ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2022
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Стохастическое управление

Особые управления в квазилинейных стохастических системах Гурса-Дарбу

Р.О. Масталиев
ИСУ НАНА, Баку, Азербайджан
mastaliyevrashad@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой квазилинейных стохастических дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка гиперболического типа с краевыми условиями Гурса. Установлен стохастический аналог принципа максимума Понтрягина и изучены особые, в смысле принципа максимума, управления. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере.

Ключевые слова: квазилинейная стохастическая система Гурса-Дарбу, аналог принципа максимума Понтрягина, особое управление, индивидуальные необходимые условия оптимальности.

1 Введение

Задача оптимизации в системах Гурса-Дарбу является одной из интересных задач теории управления. Такого типа задаче посвящено большое количество работ, дающих достаточно полное описание этой проблемы [1-6] и др. В перечисленных работах, с помощью различных подходов, установлен ряд необходимых условий оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина, а также изучены особые случаи [7].

Вследствие развития управляемых систем, вызванных запросами практики, и прежде всего, потребностями современной техники и теоретической физики, появилась необходимость исследования задач оптимального управления стохастическими системами Гурса-Дарбу [8-16].

Предлагаемая статья представляет собой продолжение цикла работ [12-16], посвященных оптимизации нелинейных стохастических систем с распределенными параметрами типа Гурса-Дарбу. В отличие от прежних работ, здесь рассматривается частный случай, т.е. управляемый процесс, описываемый квазилинейной стохастической системой уравнений Дарбу с краевыми условиями Гурса.

В предлагаемой работе используются некоторые идеи работ [5, 6], применительно к задаче оптимального управления квазилинейных стохастических систем Гурса-Дарбу. Установлен стохастический аналог принципа максимума и получены необходимые условия оптимальности второго порядка особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений [5, 6, 7], носящие индивидуальный характер.

Заметим, что подобная задача в более общем, нелинейном случае, анонсирована в работе [12].

Несмотря на то, что в предлагаемой работе рассматривается частный случай, необходимые условия оптимальности для особых управлений, которые получены в рассматриваемой задаче, не являются следствиями соответствующих результатов, полученных в нелинейном случае.

Поэтому, отдельное изучение рассматриваемой задачи имеет самостоятельное значение.

2 Постановка задачи

Через $D = T \times X = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ $(y = (t,x) \in D)$ обозначим прямоугольник. Пусть поток σ - алгебр $F_y = F_{tx}$ есть семейство $\sigma -$ алгебр $F_y \in F$, определенных на основном вероятностном пространстве (Ω, F, P), причем $F_y \subset F_{y'}$, если $y \leq y'$ (т.е. $t \leq t', x \leq x'$).

Здесь $F = \bar{\sigma}(W(\tau, s),\ t_0 \leq \tau \leq t, x_0 \leq s \leq x) - \sigma$-алгебра, порожденная двухпараметрическим винеровским процессом $W(t,x), (t,x) \in D$.

Рассмотрим стохастический процесс, описываемый системой квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка

$$z_{tx} = A(t,x)z_t + B(t,x)z_x + f(t,x,z,u) + g(t,x,z)W_{tx}, (t,x) \in D \qquad (2.1)$$

с краевыми условиями типа Гурса

$$z(t_0, x) = a(x), x \in X,$$

$$z(t, x_0) = b(t), t \in T, \qquad (2.2)$$

$$a(x_0) = b(t_0).$$

Здесь: $z(t,x) -$ $n -$ мерная случайная вектор-функция, характеризующая состояние управляемого объекта; $A(t,x), B(t,x) -$ заданные $(n \times n)$ матричные функции; $f(t,x,z,u) -$ заданная $n -$ мерная вектор – функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z до второго порядка включительно; $g(t,x,z) -$ заданная $(n \times n)$ матричная функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z; $n -$ мерные краевые вектор-функции $a(x), b(t)$ $-$заданные на X и Т соответственно, удовлетворяют условию Липшица; $W_{tx} - n -$ мерный двухпараметрический «белый шум» на плоскости [9, 10].

В качестве допустимых управлений выберем $r -$ мерные измеримые, ограниченные вектор-функции $u(t,x)$, удовлетворяющие условию

$$u(t,x) \in U, (t,x) \in D, \qquad (2.3)$$

где U $-$заданное непустое и ограниченное множество из $R^r \big(u(t,x) \in L_\infty(D,U)\big)$.

Предполагается, что каждое допустимое управление $u(t,x)$ порождает единственное решение $z(t,x)$ задачи (2.1)-(2.2) в смысле [9, 17, 18].

Требуется, среди всех допустимых управлений, найти такое управление $u(t,x), (t,x) \in D$, соответствующее решению краевой задачи (2.1)-(2.2), которое минимизирует функционал

$$S(u) = E\varphi\big(z(t_1, x_1)\big), \tag{2.4}$$

где $\varphi(z)$ −заданная, дважды непрерывно-дифференцируемая скалярная функция, E −знак математического ожидания.

Целью предлагаемой работы является установление аналога принципа максимума Понтрягина и изучение особых управлений (т.е. управлений, вдоль которых принцип максимума вырождается) для рассматриваемой задачи (2.1) -(2.4).

3 Формула приращения второго порядка и индивидуальные необходимые условия оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений

Пусть $u(t,x)$ и $\bar{u}(t,x) = u(t,x) + \Delta u(t,x), (t,x) \in D$ − некоторые допустимые управления, а $z(t,x)$ и $\bar{z}(t,x) = z(t,x) + \Delta z(t,x), (t,x) \in D$ −соответствующие им решения краевой задачи (2.1)-(2.2).

Введем следующие обозначения для упрощения записи:

$$H(t,x,z,u,\psi) = \psi' f(t,x,z,u),$$

$$\Delta_{\bar{u}}\, H[t,x] = H(t,x,z(t,x),\bar{u}(t,x),\psi(t,x)) - H(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)),$$

$$H_z[t,x] = H_z\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big), H_{zz}[t,x] = H_{zz}\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big),$$

$$f_z[t,x] = f_z\big(t,x,z(t,x),u(t,x)\big), g_z[t,x] = g_z\big(t,x,z(t,x)\big),$$

$$\Delta_{\bar{u}}\, f[t,x] = f(t,x,z(t,x),\bar{u}(t,x)) - f\big(t,x,z(t,x),u(t,x)\big).$$

Здесь случайные процессы $(\psi(t,x),\beta(t,x)) \in L_\infty(D,R^n) \times L_\infty(D,R^{n\times n})$ являются решением стохастического линейного двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра (сопряженная система):

$$\psi(t,x) = -\varphi_z\big(z(t_1,x_1)\big) + \int_t^{t_1} \psi'(\tau,x)B(\tau,x)\,d\tau + \int_x^{x_1} \psi'(t,s)A(t,s)\,ds +$$

$$+\int_t^{t_1}\int_x^{x_1} H_z\,[\tau,s]ds d\tau + \int_t^{t_1}\int_x^{x_1} \beta(\tau,s)\,W_{\tau s}(\tau,s)ds d\tau,$$

а штрих означает транспонирование.

С учетом принятых обозначений, используя формулу Тейлора, приращение функционала (2.4), соответствующее допустимым управлениям $u(t,x), \bar{u}(t,x)$, можно представить в виде

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = \eta_1\big(\Delta u(t,x)\big) +$$

$$+E\left\{-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}} H[t,x]\,dxdt + \frac{1}{2}\Delta z'(t_1,x_1)\varphi_{zz}\big(z(t_1,x_1)\big)\Delta z(t_1,x_1) - \right. \tag{3.1}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar{u}}H_z'[t,x]\Delta z(t,x)dxdt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{zz}[t,x]\Delta z(t,x)dxdt\Bigg\}$$

где по определению

$$\eta_1\big(\Delta u(t,x)\big)=E\left\{o_1(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2)-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_2(\|\Delta z(t,x)\|^2)\,dxdt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)\Delta_{\bar{u}}H_{zz}[t,x]\Delta z(t,x)dxdt\right\},$$

а норма вектора $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)'\in R^n$ понимается в смысле

$$\|z\|=\sum_{i=1}^{n}|z_i|.$$

Здесь величины $o_1(.),o_2(.)$ определяются соответственно из разложений

$$\varphi\big(\bar{z}(t_1,x_1)\big)-\varphi\big(z(t_1,x_1)\big)=\varphi_z'\big(z(t_1,x_1)\big)\Delta z(t_1,x_1)+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,x_1)\varphi_{zz}\big(z(t_1,x_1)\big)\Delta z(t_1,x_1)+o_1(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2),$$

$$H\big(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi(t,x)\big)-H\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)=$$

$$=H_z'[t,x]\Delta z(t,x)+\frac{1}{2}\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x,z(t,x),\bar{u}(t,x),\psi(t,x))\Delta z(t,x)+o_2(\|\Delta z(t,x)\|^2).$$

С другой стороны, учитывая систему (2.1) -(2.2), согласно формуле Тейлора, можно доказать, что приращение $\Delta z(t,x)$ состояния $z(t,x)$ является решением следующей стохастической линеаризованной задачи:

$$\Delta z_{tx}=f_z'[t,x]\Delta z(t,x)+A'(t,x)\Delta z_t(t,x)+B'(t,x)\Delta z_x(t,x)+\Delta_{\bar{u}}f[t,x]+ \tag{3.2}$$

$$+g_z'[t,x]\Delta z(t,x)W_{tx}(t,x)+r_1(t,x),$$

$$\Delta z(t_0,x)=0,x\in X,\Delta z(t,x_0)=0,t\in T. \tag{3.3}$$

Здесь по определению

$$r_1(t,x)=\Delta_{\bar{u}}f_z'[t,x]\Delta z(t,x)+o_3(\|\Delta z(t,x)\|)+\ o_4(\|\Delta z(t,x)\|)W_{tx}(t,x).$$

а величины $o_3(.),o_4(.)$, определяются соответственно из разложений

$$f\big(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x)\big)-f\big(t,x,z(t,x),\bar{u}(t,x)\big)=$$

$$=f_z'\big(t,x,z(t,x),\bar{u}(t,x)\big)\Delta z(t,x)+o_3(\|\Delta z(t,x)\|),$$

$$g\big(t,x,\bar{z}(t,x)\big)-g\big(t,x,z(t,x)\big)=g_z'[t,x]\Delta z(t,x)+o_4(\|\Delta z(t,x)\|).$$

Интерпретируя уравнение (3.2)-(3.3) как линейное стохастическое неоднородное уравнение относительно приращения $\Delta z(t,x)$, на основе формулы об интегральном представлении решений линейных стохастических гиперболических уравнений [18], решение линеаризованной системы (3.2) -(3.3) можно представить в виде

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R(t,x;\tau,s)\,\Delta_{\overline{u}}f[\tau,s]dsd\tau+\alpha(t,x), \tag{3.4}$$

где

$$\alpha(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R(t,x;\tau,s)r_1(\tau,s)\,dsd\tau,$$

а $R(t,x;\tau,s)$ −измеримая и ограниченная $(n\times n)-$ матрица Римана системы (3.2)-(3.3), являющаяся решением двумерного стохастического интегрального уравнения Вольтерра:

$$R(t,x;\tau,s)=I+\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}R(t,x;\alpha,\beta)f_z[\alpha,\beta]d\alpha d\beta+\int_{\tau}^{t}R(t,x;\alpha,s)B(\alpha,s)d\alpha+$$

$$+\int_{s}^{x}R(t,x;\tau,\beta)A(\tau,\beta)d\beta+\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}R(t,x;\alpha,\beta)g_z[\alpha,\beta]W_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)d\alpha\,d\beta.$$

Здесь $I-(n\times n)$ единичная матрица.

С учетом представления (3.4), согласно результатам работ [5, 6, 13], не вызывает сомнений справедливость соотношений

$$\Delta z'(t_1,x_1)\varphi_{zz}\big(z(t_1,x_1)\big)\Delta z(t,x)=\alpha(t_1,x_1)\varphi_{zz}\big(z(t_1,x_1)\big)\Delta z(t_1,x_1)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}f'[\tau,s]R(t_1,x_1;\tau,s)\,\varphi_{zz}\big(z(t_1,x_1)\big)R(t_1,x_1;\gamma,\mu)\Delta_{\overline{u}}f[\gamma,\mu]\,d\tau dsd\gamma d\mu+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}R(t_1,x_1;\tau,s)\Delta_{\overline{u}}f[\tau,s]\,d\tau ds\varphi_{zz}\big(z(t_1,x_1)\big)\alpha(t_1,x_1),$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{zz}[t,x]\Delta z(t,x)\,dtdx=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}f'[\tau,s]\left[\int_{\max(\tau,\gamma)}^{t_1}\int_{\max(s,\mu)}^{x_1}R(t,x;\tau,s)H_{zz}[t,x]R(t,x;\gamma,\mu)dxdt\right]\times$$

$$\times\Delta_{\overline{u}}f[\gamma,\mu]d\tau dsd\gamma d\mu+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\alpha(t,x)H_{zz}[t,x]\Delta z(t,x)\,dtdx+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R(t,x;\tau,s)\Delta_{\overline{u}}f[\tau,s]dsd\tau\right]H_{zz}[t,x]\alpha(t,x)dxdt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H_z'[t,x]\Delta z(t,x)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H_z[t,x]\alpha(t,x)dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H_z[\tau,s]R(\tau,s;t,x)dsd\tau\right]\Delta_{\overline{u}}f[t,x]dxdt.$$

Обозначая, как и работах [5, 6, 13], $(n\times n)$ матричную функцию

$$K(\tau,s;\gamma,\mu)=-R(t_1,x_1;\tau,s)\varphi_{zz}\big(z(t_1,x_1)\big)R(t_1,x_1;\gamma,\mu)+$$

$$+\int_{\max(\tau,\gamma)}^{t_1}\int_{\max(s,\mu)}^{x_1}R'(t,x;\tau,s)H_{zz}[t,x]R(t,x;\gamma,\mu)dtdx,$$

формулу приращения (3.1) можно переписать в виде

$$\Delta S(u)=\eta_2\big(\Delta u(t,x)\big)+\ E\left\{-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H[t,x]\,dxdt-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}f'[\tau,s]\,K(\tau,s;\gamma,\mu)\Delta_{\overline{u}}f[\gamma,\mu]\,d\tau dsd\gamma d\mu- \tag{3.5}$$

$$\left.-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H_z[\tau,s]R(\tau,s;t,x)dsd\tau\right]\Delta_{\overline{u}}f[t,x]dxdt\right\},$$

где

$$\eta_2\big(\Delta u(t,x)\big)=\eta_1\big(\Delta u(t,x)\big)+$$

$$+E\left\{\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}R(t_1,x_1;\tau,s)\Delta_{\overline{u}}f[\tau,s]\,d\tau ds\varphi_{zz}\big(z(t_1,x_1)\big)\alpha(t_1,x_1)+\right.$$

$$+\alpha(t_1,x_1)\varphi_{zz}\big(z(t_1,x_1)\big)\Delta z(t_1,x_1)+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\alpha(t,x)H_{zz}[t,x]\Delta z(t,x)\,dtdx+ \tag{3.6}$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R(t,x;\tau,s)\Delta_{\overline{u}}f[\tau,s]dsd\tau\right]H_{zz}[t,x]\alpha(t,x)dxdt\right\},$$

Известно (см. напр. [13, 15]), что для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в рассматриваемой задаче (2.1)-(2.4) необходимо, чтобы неравенство

$$\mathrm{E}\Delta_v H[\theta,\xi]\le 0 \tag{3.7}$$

выполнялось для всех правильных точек (точка Лебега) [19] $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ управления $u(t,x)$ и $v\in U$.

Как видно, неравенство (3.7) является необходимым условием оптимальности первого порядка и представляет собой стохастический аналог принципа максимума Понтрягина для задач (2.1)-(2.4).

Теперь проведем исследование особого случая.

Определение [4, 5, 7, 13]. Если для всех $v \in U, (\theta, \xi) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1)$ выполняется тождество

$$\mathrm{E}\Delta_v H[\theta, \xi] = 0,$$

то допустимое управление $u(t,x)$ назовем особым, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлением.

Пусть $u(t,x)$ особое, в смысле принципа максимума Понтрягина, управление. Его специальное приращение определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t,x) = \begin{cases} v(t) - u(t,x), (t,x) \in D_\varepsilon = [t_0, t_1] \times [\xi, \xi + \varepsilon), \\ \qquad 0, (t,x) \in D \backslash D_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.8}$$

Здесь, как и выше, $\xi \in [x_0, x_1)$, $v(t) \in U -$ произвольное управление, а $\varepsilon > 0 -$ произвольное достаточно малое число.

Через $\Delta z(t,x;\varepsilon)$ обозначим специальное приращение состояния $z(t,x)$, соответствующее линейчатому приращению (3.8) [20] управления $u(t,x)$. Тогда, согласно результатам работ [15] имеем

$$E\|\Delta z(t,x;\varepsilon)\| \sim \begin{cases} 0, (t,x) \in D_0 = [t_0, t_1] \times [x_0, \xi), \\ \qquad \varepsilon, (t,x) \in D \backslash D_0. \end{cases} \tag{3.9}$$

С другой стороны, из представления (3.4) с учетом оценки (3.9), следует, что справедливы разложения:

При $(t,x) \in D(\varepsilon)$

$$\Delta z(t,x;\varepsilon) = (x - \xi) \int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,\xi) \Delta_{\overline{u}} f[\tau,\xi] d\tau + o(t,x;\varepsilon). \tag{3.10}$$

Если же $(t,x) \in [t_0, t_1] \times [\xi + \varepsilon, x_1]$, то

$$\Delta z(t,x;\varepsilon) = \varepsilon \int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,\xi) \Delta_{\overline{u}} f[\tau,\xi] d\tau + o(t,x;\varepsilon). \tag{3.11}$$

В этом случая матричная функция $K(\tau,s;\gamma,\mu)$ преобразуется к виду

$$L_1(\tau,s,\xi) = -R(t_1,x_1;\tau,\xi)\varphi_{zz}\big(z(t_1,x_1)\big)R(t_1,x_1;s,\xi) +$$

$$+ \int_{\max(\tau,s)}^{t_1} \int_{\xi}^{x_1} R'(t,x;\tau,\xi) H_{zz}[t,x] R(t,x;s,\xi) dt dx.$$

Теперь, принимая во внимание (3.10), (3.11) и последние обозначения $L_1(\tau,s,\xi)$ вдоль особого управления $u(t,x)$, формулу приращения (3.5) можно записать в виде

$$\Delta S_\varepsilon(u) = S\big(u(t,x) + \Delta u_\varepsilon(t,x)\big) - S\big(u(t,x)\big) =$$

$$= E\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{v(\tau)}f'[\tau,\xi]L_1(\tau,s,\xi)\,\Delta_{v(s)}f[s,\xi]dsd\tau - \right. \quad (3.12)$$

$$\left. -\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_t^{t_1}\Delta_{v(\tau)}H_z[\tau,\xi]R(\tau,\xi;t,\xi)d\tau\right]\Delta_{v(t)}f[t,\xi]dt\right\} + o(\varepsilon^2).$$

Если же специальное приращение управления $u(t,x)$ определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t,x) = \begin{cases} w(t) - u(t,x), (t,x) \in D_\varepsilon = [\theta,\theta+\varepsilon) \times [x_0,x_1], \\ 0, (t,x) \in D \backslash D_\varepsilon. \end{cases}$$

где $\theta \in [t_0,t_1)$, $w(x) \in U$, а $\varepsilon > 0 -$ произвольное достаточно малое число, можно убедиться в справедливости разложения

$$\Delta S_\varepsilon(u) = S\big(u(t,x) + \Delta u_\varepsilon(t,x)\big) - S\big(u(t,x)\big) =$$

$$= E\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{w(\tau)}f'[\theta,\tau]L_2(\tau,s,\theta)\,\Delta_{w(s)}f[\theta,s]dsd\tau - \right. \quad (3.13)$$

$$\left. -\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_x^{x_1}\Delta_{w(\tau)}H_z[\theta,\tau]R(\theta,\tau;\theta,x)d\tau\right]\Delta_{w(x)}f[\theta,x]dx\right\} + o(\varepsilon^2).$$

Здесь по определению

$$L_2(\tau,s,\theta) = -R(t_1,x_1;\theta,\tau)\varphi_{zz}\big(z(t_1,x_1)\big)R(t_1,x_1;\theta,s) +$$

$$+\int_\theta^{t_1}\int_{\max(\tau,s)}^{x_1}R'(t,x;\tau,\xi)H_{zz}[t,x]R(t,x;s,\xi)dtdx.$$

Разложения (3.12) и (3.13) позволяют нам приходить к следующему выводу.

Теорема. Для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(t,x)$ в стохастической задаче (2.1)-(2.4) необходимо, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$E\left\{\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{v(\tau)}f'[\tau,\xi]L_1(\tau,s,\xi)\Delta_{v(s)}f[s,\xi]dsd\tau + \right.$$

$$\left. +\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_t^{t_1}\Delta_{v(\tau)}H_z[\tau,\xi]R(\tau,\xi;t,\xi)d\tau\right]\Delta_{v(t)}f[t,\xi]dt\right\} \le 0$$

для всех $\xi \in [x_0,x_1)$, $v(t) \in U$,

$$E\left\{\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{w(\tau)}f'[\theta,\tau]L_2(\tau,s,\theta)\,\Delta_{w(s)}f[\theta,s]dsd\tau + \right.$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1}\Delta_{w(\tau)}H_z[\theta,\tau]R(\theta,\tau;\theta,x)d\tau\right]\Delta_{w(x)}f[\theta,x]dx\right\} \le 0$$

для всех $\theta \in [t_0, t_1),\ w(x) \in U$.

Из теоремы следует удобное для практического использования поточечное условие оптимальности.

Следствие. Для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(t,x)$ в стохастической задаче (2.1)-(2.4) необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$E\{\Delta_v f'[\theta,\xi]L_1(\theta,\theta,\xi)\Delta_v f[\theta,\xi] + 0.5\Delta_v H_z'[\theta,\xi]\Delta_v f[\theta,x]\} \le 0 \qquad (3.14)$$

для всех $(\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1),\ v \in U$.

Для иллюстрации следствия рассмотрим

Пример: Пусть требуется минимизировать функционал качества

$$S(u) = Ez_2(1,1),$$

при ограничениях

$$z_{1_{tx}}(t,x) = u - 1 + W_{tx}(t,x), (t,x) \in D = [0,1] \times [0,1],$$

$$z_{2_{tx}} = -z_1^2(t,x) + W_{tx}(t,x), U = [0,1],$$

$$z_1(0,x) = z_2(0,x) = 0, x \in [0,1], z_1(t,0) = z_2(t,0) = 0, t \in [0,1].$$

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(t,x,z,u,\psi) = \psi_1(u-1) - \psi_2 z_1^2$$

и проверим на оптимальность допустимое управление $u(t,x) = 1$. На этом управлении имеем

$$z_1(t,x) = W(t,x), z_2(t,x) = 0,$$

$$\psi_1(t,x) = \int_t^1\int_x^1 \beta(\tau,s)W_{\tau s}(\tau,s)\,dsd\tau, \psi_2(t,x) = -1 + \int_t^1\int_x^1 \beta(\tau,s)W_{\tau s}(\tau,s)dsd\tau.$$

Следовательно, $u(t,x) = 1$ является особым, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлением.

Ясно, что вдоль процесса $\big(u(t,x), z(t,x)\big)' = (1,0,0)'$,

$$\Delta_v f[t,x] = \begin{pmatrix} v-1 \\ 0 \end{pmatrix}, H_{zz} = \begin{pmatrix} 2 - 2\int_t^1\int_x^1 \beta(\tau,s)W_{\tau s}(\tau,s)dsd\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_v H_z[t,x] = (0,0)', L_1(\theta,\theta,\xi) = (1-\theta)(1-\xi)\begin{pmatrix} 2 - 2\int_t^1 \int_x^1 \beta(\tau,s) W_{\tau s}(\tau,s) ds d\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому неравенство (3.14) имеет вид

$$E(v-1)^2(1-\theta)(1-\xi) \leq 0$$

и не выполняется при всех $v \in [0,1], \theta \in [0,1), \xi \in [0,1)$.

Итак, особое управление $u(t,x) = 1$ не является оптимальным.

4 Заключение

Рассмотрена задача оптимального управления, в которой дифференциальное уравнение, описывающее закон движения является квазилинейным (т.е. правая часть системы линейна только по двум компонентам) стохастическим дифференциальным уравнением с частными производными гиперболического типа с краевыми условиями Гурса. Установлена формула приращения второго порядка функционала качества в рассматриваемой квазилинейной стохастической задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Сначала введено необходимое условие оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина. Затем, с помощью специальных вариаций, доказывается необходимое условие оптимальности особых (в смысле принципа максимума Понтрягина) управлений, которое по причине специфики поставленной задачи не вытекает из более общих нелинейных уравнений как частный случай. Анализ задачи проводится на основе стохастического аналога метода приращений.

5 Список литературы

[1] Егоров, А.И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах распределенными параметрами// Автоматика и телемех., 1964, т.25, №5, с. 613-623.

[2] Плотников, В.И., Сумин, В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами описываемых системами Гурса-Дарбу// ЖВМ и МФ,1972, №1, с. 61-72.

[3] Срочко, В.А. Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами// Сибириский матем. журнал, 1976, №5, с.1108-1115.

[4] Ащепков, Л.Т., Васильев, О.В., Коваленок, И.Л. Усиленное условие оптимальности особых управлений в системе Гурса-Дарбу// Диф. уравн.,1980, №6, с.1054-1059.

[5] Мансимов, К.Б. Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления// Автореферат дис. д-ра физ-мат.наук, Баку, 1994, 43с.

[6] Мансимов, К.Б., Марданов, М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку, «Элм», 2010, 360с.

[7] Габасов, Р., Кирилова, Ф.М. Особые оптимальные управления. М. URSS, 2011, 256с.

[8] Рачинский, В.В. Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии. М.:Наука, 1964, 136с.

[9] Ермольев, Ю.М., Гуленко В.П., Царенко Т.И. Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления. Киев « Наукова Думка», 1978, 164с.

[10] Шайхет, Л.Е. Об оптимальном управлении одним классом стохастических дифференциальных уравнений в частных производных// Математические заметки, 1982, т.31. в.6., с.933-936.

[11] Шайхет, Л.Е. Оптимальное управление некоторыми гиперболическими и

интегральными уравнениями. Теория случайных процессов, Киев, т. 15, 1987, с.110-116.

[12] Мансимов, К.Б., Масталиев, Р.О. Об оптимальном управлении стохастическими дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического типа/ Межд.науч. конфренц. «Теоретические и прикладные проблемы математики», Сумгаит, 25-27 мая 2017, с. 231-232.

[13] Мансимов, К.Б., Масталиев, Р.О. Необходимые условия оптимальности для одного класса стохастических задач оптимального управления с распределенными параметрами//Труды института математики НАН Беларуси, 2018, №1, с. 79-87.

[14] Мансимов, К.Б., Масталиев, Р.О. Квазиособые управления в стохастических системах Гурса-Дарбу// РАН, Программные системы: теория и приложения, 2021, 2(49), с. 3-18.

[15] Масталиев, Р.О. Необходимые условия оптимальности первого порядка в стохастических системах Гурса-Дарбу// Дальневосточный матем. журнал, 2021, т. 21, №1, с.89-104.

[16] Mansimov, K.B., Mastaliyev, R.O. First and second order necessary optimality conditions for stochastic distributed systems// Journal of Physics: 2021(1847) Confrence series-DYSC 2020, Irkutsk, Russian, pp.2-9.

[17] Пономаренко, Л.Л. Стохастическая бесконечномерная задача Гурса// Математический анализ и теория вероятностей, Киев, 1978, с. 140-143.

[18] Мансимов, К.Б., Масталиев, Р.О. Представление решения задачи Гурса для линейных стохастических гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка// Известия Иркутского гос. университета сер. математика, 2021,т. 36. №2, с.29-43.

[19] Новоженов, М.М.,Сумин, В.И., Сумин, М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. Горкий: Изд-во ГГУ, 1986, 87с.

[20] Островский, Г.М., Волин, Ю.М. Методы оптимизации сложных химико-технологических схем. М.: Химия, 1970, 328с.

Singular controls in quasilinear stochastic Goursat-Darboux systems

R.O. Mastaliyev

ICS ANAS, Baku, Azerbaijan
mastaliyevrashad@gmail.com

Abstract. We consider an optimal control problem described by a system of quasilinear second order hyperbolic type stochastic partial differential equations with the Goursat boundary conditions. A stochastic analog of Pontryagin's maximum principle is established and singular in the sense of the maximum control principle are studied. The obtained results are illustrated by a specific example.

Keywords: quasilinear stochastic Goursat-Darboux system, analog of the Pontryagin maximum principle, singular control, individual necessary optimality conditions.