

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 1, 2022

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: jodiff@mail.ru

Прикладные задачи

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ГЕМОДИНАМИКИ

Г. В. Кривовичев, Н. В. Егоров

Санкт-Петербургский государственный университет

Факультет прикладной математики - процессов управления

g.krivovichev@spbu.ru, n.v.egorov@spbu.ru

Аннотация. Одномерные модели гемодинамики в настоящее время широко используются в целях диагностики последствий сердечно-сосудистых заболеваний, хирургических вмешательств и при исследовании влияния патологий сосудов. Модели такого типа строятся посредством осреднения уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости по поперечному сечению сосуда с учетом ряда упрощений. В работе представлены одномерные модели, учитывающие неньютоновские свойства крови. При построении моделей используются реологические соотношения для чистовязких неньютоновских жидкостей, широко используемые для описания неньютоновости крови в рамках двумерных и трехмерных моделей: степенная модель, модели Карро, Карро — Ясуды, Кросса, упрощенная модель Кросса, модель Елесваралу, а также модели, зависящие от величины гематокрита — модель Куимады и модифицированная модель Елесваралу. Для замыкания моделей используется модельное степенное представление безразмерного профиля скорости, при этом в ходе расчетов варьируется параметр этой зависимости. Учет стационарности режима течения приводит к рассмотрению нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения относительно площади поперечного сечения сосуда. Для степенной модели, упрощенной модели Кросса и модели Куимады были получены интегралы этого уравнения. Исследованы условия

существования и единственности решения начальной задачи. При проведении расчетов рассматриваются параметры, характерные для подвздошной артерии. Исследовано влияние профиля скорости и гематокрита на получаемые решения. Показано, что уплощение профиля скорости приводит к уменьшению длины промежутка, на котором существуют стационарные решения. Аналогичная ситуация имеет место и при увеличении гематокрита. Отдельно рассмотрен случай сосуда с наличием стеноза, форма которого задается модельной функцией. Показано, что изменение геометрических параметров влияет на длину промежутка существования решения (приводит либо к уменьшению, либо к увеличению его длины). Полученные решения могут оказаться полезными при сравнении друг с другом разных одномерных моделей крови как вязкой жидкости и при тестировании прикладных программ.

Ключевые слова: одномерные модели, стационарные решения, гемодинамика.

1 Введение

Одномерные математические модели гемодинамики в последние десятилетия широко используются при моделировании процессов, происходящих в системах из большого числа сосудов [1, 2, 3]. Такие модели можно построить посредством осреднения трехмерных уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости по поперечному сечению сосуда при введении ряда предположений [1]. Модели применяются в клинической практике для предсказания последствий наличия патологий сосудов и различных внешних вмешательств [4, 5]. При этом результаты расчетов по одномерным моделям согласуются с осредненными решениями, полученными на основе трехмерных моделей [6]. При масштабном моделировании сердечно-сосудистой системы модели разной размерности могут успешно сочетаться друг с другом [6, 7].

С позиций гидромеханики кровь представляет собой вязкую несжимаемую жидкость [8], обладающую неньютоновскими свойствами [9, 10], что связано с наличием у нее клеточной части. Как показано в экспериментах, вязкость крови зависит от скорости сдвига [11], а также имеют место вязкоупругие [12] и тиксотропные [13] эффекты. Как отмечается в [14], последние два свойства существенно не влияют на поле скоростей, в связи с чем при решении задач о моделировании кровотока в крупных сосудах их можно не учитывать. Жидкости, в реологических соотношениях которых динами-

ческая вязкость зависит только от скоростей деформации, называются чистовязкими или обобщенными ньютоновскими [15]. Характерным примером модели такого типа является т.н. степенная жидкость. Для моделирования крови эта модель использовалась, например, в [16, 17, 18, 19].

Широкий класс моделей чистовязких жидкостей, используемых для описания крови, характеризуется двумя предельными значениями динамической вязкости, отвечающими бесконечно малому и бесконечно большому значениям скорости сдвига. В рамках таких моделей описывается экспериментально наблюдаемое поведение вязкости, которая уменьшается (увеличивается) при увеличении (уменьшении) скорости сдвига [9, 20]. Модели такого типа широко используются для моделирования гемодинамических процессов и сравниваются в [9, 17, 18, 21]. Характерными примерами таких моделей являются: модель Карро [9, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25], модель Карро — Ясуды [9, 18, 20, 22, 23, 24, 26], модель Кросса [9, 17, 18, 21, 23, 27], упрощенная модель Кросса [9, 21, 28] и модель Елесварапу [29, 30, 31, 32].

Другой класс моделей чистовязких жидкостей, часто применяемых в задачах моделирования кровотока — это модели, зависящие от величины гематокрита (объемной доли клеток крови в плазме). Примерами таких моделей являются модель Куимады [10, 17, 21, 23, 33, 34] и модифицированная модель Елесварапу [20].

Следует подчеркнуть, что неньютоновские свойства в рамках одномерных моделей гемодинамики учитывались в весьма малом числе работ. Наиболее подробная модель, в рамках которой учтены нестационарные реологические свойства крови и вязкоупругие эффекты, была предложена в [35]. В этой работе рассмотрена модель на основе обобщенной реологической модели Олдройда и проведено моделирование течения крови в модельной сосудистой системе. Упрощенные модели течения неньютоновских сред в пористых средах в приложении к системе микроциркуляции предложены в [36, 37].

Стационарным решениям уравнений одномерной гемодинамики посвящено значительное число работ (например, см. [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44]). Такие решения могут применяться в разных целях — так, в [44] отмечается, что наличие стационарного режима течения может дать важную информацию об особенностях течения в реальных сосудах — к примеру, слабо меняющиеся во времени течения характерны для сосудов с наличием стеноза [42]. Другое применение стационарных решений связано с построением вычислительных схем, обладающих т.н. *full balanced property*, которое означает способность схемы сохранять все стационарные решения, характерные для задачи. Также

стационарные решения могут использоваться для сравнения разных моделей крови как жидкости и при разных уравнениях состояния [38].

Настоящая работа посвящена получению и анализу стационарных решений одномерных моделей кровотока в случае учета неньютоновских свойств крови. Одномерные модели, как и в случае ньютоновского и невязкого приближений строятся посредством осреднения уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. Аналитически исследованы возможности существования и единственности решений для конкретных неньютоновских моделей. В случае степенной модели, упрощенной модели Кросса и модели Куи-мады удалось получить интегралы стационарных уравнений. В работе исследовано влияние профиля скорости и величины гематокрита на стационарные решения в случае параметров, характерных для подвздошной артерии. Рассмотрен случай сосуда с наличием стеноза и показано влияние его геометрических параметров на поведение стационарного решения.

2 Одномерные модели гемодинамики

Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается системой, состоящей из условия несжимаемости и уравнения движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (1)$$

где t — время, \mathbf{V} — вектор скорости p — давление, \mathbf{T} — тензор вязких напряжений, ρ — постоянная плотность.

Обобщенная ньютоновская жидкость описывается реологическим соотношением [15]:

$$\mathbf{T} = 2\mu(I_2)\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T),$$

где \mathbf{D} — тензор скоростей деформации, I_2 — второй главный инвариант этого тензора, μ — динамическая вязкость. В случае ньютоновской жидкости $\mu = const$.

В Таблице 1 приведены выражения для $\mu(I_2)$ для моделей, широко используемых в литературе для описания крови. В случае ньютоновской модели, значение параметра μ равно $\mu = 0.035 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \cdot \text{с}$ [21, 20, 45]. В случае степенной модели использовались два набора значений параметров: $n = 0.9$, $k = 0.035 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \cdot \text{с}^n$ [45] и $n = 0.82$, $k = 0.09267 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \cdot \text{с}^n$ [46]. В случае модели Карро использовался следующий набор параметров: $\mu_0 = 0.56 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \cdot \text{с}$,

Таблица 1: Выражения динамической вязкости $\mu(I_2)$ для основных реологических моделей, описывающих кровь как вязкую жидкость.

Модель	$\mu(I_2)$
Ньютоновская	$\mu = const$
Степенная	$kI_2^{\frac{n-1}{2}}$
Карро	$\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left(1 + (\lambda\sqrt{I_2})^2\right)^{\frac{n-1}{2}}$
Карро — Ясуды	$\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left(1 + (\lambda\sqrt{I_2})^a\right)^{\frac{n-1}{a}}$
Кросса	$\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\lambda\sqrt{I_2})^m}$
Упрощенная Кросса	$\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \lambda\sqrt{I_2}}$
Елесварару	$\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \frac{1 + \ln(1 + \lambda\sqrt{I_2})}{1 + \lambda\sqrt{I_2}}$
Куимады	$\mu \left(1 - \frac{1}{2}k_Q H\right)^{-2}, k_Q = \frac{k_0 + k_\infty \sqrt{\frac{\sqrt{I_2}}{\dot{\gamma}_c}}}{1 + \sqrt{\frac{\sqrt{I_2}}{\dot{\gamma}_c}}}$

$\mu_\infty = 0.0345 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \cdot \text{с}$, $\lambda = 3.313 \text{ с}$, $n = 0.3568$ [9, 17, 21, 22, 20, 45, 47]. В случае модели Карро — Ясуды параметры $\mu_0 = 0.22 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \cdot \text{с}$, $\mu_\infty = 0.022 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \cdot \text{с}$, $\lambda = 0.110 \text{ с}$, $n = 0.392$, $a = 0.644$ брались из [14]. Для модели Кросса параметры брались из [17, 21] равными $\mu_0 = 0.364 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \cdot \text{с}$, $\mu_\infty = 0.0345 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \cdot \text{с}$, $\lambda = 0.38 \text{ с}$, $m = 1.45$. В случае упрощенной модели Кросса использовались значения $\mu_0 = 1.3 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \cdot \text{с}$, $\mu_\infty = 0.05 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \cdot \text{с}$, $\lambda = 8 \text{ с}$ [9]. Для модели Елесварару параметры брались равными $\mu_0 = 0.736 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \cdot \text{с}$, $\mu_\infty = 0.05 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \cdot \text{с}$, $\lambda = 14.81 \text{ с}$ [21, 30]. Для модифицированной модели Елесварару μ_∞ , μ_0 и λ задаются как: $\mu_\infty = m_\infty(0.2114 + 0.9067H + 1.9879H^2)$, $\mu_0 = m_0(0.1293 - 1.7912H + 7.6047H^2)$ и $\lambda = l(2.4024H - 2.3810H^2)$, где H — гематокрит, а параметры m_0, m_∞, l есть параметры обычной модели Елесварару [20]. В случае модели Куимады параметры брались из [17, 21, 33]: $\mu = 0.012 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \cdot \text{с}$, $k_0 = 4.33$, $k_\infty = 2.07$, $\dot{\gamma}_c = 1.88 \frac{1}{\text{с}}$.

Как показано в [1, 35, 48] при введении ряда упрощений система (1) может быть сведена к виду:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rz}), \quad (2)$$

где (r, z) — цилиндрические координаты, $P = P(t, z)$ — давление, отвечающее поперечному сечению сосуда в точке z , V_r, V_z, T_{rz} компоненты вектора \mathbf{V} и тензора \mathbf{T} .

Предполагается, что для V_z справедливо следующее представление [1]:

$$V_z(t, z) = U(t, z) s \left(\frac{r}{R(t, z)} \right), \quad (3)$$

где U — средняя по поперечному сечению скорость крови, R — радиус сосуда, s — безразмерный профиль скорости.

После осреднения (2) получается система следующего вида:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A \partial P}{\rho \partial z} = f(A, Q), \quad (4)$$

где $A = A(t, z)$ — площадь поперечного сечения, $Q = Q(t, z)$ — объемный расход, f — вязкий член, вычисляемый следующим образом:

$$f(A, Q) = \frac{2\pi}{R} T_{rz}|_{r=R},$$

а α представляет собой коэффициент Буссинеска, вычисляемый как:

$$\alpha = \frac{\int s^2 dS}{A},$$

где σ — поперечное сечение сосуда.

Система (4) замыкается уравнением состояния $P = P(A)$. Для артерий в литературе широко применяется уравнение вида [6, 3]:

$$P - P_{ext} = P_d + \frac{\beta}{A_d} (\sqrt{A} - \sqrt{A_d}), \quad (5)$$

где P_{ext} — внешнее давление, A_d и P_d — площадь поперечного сечения и давление при диастоле, $\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} E h$, где E — модуль Юнга, h — толщина сосудистой стенки.

После подстановки (5) в (4), второе уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \gamma \sqrt{A} \frac{\partial A}{\partial z} = f(A, Q),$$

где $\gamma = \frac{\beta}{2A_d \rho}$.

Введем безразмерные переменные:

$$z := \frac{z}{L_C}, \quad t := \frac{t}{T_C}, \quad A := \frac{A}{A_C}, \quad P := \frac{P}{\rho U_C^2}, \quad Q := \frac{Q}{A_C U_C},$$

где L_C есть длина сосуда, U_C — скорость пульсовой волны при среднем давлении, T_C — характерное время, вычисляемое через L_C и U_C , $A_C = A_d$. Для конкретных сосудов эти значения можно вычислить по данным, приведенным в [6].

В безразмерных переменных, система уравнений одномерной гемодинамики записывается таким образом:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} + \frac{2\chi}{3} A^{\frac{3}{2}} \right) = f(A, Q), \quad (6)$$

где $\chi = \gamma \sqrt{A_C} / U_C^2$. Безразмерные выражения для $f(A, Q)$, соответствующие реологическим соотношениям из Таблицы 1, представлены в Таблице 2.

В случае, когда A_d зависит от z (например, при наличии локальных сужений или расширений), второе уравнение в (6) принимает вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} + \frac{\kappa A^{\frac{3}{2}}}{3A_d(z)} \right) = f + \kappa A \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sqrt{A_d(z)}} \right) - \frac{2\kappa}{3} A^{\frac{3}{2}} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{A_d(z)} \right),$$

где $\kappa = \beta / (\rho \sqrt{A_C} U_C^2)$.

Для окончательного замыкания модели требуется задать выражение для профиля скорости $s(y)$, $y = r/R$, фигурирующее в (3). Также через $s(y)$ вычисляется коэффициент α , а значение $s'(1)$ фигурирует в коэффициентах члена $f(A, Q)$. Выражение для $s(y)$ можно получить, решив задачу о течении вязкой жидкости в цилиндрической трубе постоянного сечения. Точное решение такой задачи можно получить только в случае степенной модели (случай $n = 1$ отвечает ньютоновской жидкости) [15]:

$$s(y) = \frac{3n + 1}{n + 1} \left(1 - y^{1 + \frac{1}{n}} \right).$$

Значение α в этом случае вычисляется следующим образом:

$$\alpha = \frac{3n + 1}{2n + 1}.$$

Для остальных моделей профиль скорости можно получить только численно. При этом вид $s(y)$ может зависеть не только от самой модели, но и от условий течения (например, см. [24]).

Для течения крови в крупных сосудах характерен приплюснутый профиль скорости [8]. Отметим, что в работах, где рассматривались двух- и трехмерные модели с учетом неньютоновских свойств, были получены как

Таблица 2: Выражения вязкого члена $f(A, Q)$ для одномерных моделей гемодинамики.

Модель	$f(A, Q)$
Ньютоновская	$-\varepsilon s'(1) \frac{Q}{A}$ $\varepsilon = \frac{KT_C}{A_C}, K = -\frac{2\pi\mu}{\rho}$
Степенная	$-\varepsilon s'(1) s'(1) ^{n-1} \frac{Q Q ^{n-1}}{A^{\frac{3n-1}{2}}}$ $\varepsilon = \frac{KU_C^{n-1} T_C}{A_C^{\frac{n+1}{2}}}, K = -\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}} k}{\rho}$
Карро	$-\varepsilon s'(1) \frac{Q}{A} - s'(1) \xi \left(1 + (s'(1))^2 \zeta \frac{Q^2}{A^3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{Q}{A}$ $\varepsilon = \frac{K_1 T_C}{A_C}, \xi = \frac{K_2 T_C}{A_C}, \zeta = \frac{K_3 U_C^2}{A_C}$ $K_1 = -\frac{2\pi\mu_\infty}{\rho}, K_2 = -\frac{2\pi(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho}, K_3 = \lambda^2 \pi$
Карро — Ясуды	$-\varepsilon s'(1) \frac{Q}{A} - s'(1) \xi \left(1 + s'(1) ^a \zeta \frac{ Q ^a}{A^{\frac{3a}{2}}}\right)^{\frac{n-1}{a}} \frac{Q}{A}$ $\varepsilon = \frac{K_1 T_C}{A_C}, \xi = \frac{K_2 T_C}{A_C}, \zeta = \frac{K_3 U_C^a}{A_C^{\frac{a}{2}}}$ $K_1 = -\frac{2\pi\mu_\infty}{\rho}, K_2 = -\frac{2\pi(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho}, K_3 = \lambda^a \pi^{\frac{a}{2}}$
Кросса	$-\varepsilon s'(1) \frac{Q}{A} - \xi s'(1) \frac{1}{1 + \zeta s'(1) ^m \frac{ Q ^m}{A^{\frac{3m}{2}}}} \frac{Q}{A}$ $\varepsilon = \frac{K_1 T_C}{A_C}, \xi = \frac{K_2 T_C}{A_C}, \zeta = \frac{K_3 U_C^m}{A_C^{\frac{m}{2}}}$ $K_1 = -\frac{2\pi\mu_\infty}{\rho}, K_2 = -\frac{2\pi(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho}, K_3 = \lambda^m \pi^{\frac{m}{2}}$
Упрощенная Кросса	$-\varepsilon s'(1) \frac{Q}{A} - \xi s'(1) \frac{1}{1 + \zeta s'(1) \frac{ Q }{A^{\frac{3}{2}}}} \frac{Q}{A}$ $\varepsilon = \frac{K_1 T_C}{A_C}, \xi = \frac{K_2 T_C}{A_C}, \zeta = \frac{K_3 U_C}{\sqrt{A_C}}$ $K_1 = -\frac{2\pi\mu_\infty}{\rho}, K_2 = -\frac{2\pi(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho}, K_3 = \lambda \sqrt{\pi}$
Елесварапу	$-\varepsilon s'(1) \frac{Q}{A} - \xi s'(1) \frac{1 + \ln\left(1 + \zeta s'(1) \frac{ Q }{A^{\frac{3}{2}}}\right)}{1 + \zeta s'(1) \frac{ Q }{A^{\frac{3}{2}}}} \frac{Q}{A}$ $\varepsilon = \frac{K_1 T_C}{A_C}, \xi = \frac{K_2 T_C}{\sqrt{A_C} U_C}, \zeta = \frac{K_3 U_C}{\sqrt{A_C}}$ $K_1 = -\frac{2\pi\mu_\infty}{\rho}, K_2 = -\frac{2\pi(\mu_0 - \mu_\infty)}{\rho}, K_3 = \lambda \sqrt{\pi}$
Куимады	$-\varepsilon s'(1) \left(1 - \frac{H}{2} \frac{k_0 + k_\infty \zeta \sqrt{ s'(1) } \frac{\sqrt{ Q }}{A^{\frac{3}{4}}}}{1 + \zeta \sqrt{ s'(1) } \frac{\sqrt{ Q }}{A^{\frac{3}{4}}}}\right)^{-2} \frac{Q}{A}$ $\varepsilon = \frac{K_1 T_C}{A_C}, \zeta = \frac{K_2 \sqrt{U_C}}{A_C^{\frac{1}{4}}}, K_1 = -\frac{2\pi\mu}{\rho}, K_2 = \frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\gamma_c}}$

раз подобные профили скорости (например, см. [9, 24, 26]). В работах по одномерным ньютоновским моделям [7, 1, 48, 6], характерный для крови профиль скорости воспроизводится с помощью зависимости вида:

$$s(y) = \frac{d+2}{d} (1 - y^d), \tag{7}$$

при соответствующем значении безразмерного параметра d . Графики зависимости (7) при разных d представлены на Рис. 1. В работе [35], где рассмат-

ривается одномерная неньютоновская модель кровотока, используется аналогичный подход, только вместо $s(y)$ используется профиль $s(t, y)$, полученный для случая пульсирующего течения ньютоновской жидкости.

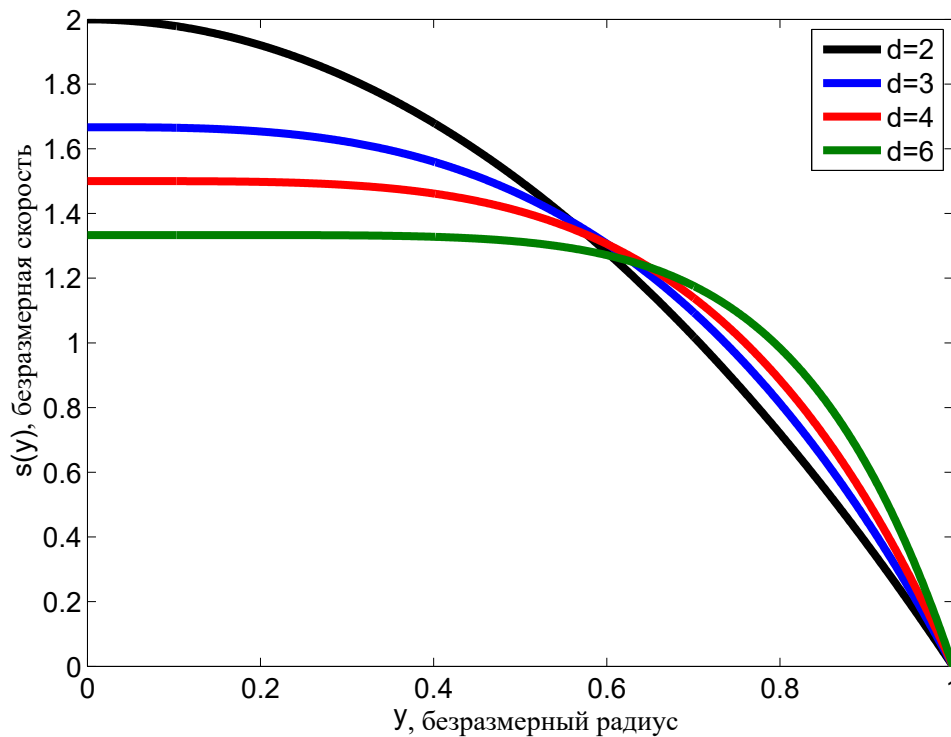


Рис. 1: Графики безразмерного профиля скорости $s(y)$ при разных значениях d .

В настоящей работе в качестве выражения для $s(y)$ будет использоваться выражение вида (7), при этом значение d будет варьироваться с целью исследования влияния изменения профиля скорости на решение. При этом разные значения d могут отвечать разным условиям течения. Значение α , отвечающее (7), вычисляется по формуле:

$$\alpha = \frac{d + 2}{d + 1}.$$

3 Стационарные решения уравнений гемодинамики

Стационарные режимы течения определяются условием $\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$. Таким образом, из первого уравнения системы (6) получим: $Q = Q_0 = const$ (ниже будет рассмотрен случай $Q_0 > 0$ — так называемое 'moving steady state' [43], случай $Q_0 = 0$ называется 'dead man steady state'). Рассмотрим случай $A_d = const$. Второе уравнение сведется к нелинейному обыкновенному

дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dz} \left(\alpha \frac{Q_0^2}{A} + \frac{2\chi}{3} A^{\frac{3}{2}} \right) = f(A, Q_0). \quad (8)$$

После интегрирования (8) получим нелинейное уравнение для нахождения $A(z)$:

$$F(A(z)) - F(A_0) + Q_0(z - z_0) = 0, \quad (9)$$

где $A_0 = A(z_0)$. Необходимо отметить, что (8) можно точно проинтегрировать только для нескольких моделей. В общем случае, интегрирование проводится численно.

Уравнение (9) представляет собой интеграл уравнения (8). Выпишем выражения для $F(A)$, которые можно получить аналитически:

1) Ньютоновская модель.

$$F(A) = \frac{1}{s'(1)\varepsilon} \left(-\alpha Q_0^2 \ln(A) + \frac{2\chi}{5} A^{\frac{5}{2}} \right).$$

2) Степенная модель.

$$F(A) = \frac{1}{\varepsilon Q_0^{n-1} s'(1) |s'(1)|^{n-1}} \left(-\frac{2\alpha Q_0^2 A^{\frac{3n-3}{2}}}{3(n-1)} + \frac{2\chi A^{\frac{3n+2}{2}}}{3n+2} \right).$$

3) Упрощенная модель Кросса.

$$\begin{aligned} F(A) = & \frac{1}{s'(1)} \left(\frac{\chi A^{\frac{5}{2}} (\varepsilon^2 + \varepsilon\xi) + \zeta |s'(1)| Q_0 \chi \xi A \varepsilon - \alpha \ln(A) Q_0^2 (\varepsilon + \xi)^2}{\varepsilon (\varepsilon + \xi)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2\alpha \ln(\varepsilon A^{\frac{3}{2}} + \zeta \varepsilon |s'(1)| Q_0 + \xi A^{\frac{3}{2}}) Q_0^2 \xi}{3(\varepsilon + \xi)\varepsilon} + \right. \\ & \left. + \frac{2Q_0^2 \xi \varepsilon \zeta^2 |s'(1)|^{\frac{5}{3}} \chi \ln \left(\sqrt{A} + |s'(1)|^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\zeta \varepsilon Q_0}{\varepsilon + \xi} \right)^{\frac{1}{3}} \right)}{3 \left(\frac{\zeta \varepsilon Q_0}{\varepsilon + \xi} \right)^{\frac{1}{3}} (\varepsilon + \xi)^3} - \right. \\ & \left. - \frac{Q_0^2 \xi \varepsilon \zeta^2 |s'(1)|^{\frac{5}{3}} \chi}{3 \left(\frac{\zeta \varepsilon Q_0}{\varepsilon + \xi} \right)^{\frac{1}{3}} (\varepsilon + \xi)^3} \left(2\sqrt{3} \arctan \left(\frac{\sqrt{3} \left(2\sqrt{A} - |s'(1)|^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\zeta \varepsilon Q_0}{\varepsilon + \xi} \right)^{\frac{1}{3}} \right)}{3 |s'(1)|^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\zeta \varepsilon Q_0}{\varepsilon + \xi} \right)^{\frac{1}{3}}} \right) \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \ln \left(A - \sqrt{A} |s'(1)|^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\zeta \varepsilon Q_0}{\varepsilon + \xi} \right)^{\frac{1}{3}} + |s'(1)|^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\zeta \varepsilon Q_0}{\varepsilon + \xi} \right)^{\frac{2}{3}} \right).$$

4) Модель Куимады.

$$F(A) = \frac{1}{s'(1)\varepsilon} \left(\frac{\chi A^{\frac{5}{2}}(4 - 4Hk_0 + H^2k_0^2)}{10} - \frac{\alpha Q_0^2 \ln(A)(4 - 4Hk_\infty + H^2k_\infty^2)}{4} - \right. \\ \left. - \frac{2\chi A^{\frac{7}{4}} H \zeta \sqrt{|s'(1)|} \sqrt{Q_0} (-2k_0 + 2k_\infty - Hk_\infty k_0 + Hk_0^2)}{7} + \right. \\ \left. + \frac{\chi A \zeta^2 |s'(1)| Q_0 H (4k_\infty + Hk_\infty^2 - 4k_0 + 3Hk_0^2 - 4Hk_\infty k_0)}{4} - \right. \\ \left. - 2\chi H \zeta^3 |s'(1)|^{\frac{3}{2}} Q_0^{\frac{3}{2}} A^{\frac{1}{4}} (-2k_0 + 2k_\infty + 2Hk_0^2 + Hk_\infty^2 - 3Hk_\infty k_0) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha Q_0^2 H \ln(A^{\frac{3}{4}} + \zeta \sqrt{|s'(1)|} \sqrt{Q_0}) (-4k_0 + Hk_0^2 + 4k_\infty - Hk_\infty^2)}{3} - \right. \\ \left. - \frac{Q_0^2 H^2 \zeta \left((\alpha \sqrt{Q_0} \sqrt{|s'(1)|} + \chi \zeta^3 |s'(1)|^2 A^{\frac{1}{4}}) (k_\infty - k_0)^2 \right)}{3(A^{\frac{3}{4}} + \zeta \sqrt{|s'(1)|} \sqrt{Q_0})} - \right. \\ \left. - \frac{\chi \zeta^4 |s'(1)|^{\frac{5}{3}} Q_0^2 H (12k_\infty + 7Hk_\infty^2 - 12k_0 + 13Hk_0^2 - 20Hk_\infty k_0)}{18(\zeta \sqrt{Q_0})^{\frac{2}{3}}} \times \right. \\ \left. \times \left(\ln \left(\sqrt{A} - A^{\frac{1}{4}} |s'(1)|^{\frac{1}{6}} (\zeta \sqrt{Q_0})^{\frac{1}{3}} + |s'(1)|^{\frac{1}{3}} (\zeta \sqrt{Q_0})^{\frac{2}{3}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\sqrt{3} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}(-2A^{\frac{1}{4}} + |s'(1)|^{\frac{1}{6}} (\zeta \sqrt{Q_0})^{\frac{1}{3}})}{3(|s'(1)|^{\frac{1}{6}} (\zeta \sqrt{Q_0})^{\frac{1}{3}})} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \ln \left(A^{\frac{1}{4}} + |s'(1)|^{\frac{1}{6}} (\zeta \sqrt{Q_0})^{\frac{1}{3}} \right) \right) \right).$$

Решения (9) существуют для тех z , при которых $F(A_{\min}) \leq F(A_0) - Q_0(z - z_0)$, где A_{\min} есть точка минимума функции $F(A)$. Таким образом, по поведению $F(A)$ можно исследовать возможность существования и единственности стационарного решения системы (6).

Для ньютоновской и степенной моделей, а также моделей Карро и Карро — Ясуды $F(A)$ является строго выпуклой при $A > 0$ с единственной точкой минимума $\tilde{A} = \left(\frac{\alpha Q_0^2}{\chi}\right)^{\frac{2}{5}}$. Таким образом, для тех z , при которых $F(\tilde{A}) < F(A_0) - Q_0(z - z_0)$ уравнение (9) имеет два решения. Единственное решение имеет место в случае $A(z) = \tilde{A}$.

В случае модели Кросса $F(A)$ имеет две точки минимума: \tilde{A} и $(|s'(1)|Q_0)^{\frac{2}{3}}(-\zeta)^{\frac{2}{3m}}$. Таким образом, возможна ситуация когда существует четыре решения уравнения (9). Но необходимо отметить, что значение ζ для крупных артерий велики ($\sim 10^3 - 10^4$), так что вторая точка просто не реализуется при физиологических условиях и в работе рассматриваться не будет. Аналогичная ситуация имеет место для упрощенной модели Кросса, модели Елесварапу и ее модифицированного варианта, когда F имеет две точки минимума: \tilde{A} и $(-\zeta Q_0 |s'(1)|)^{\frac{2}{3}}$. Значения ζ при этом лежат в диапазоне $10^3 - 10^5$.

Для модели Куимады F имеет точку минимума \tilde{A} , не зависящую от H и точку перегиба $\left(\frac{(Hk_\infty - 2)\zeta \sqrt{|s'(1)|Q_0}}{Hk_0 - 2}\right)^{\frac{4}{3}}$, в которой $F(A) > 0$. Таким образом, в случае этой модели тоже существует либо два, либо одно решение.

При численных расчетах решения (9) при фиксированном z находились с помощью метода Ньютона. При $A_d = A_d(z)$ получить точные интегралы не удалось.

4 Результаты расчетов

В настоящем разделе представлены стационарные решения для случая, когда параметры L_C , A_C , U_C брались из [6] для подвздошной артерии. Плотность крови, как и в большинстве работ по математическим моделям гемодинамики, бралась равной $1.05 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Значение χ при таких параметрах равно 0.9739. Для проведения расчетов брались значения $z_0 = 0$, $Q_0 = 1$, $A_0 = \pi(0.1)^2$.

Как отмечается в [38], для течения крови в физиологических условиях характерно значение числа Маха M , меньшее единицы. Значение M вычисляется как U/c , где $c = \sqrt{\frac{A dP}{\rho dA}}$ есть скорость пульсовой волны. В случае урав-

нения состояния (5) для M справедливо следующее выражение: $M = \sqrt{\frac{\chi Q_0^2}{A^{\frac{5}{2}}}}$.

4.1 Случай постоянного значения A_d

В случае решений, полученных для ньютоновской и степенной жидкостей, параметр ε имеет следующие значения: ≈ -0.002 для ньютоновской жидкости, $\approx -9.99 \cdot 10^{-4}$ для степенной жидкости с параметрами из [45] и ≈ -0.0016 для случая параметров из [46]. На Рис. 2, а представлены графики $A(z)$. Можно отметить, что отклонение n от единицы приводит к расширению интервала существования решения. На Рис. 2, б представлены графики $M(z)$ — как можно видеть, случай $M < 1$ отвечает решению с большими значениями $A(z)$, что очевидно и из формулы для M .

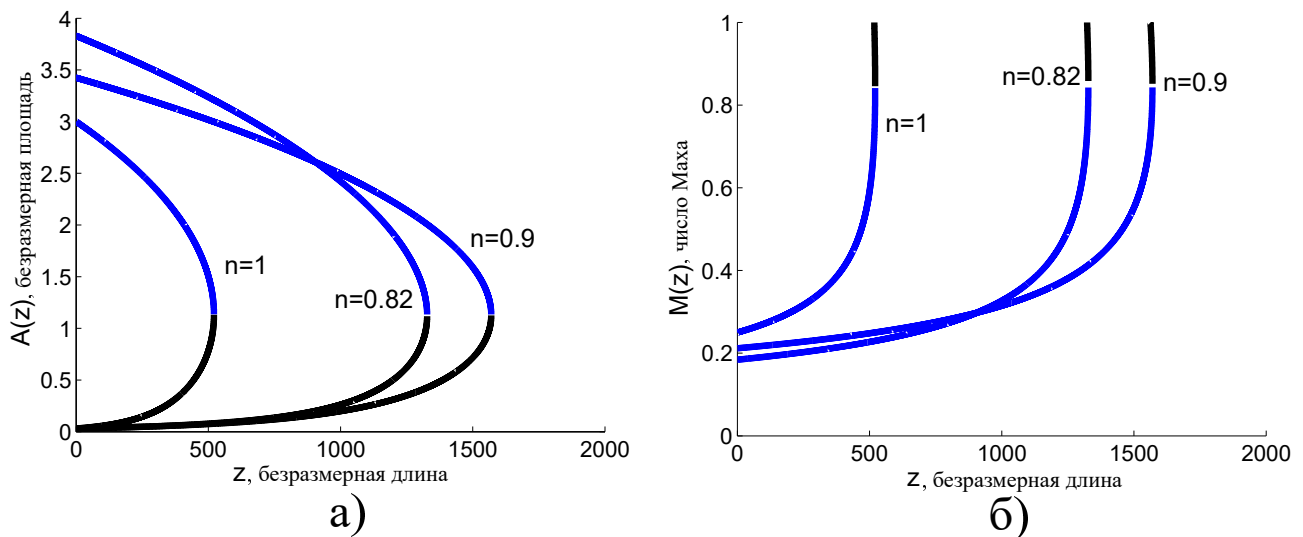


Рис. 2: Графики стационарных решений (а) и числа Маха (б) для ньютоновской ($n = 1$) и степенной моделей. Черная и синяя кривые отвечают разным решениям.

В случае модели Карро имеют место следующие значения безразмерных параметров: $\varepsilon \approx -0.002$, $\xi \approx -0.0305$, $\zeta \approx 1.66957179 \cdot 10^7$. В случае модели Карро — Ясуды $\varepsilon \approx -0.0012$, $\xi \approx -0.0115$, $\zeta \approx 23.62$. Для модели Кросса $\varepsilon \approx -0.002$, $\xi \approx -0.0191$, $\zeta \approx 7.4602 \cdot 10^3$. В случае упрощенной модели Кросса $\varepsilon \approx -0.0029$, $\xi \approx -0.0727$, $\zeta \approx 9.8666 \cdot 10^3$. Для модели Елесварану $\varepsilon \approx -0.0029$, $\xi \approx -0.0399$, $\zeta \approx 1.82656 \cdot 10^4$. Графики решений представлены на Рис. 3, а–д. Отметим, что для случая всех моделей увеличение d приводит к уменьшению промежутка существования стационарных решений. При этом при всех значениях d среди неньютоновских моделей наибольшей дли-

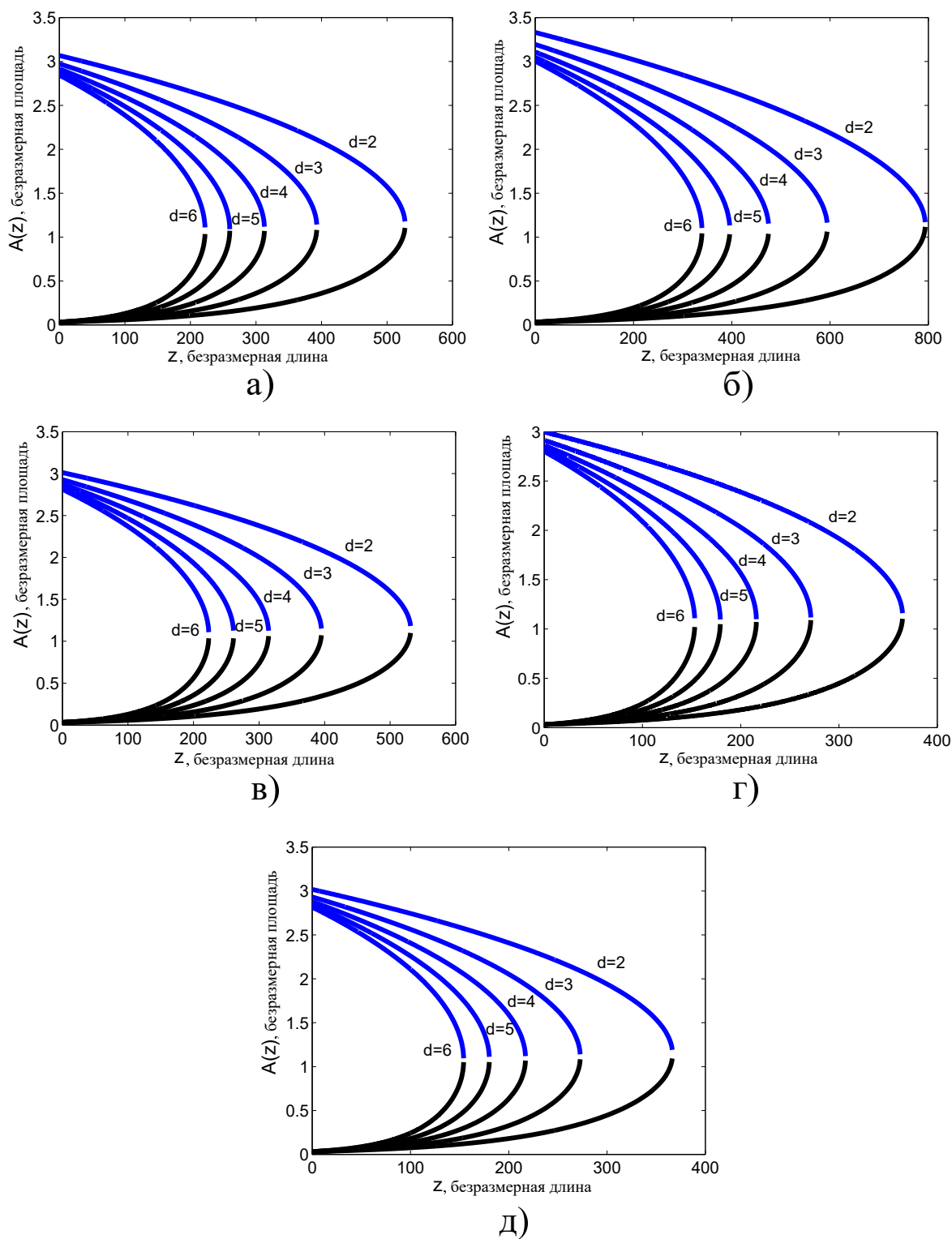


Рис. 3: Графики стационарных решений при различных значениях d : а) модель Карро; б) модель Карро — Ясуды; в) модель Кросса; г) упрощенная модель Кросса; д) модель Елесварапу.

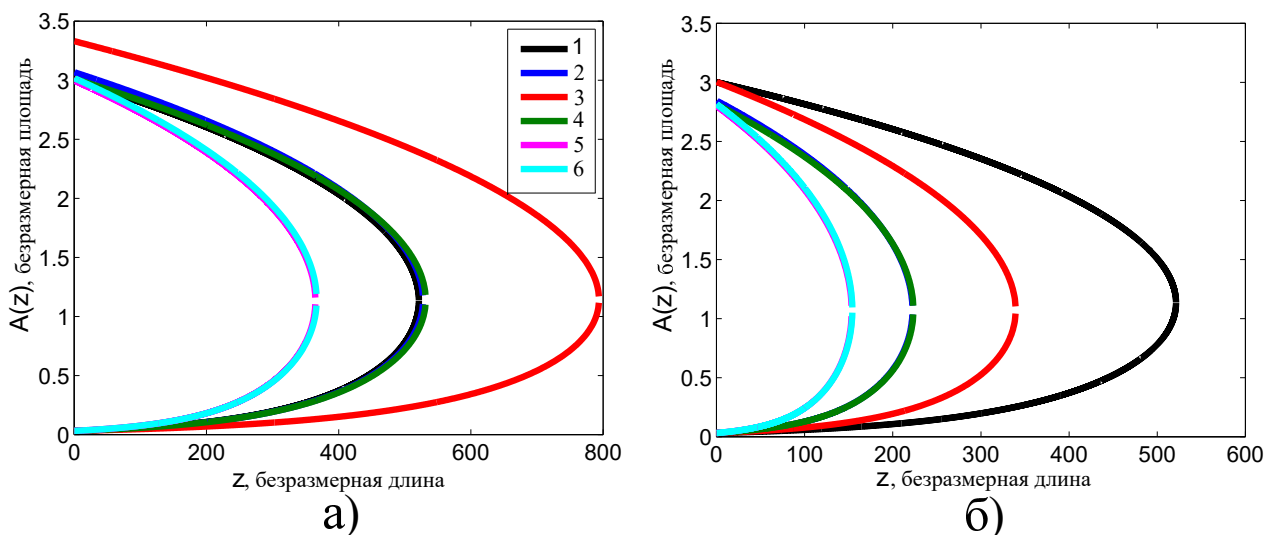


Рис. 4: Графики стационарных решений при значениях $d = 2$ (а) и $d = 6$ (б) в сравнении с решением для ньютоновской модели (всегда отвечает параболическому профилю ($d = 2$)): 1 — ньютоновская жидкость; 2 — модель Карро; 3 — модель Карро — Ясуды; 4 — модель Кросса; 5 — упрощенная модель Кросса; 6 — модель Елесварану.

ной обладают промежутки, отвечающие модели Карро — Ясуды. Как можно видеть, в связи со значениями ζ , большими по сравнению с ε , доминирующим в $f(A, Q)$ является член $-\varepsilon s'(1)Q/A$, в связи с чем решения для моделей с близкими значениями ε оказываются близкими. На Рис. 4 представлены графики решений, отвечающие разным моделям при $d = 2$ и $d = 6$ в сравнении с решением для случая модели ньютоновской жидкости.

Для моделей, зависящих от H , безразмерные параметры имеют следующие значения: $\varepsilon \approx -6.98 \cdot 10^{-4}$, $\xi \approx 25.61$. В случае модифицированной модели Елесварану значения ε , ξ и ζ зависят от H — при $H = 0.4$ $\varepsilon \approx -0.0025$, $\xi \approx -0.0243$, $\zeta \approx 1.05941 \cdot 10^4$, при $H = 0.5$ $\varepsilon \approx -0.0033$, $\xi \approx -0.0452$, $\zeta \approx 1.106809 \cdot 10^4$. На Рис. 5 представлены графики решений, отвечающих этим моделям при $H = 0.4$ и $H = 0.5$, соответственно. Как можно видеть, при увеличении H и d происходит сужение промежутков существования стационарных решений. При этом наименьшие длины характерны для промежутков, соответствующим решениям для модифицированной модели Елесварану (Рис. 5, б).

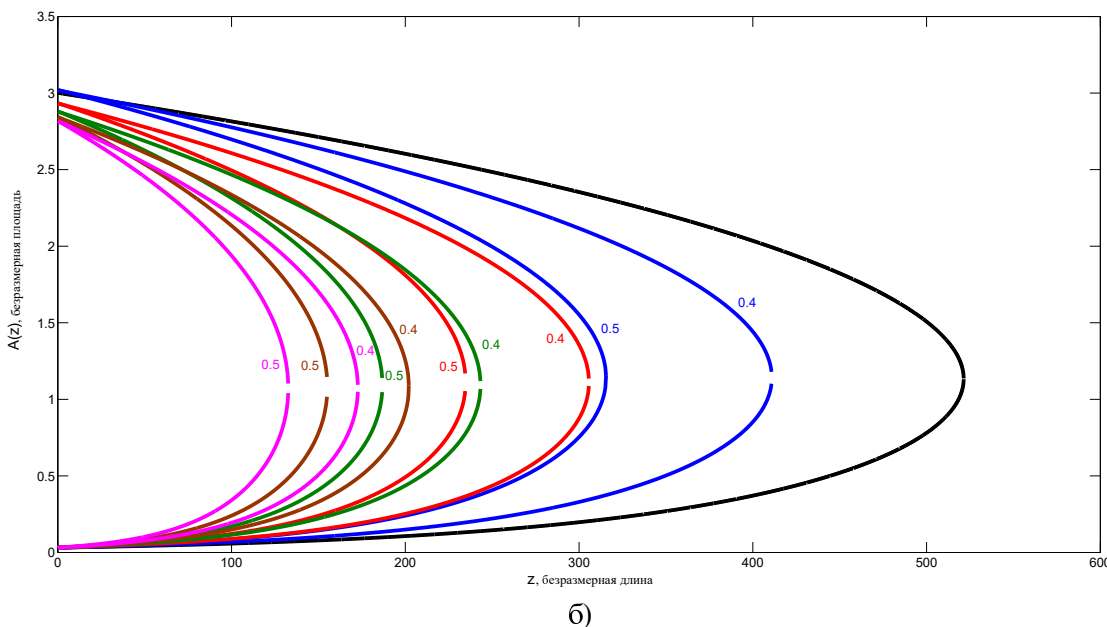
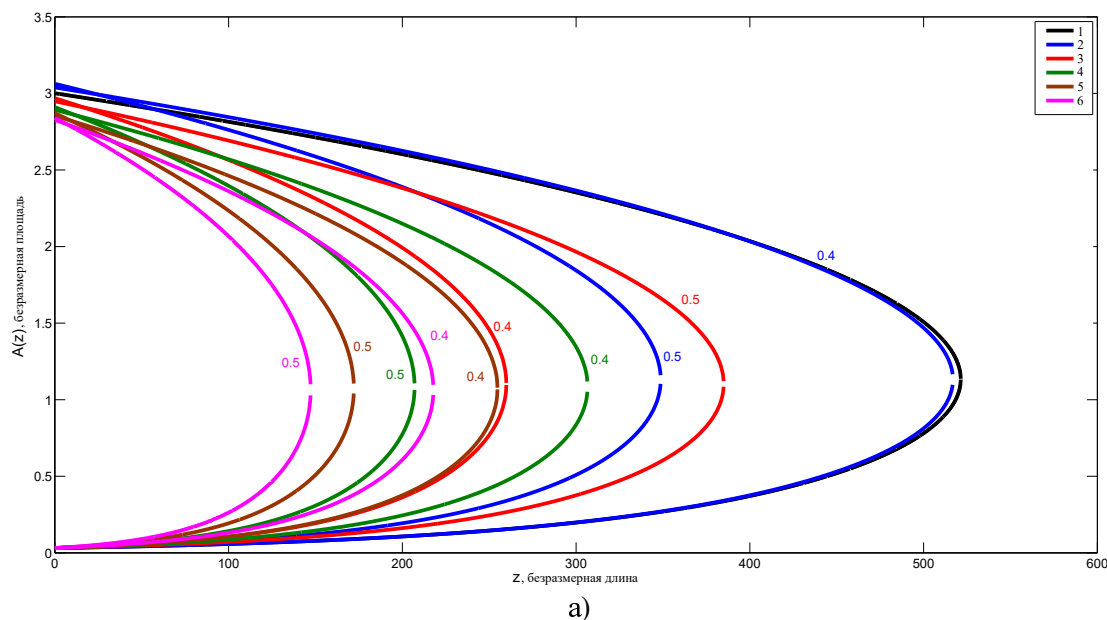


Рис. 5: Графики стационарных решений для моделей Куимады (а) и модифицированной модели Елесварпу (б) при $H = 0.4$ и $H = 0.5$ при разных значениях d в сравнении с решением для модели ньютоновской жидкости: 1 — ньютоновская жидкость; 2 — $d = 2$; 3 — $d = 3$; 4 — $d = 4$; 5 — $d = 5$; 6 — $d = 6$.

4.2 Случай $A_d = A_d(z)$

Рассмотрим ситуацию, когда A_d задается функцией, зависящей от z . При ее специальном задании можно моделировать влияние локального сужения

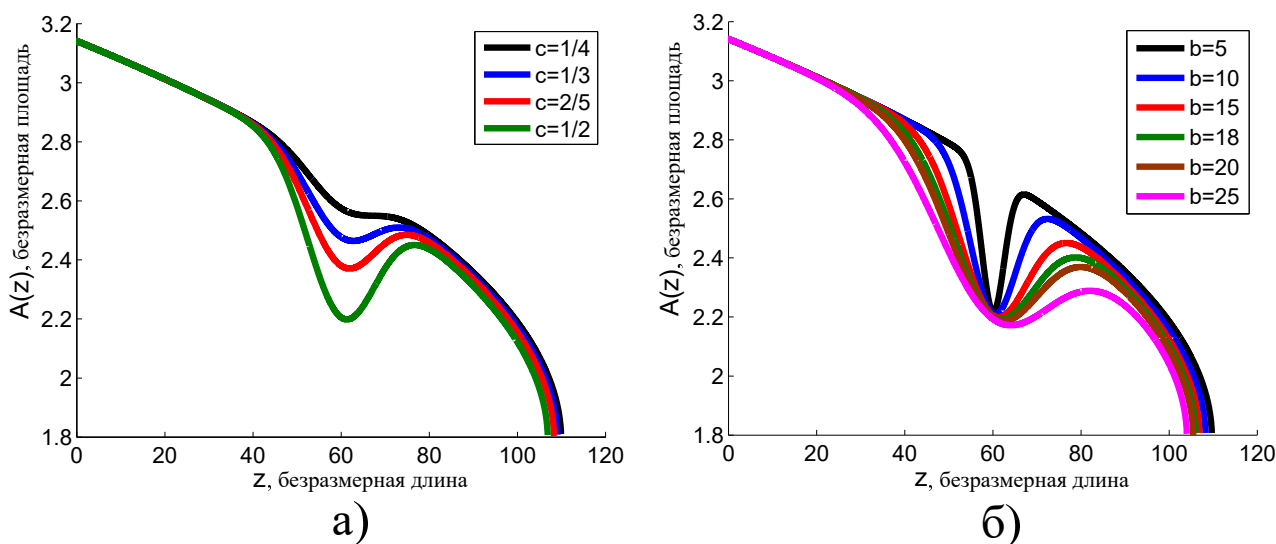


Рис. 6: Графики стационарных решений при $A_d = A_d(z)$ при $b = 15$ и разных c (а), при $c = \frac{1}{2}$ и разных b (б).

(стеноза) в сосуде на поведение стационарных решений. Предположим, что A_d задается следующим образом:

$$A_d(z) = A_0 - \pi c^2 \exp^2 \left(\frac{-(z - \frac{L}{2})^2}{b^2} \right),$$

где за счет параметров c и b регулируется высота и ширина сужения соответственно, параметр L задает возможную длину промежутка, на котором существует решение.

Численное решение производилось при следующих параметрах: $A_0 = \pi$, $Q_0 = 1$. Численное решение задачи Коши для аналога уравнения (8) при переменном A_d производилось с помощью неявного метода Рунге — Кутты второго порядка.

Поскольку для всех моделей крови как вязкой жидкости качественное поведение решения оказалось одинаковым, рассмотрим влияние параметров c и b только для случая ньютоновской модели. При проведении численных расчетов бралось значение $L = 120$.

На Рис. 6 представлены графики численных решений, полученных при разных значениях c и b . Как можно видеть, изменение высоты сужения (Рис. б, а) незначительно сужает интервал существования стационарного решения. Увеличение ширины сужения также уменьшает длину этого промежутка.

5 Заключение

В работе предложены одномерные модели гемодинамики, учитывающие неньютоновские свойства крови. Как и в большинстве работ, модели получены посредством осреднения уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости по поперечному сечению сосуда. Одномерная модель представляет собой гиперболическую систему из двух нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. Исследуются стационарные решения этой системы в случае сосуда с $A_d = const$ и $A_d = A_d(z)$. Основными результатами работы можно считать следующие:

1) Для степенной модели, упрощенной модели Кросса и модели Куимады получены интегралы уравнения, описывающего стационарный режим течения.

2) Для всех рассмотренных моделей исследованы условия существования и единственности стационарных решений.

3) В результате численных расчетов исследовано влияние профиля скорости и гематокрита на интервал существования стационарного решения. Показано, что характерное для крови уплощение профиля скорости приводит к уменьшению длины этого промежутка, как и увеличение гематокрита.

4) В случае сосуда с переменным A_d , моделирующим наличие стеноза, показано, что изменение высоты и ширины сужения сосуда влияет на длину промежутка существования решения, но не существенно.

Полученные стационарные решения могут оказаться полезными при сравнении друг с другом разных одномерных моделей крови как вязкой жидкости, при разработке конечно-объемных и конечно-разностных схем, обладающих full balanced property, а также при тестировании программ, реализующих численные методы.

Список литературы

- [1] *Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A.* One-dimensional models for blood flow in arteries // *Journal of Engineering Mathematics*, 2003, vol. 251. P. 251–276.
- [2] *Quarteroni A., Manzoni A., Vergara C.* The cardiovascular system: mathematical modelling, numerical algorithms and clinical applications // *Acta Numerica*. 2017, vol. 26. P. 365–590.

- [3] *Toro E. F.* Brain venous haemodynamics, neurological diseases and mathematical modelling: a review // *Applied Mathematics and Computation*, 2015, vol. 272. P. 542–579.
- [4] *Audebert C., Bucur C., Bekheit M., Vibert E., Vignon-Clementel I., Gerbeau J.* Kinetic scheme for arterial and venous blood flow, and application to partial hepatectomy modeling // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, vol. 314. P. 102–125.
- [5] *Marchandise E., Willemet M., Lacroix V.* A numerical hemodynamic tool for predictive vascular surgery // *Medical Engineering and Physics*, 2009, vol. 31. P. 131–144.
- [6] *Xiao N., Alastruey J., Figueroa C.* A systematic comparison between 1-D and 3-D hemodynamics in compliant arterial models // *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. 2014, vol. 30. P. 203–231.
- [7] *Dobroserdova T., Liang F., Panasenko G., Vassilevski Y.* Multiscale models of blood flow in the compliant aortic bifurcation // *Applied Mathematics Letters*. 2019, vol. 93. P. 98–104.
- [8] *Caro C. G., Pedley T. J., Schroter R. C., Seed W. A.* The mechanics of the circulation. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 524 p.
- [9] *Cho Y. I., Kensey K. R.* Effects of the non-Newtonian viscosity of blood on flows in a diseased arterial vessel. Part 1: Steady flows // *Biorheology*, 1991, vol. 28. P. 241–262.
- [10] *Marcinkowska-Gapinska A., Gapinski J., Elikowski W., Jaroszyk F., Kubisz L.* Comparison of three rheological models of shear flow behavior studied on blood samples from post-infarction patients // *Medical and Biological Engineering and Computing*, 2007, vol. 45. P. 837–844.
- [11] *Charm S., Kurland G.* Viscometry of human blood for shear rates of 0-100,000 sec⁻¹ // *Nature*, 1965, vol. 206. P. 617–618.
- [12] *Thurston G.* Viscoelasticity of human blood // *Biophysical Journal*, 1972, vol. 12. P. 1205–1217.
- [13] *Huang C., Siskovic N., Robertson R., Fabisiak W., Smitherberg E., Copley A.* Quantitative characterization of thixotropy of whole human blood // *Biorheology*, 1975, vol. 12. P. 279–282.

- [14] *Gijsen F. G. H., Allanic E., van de Vosse F. N., Janssen J. D.* The influence of non-Newtonian property of blood on the flow in large arteries: unsteady flow in a 90° curved tube // *Journal of Biomechanics*, 1999, vol. 32. P. 705–713.
- [15] *Артюшков Л. С.* Динамика неньютоновских жидкостей. СПб.: Изд. центр Мор. техн. ун-та, 1997. 459 с.
- [16] *Sankar D. S., Hemalatha K.* Non-linear mathematical models for blood flow through tapered tubes // *Applied Mathematics and Computation*, 2007, vol. 188. P. 567–582.
- [17] *Molla M. M., Paul M. C.* LES of non-Newtonian physiological blood flow in a model of arterial stenosis // *Medical Engineering and Physics*, 2012, vol. 34. P. 1079–1087.
- [18] *Karimi S., Dabagh M., Vasava P., Dadvar M., Dabir B., Jalali P.* Effect of rheological models on the hemodynamics within human aorta: CFD study on CT image-based geometry // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2014, vol. 207. P. 42–52.
- [19] *Caballero A. B., Lain S.* Numerical simulation of non-Newtonian blood flow dynamics in human thoracic aorta // *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 2015, vol. 18. P. 1200–1216.
- [20] *Ameenuddin M., Anand M., Massoudi M.* Effects of shear-dependent viscosity and hematocrit on blood flow // *Applied Mathematics and Computation*, 2019, vol. 356. P. 299–311.
- [21] *Abbasian M., Shams M., Valizadeh Z., Moshfegh A., Javadzadegan A., Cheng S.* Effects of different non-Newtonian models on unsteady blood flow hemodynamics in patient-specific arterial models with in-vivo validation // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 2020, vol. 186. P. 105185.
- [22] *Soulis J. V., Giannoglou G. D., Chatzizisis Y. S., Seralidou K. V., Parcharidis G. E., Louridas G. E.* Non-Newtonian models for molecular viscosity and wall shear stress in a 3D reconstructed human left coronary artery // *Medical Engineering and Physics*, 2008, vol. 30. P. 9–19.
- [23] *O’Callaghan S., Walsh M., McGloughlin T.* Numerical modelling of Newtonian and non-Newtonian representation of blood in a distal end-to-side vascular bypass graft anastomosis // *Medical Engineering and Physics*, 2006, vol. 28. P. 70–74.

- [24] *Boyd J., Buick J. M., Green S.* Analysis of the Casson and Carreau–Yasuda non-Newtonian blood models in steady and oscillatory flows using the lattice Boltzmann method // *Physics of Fluids*, 2007, vol. 19. P. 093103.
- [25] *Hippelheuser J. E., Lauric A., Cohen A. D., Malek A. M.* Realistic non-Newtonian viscosity modelling highlights hemodynamic differences between intracranial aneurysms with and without surface blebs // *Journal of Biomechanics*, 2014, vol. 47. P. 3695–3703.
- [26] *Elhanafy A., Guaily A., Elsaid A.* Numerical simulation of blood flow in abdominal aortic aneurysms: effects of blood shear-thinning and viscoelastic properties // *Mathematics and Computers in Simulation*, 2019, vol. 160. P. 55–71.
- [27] *Zaman A., Ali N., Sajid M.* Numerical simulation of pulsatile flow of blood in a porous-saturated overlapping stenosed artery // *Mathematics and Computers in Simulation*, 2017, vol. 134. P. 1–16.
- [28] *Iasiello M., Vafai K., Andreozzi A., Bianco N.* Analysis of non-Newtonian effects on low-density lipoprotein accumulation in an artery // *Journal of Biomechanics*, 2016, vol. 49. P. 1437–1446.
- [29] *Yeleswarapu Y. Y., Kameneva M. V., Rajagopal K. R., Antaki J. F.* The flow of blood in tubes: theory and experiment // *Mechanics Research Communications*, 1998, vol. 25. P. 257–262.
- [30] *Nandakumar N., Sahni K. C., Anand M.* Pulsatile flow of a shear thinning model for blood through a two-dimensional stenosed vessel // *European Journal of Mechanics, B/Fluids*, 2015, vol. 49. P. 29–35.
- [31] *Deyranlou A., Niazmand H., Sadeghi M.-R.* Low-density lipoprotein accumulation within a carotid artery with multilayer elastic porous wall: fluid-structure interaction and non-Newtonian considerations // *Journal of Biomechanics*, 2015, vol. 48. P. 2948–2959.
- [32] *Bilgi C., Atalik K.* Effects of blood viscoelasticity on pulsatile hemodynamics in arterial aneurysms // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2020, vol. 279. P. 104263.
- [33] *Skiadopoulos A., Neofytou P., Housiadas C.* Comparison of blood rheological models in patient specific cardiovascular system simulations // *Journal of Hydrodynamics*, 2017, vol. 29. P. 293–304.

- [34] *Elhanafy A., Guaily A.* Numerical investigation of hematocrit variation effect on blood flow in an arterial segment with variable stenosis degree // Journal of Molecular Liquids, 2020, vol. 313. P. 113550.
- [35] *Ghigo A. R., Lagree P.-Y., Fullana J.-M.* A time-dependent non-Newtonian extension of a 1D blood flow model // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2018, vol. 253. P. 36–49.
- [36] *Perdikaris P., Grinberg L., Karniadakis G. E.* An effective fractal-tree closure model for simulating blood flow in large arterial networks // Annals of Biomedical Engineering, 2015, vol. 43. P. 1432–1442.
- [37] *Sochi T.* The flow of power law fluids in elastic vessels and porous media // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, 2016, vol. 19. P. 324–329.
- [38] *Mukhin S. I., Menyailova M. A., Sosnin N. V., Favorskii A. P.* Analytic study of stationary hemodynamic flows in an elastic vessel with friction // Differential Equations, 2007, vol. 43. P. 1011–1015.
- [39] *Delestre O., Lagree P.-Y.* A 'well-balanced' finite volume scheme for blood flow simulation // International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2013, vol. 72. P. 177–205.
- [40] *Ghigo A. R., Delestre O., Fullana J.-M., Lagree P.-Y.* Low-Shapiro hydrostatic reconstruction technique for blood flow simulation in large arteries with varying geometrical and mechanical properties // Journal of Computational Physics, 2017, vol. 331. P. 108–136.
- [41] *Li G., Delestre O., Yuan L.* Well-balanced discontinuous Galerkin method and finite volume WENO scheme based on hydrostatic reconstruction for blood flow model in arteries // International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2018, vol. 86. P. 491–508.
- [42] *Britton J., Xing Y.* Well-balanced discontinuous Galerkin methods for the one dimensional blood flow through arteries model with man-at-eternal rest and living-man equilibria // Computers and Fluids, 2020, vol. 203. P. 104493.
- [43] *Ghitti B., Berthon C., Le M. H., Toro E. F.* A fully well-balanced scheme for the 1D blood flow equations with friction source term // Journal of Computational Physics, 2020, vol. 421. P. 109750.

- [44] *Hernandez-Duenas G., Ramirez-Santiago G.* A well-balanced positivity preserving central-upwind scheme for one-dimensional blood flow models // International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2021, vol. 93. P. 369–395.
- [45] *Razavi M. C., Shirani E.* Development of a general methods for designing microvascular using distribution of wall shear stress // Journal of Biomechanics, 2013, vol. 46. P. 2303–2309.
- [46] *Kim S., Cho Y. I., Jeon A. H., Hogenauer B., Kensey K. R.* A new method for blood viscosity measurement // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2000, vol. 94. P. 47–56.
- [47] *Myers T. G.* Application of non-Newtonian models to thin film flow // Physical Review E, 2015, vol. 72. P. 066302.
- [48] *Canic S., Kim E. H.* Mathematical analysis of the quasilinear effects in a hyperbolic model blood flow through compliant axi-symmetric vessels // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2003, vol. 26. P. 1161–1186.

Analysis of stationary solutions of the equations of one-dimensional hemodynamics

G.V. Krivovichev, N.V. Egorov

Saint-Petersburg State University

Faculty of Applied Mathematics and Control Processes

g.krivovichev@spbu.ru, n.v.egorov@spbu.ru

Abstract. In last years, one-dimensional (1D) models of hemodynamics are widely used for the diagnostics of cardiovascular diseases, surgical operations, and for the analysis of the vascular pathologies effects. Models of this type are constructed by the averaging of the equations of the hydrodynamics of a viscous incompressible fluid on the vessel cross-section, taking some simplifications into account. The paper presents 1D models of blood flow, where the non-Newtonian properties of blood are considered. For the construction of models, the rheological relations for generalized Newtonian fluids are used. The following models, applied in 2D and 3D simulations are considered: the power law model, the Carreau, Carreau – Yasuda and Cross models, the simplified Cross model, the Yeleswarapu model, and Quemada and the modified Yeleswarapu models, which are dependent on hematocrit. For the closure of models, a model power-law representation of the dimensionless velocity profile is used. The parameter of this dependence is varied during the calculations. The steady flow regime leads to the consideration of the nonlinear ordinary differential equation on the cross-sectional area. For the power law model, the simplified Cross model, and the Quemada model, integrals of this equation are obtained. Conditions for the existence and uniqueness of the solution of the initial problem are obtained. During the calculations, the parameters for the iliac artery are considered. The influence of the velocity profile and hematocrit on the obtained solutions is investigated. It is shown, that the flattening of the velocity profile leads to a decrease in the length of the interval, where the stationary solutions exist. A similar situation occurs with an increase of hematocrit. The case of a vessel with stenosis, with the shape described by a model function, is considered. It is shown that a change in the geometric parameters affects the length of the interval of existence of the solution. The solutions obtained can be useful for the comparison of different 1D models of blood as a viscous fluid and for testing programs that implement algorithms of numerical methods.

Key words: One-dimensional models, stationary solutions, hemodynamics