightarrow q_1 + q_2 + i(p_1 - p_2) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ с множителем $\mathfrak{M}_1(q, p) = \alpha + i\beta \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ строим первый интеграл ($\eta = \beta$, $\tau = -2\alpha$)

$$F_1: (q, p) \rightarrow ((q_1 + q_2)^2 + (p_1 - p_2)^2)^\beta \exp\left(-2\alpha \arctan \frac{p_1 - p_2}{q_1 + q_2}\right) \quad \forall (q, p) \in G_1 \subset \{(q, p): q_1 + q_2 \neq 0\},$$

а на основании комплекснозначного частного интеграла $w_2: (q, p) \rightarrow q_1 - q_2 + i(p_1 + p_2) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ с множителем $\mathfrak{M}_2(q, p) = -\alpha + i\beta \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ строим первый интеграл ($\eta = \beta$, $\tau = 2\alpha$)

$$F_2: (q, p) \rightarrow ((q_1 - q_2)^2 + (p_1 + p_2)^2)^\beta \exp\left(2\alpha \arctan \frac{p_1 + p_2}{q_1 - q_2}\right) \quad \forall (q, p) \in G_2 \subset \{(q, p): q_1 - q_2 \neq 0\}.$$

По теорема 4.6 (или следствию 4.5) строим дополнительный первый интеграл системы (4.3)

$$F_3: (q, p) \rightarrow \arctan \frac{p_1 + p_2}{q_1 - q_2} - \arctan \frac{p_1 - p_2}{q_1 + q_2} = \frac{q_1 p_2 + q_2 p_1}{q_1^2 - q_2^2 + p_1^2 - p_2^2} \quad \forall (q, p) \in G_3 \subset G_1 \cap G_2.$$

Будучи функционально независимыми, первые интегралы F_1 , F_2 и F_3 образуют автономный интегральный базис полиномиальной гамильтоновой системы (4.3) на любой области $G_3 \subset \mathbb{R}^4$.

Из теоремы 4.7 при $s = 1$, $s_1 = 1$ получаем

Следствие 4.9. Если гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы $m_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $m_1^{(1)}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что их множители $\mathfrak{M}_1: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{M}_1^{(1)}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ из тождеств (4.11) и (4.28) связаны тождеством

$$\operatorname{Re} \mathfrak{M}_1(q, p) = \beta \operatorname{Im} \mathfrak{M}_1^{(1)}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

то скалярная функция

$$F: (q, p) \rightarrow P_1(q, p) \exp(-2\beta A_1^{(1)}(q, p)) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n},$$

где полином $P_1: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ находится по формулам (4.15), функция $A_1^{(1)}: G \rightarrow \mathbb{R}$ — по формулам (4.31), будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1).

Для построения интегрального базиса системы (0.1) может быть использовано

Следствие 4.10. Пусть выполняются условия теоремы 4.7. Тогда функции

$$F_{\zeta\xi}: (q, p) \rightarrow P_{\zeta}^{\eta_{\zeta}}(q, p) \exp \tau_{\xi}^{(1)} A_{\xi}^{(1)}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G_{\zeta\xi} \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \zeta = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad \xi = 1, \dots, \mathfrak{s}_1,$$

где вещественные числа η_{ζ} , $\zeta = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и $\tau_{\xi}^{(1)}$, $\xi = 1, \dots, \mathfrak{s}_1$, находятся соответственно из уравнений $\rho_{\xi}^{(1)} \tau_{\xi}^{(1)} + 2\rho_{\zeta} \eta_{\zeta} = 0$ при $(\tau_{\xi}^{(1)})^2 + \eta_{\xi}^2 \neq 0$, $\zeta = 1, \dots, \mathfrak{s}$, $\xi = 1, \dots, \mathfrak{s}_1$, будут первыми интегралами на областях $G_{\zeta\xi}$ полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

4.3. Построение дополнительных первых интегралов гамильтоновой системы по комплекснозначным и вещественным полиномиальным частным интегралам

Теорема 4.8. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) такие, что выполняются тождества (1.13). Кроме этого гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) такие, что в тождествах (4.11) у полиномов $\mathfrak{M}_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, вещественные части связаны тождествами (4.20). Тогда скалярная функция

$$F: (q, p) \rightarrow \prod_{l=1}^{\mathfrak{s}} w_l^{\gamma_l}(q, p) \prod_{l=1}^{\mathfrak{s}} P_l^{\eta_l}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (4.34)$$

где полиномы $P_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся по формулам (4.15), а вещественные числа γ_l , $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, η_l , $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из уравнения $\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \lambda_l \gamma_l + 2 \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \rho_l \eta_l = 0$ при

$\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \gamma_l^2 \neq 0$, $\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \eta_l^2 \neq 0$, будет первым интегралом гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. При выполнении тождеств (1.13), (4.11) и (4.20) вычислим скобки Пуассона функции (4.34) в силу гамильтоновой системы (0.1):

$$\begin{aligned} [F(q, p), H(q, p)] &= \prod_{l=1}^{\mathfrak{s}} P_l^{\eta_l}(q, p) \left[\prod_{l=1}^{\mathfrak{s}} w_l^{\gamma_l}(q, p), H(q, p) \right] + \prod_{l=1}^{\mathfrak{s}} w_l^{\gamma_l}(q, p) \left[\prod_{l=1}^{\mathfrak{s}} P_l^{\eta_l}(q, p), H(q, p) \right] = \\ &= \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \gamma_l w_l^{\gamma_l-1}(q, p) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{\mathfrak{s}} w_k^{\gamma_k}(q, p) [w_l(q, p), H(q, p)] \prod_{l=1}^{\mathfrak{s}} P_l^{\eta_l}(q, p) + \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \eta_l P_l^{\eta_l-1}(q, p) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{\mathfrak{s}} P_k^{\eta_k}(q, p) [P_l(q, p), H(q, p)] \prod_{l=1}^{\mathfrak{s}} w_l^{\gamma_l}(q, p) = \\ &= \left(\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \lambda_l \gamma_l + 2 \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \rho_l \eta_l \right) \prod_{l=1}^{\mathfrak{s}} w_l^{\gamma_l}(q, p) \prod_{l=1}^{\mathfrak{s}} P_l^{\eta_l}(q, p) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in G. \end{aligned}$$

Выбирая вещественные числа $\gamma_l, l = 1, \dots, s, \eta_l, l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, так, чтобы имело место $\sum_{l=1}^s \lambda_l \gamma_l + 2 \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \rho_l \eta_l = 0$ при условии $\sum_{l=1}^s \gamma_l^2 \neq 0, \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \eta_l^2 \neq 0$, получаем, что функция (4.34) является первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1). \square

Для построения интегрального базиса гамильтоновой системы (0.1) применимо

Следствие 4.11. Пусть выполняются условия теоремы 4.8. Тогда функции

$$F_{\zeta\xi} : (q, p) \rightarrow w_{\zeta}^{\gamma_{\zeta}}(q, p) P_{\xi}^{\eta_{\xi}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G_{\zeta\xi} \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \zeta = 1, \dots, s, \quad \xi = 1, \dots, \mathfrak{s},$$

где полиномы $P_{\xi} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, \xi = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся по формулам (4.15), а вещественные числа γ_{ζ} и $\eta_{\xi}, \zeta = 1, \dots, s, \xi = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся соответственно из линейных однородных уравнений $\lambda_{\zeta} \gamma_{\zeta} + 2\rho_{\xi} \eta_{\xi} = 0$ при $\gamma_{\zeta}^2 + \eta_{\xi}^2 \neq 0, \zeta = 1, \dots, s, \xi = 1, \dots, \mathfrak{s}$, будут первыми интегралами на областях $G_{\zeta\xi}$ полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

Теорема 4.9. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) такие, что выполняются тождества (1.13). Кроме этого гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) такие, что в тождествах (4.11) у полиномов $\mathfrak{M}_l : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}, l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, мнимые части связаны тождествами (4.22). Тогда скалярная функция

$$F : (q, p) \rightarrow \prod_{l=1}^s w_l^{\gamma_l}(q, p) \exp \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \tau_l A_l(q, p) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (4.35)$$

где функции $A_l : G \rightarrow \mathbb{R}, l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся по формулам (4.16), а вещественные числа $\gamma_l, l = 1, \dots, s, \tau_l, l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из уравнения $\sum_{l=1}^s \lambda_l \gamma_l + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \rho_l \tau_l = 0$, при $\sum_{l=1}^s \gamma_l^2 \neq 0, \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \tau_l^2 \neq 0$, будет первым интегралом гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. При выполнении тождеств (1.13), (4.11) и (4.22) вычислим скобки Пуассона функции (4.35) в силу гамильтоновой системы (0.1):

$$\begin{aligned} [F(q, p), H(q, p)] &= \exp \sum_{l=1}^s \tau_l A_l(q, p) \left[\prod_{l=1}^s w_l^{\gamma_l}(q, p), H(q, p) \right] + \prod_{l=1}^s w_l^{\gamma_l}(q, p) \left[\exp \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \tau_l A_l(q, p), H(q, p) \right] = \\ &= \exp \sum_{l=1}^s \tau_l A_l(q, p) \sum_{l=1}^s \gamma_l w_l^{\gamma_l-1}(q, p) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^s w_k^{\gamma_k}(q, p) [w_l(q, p), H(q, p)] + \\ &\quad + \prod_{l=1}^s w_l^{\gamma_l}(q, p) \exp \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \tau_l A_l(q, p) \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \tau_l [A_l(q, p), H(q, p)] = \\ &= \left(\sum_{l=1}^s \lambda_l \gamma_l + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \rho_l \tau_l \right) \prod_{l=1}^s w_l^{\gamma_l}(q, p) \exp \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \tau_l A_l(q, p) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in G. \end{aligned}$$

Выбирая вещественные числа $\gamma_l, l = 1, \dots, s, \tau_l, l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, так, чтобы имело место

$\sum_{l=1}^s \lambda_l \gamma_l + \sum_{l=1}^s \rho_l \tau_l = 0$ при $\sum_{l=1}^s \gamma_l^2 \neq 0$, $\sum_{l=1}^s \tau_l^2 \neq 0$, получаем, что функция (4.35) является первым интегралом на области G полиномиальной гамильтоновой системы (0.1). \square

Для построения интегрального базиса гамильтоновой системы (0.1) применимо

Следствие 4.12. Пусть выполняются условия теоремы 4.9. Тогда функции

$$F_{\zeta\xi}: (q, p) \rightarrow w_{\zeta}^{\gamma_{\zeta}}(q, p) \exp(\tau_{\xi} A_{\xi}(q, p)) \quad \forall (q, p) \in G_{\zeta\xi} \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \zeta = 1, \dots, s, \quad \xi = 1, \dots, \mathfrak{s},$$

где функции $A_{\xi}: G_{\zeta\xi} \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся по формулам (4.16), а вещественные числа γ_{ζ} и τ_{ξ} , $\zeta = 1, \dots, s$, $\xi = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся соответственно из линейных однородных уравнений $\lambda_{\zeta} \gamma_{\zeta} + \rho_{\xi} \tau_{\xi} = 0$ при $\gamma_{\zeta}^2 + \tau_{\xi}^2 \neq 0$, $\zeta = 1, \dots, s$, $\xi = 1, \dots, \mathfrak{s}$, будут первыми интегралами на областях $G_{\zeta\xi}$ полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

Обобщенно-консервативная полиномиальная гамильтонова система

$$H: (q, p) \rightarrow \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 - 7q_1^2 + 8q_1q_2 - q_2^2) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4 \quad (4.36)$$

имеет два вещественных полиномиальных (линейных) частных интеграла

$$w_1: (q, p) \rightarrow 6q_1 - 3q_2 - 2p_1 + p_2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{и} \quad w_2: (q, p) \rightarrow -6q_1 + 3q_2 - 2p_1 + p_2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$$

с множителями $M_1(q, p) = -3 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ и $M_2(q, p) = 3 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$, соответственно, и комплекснозначный линейный частный интеграл $\mathfrak{w}: (q, p) \rightarrow q_1 + 2q_2 - i(p_1 + 2p_2) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ с множителем $\mathfrak{M}(q, p) = i \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$. Для системы (4.36), по следствию 1.2 (или теореме 1.3), на основании двух вещественных частных интегралов w_1 и w_2 строит первый интеграл

$$F_1: (q, p) \rightarrow (2p_1 - p_2)^2 - 9(2q_1 - q_2)^2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4,$$

по теореме 4.2, на основании комплекснозначного частного интеграла \mathfrak{w} строим первый интеграл

$$F_2: (q, p) \rightarrow (q_1 + 2q_2)^2 + (p_1 + 2p_2)^2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4,$$

а, по теореме 4.9 (или следствию 4.12), на основании вещественного частного интеграла w_1 и комплекснозначного частного интеграла \mathfrak{w} строим дополнительный первый интеграл

$$F_3: (q, p) \rightarrow (6q_1 - 3q_2 - 2p_1 + p_2) \exp\left(-3 \arctan \frac{p_1 + 2p_2}{q_1 + 2q_2}\right) \quad \forall (q, p) \in G \subset \{(q, p): q_1 + 2q_2 \neq 0\}.$$

Будучи функционально независимыми, первые интегралы F_1 , F_2 и F_3 образуют автономный интегральный базис полиномиальной гамильтоновой системы (4.36) на любой области $G \subset \mathbb{R}^4$.

Гамильтониан $H = \frac{1}{10} (F_1 + F_2)$ есть линейная комбинация первых интегралов F_1 и F_2 . С учетом того, что гамильтониан H является первым интегралом системы (4.36) получаем, что в качестве автономного интегрального базиса на области G гамильтоновой системы (4.36) можно взять любое из множеств функций $\{F_1, F_2, F_3\}$, $\{H, F_2, F_3\}$, $\{F_1, H, F_3\}$.

4.4. Построение первых интегралов гамильтоновой системы по комплекснозначным и кратным вещественным полиномиальным частным интегралам

Теорема 4.10. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) кратностей $\varkappa_l = 1 + \sum_{\xi=1}^{\varepsilon_l} r_{\xi}$, $l = 1, \dots, s$, со-

ответственно, относительно которых выполняются тождества (2.7), и существуют такие $\xi_l \in \{1, \dots, \varepsilon_l\}$, $l = 1, \dots, s$, что при фиксированных $g_{\xi_l} \in \{1, \dots, r_{\xi_l}\}$, $l = 1, \dots, s$, выполняются тождества (2.8). Кроме этого система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) такие, что в тождествах (4.11) у полиномов $\mathfrak{M}_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, $l = 1, \dots, s$, вещественные части связаны тождествами (4.20). Тогда

$$F: (q, p) \rightarrow \prod_{l=1}^s P_l^{\eta_l}(q, p) \exp \sum_{l=1}^s \alpha_l K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (4.37)$$

где полиномы $P_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, s$, находятся по формулам (4.15), а вещественные числа α_l , $l = 1, \dots, s$, η_l , $l = 1, \dots, s$, находятся из линейного однородного уравнения $\sum_{l=1}^s \lambda_l \alpha_l + 2 \sum_{l=1}^s \rho_l \eta_l = 0$ при $\sum_{l=1}^s \alpha_l^2 \neq 0$, $\sum_{l=1}^s \eta_l^2 \neq 0$, будет первым интегралом системы (0.1).

Доказательство. При выполнении тождеств (2.7), (2.8), (4.11) и (4.20) вычислим скобки Пуассона функции (4.37) в силу полиномиальной гамильтоновой системы (0.1):

$$\begin{aligned} [F(q, p), H(q, p)] &= \exp \sum_{l=1}^s \alpha_l K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) \left[\prod_{l=1}^s P_l^{\eta_l}(q, p), H(q, p) \right] + \\ &+ \prod_{l=1}^s P_l^{\eta_l}(q, p) \exp \sum_{l=1}^s \alpha_l K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) \left[\sum_{l=1}^s \alpha_l K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p), H(q, p) \right] = \\ &= \exp \sum_{l=1}^s \alpha_l K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) \sum_{l=1}^s \eta_l P_l^{\eta_l-1}(q, p) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^s P_k^{\eta_k}(q, p) [P_l(q, p), H(q, p)] + \\ &+ \prod_{l=1}^s P_l^{\eta_l}(q, p) \exp \sum_{l=1}^s \alpha_l K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) \sum_{l=1}^s \alpha_l [K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p), H(q, p)] = \\ &= \left(\sum_{l=1}^s \lambda_l \alpha_l + 2 \sum_{l=1}^s \rho_l \eta_l \right) \prod_{l=1}^s P_l^{\eta_l}(q, p) \exp \sum_{l=1}^s \alpha_l K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in G. \end{aligned}$$

Выбирая вещественные числа α_l , $l = 1, \dots, s$, η_l , $l = 1, \dots, s$, так, чтобы имело место $\sum_{l=1}^s \lambda_l \alpha_l + 2 \sum_{l=1}^s \rho_l \eta_l = 0$ при $\sum_{l=1}^s \alpha_l^2 \neq 0$, $\sum_{l=1}^s \eta_l^2 \neq 0$, получаем, что функция (4.37) является первым интегралом на области G полиномиальной гамильтоновой системы (0.1). \square

Для построения базиса первых интегралов гамильтоновой системы (0.1) применимо

Следствие 4.13. Пусть выполняются условия теоремы 4.10. Тогда функции

$$F_{\zeta \varrho}: (q, p) \rightarrow P_{\varrho}^{\eta_{\varrho}}(q, p) \exp \alpha_{\zeta} K_{\zeta f_{\xi_{\zeta}} g_{\xi_{\zeta}}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G_{\zeta \varrho} \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \zeta = 1, \dots, s, \quad \varrho = 1, \dots, s,$$

где полиномы $P_{\varrho}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varrho = 1, \dots, s$, находятся по формулам (4.15), а вещественные числа α_{ζ} и η_{ϱ} , $\zeta = 1, \dots, s$, $\varrho = 1, \dots, s$, находятся соответственно из линейных однородных уравнений $\lambda_{\zeta} \alpha_{\zeta} + 2 \rho_{\varrho} \eta_{\varrho} = 0$ при $\alpha_{\zeta}^2 + \eta_{\varrho}^2 \neq 0$, $\zeta = 1, \dots, s$, $\varrho = 1, \dots, s$, будут первыми

интегралами на областях G_{ζ_ϱ} полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

Теорема 4.11. Пусть система (0.1) имеет кратные вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) кратностей $\varkappa_l = 1 + \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} r_{\xi_l}$, $l = 1, \dots, s$, соответственно, относительно которых выполняются тождества (2.7), и существуют такие $\xi_l \in \{1, \dots, \varepsilon_l\}$, $l = 1, \dots, s$, что при фиксированных $g_{\xi_l} \in \{1, \dots, r_{\xi_l}\}$, $l = 1, \dots, s$, выполняются тождества (2.8). Кроме этого система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) такие, что в тождествах (4.11) у полиномов $\mathfrak{M}_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, $l = 1, \dots, s$, мнимые части связаны тождествами (4.22). Тогда функция

$$F: (q, p) \rightarrow \sum_{l=1}^s \alpha_l K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) + \sum_{l=1}^s \tau_l A_l(q, p) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (4.38)$$

где функции $A_l: G \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, s$, находятся по формулам (4.16), а вещественные числа α_l , $l = 1, \dots, s$, τ_l , $l = 1, \dots, s$, находятся из линейного уравнения $\sum_{l=1}^s \lambda_l \alpha_l + \sum_{l=1}^s \rho_l \tau_l = 0$ при $\sum_{l=1}^s \alpha_l^2 \neq 0$, $\sum_{l=1}^s \tau_l^2 \neq 0$, будет первым интегралом на области G системы (0.1).

Доказательство. При выполнении тождеств (2.7), (2.8), (4.11) и (4.22) вычислим скобки Пуассона на области G функции (4.38) в силу гамильтоновой системы (0.1):

$$\begin{aligned} [F(q, p), H(q, p)] &= \left[\sum_{l=1}^s \alpha_l K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) + \sum_{l=1}^s \tau_l A_l(q, p), H(q, p) \right] = \\ &= \sum_{l=1}^s \alpha_l [K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p), H(q, p)] + \sum_{l=1}^s \tau_l [A_l(q, p), H(q, p)] = \left(\sum_{l=1}^s \lambda_l \alpha_l + \sum_{l=1}^s \rho_l \tau_l \right) M(q, p). \end{aligned}$$

Выбирая вещественные числа α_l , $l = 1, \dots, s$, τ_l , $l = 1, \dots, s$, так, чтобы имело место $\sum_{l=1}^s \lambda_l \alpha_l + \sum_{l=1}^s \rho_l \tau_l = 0$ при $\sum_{l=1}^s \alpha_l^2 \neq 0$, $\sum_{l=1}^s \tau_l^2 \neq 0$, получаем, что скалярная функция (4.38) является первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1). \square

Для построения базиса первых интегралов гамильтоновой системы (0.1) применимо

Следствие 4.14. Пусть выполняются условия теоремы 4.11. Тогда функции

$$F_{\zeta_\varrho}: (q, p) \rightarrow \alpha_\zeta K_{\zeta f_{\xi_\zeta} g_{\xi_\zeta}}(q, p) + \tau_\varrho A_\varrho(q, p) \quad \forall (q, p) \in G_{\zeta_\varrho} \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \zeta = 1, \dots, s, \quad \varrho = 1, \dots, s,$$

где функции $A_\varrho: G \rightarrow \mathbb{R}$, $\varrho = 1, \dots, s$, находятся по формулам (4.16), а вещественные числа α_ζ и τ_ϱ , $\zeta = 1, \dots, s$, $\varrho = 1, \dots, s$, находятся соответственно из линейных однородных уравнений $\lambda_\zeta \alpha_\zeta + \rho_\varrho \tau_\varrho = 0$ при $\alpha_\zeta^2 + \tau_\varrho^2 \neq 0$, $\zeta = 1, \dots, s$, $\varrho = 1, \dots, s$, будут первыми интегралами на областях G_{ζ_ϱ} гамильтоновой системы (0.1).

По следствию 4.14, для обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой системы

$$H: (q, p) \rightarrow \frac{1}{2} (-7q_1^2 + 8q_1q_2 - q_2^2 - p_2^2) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$$

на основании кратного вещественного полиномиального частного интеграла $w: (q, p) \rightarrow q_1$ такого, что функции $K_{11}: (q, p) \rightarrow \frac{p_1 + 4p_2}{9q_1} \quad \forall (q, p) \in G \subset \{(q, p): q_1 \neq 0\}$ и $R_{11}: (q, p) \rightarrow -1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$, и комплекснозначного полиномиального частного интеграла $\mathbf{w}: (q, p) \rightarrow 4q_1 - q_2 - ip_2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ с множителем $\mathfrak{M}: (q, p) \rightarrow i \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ строим дополнительный первый интеграл

$$F: (q, p) \rightarrow \arctan \frac{p_2}{4q_1 - q_2} - \frac{p_1 + 4p_2}{9q_1} \quad \forall (q, p) \in G.$$

4.5. Построение первых интегралов гамильтоновой системы по комплекснозначным полиномиальным частным интегралам и условным частным интегралам

Как по теореме 3.3 при $m = 1$ (т.е. при наличие только одного условного частного интеграла), так и по теоремам 4.4 – 4.6 при $\mathfrak{s} = 1$ (т.е. при наличие только одного комплекснозначного полиномиального частного интеграла) построить дополнительный первый интеграл обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1) не представляется возможным. В этих случаях могут быть использованы следующие утверждения

Теорема 4.12. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет условные частные интегралы (3.4) при условиях (3.5) и (3.8) и комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) при условиях (4.11) и (4.20). Тогда скалярные функции

$$F_{\xi\zeta}: (q, p) \rightarrow P_{\xi}^{\eta_{\xi}}(q, p) \exp(\beta_{\zeta} v_{\zeta}(q, p)) \quad \forall (q, p) \in G, \quad \xi = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad \zeta = 1, \dots, m, \quad (4.39)$$

где $P_{\mathfrak{l}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, суть полиномы (4.15), а вещественные числа η_{ξ} и β_{ζ} находятся из уравнений $2\rho_{\xi} \eta_{\xi} + \mu_{\zeta} \beta_{\zeta} = 0$ при $|\eta_{\xi}| + |\beta_{\zeta}| \neq 0$, $\xi = 1, \dots, \mathfrak{s}$, $\zeta = 1, \dots, m$, будут первыми интегралами обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1).

Действительно, с учетом теоремы 4.1, тождеств (3.5) при условии (3.8) и тождеств (4.11) при условии (4.20), вычислим скобки Пуассона

$$\begin{aligned} [F_{\xi\zeta}(q, p), H(q, p)] &= \eta_{\xi} P_{\xi}^{\eta_{\xi}-1}(q, p) \cdot [P_{\xi}(q, p), H(q, p)] \cdot \exp(\beta_{\zeta} v_{\zeta}(q, p)) + \\ &+ \beta_{\zeta} P_{\xi}^{\eta_{\xi}}(q, p) \exp(\beta_{\zeta} v_{\zeta}(q, p)) \cdot [v_{\zeta}(q, p), H(q, p)] = \\ &= (2\rho_{\xi} \eta_{\xi} + \mu_{\zeta} \beta_{\zeta}) P_{\xi}^{\eta_{\xi}}(q, p) \exp(\beta_{\zeta} v_{\zeta}(q, p)) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad \xi = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad \zeta = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Выбирая числа η_{ξ} , $\xi = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и β_{ζ} , $\zeta = 1, \dots, m$, так, чтобы $2\rho_{\xi} \eta_{\xi} + \mu_{\zeta} \beta_{\zeta} = 0$, получаем, что функции (4.39) будут первыми интегралами системы (0.1). \square

Теорема 4.13. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет условные частные интегралы (3.4) при условиях (3.5) и (3.8) и комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) при условиях (4.11) и (4.22). Тогда скалярные функции

$$F_{\xi\zeta}: (q, p) \rightarrow \tau_{\xi} A_{\xi}(q, p) + \beta_{\zeta} v_{\zeta}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad \xi = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad \zeta = 1, \dots, m, \quad (4.40)$$

где $A_{\mathfrak{l}}: G \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, суть функции (4.16), а вещественные числа τ_{ξ} и β_{ζ} находятся из линейных уравнений $\rho_{\xi} \tau_{\xi} + \mu_{\zeta} \beta_{\zeta} = 0$ при $|\tau_{\xi}| + |\beta_{\zeta}| \neq 0$, $\xi = 1, \dots, \mathfrak{s}$, $\zeta = 1, \dots, m$, будут первыми интегралами обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1).

Действительно, с учетом теоремы 4.3, тождеств (3.5) при условии (3.8) и тождеств (4.11) при условии (4.22), вычислим скобки Пуассона

$$[F_{\xi\zeta}(q, p), H(q, p)] = \tau_\xi [A_\xi(q, p), H(q, p)] + \beta_\zeta [v_\zeta(q, p), H(q, p)] = (\rho_\xi \tau_\xi + \mu_\zeta \beta_\zeta) M(q, p) \\ \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \xi = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad \zeta = 1, \dots, m.$$

Выбирая числа τ_ξ , $\xi = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и β_ζ , $\zeta = 1, \dots, m$, так, чтобы $\rho_\xi \tau_\xi + \mu_\zeta \beta_\zeta = 0$, получаем, что функции (4.40) будут первыми интегралами системы (0.1). \square

4.6. Построение неавтономных дополнительных первых интегралов гамильтоновой системы по комплекснозначным полиномиальным частным интегралам

Теорема 4.14. Если обобщенно-консервативная полиномиальная гамильтонова система (0.1) имеет такой комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (4.1), что в тождестве (4.2) у полинома $\mathfrak{M}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ вещественная часть

$$\operatorname{Re} \mathfrak{M}(q, p) = \lambda \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.41)$$

то скалярная функция

$$F: (t, q, p) \rightarrow P(q, p) \exp(-2\lambda t) \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}, \quad (4.42)$$

где $P: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ есть полином (4.6), будет первым интегралом системы (0.1).

Доказательство. В соответствии с теоремой 4.1 имеет место тождество (4.7). Тогда с учетом этого тождества при условии (4.41), вычислим производную Ли на расширенном фазовом пространстве \mathbb{R}^{2n+1} функции (4.42) в силу гамильтоновой системы (0.1):

$$\mathfrak{B} F(t, q, p) = -2F(t, q, p) \partial_t (\lambda t) + [P(q, p), H(q, p)] \exp(-2\lambda t) = 0. \quad \square$$

Теорема 4.15. Если обобщенно-консервативная полиномиальная гамильтонова система (0.1) имеет такой комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (4.1), что в тождестве (4.2) у полинома $\mathfrak{M}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, мнимая часть

$$\operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p) = \lambda \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.43)$$

то неавтономным первым интегралом гамильтоновой системы (0.1) будет функция

$$F: (t, q, p) \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{m}(q, p)}{\operatorname{Re} \mathfrak{m}(q, p)} - \lambda t \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R} \times G \subset \mathbb{R}^{2n+1}. \quad (4.44)$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 4.3 имеют место тождеств (4.9) относительно функции (4.8). Тогда с учетом этого тождества при условии (4.43), вычислим производную Ли на области $\mathbb{R} \times G$ функции (4.44) в силу гамильтоновой системы (0.1):

$$\mathfrak{B} F(t, q, p) = -\partial_t (\lambda t) + \left[\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{m}(q, p)}{\operatorname{Re} \mathfrak{m}(q, p)}, H(q, p) \right] = -\lambda + \operatorname{Im} \mathfrak{M}(q, p) = 0. \quad \square$$

Для обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой системы

$$H: : (q, p) \rightarrow \frac{1}{2} (-4q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4 \quad (4.45)$$

на основании комплекснозначного частного интеграла $\mathfrak{m}: (q, p) \rightarrow q_2 - ip_2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ с сомножителем $\mathfrak{M}(q, p) = i \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$, по теоремам 4.14 и 4.15, строим неавтономные первые интегралы

$$F_1: (t, q, p) \rightarrow q_2^2 + p_2^2 \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R}^5$$

и

$$F_2: (t, q, p) \rightarrow \arctan \frac{p_2}{q_2} + t \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R} \times G, \quad G \subset \{(q, p): q_2 \neq 0\}.$$

По теореме 1.4, на основании вещественных полиномиальных (линейных) частных интегралов $w_1: (q, p) \rightarrow 2q_1 - p_1$ и $w_2: (q, p) \rightarrow 2q_1 + p_1$ с сомножителями $M_1(q, p) = -2$ и $M_2(q, p) = 2$ для гамильтоновой системы (4.45) строим неавтономные первые интегралы

$$F_3: (t, q, p) \rightarrow (2q_1 - p_1)e^{2t} \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R}^5 \quad \text{и} \quad F_4: (t, q, p) \rightarrow (2q_1 + p_1)e^{-2t} \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R}^5.$$

Неавтономные первые интегралы F_1, \dots, F_4 , будучи функционально независимыми, образуют интегральный базис полиномиальной гамильтоновой системы (4.45) на области $\mathbb{R} \times G$.

Непосредственно из теорем 4.14 и 4.15 получаем

Следствие 4.15. *Если гамильтонова система (0.1) имеет такой комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (4.1), что в тождестве (4.2) полином*

$$\mathfrak{M}(q, p) = \lambda \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (\operatorname{Re} \lambda = \hat{\lambda}, \operatorname{Im} \lambda = \tilde{\lambda}),$$

то первыми интегралами гамильтоновой системы (0.1) будут скалярные функции

$$F_1: (t, q, p) \rightarrow P(q, p) \exp(-2\hat{\lambda}t) \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$$

и

$$F_2: (t, q, p) \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{m}(q, p)}{\operatorname{Re} \mathfrak{m}(q, p)} - \tilde{\lambda}t \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R} \times G.$$

Например, по следствию 4.15, для полиномиальной гамильтоновой системы (4.3) на основании комплекснозначных полиномиальных (линейных) частных интегралов

$$\mathfrak{m}_1: (q, p) \rightarrow q_1 + q_2 + i(p_1 - p_2) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{и} \quad \mathfrak{m}_2: (q, p) \rightarrow q_1 - q_2 + i(p_1 + p_2) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$$

с сомножителями $\mathfrak{M}_1(q, p) = \alpha + \beta i \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ и $\mathfrak{M}_2(q, p) = -\alpha + \beta i \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$, строим на области $\mathbb{R} \times G$, $G \subset \{(q, p): q_2 \neq \pm q_1\}$, базис неавтономных первых интегралов

$$F_1: (t, q, p) \rightarrow ((q_1 + q_2)^2 + (p_1 - p_2)^2)e^{-2\alpha t} \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R} \times G,$$

$$F_2: (t, q, p) \rightarrow \arctan \frac{p_1 - p_2}{q_1 + q_2} - \beta t \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R} \times G,$$

$$F_3: (t, q, p) \rightarrow ((q_1 - q_2)^2 + (p_1 + p_2)^2)e^{2\alpha t}, \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R} \times G,$$

$$F_4: (t, q, p) \rightarrow \arctan \frac{p_1 + p_2}{q_1 - q_2} - \beta t \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R} \times G.$$

5. Кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы

5.1. Свойства кратных комплекснозначных полиномиальных частных интегралов

Определение 5.1. Комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (4.1) гамильтоновой системы (0.1) является **кратным** и его **кратность** $z = 1 + \sum_{\zeta=1}^{\epsilon} \tau_{\zeta}$, если существуют полиномы $\Omega_{f_{\zeta}g_{\zeta}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{R}_{f_{\zeta}g_{\zeta}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_{\zeta} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta} = 1, \dots, \tau_{\zeta}$, $\zeta = 1, \dots, \epsilon$, которые удовлетворяют системе тождеств

$$\left[\mathfrak{K}_{f_{\zeta}g_{\zeta}}(q, p), H(q, p) \right] = \mathfrak{R}_{f_{\zeta}g_{\zeta}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad f_{\zeta} \in \mathbb{N}, \quad g_{\zeta} = 1, \dots, \tau_{\zeta}, \quad \zeta = 1, \dots, \epsilon, \quad (5.1)$$

где скалярные функции

$$\mathfrak{K}_{f_{\zeta}g_{\zeta}}: (q, p) \rightarrow \frac{\Omega_{f_{\zeta}g_{\zeta}}(q, p)}{\mathfrak{w}^{f_{\zeta}}(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G, \quad f_{\zeta} \in \mathbb{N}, \quad g_{\zeta} = 1, \dots, \tau_{\zeta}, \quad \zeta = 1, \dots, \epsilon,$$

область G такая, что $\mathfrak{w}(q, p) \neq 0 \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}$. При этом каждый полином $\Omega_{f_{\zeta}g_{\zeta}}$, $f_{\zeta} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta} = 1, \dots, \tau_{\zeta}$, $\zeta = 1, \dots, \epsilon$, взаимно прост с комплекснозначным полиномиальным частным интегралом (4.1), а полиномы $\mathfrak{R}_{f_{\zeta}g_{\zeta}}$, $f_{\zeta} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta} = 1, \dots, \tau_{\zeta}$, $\zeta = 1, \dots, \epsilon$, такие, что $\max \{ \deg \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{f_{\zeta}g_{\zeta}}, \deg \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{f_{\zeta}g_{\zeta}} : f_{\zeta} \in \mathbb{N}, g_{\zeta} = 1, \dots, \tau_{\zeta}, \zeta = 1, \dots, \epsilon \} \leq h - 2$.

Так, например, обобщенно-консервативная полиномиальная гамильтонова система

$$H: (q, p) \rightarrow \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) + \alpha (q_1 p_2 - q_2 p_1) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (5.2)$$

имеет комплекснозначный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}: (q, p) \rightarrow q_2 + i q_1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ кратности не менее двух, ибо существуют полиномы $\Omega_{11}: (q, p) \rightarrow p_2 + i p_1$ и $\mathfrak{R}_{11}: (q, p) \rightarrow -1$, такие, что на области $G \subset \{(q, p): q_1^2 + q_2^2 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^4 выполняется тождество

$$\begin{aligned} \left[\mathfrak{K}_{11}(q, p), H(q, p) \right] &= \left[\frac{\Omega_{11}(q, p)}{\mathfrak{w}(q, p)}, H(q, p) \right] = \left[\frac{p_2 + i p_1}{q_2 + i q_1}, \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) + \alpha (q_1 p_2 - q_2 p_1) \right] = \\ &= \frac{1}{q_2 + i q_1} \left[p_2 + i p_1, \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) + \alpha (q_1 p_2 - q_2 p_1) \right] - \frac{p_2 + i p_1}{(q_2 + i q_1)^2} \left[q_2 + i q_1, \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) + \alpha (q_1 p_2 - q_2 p_1) \right] = \\ &= \frac{1}{q_2 + i q_1} (\alpha p_1 - q_2 - i (q_1 + \alpha p_2)) - \frac{p_2 + i p_1}{(q_2 + i q_1)^2} (\alpha q_1 - \alpha q_2 i) = \\ &= \frac{1}{q_2 + i q_1} (-(q_2 + i q_1) + \alpha (p_1 - i p_2)) + \frac{\alpha i (p_2 + i p_1)(q_2 + i q_1)}{(q_2 + i q_1)^2} = -1 \quad \forall (q, p) \in G \end{aligned}$$

и $\max \{ \deg \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{11}, \deg \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{11} \} = 0 \leq h - 2 = 2 - 2 = 0$.

Система тождеств (5.1) равносильная вещественной системе тождеств

$$\left[\operatorname{Re} \mathfrak{K}_{f_{\zeta}g_{\zeta}}(q, p), H(q, p) \right] = \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{f_{\zeta}g_{\zeta}}(q, p), \quad \left[\operatorname{Im} \mathfrak{K}_{f_{\zeta}g_{\zeta}}(q, p), H(q, p) \right] = \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{f_{\zeta}g_{\zeta}}(q, p) \quad (5.3)$$

$$\forall (q, p) \in G, \quad f_{\zeta} \in \mathbb{N}, \quad g_{\zeta} = 1, \dots, \tau_{\zeta}, \quad \zeta = 1, \dots, \epsilon.$$

На основании определения 5.1 и свойства 4.2 получаем

Свойство 5.1. Если гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (4.1) кратности \mathfrak{z} , то комплексно сопряженный полиномиальный частный интеграл будет кратным, а его кратность равна \mathfrak{z} .

Аналогично свойству 2.1 кратных вещественных частных интегралов доказываем

Свойство 5.2. Если комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (4.1) обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1) такой, что скобки Пуассона

$$[\mathfrak{w}(q, p), H(q, p)] = \mathfrak{w}^{m+1}(q, p) \mathfrak{P}(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n},$$

где m — некоторое натуральное число, а $\mathfrak{P}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ есть полином, то он является кратным (кратности, не меньшей двух). При этом имеет место тождество

$$\left[\frac{\lambda}{\mathfrak{w}^m(q, p)}, H(q, p) \right] = -\lambda m \mathfrak{P}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0.$$

Согласно определению 5.1 комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1) будут кратными соответ-

ственно кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, тогда и только тогда, когда существуют полиномы $\mathfrak{Q}_{l, \mathfrak{f}_{\zeta_l}, \mathfrak{g}_{\zeta_l}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{R}_{l, \mathfrak{f}_{\zeta_l}, \mathfrak{g}_{\zeta_l}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \epsilon_l$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$,

такие, что на области G имеет место вещественная система тождеств

$$\left[\operatorname{Re} \mathfrak{K}_{l, \mathfrak{f}_{\zeta_l}, \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p), H(q, p) \right] = \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l, \mathfrak{f}_{\zeta_l}, \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p), \quad \left[\operatorname{Im} \mathfrak{K}_{l, \mathfrak{f}_{\zeta_l}, \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p), H(q, p) \right] = \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{l, \mathfrak{f}_{\zeta_l}, \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p), \quad (5.4)$$

$$\forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \mathfrak{r}_{\zeta_l}, \quad \zeta_l = 1, \dots, \epsilon_l, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s},$$

где скалярные функции

$$\mathfrak{K}_{l, \mathfrak{f}_{\zeta_l}, \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p) = \frac{\mathfrak{Q}_{l, \mathfrak{f}_{\zeta_l}, \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p)}{\mathfrak{w}_{\zeta_l}(q, p)} \quad \forall (q, p) \in G_{0l}, \quad \mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \mathfrak{r}_{\zeta_l}, \quad \zeta_l = 1, \dots, \epsilon_l, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s},$$

области $G_{0l} \subset G$ такие, что $\mathfrak{w}_{\zeta_l}(q, p) \neq 0 \quad \forall (q, p) \in G_{0l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$. При этом каждый полином $\mathfrak{Q}_{l, \mathfrak{f}_{\zeta_l}, \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$, $\mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \epsilon_l$, взаимно прост с комплекснозначным полиномиальным частным интегралом \mathfrak{w}_{ζ_l} , $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, а комплекснозначные полиномы

$\mathfrak{R}_{l, \mathfrak{f}_{\zeta_l}, \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$, $\mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \epsilon_l$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что верно условие

$$\max \{ \deg \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l, \mathfrak{f}_{\zeta_l}, \mathfrak{g}_{\zeta_l}}, \deg \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{l, \mathfrak{f}_{\zeta_l}, \mathfrak{g}_{\zeta_l}} : \mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \mathfrak{r}_{\zeta_l}, \quad \zeta_l = 1, \dots, \epsilon_l, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s} \} \leq h - 2.$$

5.2. Построение дополнительных первых интегралов гамильтоновой системы по кратным комплекснозначным полиномиальным частным интегралам

Теорема 5.1. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$,

такие, что имеют место тождества (4.11) и (5.4). Тогда скалярная функция

$$F: (q, p) \rightarrow \prod_{l=1}^s P_l^{\eta_l}(q, p) \exp \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad (5.5)$$

где полиномы P_l , $l = 1, \dots, s$, находятся по формулам (4.15), а вещественные числа η_l , $l = 1, \dots, s$, и $\varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}, f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\tau}_{\zeta_l}$, $\tilde{\tau}_{\zeta_l} \leq \tau_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_l$, $\tilde{\epsilon}_l \leq \epsilon_l$, $l = 1, \dots, s$, такие, что $\sum_{l=1}^s |\eta_l| + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} |\varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}| \neq 0$, будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1), если и только если в тождествах (4.11) полиномы \mathfrak{M}_l и в тождествах (5.4) полиномы $\mathfrak{A}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}$, такие, что верно тождество

$$2 \sum_{l=1}^s \eta_l \operatorname{Re} \mathfrak{M}_l(q, p) + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{A}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in G. \quad (5.6)$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 4.1 и определением 5.1

$$\begin{aligned} [F(q, p), H(q, p)] &= \exp \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) \cdot \left[\prod_{l=1}^s P_l^{\eta_l}(q, p), H(q, p) \right] + \\ &+ \prod_{l=1}^s P_l^{\eta_l}(q, p) \cdot \left[\exp \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p), H(q, p) \right] = \\ &= \exp \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) \sum_{l=1}^s \eta_l P_l^{\eta_l-1}(q, p) \prod_{\substack{t=1, \\ t \neq l}}^s P_t^{\eta_t}(q, p) \cdot [P_l(q, p), H(q, p)] + \\ &+ \prod_{l=1}^s P_l^{\eta_l}(q, p) \exp \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \left[\operatorname{Re} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p), H(q, p) \right] = \\ &= F(q, p) \left(2 \sum_{l=1}^s \eta_l \operatorname{Re} \mathfrak{M}_l(q, p) + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{A}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) \right) \quad \forall (q, x) \in G. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что функция (5.5) является первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1) тогда и только тогда, когда выполняется тождество (5.6). \square

Теорема 5.2. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \tau_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, s$,

такие, что в тождествах (4.11) у полиномов \mathfrak{M}_l вещественные части удовлетворяют условиям (4.20), а в тождествах (5.4) у полиномов $\mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}$ вещественные части

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) &= \rho_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} M(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \rho_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \in \mathbb{R}, \\ f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}, \quad g_{\zeta_l} &= 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}, \quad \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l} \leq \mathfrak{r}_{\zeta_l}, \quad \zeta_l = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{e}}_l, \quad \tilde{\mathfrak{e}}_l \leq \mathfrak{e}_l, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

Тогда функция (5.5), где вещественные числа η_l , $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и $\varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}$, $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{e}}_l$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из линейного однородного уравнения

$$2 \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \rho_l \eta_l + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \rho_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} = 0 \quad \text{при} \quad \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} |\eta_l| + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} |\varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}| \neq 0, \quad (5.8)$$

будет первым интегралом обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. Если имеют место тождества (4.20) и (5.7), а вещественные числа η_l и $\varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}$ являются решением линейного однородного уравнения (5.8), то выражение

$$\begin{aligned} &2 \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \eta_l \operatorname{Re} \mathfrak{M}_l(q, p) + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) = \\ &= \left(2 \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \rho_l \eta_l + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \rho_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \right) M(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in G. \end{aligned}$$

Таким образом, выполняются условия (5.6), а значит, согласно теореме 5.1 функция (5.5) является первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1). \square

Следствие 5.1. Если выполняются условия теоремы 5.2, то функции

$$F_{l\mathfrak{k}}: (q, p) \rightarrow P_l^{\eta_l}(q, p) \exp\left(\varphi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}}g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}}g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}}(q, p)\right) \quad \forall (q, p) \in G'_{0l\mathfrak{k}} \subset G, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s},$$

где $P_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, есть полиномы, заданные формулами (4.15), фиксированные числа $f_{\zeta_{\mathfrak{k}}} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_{\mathfrak{k}}} \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}\}$, $\zeta_{\mathfrak{k}} \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{e}}_{\mathfrak{k}}\}$, $\mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, а вещественные числа η_l , $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и $\varphi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}}g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}}$, $\mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из уравнений $2\rho_l \eta_l + \rho_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}}g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}} \varphi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}}g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}} = 0$ при условии, что $|\eta_l| + |\varphi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}}g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}}| \neq 0$, будут первыми интегралами на областях $G'_{0l\mathfrak{k}}$ обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой системы (0.1) соответственно.

Теорема 5.3. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\mathfrak{e}_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что имеют место тождества (4.11) и (5.4). Тогда скалярная функция

$$F: (q, p) \rightarrow \prod_{l=1}^s P_l^{\eta_l}(q, p) \exp \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \psi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad (5.9)$$

где полиномы P_l , $l = 1, \dots, s$, находятся по формулам (4.15), а вещественные числа η_l , $l = 1, \dots, s$, и $\psi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}$, $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\tau}_{\zeta_l}$, $\tilde{\tau}_{\zeta_l} \leq \tau_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_l$, $\tilde{\epsilon}_l \leq \epsilon_l$, $l = 1, \dots, s$, такие, что $\sum_{l=1}^s |\eta_l| + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} |\psi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}| \neq 0$, будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1), если и только если в тождествах (4.11) полиномы \mathfrak{M}_l и в тождествах (5.4) полиномы $\mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}$, такие, что верно тождество

$$2 \sum_{l=1}^s \eta_l \operatorname{Re} \mathfrak{M}_l(q, p) + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \psi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in G. \quad (5.10)$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 4.1 и определением 5.1

$$\begin{aligned} [F(q, p), H(q, p)] &= \exp \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \psi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) \cdot \left[\prod_{l=1}^s P_l^{\eta_l}(q, p), H(q, p) \right] + \\ &+ \prod_{l=1}^s P_l^{\eta_l}(q, p) \cdot \left[\exp \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \psi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p), H(q, p) \right] = \\ &= \exp \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \psi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) \sum_{l=1}^s \eta_l P_l^{\eta_l-1}(q, p) \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq l}}^s P_t^{\eta_t}(q, p) \cdot [P_l(q, p), H(q, p)] + \\ &+ \prod_{l=1}^s P_l^{\eta_l}(q, p) \exp \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \psi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \psi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \left[\operatorname{Im} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p), H(q, p) \right] = \\ &= F(q, p) \left(2 \sum_{l=1}^s \eta_l \operatorname{Re} \mathfrak{M}_l(q, p) + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \psi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) \right) \quad \forall (q, x) \in G. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что функция (5.9) является первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1) тогда и только тогда, когда выполняется тождество (5.10). \square

Теорема 5.4. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \tau_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, s$, такие, что в тождествах (4.11) у полиномов \mathfrak{M}_l вещественные части удовлетворяют условиям (4.20), а в тождествах (5.4) у полиномов $\mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}$ мнимые части

$$\operatorname{Im} \mathfrak{R}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p) = \sigma_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} M(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \sigma_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \in \mathbb{R}, \quad (5.11)$$

$$\mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}, \quad \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l} \leq \mathfrak{r}_{\zeta_l}, \quad \zeta_l = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{e}}_l, \quad \tilde{\mathfrak{e}}_l \leq \mathfrak{e}_l, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s},$$

Тогда функция (5.9), где вещественные числа η_l , $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и $\psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$, $\mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{e}}_l$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из линейного однородного уравнения

$$2 \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \rho_l \eta_l + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \sigma_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} = 0 \quad \text{при} \quad \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} |\eta_l| + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \left| \psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \right| \neq 0, \quad (5.12)$$

будет первым интегралом обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. Если имеют место тождества (4.20) и (5.11), а вещественные числа η_l и $\psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$ являются решением линейного однородного уравнения (5.12), то выражение

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \eta_l \operatorname{Re} \mathfrak{M}_l(q, p) + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p) = \\ & = \left(2 \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \rho_l \eta_l + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \sigma_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \right) M(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in G. \end{aligned}$$

Таким образом, выполняются условия (5.10), а значит, согласно теореме 5.3 функция (5.9) является первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1). \square

Следствие 5.2. Если выполняются условия теоремы 5.4, то функции

$$F_{l\mathfrak{k}}: (q, p) \rightarrow P_l^{\eta_l}(q, p) \exp\left(\psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p)\right) \quad \forall (q, p) \in G'_{0l\mathfrak{k}} \subset G, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s},$$

где $P_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, есть полиномы, заданные формулами (4.15), фиксированные числа $\mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}\}$, $\zeta_l \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{e}}_l\}$, $\mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, а вещественные числа η_l , $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и $\psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$, $\mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из уравнений $2\rho_l \eta_l + \sigma_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} = 0$ при условии, что $|\eta_l| + \left| \psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \right| \neq 0$, будут первыми интегралами на областях $G'_{0l\mathfrak{k}}$ обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой системы (0.1) соответственно.

Из теорем 5.2 и 5.4 получаем следующее утверждение.

Следствие 5.3. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплексно-значные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\mathfrak{e}_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что в тождествах (4.11) у полиномов \mathfrak{M}_l вещественные части удовлетворяют условиям (4.20), а в тождествах (5.4) полиномы

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p) = (\rho_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} + i \sigma_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \rho_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}, \sigma_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \in \mathbb{R}, \quad (5.13)$$

$$\mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}, \quad \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l} \leq \mathfrak{r}_{\zeta_l}, \quad \zeta_l = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{e}}_l, \quad \tilde{\mathfrak{e}}_l \leq \mathfrak{e}_l, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s},$$

Тогда функция (5.5) при (5.8) и функция (5.9) при (5.12) будут первыми интегралами обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

Теорема 5.5. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что имеют место тождества (4.11) и (5.4). Тогда скалярная функция

$$F: (q, p) \rightarrow \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \tau_l A_l(q, p) + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \varphi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (5.14)$$

где $A_l: G \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, суть функции (4.16), а вещественные числа τ_l , $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и $\varphi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}$, $\mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}$, $\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l} \leq \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_l$, $\tilde{\epsilon}_l \leq \epsilon_l$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что

$\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} |\tau_l| + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} |\varphi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}| \neq 0$, будет дополнительным первым интегралом гамильтоновой системы (0.1) тогда и только тогда, когда в тождествах (4.11) полиномы \mathfrak{M}_l и в тождествах (5.4) полиномы функции $\mathfrak{R}_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}$ такие, что верно тождество

$$\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \tau_l \operatorname{Im} \mathfrak{M}_l(q, p) + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \varphi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in G. \quad (5.15)$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 4.3 и определением 5.1 получаем, что

$$\begin{aligned} [F(q, p), H(q, p)] &= \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \tau_l [A_l(q, p), H(q, p)] + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \varphi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}} \left[\operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p), H(q, p) \right] = \\ &= \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \tau_l \operatorname{Im} \mathfrak{M}_l(q, p) + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \varphi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что функция (5.14) является первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1), если и только если выполняются тождества (5.15). \square

Теорема 5.6. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что в тождествах (4.11) у полиномов \mathfrak{M}_l мнимые части удовлетворяют условиям (4.22), а в тождествах (5.4) у полиномов $\mathfrak{R}_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}$ вещественные части удовлетворяют условиям (5.7). Тогда функция (5.14), где вещественные числа τ_l , $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и $\varphi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}$, $\mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_l$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из уравнения

$$\sum_{l=1}^s \rho_l \tau_l + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\tau}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \rho_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} = 0 \quad \text{при} \quad \sum_{l=1}^s |\tau_l| + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\tau}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \left| \varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \right| \neq 0, \quad (5.16)$$

будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. Если имеют место тождества (4.22) и (5.7), а вещественные числа τ_l и $\varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$ являются решением линейного однородного уравнения (5.16), то выражение

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^s \tau_l \operatorname{Im} \mathfrak{M}_l(q, p) + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\tau}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p) = \\ & = \left(\sum_{l=1}^s \rho_l \tau_l + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\tau}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \rho_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \right) M(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in G. \end{aligned}$$

Таким образом, выполняется условие (5.15), а значит, согласно теореме 5.5 функция (5.14) будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1). \square

Следствие 5.4. Если выполняются условия теоремы 5.6, то скалярные функции

$$F_{l\mathfrak{k}}: (q, p) \rightarrow \tau_l A_l(q, p) + \varphi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}} g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}} g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad l = 1, \dots, s, \quad \mathfrak{k} = 1, \dots, s,$$

где фиксированные числа $f_{\zeta_{\mathfrak{k}}} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_{\mathfrak{k}}} \in \{1, \dots, \tilde{\tau}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}\}$, $\zeta_{\mathfrak{k}} \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{k}}\}$, $\mathfrak{k} = 1, \dots, s$, а вещественные числа τ_l , $l = 1, \dots, s$, и $\varphi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}} g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}}$, $\mathfrak{k} = 1, \dots, s$, находятся из линейных однородных уравнений $\rho_l \tau_l + \rho_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}} g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}} \varphi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}} g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}} = 0$ при условии, что $|\tau_l| + \left| \varphi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}} g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}} \right| \neq 0$, будут первыми интегралами обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

По следствию 5.4, для обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (5.2), используя кратный (кратность не менее двух) комплекснозначный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}: (q, p) \rightarrow q_2 + i q_1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ такой, что $\mathfrak{M}(q, p) = -\alpha i$ и $\mathfrak{R}_{11}(q, p) = \frac{p_2 + i p_1}{q_2 + i q_1}$, $\mathfrak{R}_{11}(q, p) = -1$, строим на области $G \subset \{(q, p): q_2 \neq 0\}$ дополнительный первый интеграл

$$F: (q, p) \rightarrow \arctan \frac{q_1}{q_2} - \alpha \frac{q_1 p_1 + q_2 p_2}{q_1^2 + q_2^2} \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

Теорема 5.7. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\mathfrak{r}_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, s$, такие, что имеют место тождества (4.11) и (5.4). Тогда скалярная функция

$$F: (q, p) \rightarrow \sum_{l=1}^s \tau_l A_l(q, p) + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\tau}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \psi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (5.17)$$

где $A_l: G \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, s$, суть функции (4.16), а вещественные числа τ_l , $l = 1, \dots, s$,

и $\psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$, $\mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}$, $\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l} \leq \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{e}}_l$, $\tilde{\mathfrak{e}}_l \leq \mathfrak{e}_l$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что $\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} |\tau_l| + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} |\psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}| \neq 0$, будет дополнительным первым интегралом гамильтоновой системы (0.1) тогда и только тогда, когда в тождествах (4.11) полиномы \mathfrak{M}_l и в тождествах (5.4) полиномы функции $\mathfrak{R}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$ такие, что верно тождество

$$\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \tau_l \operatorname{Im} \mathfrak{M}_l(q, p) + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in G. \quad (5.18)$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 4.3 и определением 5.1 получаем, что

$$\begin{aligned} [F(q, p), H(q, p)] &= \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \tau_l [A_l(q, p), H(q, p)] + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \left[\operatorname{Im} \mathfrak{R}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p), H(q, p) \right] = \\ &= \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \tau_l \operatorname{Im} \mathfrak{M}_l(q, p) + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что функция (5.17) является первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1), если и только если выполняются тождества (5.18). \square

Теорема 5.8. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\mathfrak{e}_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что в тождествах (4.11) у полиномов \mathfrak{M}_l мнимые части удовлетворяют условиям (4.22), а в тождествах (5.4) у полиномов $\mathfrak{R}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$ мнимые части удовлетворяют условиям (5.11). Тогда функция (5.17), где вещественные числа τ_l , $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и $\psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$, $\mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{e}}_l$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из уравнения

$$\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \rho_l \tau_l + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \sigma_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} = 0 \quad \text{при} \quad \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} |\tau_l| + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} |\psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}| \neq 0, \quad (5.19)$$

будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. Если имеют место тождества (4.22) и (5.11), а вещественные числа τ_l и $\psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$ являются решением линейного однородного уравнения (5.19), то выражение

$$\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \tau_l \operatorname{Im} \mathfrak{M}_l(q, p) + \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p) =$$

$$= \left(\sum_{l=1}^s \rho_l \tau_l + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{e}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{r}_{\zeta_l}} \sigma_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \psi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \right) M(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in G.$$

Таким образом, выполняется условие (5.18), а значит, согласно теореме 5.7 функция (5.17) будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1). \square

Следствие 5.5. Если выполняются условия теоремы 5.8, то скалярные функции

$$F_{l\mathfrak{k}}: (q, p) \rightarrow \tau_l A_l(q, p) + \psi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{\mathfrak{k}f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad l = 1, \dots, s, \quad \mathfrak{k} = 1, \dots, s,$$

где фиксированные числа $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_l} \in \{1, \dots, \tilde{r}_{\zeta_l}\}$, $\zeta_l \in \{1, \dots, \tilde{e}_l\}$, $\mathfrak{k} = 1, \dots, s$, а вещественные числа τ_l , $l = 1, \dots, s$, и $\psi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$, $\mathfrak{k} = 1, \dots, s$, находятся из линейных однородных уравнений $\rho_l \tau_l + \sigma_{\mathfrak{k}f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \psi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} = 0$ при условии, что $|\tau_l| + \left| \psi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \right| \neq 0$, будут первыми интегралами обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

Из теорем 5.6 и 5.8 получаем следующее утверждение.

Следствие 5.6. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплексно-значные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{e_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, s$, такие, что в тождествах (4.11) у полиномов \mathfrak{M}_l мнимые части удовлетворяют условиям (4.22), а в тождествах (5.4) полиномы $\mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$ имеют вид (5.13) Тогда функция (5.14) при (5.16) и функция (5.17) при (5.19) будут первыми интегралами обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

По определению 5.1, комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.27) гамильтоновой системы (0.1) имеют кратности $\mathfrak{z}_{l_1}^{(1)} = 1 + \sum_{\zeta_{l_1}=1}^{e_{l_1}} \mathfrak{r}_{\zeta_{l_1}}$, $l_1 = 1, \dots, s_1$, если и только если выполняются тождества (4.28) и существуют полиномы $\mathfrak{Q}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, которые удовлетворяют системе тождеств

$$\left[\operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p), H(q, p) \right] = \operatorname{Re} \mathfrak{Q}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p), \quad \left[\operatorname{Im} \mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p), H(q, p) \right] = \operatorname{Im} \mathfrak{Q}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p) \quad (5.20)$$

$$\forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad f_{\zeta_{l_1}} \in \mathbb{N}, \quad g_{\zeta_{l_1}} = 1, \dots, \mathfrak{r}_{\zeta_{l_1}}, \quad \zeta_{l_1} = 1, \dots, e_{l_1}, \quad l_1 = 1, \dots, s_1,$$

где область G такая что $\mathfrak{w}_{l_1}^{(1)}(q, p) \neq 0 \quad \forall (q, p) \in G$, $l_1 = 1, \dots, s_1$, а скалярные функции

$$\mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p) = \frac{\mathfrak{Q}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p)}{\left(\mathfrak{w}_{l_1}^{(1)}(q, p) \right)^{f_{\zeta_{l_1}}}}, \quad f_{\zeta_{l_1}} \in \mathbb{N}, \quad g_{\zeta_{l_1}} = 1, \dots, \mathfrak{r}_{\zeta_{l_1}}, \quad \zeta_{l_1} = 1, \dots, e_{l_1}, \quad l_1 = 1, \dots, s_1.$$

При этом каждый полином $\mathfrak{Q}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}$, $f_{\zeta_{l_1}} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_{l_1}} = 1, \dots, r_{\zeta_{l_1}}$, $\zeta_{l_1} = 1, \dots, e_{l_1}$, взаимно прост с полиномиальным частным интегралом $\mathfrak{w}_{l_1}^{(1)}$, $l_1 = 1, \dots, s_1$, а полиномы $\mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}$, $f_{\zeta_{l_1}} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_{l_1}} = 1, \dots, r_{\zeta_{l_1}}$, $\zeta_{l_1} = 1, \dots, e_{l_1}$, $l_1 = 1, \dots, s_1$, такие, что максимальная степень

$$\max \left\{ \deg \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}, \deg \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \right\} \leq h - 2.$$

Теорема 5.9. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{e_l} r_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, s$, соответственно такие, что выполняются тождества (5.4). Кроме того гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.27) кратностей $\mathfrak{z}_{l_1}^{(1)} = 1 + \sum_{\zeta_{l_1}=1}^{e_{l_1}} r_{\zeta_{l_1}}$, $l_1 = 1, \dots, s_1$, соответственно такие, что выполняются тождества (5.20). Тогда на области G скалярная функция

$$F: (q, p) \rightarrow \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{e}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{r}_{\zeta_l}} \varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p) + \sum_{l_1=1}^{s_1} \sum_{\zeta_{l_1}=1}^{\tilde{e}_{l_1}} \sum_{g_{\zeta_{l_1}}=1}^{\tilde{r}_{\zeta_{l_1}}} \psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p), \quad (5.21)$$

где вещественные числа

$$\varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}, \quad f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}, \quad g_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{r}_{\zeta_l}, \quad \tilde{r}_{\zeta_l} \leq r_{\zeta_l}, \quad \zeta_l = 1, \dots, \tilde{e}_l, \quad \tilde{e}_l \leq e_l, \quad l = 1, \dots, s,$$

и

$$\psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}, \quad f_{\zeta_{l_1}} \in \mathbb{N}, \quad g_{\zeta_{l_1}} = 1, \dots, \tilde{r}_{\zeta_{l_1}}, \quad \tilde{r}_{\zeta_{l_1}} \leq r_{\zeta_{l_1}}, \quad \zeta_{l_1} = 1, \dots, \tilde{e}_{l_1}, \quad \tilde{e}_{l_1} \leq e_{l_1}, \quad l_1 = 1, \dots, s_1,$$

такие, что $\sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{e}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{r}_{\zeta_l}} |\varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}| + \sum_{l_1=1}^{s_1} \sum_{\zeta_{l_1}=1}^{\tilde{e}_{l_1}} \sum_{g_{\zeta_{l_1}}=1}^{\tilde{r}_{\zeta_{l_1}}} |\psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}| \neq 0$, будет первым интегралом гамильтоновой системы (0.1), если и только если в тождествах (5.4) полиномы $\mathfrak{R}_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$ и в тождествах (5.20) полиномы $\mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}$ такие, что имеет место тождество

$$\sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{e}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{r}_{\zeta_l}} \varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p) + \sum_{l_1=1}^{s_1} \sum_{\zeta_{l_1}=1}^{\tilde{e}_{l_1}} \sum_{g_{\zeta_{l_1}}=1}^{\tilde{r}_{\zeta_{l_1}}} \psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p) = 0. \quad (5.22)$$

Доказательство. С учетом тождеств (5.4) и (5.20), скобки Пуассона $[F(q, p), H(q, p)] =$

$$= \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{e}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{r}_{\zeta_l}} \varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \left[\operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p), H(q, p) \right] + \sum_{l_1=1}^{s_1} \sum_{\zeta_{l_1}=1}^{\tilde{e}_{l_1}} \sum_{g_{\zeta_{l_1}}=1}^{\tilde{r}_{\zeta_{l_1}}} \psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \left[\operatorname{Im} \mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p), H(q, p) \right] =$$

$$= \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p) + \sum_{l_1=1}^{s_1} \sum_{\zeta_{l_1}=1}^{\tilde{\epsilon}_{l_1}} \sum_{g_{\zeta_{l_1}}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_{l_1}}} \psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G.$$

Отсюда получаем, что функция (5.21) является первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1), если и только если выполняется тождество (5.22). \square

Теорема 5.10. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \tau_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, s$, соответственно такие, что в тождествах (5.4) полиномы $\mathfrak{R}_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяют условиям (5.7). Кроме того гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные частные интегралы (4.27) кратностей $\mathfrak{z}_{l_1}^{(1)} = 1 + \sum_{\zeta_{l_1}=1}^{\epsilon_{l_1}} \tau_{\zeta_{l_1}}$, $l_1 = 1, \dots, s_1$, такие, что в тождествах (5.20) у полиномов $\mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ мнимые части

$$\operatorname{Im} \mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p) = \sigma_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} M(q, p) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \sigma_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \in \mathbb{R},$$

$$f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}, \quad g_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\tau}_{\zeta_l}, \quad \tilde{\tau}_{\zeta_l} \leq \tau_{\zeta_l}, \quad \zeta_l = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_l, \quad \tilde{\epsilon}_l \leq \epsilon_l, \quad l_1 = 1, \dots, s_1,$$
(5.23)

где $M : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ есть некоторый полином. Тогда скалярная функция (5.21), где вещественные числа $\varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$ и $\psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}$ находятся из линейного однородного уравнения

$$\sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \rho_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} + \sum_{l_1=1}^{s_1} \sum_{\zeta_{l_1}=1}^{\tilde{\epsilon}_{l_1}} \sum_{g_{\zeta_{l_1}}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_{l_1}}} \sigma_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} = 0$$
(5.24)

при условии, что $\sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} |\varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}| + \sum_{l_1=1}^{s_1} \sum_{\zeta_{l_1}=1}^{\tilde{\epsilon}_{l_1}} \sum_{g_{\zeta_{l_1}}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_{l_1}}} |\psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}| \neq 0$, будет первым интегралом на области G обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. Если имеют место равенства (5.7) и (5.23), а вещественные числа

$$\varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}, \quad f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}, \quad g_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\tau}_{\zeta_l}, \quad \zeta_l = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_l, \quad l = 1, \dots, s,$$

и

$$\psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}, \quad f_{\zeta_{l_1}} \in \mathbb{N}, \quad g_{\zeta_{l_1}} = 1, \dots, \tilde{\tau}_{\zeta_{l_1}}, \quad \zeta_{l_1} = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_{l_1}, \quad l_1 = 1, \dots, s_1,$$

являются нетривиальным решением уравнения (5.24), то выражение

$$\sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p) + \sum_{l_1=1}^{s_1} \sum_{\zeta_{l_1}=1}^{\tilde{\epsilon}_{l_1}} \sum_{g_{\zeta_{l_1}}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_{l_1}}} \psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p) =$$

$$= \left(\sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \rho_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} + \sum_{l_1=1}^{s_1} \sum_{\zeta_{l_1}=1}^{\tilde{\epsilon}_{l_1}} \sum_{g_{\zeta_{l_1}}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_{l_1}}} \sigma_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \right) M(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Таким образом, выполняется условие (5.22), а значит, согласно теореме 5.9 функция (5.21) является первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1). \square

Для построения интегрального базиса гамильтоновой системы (0.1) применимо

Следствие 5.7. Если верны условия теоремы 5.10, то на области G функции

$$F_{l l_1} : (q, p) \rightarrow \varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p) + \psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p), \quad l = 1, \dots, s, \quad l_1 = 1, \dots, s_1,$$

где фиксированные числа $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_l} \in \{1, \dots, \tilde{\tau}_{\zeta_l}\}$, $\zeta_l \in \{1, \dots, \tilde{\epsilon}_l\}$, $l = 1, \dots, s$, и $f_{\zeta_{l_1}} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_{l_1}} \in \{1, \dots, \tilde{\tau}_{\zeta_{l_1}}\}$, $\zeta_{l_1} \in \{1, \dots, \tilde{\epsilon}_{l_1}\}$, $l_1 = 1, \dots, s_1$, а вещественные числа $\varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$, $l = 1, \dots, s$, и $\psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}$, $l_1 = 1, \dots, s_1$, находятся из линейных однородных уравнений

$$\rho_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} + \sigma_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} = 0 \quad \text{при условии} \quad \left| \varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \right| + \left| \psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \right| \neq 0,$$

будут первыми интегралами полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

Из теоремы 5.9 при $l = l^{(1)}$, $s = s_1$, $w_l = w_l^{(1)}$, $l = 1, \dots, s$, получаем, что имеет место

Теорема 5.11. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \tau_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, s$, соответственно такие, что выполняются тождества (5.4). Тогда скалярная функция

$$F : (q, p) \rightarrow \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \left(\varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p) + \psi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p) \right) \quad \forall (q, p) \in G \quad (5.25)$$

будет дополнительным первым интегралом гамильтоновой системы (0.1) тогда и только тогда, когда в тождествах (5.4) полиномы $\mathfrak{R}_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что

$$\sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \left(\varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p) + \psi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p) \right) = 0 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n},$$

а вещественные числа $\varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$ и $\psi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$, $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\tau}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_l$, $l = 1, \dots, s$,

такие, что имеет место условие $\sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\tau}_{\zeta_l}} \left| \varphi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \right| + \left| \psi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \right| \neq 0$.

Из теоремы 5.11 получаем, что верна

Теорема 5.12. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что выполняются тождества (5.4) при условиях (5.13). Тогда функция (5.25), где вещественные числа $\varphi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$ и $\psi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$, $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_l$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из линейного однородного уравнения

$$\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \left(\rho_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} + \sigma_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \psi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \right) = 0 \quad \text{при} \quad \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \left| \varphi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \right| + \left| \psi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \right| \neq 0,$$

будет первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1).

Для построения интегрального базиса гамильтоновой системы (0.1) применимо

Следствие 5.8. Если выполняются условия теоремы 5.12, то на области G функции

$$F_{l\mathfrak{k}} : (q, p) \rightarrow \varphi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p) + \psi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p), \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s},$$

где фиксированные числа $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}\}$, $\zeta_l \in \{1, \dots, \tilde{\epsilon}_l\}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и $f_{\zeta_{\mathfrak{k}}} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{k}}} \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}\}$, $\zeta_{\mathfrak{k}} \in \{1, \dots, \tilde{\epsilon}_{\mathfrak{k}}\}$, $\mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, а вещественные числа $\varphi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, $\psi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из уравнений $\rho_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} + \sigma_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \psi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} = 0$ при условии, что $\left| \varphi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \right| + \left| \psi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \right| \neq 0$, будут первыми интегралами гамильтоновой системы (0.1).

Из теоремы 5.9 при $\mathfrak{s}_1 = 0$ получаем, что имеет место

Теорема 5.13. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, соответственно такие, что выполняются тождества (5.4). Тогда функция

$$F : (q, p) \rightarrow \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G \quad (5.26)$$

будет дополнительным первым интегралом гамильтоновой системы (0.1), если и только если в тождествах (5.4) полиномы $\mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}$, $\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l} \leq \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_l$, $\tilde{\epsilon}_l \leq \epsilon_l$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что имеет место тождество

$$\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in G,$$

а вещественные числа $\varphi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$ такие, что $\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \left| \varphi_{lf_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \right| \neq 0$.

Из теоремы 5.13 получаем, что верна

Теорема 5.14. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\mathfrak{e}_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что выполняются тождества (5.4) при условиях (5.7). Тогда функция (5.26), где вещественные числа $\varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}$, $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{e}}_l$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся

из уравнения $\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \rho_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} = 0$ при условии, что $\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} |\varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}| \neq 0$, будет дополнительным первым интегралом на области G гамильтоновой системы (0.1).

Для построения интегрального базиса гамильтоновой системы (0.1) применимо

Следствие 5.9. Если выполняются условия теоремы 5.14, то на области G функции

$$F_{l\mathfrak{k}}: (q, p) \rightarrow \varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) + \varphi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}}g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}}g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}}(q, p), \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s},$$

где фиксированные числа $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_l} \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}\}$, $\zeta_l \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{e}}_l\}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и $f_{\zeta_{\mathfrak{k}}} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_{\mathfrak{k}}} \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}\}$, $\zeta_{\mathfrak{k}} \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{e}}_{\mathfrak{k}}\}$, $\mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и мультииндекс $lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l} \neq \mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}}g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, $\mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, а вещественные числа $\varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и $\varphi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}}g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}}$, $\mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из уравнений $\rho_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} + \rho_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}}g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}} \varphi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}}g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}} = 0$ при условии, что $|\varphi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}| + |\varphi_{\mathfrak{k}f_{\zeta_{\mathfrak{k}}}g_{\zeta_{\mathfrak{k}}}}| \neq 0$, будут первыми интегралами обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1).

Из теоремы 5.9 при $\mathfrak{s} = 0$ получаем, что имеет место

Теорема 5.15. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\mathfrak{e}_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, соответственно такие, что выполняются тождества (5.4). Тогда функция

$$F: (q, p) \rightarrow \sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \psi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad (5.27)$$

где вещественные числа $\psi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}$, $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{e}}_l$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие,

что $\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} |\psi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}| \neq 0$, будет дополнительным первым интегралом гамильтоновой системы (0.1), если и только если в тождествах (5.4) полиномы $\mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}$, $\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l} \leq \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{e}}_l$, $\tilde{\mathfrak{e}}_l \leq \mathfrak{e}_l$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что верно тождество

$$\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\mathfrak{e}}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \psi_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{lf_{\zeta_l}g_{\zeta_l}}(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Из теоремы 5.15 получаем, что верна

Теорема 5.16. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что выполняются тождества (5.4) при условиях (5.11). Тогда функция (5.27), где вещественные числа $\psi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}$, $\mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}$, $\zeta_l = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_l$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из уравнения $\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} \sigma_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}} \psi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}} = 0$ при условии, что $\sum_{l=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_l=1}^{\tilde{\epsilon}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{\tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}} |\psi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}| \neq 0$, будет первым интегралом на области G полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

Для построения интегрального базиса гамильтоновой системы (0.1) применимо

Следствие 5.10. Если верны условия теоремы 5.16, то на области G функции

$$F_{l\mathfrak{k}}: (q, p) \rightarrow \psi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p) + \psi_{\mathfrak{k}\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{\mathfrak{k}\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}}(q, p), \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s}, \mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s},$$

где фиксированные числа $\mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}\}$, $\zeta_l \in \{1, \dots, \tilde{\epsilon}_l\}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и $\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{k}}} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{k}}} \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}\}$, $\zeta_{\mathfrak{k}} \in \{1, \dots, \tilde{\epsilon}_{\mathfrak{k}}\}$, $\mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и мультииндекс $l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l} \neq \mathfrak{k}\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, $\mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, а вещественные числа $\psi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и $\psi_{\mathfrak{k}\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}}$, $\mathfrak{k} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, находятся из уравнений $\sigma_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}} \psi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}} + \sigma_{\mathfrak{k}\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}} \psi_{\mathfrak{k}\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}} = 0$ при условии, что $|\psi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}| + |\psi_{\mathfrak{k}\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{k}}}}| \neq 0$, будут первыми интегралами обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1).

5.3. Построение первых интегралов гамильтоновой системы по кратным комплекснозначным и вещественным полиномиальным частным интегралам

Как по теореме 1.3 при $s = 1$ (т.е. при наличие только одного вещественного полиномиального частного интеграла), так и по теореме 5.14 при $\mathfrak{s} = \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l} = \tilde{\epsilon}_l = 1$ и по теореме 5.16 при $\mathfrak{s} = \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l} = \tilde{\epsilon}_l = 1$ (т.е. при наличие только одного двукратного комплекснозначного полиномиального частного интеграла), построить дополнительный первый интеграл обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1) не представляется возможным. В этих случаях могут быть использованы следующие утверждения.

Теорема 5.17. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) при условиях (1.13) и кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что верны тождества (5.4) при условиях (5.7). Тогда на области G функции

$$F_{\xi l}: (q, p) \rightarrow w_{\xi}^{\gamma_{\xi}}(q, p) \exp\left(\varphi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p)\right), \quad \xi = 1, \dots, \mathfrak{s}, l = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad (5.28)$$

где фиксированные числа $\mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}\}$, $\zeta_l \in \{1, \dots, \tilde{\epsilon}_l\}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, а вещественные числа γ_{ξ} и $\varphi_{l\mathfrak{f}_{\zeta_l}\mathfrak{g}_{\zeta_l}}$ находятся из линейных однородных уравнений

$$\lambda_\xi \gamma_\xi + \rho_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \varphi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} = 0 \quad \text{при} \quad |\gamma_\xi| + \left| \varphi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \right| \neq 0, \quad \xi = 1, \dots, s, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad (5.29)$$

будут первыми интегралами полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

Действительно, с учетом тождеств (1.13), (5.4) и (5.7), скобки Пуассона

$$\begin{aligned} [F_{\xi \mathfrak{l}}(q, p), H(q, p)] &= [w_\xi^{\gamma_\xi}(q, p), H(q, p)] \cdot \exp\left(\varphi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p)\right) + \\ &+ w_\xi^{\gamma_\xi}(q, p) \cdot \left[\exp\left(\varphi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p)\right), H(q, p) \right] = \\ &= \gamma_\xi w_\xi^{\gamma_\xi - 1}(q, p) \cdot [w_\xi(q, p), H(q, p)] \cdot \exp\left(\varphi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p)\right) + \\ &+ \varphi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} w_\xi^{\gamma_\xi}(q, p) \exp\left(\varphi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(t, x)\right) \cdot [\operatorname{Re} \mathfrak{K}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p), H(q, p)] = \\ &= \left(\lambda_\xi \gamma_\xi + \rho_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \varphi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \right) F_{\xi \mathfrak{l}}(q, p) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad \xi = 1, \dots, s, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}. \end{aligned}$$

Если числа γ_ξ , $\xi = 1, \dots, s$, и $\varphi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, являются решением уравнения (5.29), то функции (2.28) будут первыми интегралами гамильтоновой системы (0.1). \square

Теорема 5.18. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) при условиях (1.13) и кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_\mathfrak{l} = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\mathfrak{r}_\mathfrak{l}} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что имеют место тождества (5.4) при условиях (5.11). Тогда функции

$$F_{\xi \mathfrak{l}}: (q, p) \rightarrow w_\xi^{\gamma_\xi}(q, p) \exp\left(\psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(q, p)\right) \quad \forall (q, p) \in G, \quad \xi = 1, \dots, s, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad (5.30)$$

где фиксированные числа $\mathfrak{f}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_{\zeta_l} \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}\}$, $\zeta_l \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{l}}\}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, а вещественные числа γ_ξ и $\psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$ находятся из линейных однородных уравнений

$$\lambda_\xi \gamma_\xi + \sigma_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} = 0 \quad \text{при} \quad |\gamma_\xi| + \left| \psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \right| \neq 0, \quad \xi = 1, \dots, s, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad (5.31)$$

будут первыми интегралами полиномиальной гамильтоновой системы (0.1).

Доказательство. Методом аналогично использованному при доказательстве теоремы 5.17, с учетом тождеств (1.13), (5.4) и (5.11), получаем, что скобки Пуассона

$$[F_{\xi \mathfrak{l}}(q, p), H(q, p)] = \left(\lambda_\xi \gamma_\xi + \sigma_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \right) F_{\xi \mathfrak{l}}(q, p) M(q, p), \quad \xi = 1, \dots, s, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}.$$

Выбирая числа γ_ξ , $\xi = 1, \dots, s$, и $\psi_{\mathfrak{f}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, так, чтобы выполнялось (5.31) получаем, что функции (5.30) будут первыми интегралами системы (0.1). \square

5.4. Построение первых интегралов гамильтоновой системы по кратным комплекснозначным и вещественным полиномиальным частным интегралам

Как по теореме 2.3 при $s = \tilde{r}_{\varepsilon_l} = \tilde{\varepsilon}_l = 1$ (т.е. при наличие только одного двукратного вещественного частного интеграла), так и по теореме 5.14 при $\mathfrak{s} = \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l} = \tilde{\mathfrak{e}}_l = 1$ и по теореме 5.16 при $\mathfrak{s} = \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l} = \tilde{\mathfrak{e}}_l = 1$ (т.е. при наличие только одного двукратного комплекснозначного полиномиального частного интеграла), построить первый интеграл гамильтоновой системы (0.1) не представляется возможным. В этих случаях могут быть использованы

Теорема 5.19. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) кратностей $\varkappa_l = 1 + \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} r_{\xi_l}$, $l = 1, \dots, s$, такие, что имеют место тождества (2.4) при условиях (2.7). Кроме этого система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\varepsilon_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что имеет место система тождеств (5.4) при условиях (5.7). Тогда первыми интегралами на области G системы (0.1) будут функции

$$F_{ll}: (q, p) \rightarrow \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) + \varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p), \quad l = 1, \dots, s, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad (5.32)$$

где фиксированные числа $f_{\xi_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\xi_l} \in \{1, \dots, \tilde{r}_{\xi_l}\}$, $\xi_l \in \{1, \dots, \tilde{\varepsilon}_l\}$, $l = 1, \dots, s$, и $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_l} \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}\}$, $\zeta_l \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{e}}_l\}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, а вещественные числа $\alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}$ и $\varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$ находятся из линейных однородных уравнений

$$\lambda_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} + \rho_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} = 0 \quad \text{при} \quad \left| \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} \right| + \left| \varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \right| \neq 0, \quad l = 1, \dots, s, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}. \quad (5.33)$$

Доказательство. На основании тождеств (2.4) при (2.7) и (5.4) при (5.7), с учетом свойства билинейности скобок Пуассона получаем, что

$$\begin{aligned} [F_{ll}(q, p), H(q, p)] &= \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} \cdot [K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p), H(q, p)] + \varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \cdot [\operatorname{Re} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p), H(q, p)] = \\ &= \left(\lambda_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} + \rho_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \right) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad l = 1, \dots, s, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}. \end{aligned}$$

Если числа $\alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}$, $l = 1, \dots, s$, $\varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, являются решениями уравнений (5.33), то функции (5.32) будут первыми интегралами гамильтоновой системы (0.1). \square

Аналогично теореме 5.19 доказывается следующее утверждение.

Теорема 5.20. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет кратные вещественные полиномиальные частные интегралы (1.5) кратностей $\varkappa_l = 1 + \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} r_{\xi_l}$, $l = 1, \dots, s$, такие, что имеют место тождества (2.4) при условиях (2.7). Кроме этого система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) кратности

стей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \tau_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что имеет место система тождеств (5.4) при условиях (5.11). Тогда первыми интегралами на области G системы (0.1) будут функции

$$F_{ll}: (q, p) \rightarrow \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} K_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}(q, p) + \psi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p), \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s},$$

где фиксированные числа $f_{\xi_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\xi_l} \in \{1, \dots, \tilde{r}_{\xi_l}\}$, $\xi_l \in \{1, \dots, \tilde{\epsilon}_l\}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, и $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_l} \in \{1, \dots, \tilde{r}_{\zeta_l}\}$, $\zeta_l \in \{1, \dots, \tilde{\epsilon}_l\}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, а вещественные числа $\alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}}$ и $\psi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$ находятся из линейных однородных уравнений

$$\lambda_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} + \sigma_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \psi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} = 0 \quad \text{при} \quad \left| \alpha_{lf_{\xi_l} g_{\xi_l}} \right| + \left| \psi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \right| \neq 0, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}.$$

5.5. Построение первых интегралов гамильтоновой системы по кратным комплекснозначным частным интегралам и условным частным интегралам

Как по теореме 3.2 при $\nu = 1$ (т.е. при наличие только одного условного частного интеграла), так и по теореме 5.14 при $\mathfrak{s} = \tilde{r}_{\zeta_l} = \tilde{\epsilon}_l = 1$ и по теореме 5.16 при $\mathfrak{s} = \tilde{r}_{\zeta_l} = \tilde{\epsilon}_l = 1$ (т.е. при наличие только одного двукратного комплекснозначного полиномиального частного интеграла), построить первый интеграл гамильтоновой системы (0.1) не представляется возможным. В этих случаях могут быть использованы следующие утверждения.

Теорема 5.21. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет условные частные интегралы (3.4) такие, что верны тождества (3.5) при условиях (3.8) и кратные комплекснозначные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \tau_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что верны тождества (5.4) при условиях (5.7). Тогда первыми интегралами на области G обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1) будут скалярные функции

$$F_{\xi l}: (q, p) \rightarrow \beta_{\xi} v_{\xi}(q, p) + \varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p), \quad \xi = 1, \dots, \nu, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad (5.34)$$

где фиксированные числа $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_l} \in \{1, \dots, \tilde{r}_{\zeta_l}\}$, $\zeta_l \in \{1, \dots, \tilde{\epsilon}_l\}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, а вещественные числа β_{ξ} и $\varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$ находятся из линейных однородных уравнений

$$\mu_{\xi} \beta_{\xi} + \rho_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} = 0 \quad \text{при} \quad |\beta_{\xi}| + \left| \varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \right| \neq 0, \quad \xi = 1, \dots, \nu, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}. \quad (5.35)$$

Действительно, с учетом тождеств (3.5) при (3.8) и (5.4) при (5.7), скобки Пуассона

$$\begin{aligned} [F_{\xi l}(q, p), H(q, p)] &= \beta_{\xi} \cdot [v_{\xi}(q, p), H(q, p)] + \varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \cdot [\operatorname{Re} \mathfrak{K}_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p), H(q, p)] = \\ &= \left(\mu_{\xi} \beta_{\xi} + \rho_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \right) M(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad \xi = 1, \dots, \nu, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}. \end{aligned}$$

Выбирая числа β_{ξ} , $\xi = 1, \dots, \nu$, и $\varphi_{lf_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$, $\mathfrak{l} = 1, \dots, \mathfrak{s}$, так, чтобы имело место (5.35) получаем, что функции (5.34) будут первыми интегралами системы (0.1). \square

Аналогично теореме 5.21 доказывается следующее утверждение.

Теорема 5.22. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет условные частные интегралы (3.4) такие, что верны тождества (3.5) при условиях (3.8) и кратные комплекснозначные частные интегралы (4.10) кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \mathfrak{r}_{\zeta_l}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, такие, что верны тождества (5.4) при условиях (5.11). Тогда первыми интегралами на области G обобщенно-консервативной гамильтоновой системы (0.1) будут скалярные функции

$$F_{\xi l}: (q, p) \rightarrow \beta_{\xi} v_{\xi}(q, p) + \psi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(q, p), \quad \xi = 1, \dots, \nu, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s},$$

где фиксированные числа $f_{\zeta_l} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_l} \in \{1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l}\}$, $\zeta_l \in \{1, \dots, \tilde{\epsilon}_l\}$, $l = 1, \dots, \mathfrak{s}$, а вещественные числа β_{ξ} и $\psi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$ находятся из линейных однородных уравнений

$$\mu_{\xi} \beta_{\xi} + \sigma_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \psi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} = 0 \quad \text{при} \quad |\beta_{\xi}| + \left| \psi_{l f_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \right| \neq 0, \quad \xi = 1, \dots, \nu, \quad l = 1, \dots, \mathfrak{s}.$$

5.6. Построение первых интегралов гамильтоновой системы по комплекснозначным частным интегралам и кратным комплекснозначным частным интегралам

Как по теореме 4.5 при $\mathfrak{s} = 1$ и по теореме 4.6 при $\mathfrak{s} = 1$ (т.е. при наличие только одного комплекснозначного полиномиального частного интеграла), так и по теореме 5.14 при $\mathfrak{s} = \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l} = \tilde{\epsilon}_l = 1$ и по теореме 5.16 при $\mathfrak{s} = \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_l} = \tilde{\epsilon}_l = 1$ (т.е. при наличие только одного двукратного комплекснозначного полиномиального частного интеграла), построить первый интеграл гамильтоновой системы (0.1) не представляется возможным. В этих случаях могут быть использованы следующие закономерности, доказательства которых аналогичны доказательствам следствий 5.1, 5.2, 5.4 и 5.5 соответственно.

Теорема 5.23. Пусть обобщенно-консервативная гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) такие, что верны тождества (4.11) при условиях (4.20). Кроме того гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.24) такие, что в тождествах (5.20) у полиномов $\mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ вещественные части

$$\operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p) = \rho_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} M(q, p) \quad \forall (q, p) \in G \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \rho_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \in \mathbb{R}, \quad (5.36)$$

$$f_{\zeta_{l_1}} \in \mathbb{N}, \quad g_{\zeta_{l_1}} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_{l_1}}, \quad \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_{l_1}} \leq \mathfrak{r}_{\zeta_{l_1}}, \quad \zeta_{l_1} = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_{l_1}, \quad \tilde{\epsilon}_{l_1} \leq \epsilon_{l_1}, \quad l_1 = 1, \dots, \mathfrak{s}_1.$$

Тогда первыми интегралами гамильтоновой системы (0.1) будут скалярные функции

$$F_{l_1}: (q, p) \rightarrow P_{l_1}^{\eta_{l_1}}(q, p) \exp\left(\varphi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p)\right) \quad \forall (q, p) \in G, \quad l_1 = 1, \dots, \mathfrak{s}, \quad l_1 = 1, \dots, \mathfrak{s}_1,$$

где полиномы $P_{l_1}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $l_1 = 1, \dots, \mathfrak{s}$, определяются по формулам (4.15), фиксированные числа $f_{\zeta_{l_1}} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_{l_1}} = 1, \dots, \tilde{\mathfrak{r}}_{\zeta_{l_1}}$, $\zeta_{l_1} = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_{l_1}$, $l_1 = 1, \dots, \mathfrak{s}_1$, а вещественные числа η_{l_1} и

$\varphi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}$ находятся из линейных однородных уравнений

$$2\rho_l \eta_l + \rho_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \varphi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} = 0 \quad \text{при } |\eta_l| + \left| \varphi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \right| \neq 0, \quad l = 1, \dots, s, \quad l_1 = 1, \dots, s_1.$$

Теорема 5.24. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) такие, что верны тождества (4.11) при условиях (4.20). Кроме того гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.24) такие, что верны тождества (5.20) при условиях (5.23). Тогда первыми интегралами гамильтоновой системы (0.1) будут функции

$$F_{ll_1}: (q, p) \rightarrow P_l^{\eta_l}(q, p) \exp\left(\psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p)\right) \quad \forall (q, p) \in G, \quad l = 1, \dots, s, \quad l_1 = 1, \dots, s_1,$$

где полиномы $P_l: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, s$, определяются по формулам (4.15), фиксированные числа $f_{\zeta_{l_1}} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_{l_1}} = 1, \dots, \tilde{\tau}_{\zeta_{l_1}}$, $\zeta_{l_1} = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_{l_1}$, $l_1 = 1, \dots, s_1$, а вещественные числа η_l и $\psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}$ находятся из линейных однородных уравнений

$$2\rho_l \eta_l + \sigma_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} = 0 \quad \text{при } |\eta_l| + \left| \psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \right| \neq 0, \quad l = 1, \dots, s, \quad l_1 = 1, \dots, s_1.$$

Теорема 5.25. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) такие, что верны тождества (4.11) при условиях (4.22). Кроме того гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.24) такие, что верны тождества (5.20) при условиях (5.36). Тогда первыми интегралами гамильтоновой системы (0.1) будут функции

$$F_{ll_1}: (q, p) \rightarrow \tau_l A_l(q, p) + \varphi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad l = 1, \dots, s, \quad l_1 = 1, \dots, s_1,$$

где функции $A_l: G \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, s$, определяются по формулам (4.16), фиксированные числа $f_{\zeta_{l_1}} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_{l_1}} = 1, \dots, \tilde{\tau}_{\zeta_{l_1}}$, $\zeta_{l_1} = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_{l_1}$, $l_1 = 1, \dots, s_1$, а вещественные числа τ_l и $\varphi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}$ находятся из линейных однородных уравнений

$$\rho_l \tau_l + \rho_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \varphi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} = 0 \quad \text{при условии } |\tau_l| + \left| \varphi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \right| \neq 0, \quad l = 1, \dots, s, \quad l_1 = 1, \dots, s_1.$$

Теорема 5.26. Пусть гамильтонова система (0.1) имеет комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.10) такие, что верны тождества (4.11) при условиях (4.22). Кроме того гамильтонова система (0.1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы (4.24) такие, что верны тождества (5.20) при условиях (5.23). Тогда первыми интегралами гамильтоновой системы (0.1) будут функции

$$F_{ll_1}: (q, p) \rightarrow \tau_l A_l(q, p) + \psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}(q, p) \quad \forall (q, p) \in G, \quad l = 1, \dots, s, \quad l_1 = 1, \dots, s_1,$$

где функции $A_l: G \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, s$, определяются по формулам (4.16), фиксированные

числа $f_{\zeta_{l_1}} \in \mathbb{N}$, $g_{\zeta_{l_1}} = 1, \dots, \tilde{\tau}_{\zeta_{l_1}}$, $\zeta_{l_1} = 1, \dots, \tilde{\epsilon}_{l_1}$, $l_1 = 1, \dots, s_1$, а вещественные числа τ_l и $\psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)}$ находятся из линейных однородных уравнений

$$\rho_l \tau_l + \sigma_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} = 0 \quad \text{при условии} \quad |\tau_l| + \left| \psi_{l_1 f_{\zeta_{l_1}} g_{\zeta_{l_1}}}^{(1)} \right| \neq 0, \quad l = 1, \dots, s, \quad l_1 = 1, \dots, s_1.$$

5.7. Построение неавтономных дополнительных первых интегралов гамильтоновой системы по кратным комплекснозначным полиномиальным частным интегралам

Методом аналогично использованному при доказательстве теорем 2.4, 4.14 и 4.15 устанавливаем следующие закономерности.

Теорема 5.27. Если гамильтонова система (0.1) имеет кратный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (4.1) кратности $\mathfrak{z} = 1 + \sum_{\zeta=1}^{\epsilon} \tau_{\zeta}$ и существует такое $\zeta \in \{1, \dots, \epsilon\}$, что в тождествах (5.3) при фиксированном $g_{\zeta} \in \{1, \dots, \tau_{\zeta}\}$ у полинома $\Re \mathfrak{R}_{f_{\zeta} g_{\zeta}} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ вещественная часть

$$\operatorname{Re} \mathfrak{R}_{f_{\zeta} g_{\zeta}}(q, p) = \lambda \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

то скалярная функция

$$F : (t, q, p) \rightarrow \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{f_{\zeta} g_{\zeta}}(q, p) - \lambda t \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R} \times G \subset \mathbb{R}^{2n+1}$$

будет неавтономным первым интегралом гамильтоновой системы (0.1).

Теорема 5.28. Если гамильтонова система (0.1) имеет кратный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (4.1) кратности $\mathfrak{z} = 1 + \sum_{\zeta=1}^{\epsilon} \tau_{\zeta}$ и существует такое $\zeta \in \{1, \dots, \epsilon\}$, что в тождествах (5.3) при фиксированном $g_{\zeta} \in \{1, \dots, \tau_{\zeta}\}$ у полинома $\Im \mathfrak{R}_{f_{\zeta} g_{\zeta}} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ мнимая часть

$$\operatorname{Im} \mathfrak{R}_{f_{\zeta} g_{\zeta}}(q, p) = \lambda \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

то скалярная функция

$$F : (t, q, p) \rightarrow \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{f_{\zeta} g_{\zeta}}(q, p) - \lambda t \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R} \times G \subset \mathbb{R}^{2n+1}$$

будет первым интегралом гамильтоновой системы (0.1).

Непосредственно из теорем 5.27 и 5.28 получаем

Следствие 5.11. Если гамильтонова система (0.1) имеет кратный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл (4.1) кратности $\mathfrak{z} = 1 + \sum_{\zeta=1}^{\epsilon} \tau_{\zeta}$ и существует такое $\zeta \in \{1, \dots, \epsilon\}$, что в тождествах (5.3) при фиксированном $g_{\zeta} \in \{1, \dots, \tau_{\zeta}\}$ полином

$$\mathfrak{R}_{f_{\zeta} g_{\zeta}}(q, p) = \lambda_1 + i \lambda_2 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

то скалярные функции

$F_1: (t, q, p) \rightarrow \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}_c}(q, p) - \lambda_1 t$ и $F_2: (t, q, p) \rightarrow \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}_c}(t, q, p) - \lambda_2 t \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R} \times G$

будут первыми интегралами на области $\mathbb{R} \times G$ гамильтоновой системы (0.1).

Для обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой системы (5.2), используя кратный (кратность не менее двух) комплекснозначный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}: (q, p) \rightarrow q_2 + i q_1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^4$ такой, что $\mathfrak{M}(q, p) = -\alpha i$ и $\mathfrak{K}_{11}(q, p) = \frac{p_2 + i p_1}{q_2 + i q_1}$, $\mathfrak{R}_{11}(q, p) = -1$, строим на области $\mathbb{R} \times G$, $G \subset \{(q, p): q_2 \neq 0\}$ базис неавтономных первых интегралов

$$F_1: (t, q, p) \rightarrow q_1^2 + q_2^2, \quad F_2: (t, q, p) \rightarrow \arctan \frac{q_1}{q_2} + \alpha t \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R} \times G \quad (\text{следствие 4.15}),$$

$$F_3: (t, q, p) \rightarrow q_1 p_2 - q_2 p_1, \quad F_4: (t, q, p) \rightarrow \frac{q_1 p_1 + q_2 p_2}{q_1^2 + q_2^2} + t \quad \forall (t, q, p) \in \mathbb{R} \times G \quad (\text{следствие 5.11}).$$

Заключение. В работе для обобщенно-консервативной полиномиальной гамильтоновой обыкновенной дифференциальной системы (0.1) определены понятия и сформулированы основные свойства вещественного полиномиального частного интеграла (определение 1.1, свойства 1.1 – 1.6), кратного вещественного полиномиального частного интеграла (определение 2.1, свойство 2.1), условного частного интеграла (определение 3.1, свойства 3.1 и 3.2), комплекснозначного полиномиального частного интеграла (определение 4.1, свойства 4.1 – 4.3, теоремы 4.1 и 4.3) и кратного комплекснозначного полиномиального частного интеграла (определение 5.1, свойства 5.1 и 5.2). Выделить классы полиномиальных гамильтоновых дифференциальных систем, у которых первые интегралы находятся по вещественным полиномиальным частным интегралам (теоремы 1.1 – 1.3, следствия 1.1 – 1.3), кратным вещественным полиномиальным частным интегралам (теоремы 2.1 – 2.3, следствия 2.1 и 2.2), условным частным интегралам (теоремы 3.1 – 3.4, следствия 3.1 – 3.3), комплекснозначным полиномиальным частным интегралам (теоремы 4.2, 4.4 – 4.13, следствия 4.1 – 4.14) и кратным комплекснозначным полиномиальным частным интегралам (теоремы 5.1 – 5.26, следствия 5.1 – 5.10). Получены достаточные признаки построения дополнительных неавтономных первых интегралов по вещественным полиномиальным частным интегралам (теорема 1.4), кратным вещественным полиномиальным частным интегралам (теорема 2.4), условным частным интегралам (теорема 3.5), комплекснозначным полиномиальным частным интегралам (теоремы 4.14 и 4.15, следствие 4.15) и кратным комплекснозначным полиномиальным частным интегралам (теоремы 5.27 и 5.28, следствие 5.11). Приведены примеры полиномиальных гамильтоновых систем, на которых проиллюстрированы теоретические исследования.

Полученные в данной статье результаты могут быть применены в аналитической теории дифференциальных уравнений и в аналитической механике.

Благодарность. Автор выражает благодарность и глубокую признательность профессору В.Н. Горбузову за интерес к работе и полезные обсуждения.

Статья подготовлена в рамках проекта Horizon2020-2017-RISE-777911.

Список литературы

1. *Darboux G.* Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré // Bulletin des Sciences Mathématiques. – 1878. – Vol. 2. – P. 60 – 96, 123 – 144, 151 – 200.
2. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* Частные интегралы систем в полных дифференциалах // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 10. – С. 1819 – 1822.
3. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* Частные интегралы обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический сборник. – 1992. – Т. 183, № 3. – С. 76 – 94.
4. *Горбузов В.Н.* Построение первых интегралов и последних множителей полиномиальных автономных многомерных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 562 – 564.
5. *Горбузов В.Н.* Частные интегралы вещественной автономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2000. – № 2. – С. 1 – 36.
6. *Gorbuzov V.N.* Partial integrals of ordinary differential systems // Mathematics. Classical Analysis and ODEs (arXiv:1809.07105 [math.CA], Cornell Univ., Ithaca, New York). – 2018. – 86 p.
7. *Christopher C., Llibre J.* Algebraic aspects of integrability for polynomial systems // Qualitative theory of dynamical systems. – 1999. – Vol. 1. – P. 71 – 95.
8. *Llibre J., Zhang X.* Darboux theory of integrability for polynomial vector fields in R^n taking into account the multiplicity at infinity // Bulletin des Sciences Mathématiques. – 2009. – № 7(133). – P. 765 – 778.
9. *Llibre J., Zhang X.* Darboux theory of integrability in C^n taking into account the multiplicity // Journal of Differential Equations. – 2009. – № 2 (246). – P. 541 – 551.
10. *Горбузов В.Н.* Интегралы систем уравнений в полных дифференциалах. – Гродно: ГрГУ, 2005. – 273 с.
11. *Горбузов В.Н.* Интегралы дифференциальных систем. – Гродно: ГрГУ, 2006. – 447 с.
12. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Построение интегралов линейной дифференциальной системы // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ун-та. Сер. 2. – 2003. – № 2(22). – С. 50 – 60.
13. *Gorbuzov V.N., Pranevich A.F.* First integrals of ordinary linear differential systems // Mathematics. Dynamical Systems (1201.4141v1 [math.DS], Cornell Univ., Ithaca, New York). – 2012. – P. 1 – 75.
14. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Интегралы R-линейных систем в полных дифференциалах // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 49 – 52.
15. *Gorbuzov V.N., Pranevich A.F.* First integrals of linear differential systems // Mathematics. Dynamical Systems (0806.4155v1 [math.CA], Cornell Univ., Ithaca, New York). – 2008. – P. 1 – 37.
16. *Проневич А.Ф.* R-дифференцируемые интегралы систем в полных дифференциалах. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 104 с.

17. Горбузов В.Н., Проневич А.Ф. Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2001. – № 3. – С. 17 – 45.
18. Проневич А.Ф. Интегралы якобиевых систем уравнений в частных производных. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 97 с.
19. Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. – Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1995. – 432 с.
20. Борисов А.В., Мамаев И.С. Современные методы теории интегрируемых систем. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 296 с.
21. Goriely A. Integrability and nonintegrability of dynamical systems. – World Scientific: Advanced series on nonlinear dynamics, 2001. – Vol. 19. – 436 p.
22. Zhang X. Integrability of dynamical systems: algebra and analysis. – Singapore: Springer, 2017. – 380 p.
23. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.
24. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – СПб.: Санкт-Петербургский университет, 2005. – 276 с.
25. Maciejewski A.J., Przybylska M. Darboux polynomials and first integrals of natural polynomial hamiltonian systems // Physics Letters A. – 2004. – Vol. 326. – P. 219 – 226.
26. García I.A., Grau M., Llibre J. First integrals and Darboux polynomials of natural polynomial hamiltonian systems // Physics Letters A. – 2010. – Vol. 374. – P. 4746 – 4748.

**PARTIAL INTEGRALS OF AUTONOMOUS POLYNOMIAL
HAMILTONIAN ORDINARY DIFFERENTIAL SYSTEMS**

A.F. Pranevich

Yanka Kupala State University of Grodno

pranevich@grsu.by

Abstract. In this paper, we consider an autonomous polynomial Hamiltonian ordinary differential system. Sufficient criteria for the construction of first integrals on real polynomial partial integrals, multiple real polynomial partial integrals, conditional partial integrals, complex-valued polynomial partial integrals and multiple complex-valued polynomial partial integrals are obtained. Classes of autonomous polynomial Hamiltonian ordinary differential systems with first integrals which analytically expressed by real polynomial and conditional partial integrals, complex-valued polynomial and conditional partial integrals, real and complex-valued polynomial partial integrals are identified. The examples illustrating the obtained theoretical results are given.

Keywords: Hamiltonian system, first integral, partial integral.