ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N.1, 2022
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Численные методы

Численные методы решения второй краевой задачи для многомерного уравнения Соболевского типа

М.Х. Бештоков
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»,
Северо-Кавказский центр математических исследований

Аннотация. Исследуется вторая краевая задача для многомерного дифференциального уравнения Соболевского типа с переменными коэффициентами. Рассматриваемое уравнение сводится к интегро-дифференциальному уравнению параболического типа с малым параметром. Для приближенного решения полученной задачи строится локально-одномерная разностная схема. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка для решения локально-одномерной разностной схемы, откуда следуют ее устойчивость и сходимость. Для двумерной задачи построен алгоритм численного решения второй краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных Соболевского типа.

Ключевые слова: вторая краевая задача, априорная оценка, интегро-дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение Соболевского типа, локально-одномерная схема, устойчивость. сходимость.

1 Введение

Хорошо известно, что моделирование течения жидкости в трещиновато-пористых средах [1, 2], двухфазного течения в пористых средах с динамическим капиллярным давлением [3], переноса влаги [4, 5], движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах [6, 7], теплопроводности в двухтемпературных системах [8] и течения некоторых неньютоновских жидкостей [9] приводят к дифференциальному уравнению в частных производных третьего порядка Соболевского типа.

Настоящая работа посвящена построению локально-одномерной (экономичной) разностной схемы для приближенного решения второй краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных Соболевского типа в многомерном случае, основная идея которого состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. При этом для каждой из промежуточных задач строится безусловно устойчивая схема, требующая для своего решения числа действий, пропорционального числу узлов сетки на каждом временном слое. Основная трудность при построении локально-одномерной схемы для исходной дифференциальной задачи заключается в необходимости расщепления не только основного оператора задачи, но и оператора при производной по времени. В этой связи исходное многомерного дифференциальное уравнение сводится к интегро-дифференциальному уравнению параболического типа с малым параметром. Для приближенного решения полученной задачи строится локально-одномерная разностная схема. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка для решения локально-одномерной разностной схемы, откуда следуют ее устойчивость и сходимость. Для двумерной задачи построен алгоритм численного решения второй краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных Соболевского типа.

Работа [10] посвящена исследованию разрешимости второй смешанной задачи в нецилиндрической области для уравнения третьего порядка Соболевского типа. Доказываются теоремы существования и единственности решения, в случае сужающейся при возрастании времени t области.

В работе [11] исследуется вторая начально-краевая задача для уравнения третьего порядка Соболевского типа с малым параметром. Доказаны теоремы существования и единственности классического решения второй начально-краевой задачи. Методом Фурье в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций получено решение в виде ряда. Доказано сходимость решения начально-краевой задачи для возмущенного уравнения третьего порядка Соболевского типа к решению соответствующей задачи для уравнения теплопроводности, когда малый параметр стремится к нулю.

Для приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных во многих работах также используется итерационный многосеточный метод [12]-[14], а для приближения и замены в расчетах дифференциальной задачи на дискретную - метод конечных элементов [15], [16]. Так в работе [17], [18] приводится анализ сходимости многосеточного итерационного метода для решения системы алгебраических уравнений, получаемой в результате применения метода конечных элементов к уравнению конвекции-диффузии с краевыми условиями Дирихле.

Работы автора [19]-[23] посвящены исследованию локальных и нелокальных краевых задач для уравнения Соболевского типа в одномерном случае.

2 Постановка задачи

В замкнутой области $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \le t \le 1]$, основанием которой является p-мерный куб $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_p) : 0 \le x_\alpha \le 1, \alpha = 1, 2, ..., p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассмотрим вторую краевую задачу для уравнения Соболевского типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \nu \frac{\partial}{\partial t} Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \Pi_\alpha(x,t) = \mu_{-\alpha}(x,t), \ x_\alpha = 0, \ 0 \le t \le T, \\ -\Pi_\alpha(x,t) = \mu_{+\alpha}(x,t), \ x_\alpha = 1, \ 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in \overline{G}, \tag{1.3}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x,t)u(x,t),$$

$$0 < c_0 \le k_\alpha(x,t), q_\alpha(x,t) \le c_1,$$

$$u(x,t) \in C^{4,3}\left(\overline{Q}_T\right), \quad k_\alpha(x,t) \in C^{3,1}\left(\overline{Q}_T\right), q_\alpha(x,t), f(x,t) \in C^{2,1}\left(\overline{Q}_T\right), \tag{1.4}$$

$$Q_T = G \times (0 < t \le T], \quad c_0, c_1, c_2 = const > 0, \quad \nu = const > 0,$$

$$\Pi_\alpha(x,t) = k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial}{\partial t}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),$$

$$\mu_{+\alpha} = \mu(1, x', t), \ \mu_{-\alpha} = \mu(0, x', t), \ \mu_{\pm\alpha}(x,t) - \text{непрерывные функции},$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_p), \quad x' = (x_1, x_2, ..., x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, ..., x_p), \quad \alpha = 1, 2, ..., p.$$

Преобразуем уравнение (1.1) и краевые условия (1.2), тогда, умножая обе части (1.1) и (1.2) на $\frac{1}{\nu}e^{\frac{1}{\nu}t}$ и интегрируя полученное выражение по τ от 0 до

t, получим задачу

$$Lu + \frac{1}{\nu^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}u(x,t)d\tau - \frac{1}{\nu}u + \widetilde{f}(x,t) = 0, \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \widetilde{\mu}_{-\alpha}(x,t),\ x_\alpha = 0,\ 0 \le t \le T, \\ -k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \widetilde{\mu}_{+\alpha}(x,t),\ x_\alpha = 1,\ 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{1.6}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{G}, \tag{1.7}$$

где

$$\widetilde{f}(x,t) = \frac{1}{\nu}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}f(x,\tau)d\tau - e^{-\frac{1}{\nu}t}\left(Lu_0(x) - \frac{1}{\nu}u_0(x)\right),$$

$$\widetilde{\mu}_{\mp\alpha}(x,t)u = \frac{1}{\nu}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\mu_{\mp\alpha}(x,\tau)d\tau \pm e^{-\frac{t}{\nu}}k_\alpha(x,0)u_0'(x).$$

В той же области вместо уравнения (1.5) рассмотрим следующее уравнение с малым параметром ε

$$\varepsilon u_t^\varepsilon = Lu^\varepsilon + \frac{1}{\nu^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}u^\varepsilon d\tau - \frac{1}{\nu}u^\varepsilon + \widetilde{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.8}$$

где $\varepsilon = const > 0$.

Так как при $t = 0$ начальные условия для уравнения (1.5) и (1.8) совпадают, то в окрестности $t = 0$ у производной u_t^ε не возникает особенности типа пограничного слоя [24], [25].

Покажем, что $u^\varepsilon \to u$ в некоторой норме при $\varepsilon \to 0$. Обозначим через $\tilde{z} = u^\varepsilon - u$ и подставим $u^\varepsilon = \tilde{z} + u$ в уравнение (1.8). Тогда получим задачу

$$\varepsilon \tilde{z}_t = L\tilde{z} + \frac{1}{\nu^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\tilde{z}d\tau - \frac{1}{\nu}\tilde{z} + \overline{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_\alpha} = 0,\ x_\alpha = 0,\ 0 \le t \le T, \\ -k_\alpha(x,t)\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_\alpha} = 0,\ x_\alpha = 1,\ 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\tilde{z}(x,0) = 0, \quad x \in \overline{G}, \quad \overline{G} = G + \Gamma, \tag{1.11}$$

где $\overline{f}(x,t) = -\varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (1.9) скалярно на $\tilde{z}$ и получим энергетическое тождество:

$$\left(\varepsilon\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t},\tilde{z}\right) = \left(\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_\alpha}\right),\tilde{z}\right) - \left(\sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t)\tilde{z},\tilde{z}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{\nu^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\tilde{z}d\tau,\tilde{z}\right) - \left(\frac{1}{\nu}\tilde{z},\tilde{z}\right) + \left(\overline{f}(x,t),\tilde{z}\right). \qquad (1.12)$$

Будем пользоваться скалярным произведением и нормой

$$(u,v) = \int_G uvdx, \quad \|u\|_0^2 = \int_G u^2dx, \quad \|u\|^2_{L_2(0,l_\alpha)} = \int_0^1 u^2(x,t)dx_\alpha.$$

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (1.12):

$$\left(\varepsilon\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t},\tilde{z}\right) = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{z}\|_0^2, \qquad (1.13)$$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_\alpha}\right),\tilde{z}\right) = \sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'} k_\alpha(x,t)\tilde{z}\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_\alpha}\Bigg|_0^1 dx' -$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G k_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx = -\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G k_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx \le -c_0\|\tilde{z}_x\|_0^2. \qquad (1.14)$$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t)\tilde{z},\tilde{z}\right) = \sum_{\alpha=1}^{p}\int_G q_\alpha(x,t)\tilde{z}^2dx \ge c_0\|\tilde{z}\|_0^2. \qquad (1.15)$$

$$\left(\frac{1}{\nu}\tilde{z},\tilde{z}\right) = \frac{1}{\nu}\|\tilde{z}\|_0^2. \qquad (1.16)$$

Далее, для оценки слагаемых правой части, воспользуемся ε - неравенством Коши и неравенством Коши-Буняковского

$$\left(\int\limits_0^t \frac{1}{\nu^2}e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\tilde{z}d\tau,\tilde{z}\right) \le \frac{1}{4\nu^2}\|\tilde{z}\|_0^2 + \left(\left(\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\tilde{z}d\tau\right)^2,\frac{1}{\nu^2}\right) \le \frac{1}{4\nu^2}\|\tilde{z}\|_0^2 +$$

$$+\left(\frac{1}{\nu^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{2}{\nu}(t-\tau)}d\tau\int\limits_0^t \tilde{z}^2 d\tau, 1\right) = \frac{1}{4\nu^2}\|\tilde{z}\|_0^2 + \frac{1-e^{-\frac{2}{\nu}t}}{2\nu}\int\limits_0^t \|\tilde{z}\|_0^2 d\tau. \qquad (1.17)$$

$$\left(\overline{f}(x,t), \tilde{z}\right) \le \frac{1}{4\varepsilon_1}\|\overline{f}\|_0^2 + \varepsilon_1\|\tilde{z}\|_0^2, \qquad (1.18)$$

где $G' = \{x' = (x_1, x_2, ..., x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, ..., x_p) : \ 0 < x_\alpha < 1\}$,
$dx' = dx_1 dx_2 \cdots dx_{\alpha-1} dx_{\alpha+1} \cdots dx_p$.

Учитывая преобразования $(1.13) - (1.18)$, из (1.12) получаем неравенство

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{z}\|_0^2 + c_0\|\tilde{z}_x\|_0^2 + \left(c_0 + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{4\nu^2} - \varepsilon_1\right)\|\tilde{z}\|_0^2 + \frac{e^{-\frac{2}{\nu^2}t}}{2\nu}\int\limits_0^t \|\tilde{z}\|_0^2 d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{2\nu}\int\limits_0^t \|\tilde{z}\|_0^2 d\tau + \frac{1}{4\varepsilon_1}\|\overline{f}\|_0^2. \qquad (1.19)$$

Выбирая $\varepsilon_1 = \dfrac{c_0}{2}$, из неравенства (1.19) находим

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{z}\|_0^2 + c_0\|\tilde{z}_x\|_0^2 + \left(\frac{c_0}{2} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{4\nu^2}\right)\|\tilde{z}\|_0^2 \le \frac{1}{2\nu}\int\limits_0^t \|\tilde{z}\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2c_0}\|\overline{f}\|_0^2. \quad (1.20)$$

Проинтегрируем (1.20) по ξ от 0 до t, тогда получим

$$\frac{\varepsilon}{2}\|\tilde{z}\|_0^2 + c_0\int_0^t \|\tilde{z}_x\|_0^2 d\xi + \left(\frac{c_0}{2} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{4\nu^2}\right)\int_0^t \|\tilde{z}\|_0^2 d\xi \le$$

$$\le \frac{1}{2\nu}\int\limits_0^t d\xi\int\limits_0^\xi \|\tilde{z}\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2c_0}\int_0^t \|\overline{f}\|_0^2 d\xi, \qquad (1.21)$$

Оценивая в (1.21) первое слагаемое в правой части следующим образом

$$\int\limits_0^t d\xi\int\limits_0^\xi \|\tilde{z}\|_0^2 d\tau \le \int\limits_0^t \|\tilde{z}\|_0^2 d\xi,$$

при $\nu \ge \frac{1}{2}$ получаем оценку

$$\varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2 + \int_0^t \left(\|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2\right) d\xi \le M\int_0^t \|\overline{f}\|_0^2 d\xi = \varepsilon^2 M\int_0^t \|u_\tau\|_0^2 d\xi = O(\varepsilon^2). \qquad (1.22)$$

где $M \leq \dfrac{1}{\min\left\{c_0, c_0^2\right\}}$.

Из априорной оценки (1.22) следует сходимость u^ε к u при $\varepsilon \to 0$ в норме $\|\tilde{z}\|_1^2 = \varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_{2,Q_t}^2 + \|\tilde{z}_x\|_{2,Q_t}^2$, где $\|\tilde{z}_x\|_{2,Q_t}^2 = \int\limits_0^t \|\tilde{z}_x\|_0^2 d\tau$, если u_t- ограниченная, достаточно гладкая функция. Поэтому при малом ε решение задачи (1.6)-(1.8) будем принимать за приближенное решение второй краевой задачи для многомерного дифференциального уравнения Соболевского типа с переменными коэффициентами (1.1)-(1.3).

3 Локально-одномерная схема

На отрезке $[0, T]$ введём равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, ..., j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый интервал (t_j, t_{j+1}) разобьем на p частей точками $t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \tau\frac{\alpha}{p},\ \alpha = 1, 2, ..., p$ и обозначим через $\Delta_\alpha = (t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}]$.

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha = \frac{1}{N_\alpha}, \alpha = 1, 2, ..., p$:

$$\overline{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \overline{\omega}_{h_\alpha},\ \overline{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha \hbar_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1, ..., N_\alpha, \alpha = 1, 2, ..., p\},$$

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha,\ i_\alpha = 1, 2, ..., N_\alpha - 1, \\ \frac{h_\alpha}{2},\ i_\alpha = 0, N_\alpha. \end{cases}$$

Уравнение (1.8) перепишем в виде

$$\Re u^\varepsilon = \varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - Lu^\varepsilon - \frac{1}{\nu^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}u^\varepsilon d\tau + \frac{1}{\nu}u^\varepsilon - \overline{f} = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \Re_\alpha u^\varepsilon = 0, \quad \Re_\alpha u^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - L_\alpha u^\varepsilon - \frac{1}{p\nu^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\nu^2}(t-\tau)}u^\varepsilon d\tau + \frac{1}{p\nu}u^\varepsilon - f_\alpha,$$

где $f_\alpha(x, t),\ \alpha = 1, 2, ..., p$ – произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x, t)$ и удовлетворяющие условию $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f$.

На каждом полуинтервале $\Delta_\alpha,\ \alpha = 1, 2, ..., p$, будем последовательно решать задачи

$$\Re_\alpha \vartheta_{(\alpha)} = \frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha \vartheta_{(\alpha)} - \frac{1}{p\nu^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\vartheta_{(\alpha)} d\tau + \frac{1}{p\nu}\vartheta_{(\alpha)} - f_\alpha = 0, \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \widetilde{\mu}_{-\alpha}(x,t),\ x_\alpha = 0,\ 0 \le t \le T, \\ -k_\alpha(x,t)\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \widetilde{\mu}_{+\alpha}(x,t),\ x_\alpha = 1,\ 0 \le t \le T, \end{cases} \quad (2.2)$$

полагая при этом [26, стр.522]

$$\vartheta_{(1)}(x,0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}(x,t_j) = \vartheta_{(p)}(x,t_j),\ j = 1, 2, ...,$$

$$\vartheta_{(\alpha)}(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}) = \vartheta_{(\alpha)}(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}), \quad \alpha = 2, 3, ..., p.$$

Аппроксимируем каждое уравнение (2.1) номера α двухслойной неявной схемой на полуинтервале $\Delta_\alpha = \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$, тогда получим цепочку p одномерных разностных уравнений:

$$\varepsilon\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} y(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau - \frac{1}{p\nu}y(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}) + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad (2.3)$$

где

$$\Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)_{x_\alpha} - d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}.$$

$a_\alpha = k_\alpha(x^{(-0.5\alpha)}, \bar{t}), \quad x^{(-0.5\alpha)} = (x_1, ..., x_{\alpha-1}, x_\alpha - 0.5h_\alpha, x_{\alpha+1}, ..., x_p)$, $\bar{t} = t^{j+1/2}$, $d_\alpha = q_\alpha(x, \bar{t})$, $\gamma_{h,\alpha}$−множество граничных по направлению x_α узлов.

К уравнению (2.3) надо присоединить граничные и начальное условия. Запишем разностный аналог для граничных условий (2.2)

$$\begin{cases} a_\alpha^{(1\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \widetilde{\mu}_{-\alpha},\ x_\alpha = 0, \\ -a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \widetilde{\mu}_{+\alpha},\ x_\alpha = 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Условия (2.4) имеют порядок аппроксимации $O(h_\alpha)$. Повысим порядок аппроксимации до $O(h_\alpha^2)$ на решениях уравнения (2.1) при каком-либо α :

$$a_\alpha^{(1\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \widetilde{\mu}_{-\alpha} + O(h_\alpha).$$

С помощью разложения Тейлора находим

$$k_\alpha \vartheta'_{(\alpha)} = a_\alpha^{(1_\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha\left(k_\alpha \vartheta'_{(\alpha)}\right)' + O(h_\alpha^2) = a_\alpha^{(1_\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} -$$

$$-0.5h_\alpha\Big(\varepsilon\frac{\vartheta^{j+\frac{\alpha}{p}}-\vartheta^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}-\frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}\vartheta(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau+$$

$$+q_\alpha\vartheta(x,t^{j+\frac{\alpha}{p}})+\frac{1}{p\nu}\vartheta(x,t^{j+\frac{\alpha}{p}})-f^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big)+O(h_\alpha^2).$$

Итак,

$$a_\alpha^{(1_\alpha)}\vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}-0.5h_\alpha\Big(\varepsilon\frac{\vartheta^{j+\frac{\alpha}{p}}-\vartheta^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}-\frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}\vartheta(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau+q_\alpha\vartheta(x,t^{j+\frac{\alpha}{p}})+$$

$$+\frac{1}{p\nu}\vartheta(x,t^{j+\frac{\alpha}{p}})-f^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big)_0=\widetilde{\mu}_{-\alpha}+O(h_\alpha^2)+O(h_\alpha\tau). \qquad (2.5)$$

В (2.5) отбросим величины порядка малости $O(h_\alpha^2)$ и $O(h_\alpha\tau)$, заменим $\vartheta_{(\alpha)}$ на $y^{j+\frac{\alpha}{p}}$, тогда (2.5) перепишется так:

$$\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar t,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}=\frac{a_\alpha^{(1_\alpha)}y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau-0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,0}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha}+\overline{\mu}_{-\alpha},\ x_\alpha=0.$$

Аналогично, при $x_\alpha=1:$

$$\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar t,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}=-\frac{a_\alpha^{(N_\alpha)}y_{\bar x_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau+0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,N_\alpha}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha}+\overline{\mu}_{+\alpha},\ x_\alpha=1,$$

где $\overline{d}_{\alpha,0}=d_{\alpha,0}+\frac{1}{p\nu},\ \overline{d}_{\alpha,N_\alpha}=d_{\alpha,N_\alpha}+\frac{1}{p\nu},$
$\overline{\mu}_{-\alpha}=f_{\alpha,0}-\frac{\widetilde{\mu}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha},\ \overline{\mu}_{+\alpha}=f_{\alpha,0}-\frac{\widetilde{\mu}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha}.$

Итак, разностный аналог задачи (1.6)-(1.8) имеет вид

$$\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar t}^{(\alpha)}=\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}+\Phi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}},\ \alpha=1,2,...,p,\ x\in\overline{\omega}_h, \qquad (2.6)$$

$$y(x,0)=u_0(x),$$

где

$$\overline{\Lambda}_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}=\begin{cases}\Lambda_\alpha y=\Big(a_\alpha y_{\bar x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big)_{x_\alpha}-d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{1}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\tau-\frac{1}{p\nu}y^{j+\frac{\alpha}{p}},\\ \Lambda_\alpha^- y=\dfrac{a_\alpha^{(1\alpha)}y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau-0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,0}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha},\ x_\alpha=0,\\ \Lambda_\alpha^+ y=-\dfrac{a_\alpha^{(N\alpha)}y_{\bar x_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau+0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,N_\alpha}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha},\ x_\alpha=1,\end{cases}$$

$$\Phi_\alpha = \begin{cases} \varphi_\alpha, \ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \overline{\mu}_{-\alpha}, \ x_\alpha = 0, \\ \overline{\mu}_{+\alpha}, \ x_\alpha = 1, \end{cases} \qquad y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\frac{\tau}{p}}.$$

4 Погрешность аппроксимации локально-одномерной схемы

Характеристикой точности решения локально-одномерной схемы является разность $z^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где $u^{j+\frac{\alpha}{p}}$- решение исходной задачи (1.6)-(1.8). Подставляя $y^{j+\frac{\alpha}{p}} = z^{j+\frac{\alpha}{p}} + u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в разностную задачу (2.6), получим задачу для погрешности $z^{j+\frac{\alpha}{p}}$:

$$\varepsilon\frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}} - z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} z(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau - \frac{1}{\nu p} z(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}) + \psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \tag{3.1}$$

где $\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{1}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} u(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau - \frac{1}{p\nu} u(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}) + \varphi^{j+\frac{\alpha}{p}} - \varepsilon\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}$.

Обозначив через

$$\overset{\circ}{\psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + \frac{1}{p\nu^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)} u d\tau - \frac{1}{p\nu} u + f_\alpha - \frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+1/2},$$

и замечая, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_\alpha = 0$, если $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f$, представим погрешность в виде суммы $\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*$:

$$\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} u(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau - \frac{1}{p\nu} u(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}) + \varphi^{j+\frac{\alpha}{p}} -$$

$$-\varepsilon\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \overset{\circ}{\psi}_\alpha = \left(\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - L_\alpha u^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{p\nu} u(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}) - \frac{1}{p\nu} u^{j+\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} u(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau - \frac{1}{p\nu^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)} u^{j+\frac{1}{2}} d\tau \right) +$$

$$+\left(\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}-f_\alpha^{j+\frac{1}{2}}\right)-\left(\varepsilon\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}}-u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}-\frac{\varepsilon}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}\right)+\mathring{\psi}_\alpha=\mathring{\psi}_\alpha+\psi^*_\alpha.$$

Очевидно,что $\psi^*_\alpha=O(h_\alpha^2+\tau),\ \mathring{\psi}_\alpha=O(1)$,

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}=\sum_{\alpha=1}^{p}\mathring{\psi}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{p}\psi^*_\alpha=O(|h|^2+\tau),\ |h|^2=h_1^2+h_2^2+...+h_p^2.$$

Запишем граничное условие при $x_\alpha=0$ так:

$$\frac{0.5h_\alpha\varepsilon}{p}y_{\bar{t}}^{(\alpha)}=a_\alpha^{(1_\alpha)}y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum_{j\,'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j\,'})}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau-$$

$$-0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,0}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}+0.5h_\alpha f_{\alpha,0}-\widetilde{\mu}_{-\alpha}. \tag{3.2}$$

Пусть $z^{j+\frac{\alpha}{p}}=y^{j+\frac{\alpha}{p}}-u^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где $u-$ решение исходной дифференциальной задачи (1.6)-(1.8). Подставим $y^{j+\frac{\alpha}{p}}=z^{j+\frac{\alpha}{p}}+u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в (3.2). Тогда получим

$$\frac{0.5h_\alpha\varepsilon}{p}z_{\bar{t}}^{(\alpha)}=a_\alpha^{(1_\alpha)}z_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum_{j\,'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j\,'})}z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau-0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,0}z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}+a_\alpha^{(1_\alpha)}u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}+$$

$$+\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum_{j\,'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j\,'})}u_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau-0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,0}u_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{0.5h_\alpha\varepsilon}{p}u_{\bar{t},0}^{(\alpha)}+0.5h_\alpha f_{\alpha,0}-\widetilde{\mu}_{-\alpha}.$$

К правой части полученного выражения добавим и вычтем

$$0.5h_\alpha\mathring{\psi}_{-\alpha}=0.5h_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)-q_\alpha u+\frac{1}{p\nu^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}ud\tau-\frac{1}{p\nu}u+f_\alpha-\frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x_\alpha=0}^{j+1/2}.$$

Тогда

$$\psi_{-\alpha}=0.5h_\alpha\Big(f_{\alpha,0}-\frac{\varepsilon}{p}u_{\bar{t},0}^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big)+a_\alpha^{(1_\alpha)}u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum_{j\,'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j\,'})}u_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau-0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,0}u_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-$$

$$-\widetilde{\mu}_{-\alpha}-0.5h_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)-q_\alpha u+\frac{1}{p\nu^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}ud\tau-\frac{1}{p\nu}u+f_\alpha-\frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x_\alpha=0}^{j+1/2}+$$

$$+0.5h_\alpha\mathring{\psi}_\alpha=a_\alpha^{(1_\alpha)}u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}-\widetilde{\mu}_{-\alpha}-0.5h_\alpha\Big[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)\Big]^{j+\frac{1}{2}}+0.5h_\alpha\mathring{\psi}_\alpha+O(h_\alpha^2)+$$

$$+O(h_\alpha\tau)=k_\alpha\frac{\partial u^{j+\frac{\alpha}{p}}}{\partial x_\alpha}+0.5h_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)\right]_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-0.5h_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)\right]^{j+\frac{1}{2}}-$$

$$-\widetilde{\mu}_{-\alpha}+0.5h_\alpha\mathring{\psi}_\alpha+O(h_\alpha^2)+O(h_\alpha\tau)=\Big(k_\alpha\frac{\partial u^{j+\frac{\alpha}{p}}}{\partial x_\alpha}-\widetilde{\mu}_{-\alpha}\Big)_{x_\alpha=0}+0.5h_\alpha\mathring{\psi}_\alpha+$$

$$+O(h_\alpha^2)+O(h_\alpha\tau).$$

В силу граничных условий (1.6) выражение, стоящее в скобках есть ноль. Поэтому

$$\psi_{-\alpha}=0.5h_\alpha\mathring{\psi}_{-\alpha}+\psi^*_{-\alpha},\ \psi^*_{-\alpha}=O(h_\alpha^2+\tau)+O(h_\alpha\tau),$$

имеем

$$\frac{0.5h_\alpha}{p}z_{\bar t,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}=a_\alpha^{(1_\alpha)}z_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau-0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,0}z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}+0.5h_\alpha\mathring{\psi}_{-\alpha}+\psi^*_{-\alpha},$$

или

$$\frac{\varepsilon}{p}z_{\bar t,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}=\frac{a_\alpha^{(1_\alpha)}z_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau-0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,0}z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha}+\mathring{\psi}_{-\alpha}+\frac{\psi^*_{-\alpha}}{0.5h_\alpha},$$

$$\frac{\varepsilon}{p}z_{\bar t,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}=-\frac{a_\alpha^{(N_\alpha)}z_{\bar x_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}z_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau+0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,N_\alpha}z_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha}+\mathring{\psi}_{+\alpha}+\frac{\psi^*_{+\alpha}}{0.5h_\alpha}.$$

Итак, задача для погрешности $z^{j+\frac{\alpha}{p}}$ принимает вид:

$$\frac{\varepsilon}{p}z_{\bar t}^{(\alpha)}=\overline{\Lambda}_\alpha z^{(\alpha)}+\Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \tag{3.3}$$

$$z(x,0)=0,$$

где

$$\overline{\Lambda}_\alpha=\begin{cases}\Lambda_\alpha,\ x_\alpha\in\omega_{h_\alpha},\\ \Lambda_\alpha^-,\ x_\alpha=0,\\ \Lambda_\alpha^+,\ x_\alpha=1,\end{cases}\qquad \Psi_\alpha=\begin{cases}\psi_\alpha,\ x_\alpha\in\omega_{h_\alpha},\\ \psi_{-\alpha},\ x_\alpha=0,\\ \psi_{+\alpha},\ x_\alpha=1,\end{cases}$$

$$\psi_\alpha=\mathring{\psi}_\alpha+\psi^*_\alpha,\ \mathring{\psi}_\alpha=O(1),\ \psi^*_\alpha=O(h_\alpha^2+\tau),\quad \psi_{-\alpha}=\mathring{\psi}_{-\alpha}+\frac{\psi^*_{-\alpha}}{0.5h_\alpha},$$

$$\psi_{+\alpha}=\mathring{\psi}_{+\alpha}+\frac{\psi^*_{+\alpha}}{0.5h_\alpha},\ \psi^*_{\pm\alpha}=O(h_\alpha^2+\tau),\ \mathring{\psi}_{\pm\alpha}=O(1),\ \sum_{\alpha=1}^{p}\mathring{\psi}_{\pm\alpha}=0.$$

5 Устойчивость локально-одномерной схемы

Исследование устойчивости разностной схемы (2.6) будем проводить с помощью метода энергетических неравенств. Для этого умножим уравнение (2.6) скалярно на $y^{(\alpha)} = y^{j+\frac{\alpha}{p}}$:

$$\Big[\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big] - \Big[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big] = \Big[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big], \tag{4.1}$$

где

$$\Big[u,v\Big]_\alpha = \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} \hbar_\alpha,\ \| y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)} = \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y^2 \hbar_\alpha,\ \hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, i_\alpha = 1,2,...,N_\alpha-1, \\ \frac{h_\alpha}{2}, i_\alpha = 0; N_\alpha, \end{cases}$$

$$\Big[u,v\Big] = \sum_{x\in\bar{\omega}_h} uvH, \quad H = \prod_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha, \quad \|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} = \sum_{i_\beta\neq i_\alpha} \|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)} H/\hbar_\alpha.$$

Преобразуем каждое слагаемое тождества (4.1):

$$\Big[\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha = \frac{\varepsilon}{2p}\Big(\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}\Big)_{\bar{t}} + \frac{\varepsilon\tau}{2p}\|y_{\bar{t}}^{\alpha}\|^2_{L_2(\alpha)}. \tag{4.2}$$

$$\Big[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha = \Big(\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha + \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \hbar_\alpha + \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} y^{(\alpha)}_{N_\alpha} \hbar_\alpha = -\Big(a_\alpha y^2_{\bar{x}_\alpha}\Big]_\alpha -$$

$$-\Big[d_\alpha, (y^{(\alpha)})^2\Big]_\alpha + \frac{1}{p\nu^2}\Bigg[y^{(\alpha)}, \sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\tau\Bigg]_\alpha - \frac{1}{p\nu}\Bigg[y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Bigg]_\alpha. \tag{4.3}$$

$$\Big[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha = \Big[\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha - \widetilde{\mu}_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} - \widetilde{\mu}_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)}. \tag{4.4}$$

Оценим слагаемые, стоящие в правой части (4.4), с помощью леммы 1 [27]:

$$-\widetilde{\mu}_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} - \widetilde{\mu}_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)} \le \frac{1}{4\varepsilon_1}\Big(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha} + \widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\Big) + \varepsilon_1\varepsilon\|y_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)} + \varepsilon_1\Big(1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big)\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}.$$

Выбирая $\varepsilon = 1, \varepsilon_1 = \dfrac{c_0}{8}$, получаем

$$-\widetilde{\mu}_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} - \widetilde{\mu}_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)} \le \frac{2}{c_0}\Big(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha} + \widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\Big) + \frac{c_0}{8}\|y_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)} + \frac{c_0}{4}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}, \tag{4.5}$$

$$-\Big[d_\alpha, \Big(y^{(\alpha)}\Big)^2\Big]_\alpha \le c_2\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}, \tag{4.6}$$

$$\Bigg[\frac{1}{p\nu}y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Bigg]_\alpha = \Bigg[\frac{1}{p\nu}, \Big(y^{(\alpha)}\Big)^2\Bigg]_\alpha = \frac{1}{p\nu}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}. \tag{4.7}$$

$$\left[\frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y\Big(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau, y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right]_\alpha =$$

$$= \Big\|\frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y\Big(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau\Big\|_{L_2(\alpha)}\Big\|\frac{1}{p\nu^2}y^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big\|_{L_2(\alpha)} \leq$$

$$\leq \Big\|\frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y\Big(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\Big\|^2_{L_2(\alpha)} + \frac{1}{4p\nu^2}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{p\nu^2}\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1}\left(\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y\Big(x_{i_\alpha},t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau\right)^2 h_\alpha + \frac{1}{4p\nu^2}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{p\nu^2}\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1}\left(\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{2}{\nu}(t_j-t_{j'})}\tau\sum_{j'=0}^{j} y^2\Big(x_{i_\alpha},t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau\right)h_\alpha + \frac{1}{4p\nu^2}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{2}{\nu}(t_j-t_{j'})}\tau\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} h_\alpha\sum_{j'=0}^{j} y^2\Big(x_{i_\alpha},t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau + \frac{1}{4p\nu^2}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{2}{\nu}(t_j-t_{j'})}\tau\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} y^2(x_{i_\alpha},t^{j'+\frac{\alpha}{p}})h_\alpha + \frac{1}{4p\nu^2}\Big\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big\|^2_{L_2(\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{2}{\nu}(t_j-t_{j'})}\tau\sum_{j'=0}^{j}\|y(x_{i_\alpha},t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\|^2_{L_2(\alpha)}\tau + \frac{1}{4p\nu^2}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)}, \qquad (4.8)$$

Так как

$$\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{2}{\nu}(t_j-t_{j'})}\tau = e^{-\frac{2}{\nu}t_j}\sum_{j'=0}^{j} e^{\frac{2}{\nu}t_{j'}}\tau = e^{-\frac{2}{\nu}t_j}\frac{e^{\frac{2}{\nu}t_j}-1}{e^{\frac{2}{\nu}\tau}-1}\tau = \nu\frac{1-e^{-\frac{2}{\nu}t_j}}{2},$$

тогда из (4.8) получаем

$$\left[\frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{2}{\nu}(t_j-t_{j'})}y\Big(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau, y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right]_\alpha \leq$$

$$\leq \frac{1-e^{-\frac{2}{\nu}t_j}}{2p\nu}\sum_{j'=0}^{j}\|y(x_{i_\alpha},t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\|^2_{L_2(\alpha)}\tau + \frac{1}{4p\nu^2}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)}, \qquad (4.9)$$

$$\Big[\varphi_\alpha, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha \leq \frac{1}{2c_0}\|\varphi_\alpha\|^2_{L_2(\alpha)} + \frac{c_0}{2}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}. \qquad (4.10)$$

После суммирования по $i_\beta \neq i_\alpha,\ \beta = 1,2,...,p$ подставим (4.2)-(4.10) в тождество (4.1). Тогда получим

$$\frac{\varepsilon}{2p}\Big(\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\Big)_{\bar t} + \frac{\varepsilon\tau}{2p}\|y_{\bar t}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \frac{7c_0}{8}\|y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+$$

$$+\left(\frac{c_0}{4}+\frac{1}{p\nu}-\frac{1}{4p\nu^2}\right)\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \frac{e^{-\frac{2}{\nu}t_j}}{2p\nu}\sum_{j'=0}^{j}\|y(x_{i_\alpha},t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{2p\nu}\sum_{j'=0}^{j}\|y(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\tau + \frac{1}{2c_0}\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \frac{2}{c_0}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\Big(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha}+\widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\Big)H/\hbar_\alpha. \tag{4.11}$$

Суммируем (4.11) сначала по α от 1 до p :

$$\frac{\varepsilon}{2p}\Big(\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\Big)_{\bar t} + \frac{7c_0}{8}\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}_{\bar x_\alpha}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+$$

$$+\left(\frac{c_0}{4}+\frac{1}{p\nu}-\frac{1}{4p\nu^2}\right)\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} \leq \frac{1}{2p\nu}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{j'=0}^{j}\|y(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\tau+$$

$$+M_1\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\Big(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha}+\widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\Big)H/\hbar_\alpha\right),$$

где $M_1 = \max\{\frac{1}{2c_0}, \frac{2}{c_0}\}$, а затем, суммируя по j' от 0 до j:

$$\frac{\varepsilon}{2}\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \frac{7c_0}{8}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}_{\bar x_\alpha}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+$$

$$+\left(\frac{c_0}{4}+\frac{1}{p\nu}-\frac{1}{4p\nu^2}\right)\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2p\nu}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{j'}\|y(x,t^{s+\frac{\alpha}{p}})\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\tau+$$

$$+M_1\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\Big(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha}+\widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\Big)H/\hbar_\alpha\right) + \frac{\varepsilon}{2}\|y^0\|^2_{L_2(\bar\omega_h)},$$

или, оценивая первое слагаемое в правой части следующим образом

$$\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{j'}\|y(x,t^{s+\frac{\alpha}{p}})\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\tau\le\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{j'=0}^{j}\|y(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\tau,$$

получаем

$$\frac{\varepsilon}{2}\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\frac{7c_0}{8}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+$$

$$+\left(\frac{c_0}{4}+\frac{1}{2p\nu}-\frac{1}{4p\nu^2}\right)\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\le$$

$$\le M_1\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{i_\beta\ne i_\alpha}\left(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha}+\widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\right)H/\hbar_\alpha\right)+\frac{\varepsilon}{2}\|y^0\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}. \tag{4.12}$$

Выбирая $\nu\ge\frac{1}{2}$ из (4.12) получаем априорную оценку

$$\varepsilon\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|y_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\le$$

$$\le M\left(\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{i_\beta\ne i_\alpha}\left(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha}(0,x',t_{j'})+\widetilde{\mu}^2_{+\alpha}(1,x',t_{j'})\right)H/\hbar_\alpha\right)+\right.$$

$$\left.+\|y^0\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right), \tag{4.13}$$

где $M\le\dfrac{2}{\min\left\{c_0,c_0^2\right\}}$ и не зависит от h_α и τ, $x'=(x_1,x_2,...,x_{\alpha-1},x_{\alpha+1},...,x_p)$.

Итак, справедлива следующая

Теорема 1 *Локально-одномерная схема (2.6) устойчива по правой части и начальным данным, так что для решения разностной задачи (2.6) справедлива оценка (4.13).*

6 Сходимость локально-одномерной схемы

По аналогии с [26] решение $z_{(\alpha)} = z^{j+\frac{\alpha}{p}}$ задачи для погрешности

$$\frac{\varepsilon}{p} z_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \overline{\Lambda}_\alpha z^{(\alpha)} + \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \tag{5.1}$$

$$z(x,0) = 0,$$

представим в виде суммы $z_{(\alpha)} = \upsilon_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\varepsilon \frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \mathring{\psi}_\alpha, \ x \in \omega_h + \gamma_\alpha, \ \alpha = 1, 2, ..., p, \tag{5.2}$$

$$\eta(x,0) = 0.$$

Из (5.2) следует $\varepsilon\eta^{j+1} = \varepsilon\eta_{(p)} = \varepsilon\eta^j + \tau\Big(\mathring{\psi}_1 + \mathring{\psi}_2 + ... + \mathring{\psi}_p\Big) = \varepsilon\eta^j = ... = \varepsilon\eta^0 = 0.$
Для $\eta^\alpha = \dfrac{\tau}{\varepsilon}\Big(\mathring{\psi}_1 + \mathring{\psi}_2 + ... + \mathring{\psi}_\alpha\Big) = -\dfrac{\tau}{\varepsilon}\Big(\mathring{\psi}_{\alpha+1} + ... + \mathring{\psi}_p\Big) = O\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right).$

Функция $\upsilon_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\upsilon_{(\alpha)} - \upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha \upsilon_{(\alpha)} + \widetilde{\psi}_\alpha, \ \widetilde{\psi}_\alpha = \Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)} + \psi_\alpha^*, \ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \tag{5.3}$$

$$\frac{\upsilon_{(\alpha)} - \upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha^- \upsilon_{(\alpha)} + \widetilde{\psi}_{-\alpha}, \ \widetilde{\psi}_{-\alpha} = \Lambda_\alpha^- \eta_{(\alpha)} + \frac{\psi_{-\alpha}^*}{0.5h_\alpha}, \ x_\alpha = 0, \tag{5.4}$$

$$\frac{\upsilon_{(\alpha)} - \upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha^+ \upsilon_{(\alpha)} + \widetilde{\psi}_{+\alpha}, \ \widetilde{\psi}_{+\alpha} = \Lambda_\alpha^+ \eta_{(\alpha)} + \frac{\psi_{+\alpha}^*}{0.5h_\alpha}, \ x_\alpha = 1, \tag{5.5}$$

$$\upsilon(x,0) = 0. \tag{5.6}$$

Если существуют непрерывные в замкнутой области $\overline{Q}_T$ производные $\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}$, $\alpha \neq \beta$, то $\tilde{\Lambda}_\alpha \eta_{(\alpha)} = -\dfrac{\tau}{\varepsilon}\tilde{\Lambda}_\alpha\Big(\mathring{\psi}_{\alpha+1} + ... + \mathring{\psi}_p\Big) = O(\dfrac{\tau}{\varepsilon}).$

Решение задачи (5.3)-(5.6) оценим с помощью Теоремы 1.

$$\varepsilon\|\upsilon^{j+1}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \Big(\|\upsilon_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \|\upsilon^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\Big) \leq$$

$$\leq M \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\|\widetilde{\psi}_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \Big(\widetilde{\psi}^2_{-\alpha} + \widetilde{\psi}^2_{+\alpha}\Big) H/\hbar_\alpha\right), \tag{5.7}$$

Так как $\eta^j = 0, \ \eta_{(\alpha)} = O\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right), \ \|z^j\| \leq \|\upsilon^j\|$, из оценки (5.7) следует

Теорема 2 *Пусть задача (1.6)-(1.8) имеет единственное непрерывное в* $\overline{Q}_T$ *решение* $u(x,t)$ *при всех значениях* ε *и существуют непрерывные в* $\overline{Q}_T$ *производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \ \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \ \alpha = 1, 2, ..., p, \ \alpha \neq \beta,$$

тогда локально-одномерная схема (2.6) сходится к решению дифференциальной задачи (1.1)-(1.3) со скоростью $O\left(|h|^2 + \dfrac{\tau}{\varepsilon} + \varepsilon\right)$, $\tau = o\left(\varepsilon\right)$, *для всех* $\nu \geq \frac{1}{2}$, *так что*

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1 \leq M\left(|h|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon} + \varepsilon\right),$$

где $\varepsilon-$ *малый параметр,* $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + ... + h_p^2$,

$$\|z^{j+1}\|_1 = \left(\varepsilon \|z^{j+1}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \sum_{j\,'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\|z^{j\,'+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \|z^{j\,'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\right)\right)^{1/2}.$$

Очевидно, что скорость сходимости будет определяться наилучшим образом, если выбрать $\varepsilon = O(\tau^{\frac{1}{2}})$.

Следствие. Если $\varepsilon = \tau^{\frac{1}{2}}$, тогда решение разностной задачи (2.6) сходится к решению дифференциальной задачи (1.1)-(1.3) со скоростью $O\left(|h|^2 + \sqrt{\tau}\right)$.

Замечание 1. Полученные априорные оценки справедливы и в случае, когда область G представляет собой p-мерный прямоугольный параллелепипед

$$G = \{x = (x_1, x_2, ..., x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, ..., p\}.$$

Замечание 2. Полученные в данной работе результаты справедливы и для уравнения дробного порядка следующего вида

$$\partial_{0t}^{\delta} u = Lu + \partial_{0t}^{\delta} Lu - u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.1*}$$

с краевыми

$$\begin{cases} \Pi_\alpha(x,t) = \mu_{-\alpha}(x,t), \ x_\alpha = 0, \ 0 \leq t \leq T, \\ -\Pi_\alpha(x,t) = \mu_{+\alpha}(x,t), \ x_\alpha = 1, \ 0 \leq t \leq T, \end{cases} \tag{1.2*}$$

и начальными условими

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in \overline{G}, \tag{1.3*}$$

где $\partial_{0t}^{\delta} = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int\limits_0^t \frac{u_\tau d\tau}{(t-\tau)^\delta}-$ дробная производная в смысле Капуто порядка δ, $0 < \delta < 1$, $\Pi_\alpha(x,t) = k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \nu \partial_{0t}^{\delta}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)$.

Тогда, умножая обе части (1.1*, (1.2*) на $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}$ и действуя оператором дробного интегрирования $D_{0t}^{-\delta}=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int\limits_0^t\frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\delta}}$, после несложных преобразований получаем

$$Lu-u=-\widetilde{f}(x,t), \tag{1.4*}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=\widetilde{\mu}_{-\alpha}(x,t),\ x_\alpha=0,\ 0\le t\le T,\\ -k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=\widetilde{\mu}_{+\alpha}(x,t),\ x_\alpha=1,\ 0\le t\le T, \end{cases} \tag{1.5*}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{G}, \tag{1.6*}$$

где

$$\widetilde{f}(x,t)=\frac{D_{0t}^{-\delta}\left(f(x,t)\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}\right)+Lu_0(x)-u_0(x)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}},$$

$$\widetilde{\mu}_{\pm\alpha}(x,t)=\frac{D_{0t}^{-\delta}\left(\mu_{\pm\alpha}(x,t)\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}\right)\pm k_\alpha(x,0)u_0'(x)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}},$$

$D_{0t}^{-\delta}=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int\limits_0^t\frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\delta}}$– дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка δ, $0<\delta<1$.

Далее вместо уравнения (1.4*) рассматривается следующее уравнение с малым параметром

$$\varepsilon u=Lu-u+\widetilde{f}(x,t). \tag{1.7*}$$

7 Алгоритм численного решения

Для численного решения дифференциальной задачи (1.1)-(1.3) выпишем расчетные формулы $(0\le x_\alpha\le 1,\ \alpha=1,2,\ p=2)$:

$$\partial_{0t}^{\alpha}u=\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(k_1(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(k_2(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big)+$$

$$+\nu\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_1}\Big(k_1(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)+\nu\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_2}\Big(k_2(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big)-$$

$$-q_1(x_1,x_2,t)u(x_1,x_2,t) - q_2(x_1,x_2,t)u(x_1,x_2,t) + f(x_1,x_2,t), \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} \Pi_\alpha(x,t) = \mu_{-\alpha}(x,t),\ x_\alpha = 0,\ 0 \le t \le T, \\ -\Pi_\alpha(x,t) = \mu_{+\alpha}(x,t),\ x_\alpha = 1, 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{6.2}$$

$$u(x_1,x_2,0) = u_0(x_1,x_2). \tag{6.3}$$

Рассмотрим сетку $x_k^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha,\ \alpha = 1,2,\ t_j = j\tau,$ где $i_\alpha = 0,1,...,N_\alpha,\ h_\alpha = 1/N_\alpha,\ j = 0,1,...,m,\ \tau = T/m$. Вводится один дробный шаг $t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + 0.5\tau$. Обозначим $y_{i_1,i_2}^{j+\frac{\alpha}{2}} = y^{j+\frac{\alpha}{2}} = y(i_1h_1, i_2h_2, (j+0.5\alpha)\tau),\ \alpha = 1,2,$ сеточную функцию.

Напишем локально-одномерную схему

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\nu^2} \sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} y^{j+\frac{1}{2}}\tau - \frac{1}{2\nu} y^{j+\frac{1}{2}} + \varphi_1, \\ \varepsilon \frac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 y^{j+1} + \frac{1}{2\nu^2} \sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} y^{j+1}\tau - \frac{1}{2\nu} y^{j+1} + \varphi_2, \end{cases} \tag{6.4}$$

$$\begin{cases} y_{0,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \varkappa_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) y_{1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \mu_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}), \\ y_{N_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \varkappa_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) y_{N_1-1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \mu_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}), \\ y_{i_1,0}^{j+\frac{1}{2}} = \varkappa_{21}(i_1h_1, t_{j+1}) y_{i_1,1}^{j+1} + \mu_{21}(i_1h_1, t_{j+1}), \\ y_{i_1,N_2}^{j+1} = \varkappa_{22}(i_1h_1, t_{j+1}) y_{i_1,N_2-1}^{j+1} + \mu_{22}(i_1h_1, t_{j+1}), \end{cases} \tag{6.5}$$

$$y_{i_1,i_2}^0 = u_0(i_1h_1, i_2, h_2), \tag{6.6}$$

$$\Lambda_k y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)_{x_\alpha} - d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}},\ \alpha = 1,2,$$

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{2\nu} \sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} f^{j+\frac{\alpha}{2}}\tau - e^{-t_{j+\frac{\alpha}{2}}} \left[\left(y_{\bar{x}_1x_1}^{j+\frac{\alpha-1}{2}} + y_{\bar{x}_2x_2}^{j+\frac{\alpha-1}{2}}\right) - \frac{1}{\nu} y^{j+\frac{\alpha-1}{2}}\right],\ p = 2,$$

Приведем расчетные формулы для решения задачи (6.4)-(6.6).

На первом этапе находим решение $y_{i_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}}$. Для этого при каждом значении $i_2 = \overline{1, N_2 - 1}$ решается следующая задача:

$$A_{1(i_1,i_2)} y_{i_1-1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} - C_{1(i_1,i_2)} y_{i_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + B_{1(i_1,i_2)} y_{i_1+1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = -F_{1(i_1,i_2)}^{j+\frac{1}{2}},\ 0 < i_1 < N_1, \tag{6.7}$$

$$y_{0,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \varkappa_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) y_{1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \mu_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}),$$

$$y_{N_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \varkappa_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) y_{N_1-1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \mu_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}),$$

где

$$A_{1(i_1,i_2)} = \frac{(a_1)_{i_1,i_2}}{h_1^2}, \quad B_{1(i_1,i_2)} = \frac{(a_1)_{i_1+1,i_2}}{h_1^2},$$

$$C_{1(i_1,i_2)} = A_{1(i_1,i_2)} + B_{1(i_1,i_2)} + \frac{\varepsilon}{\tau} - \frac{\tau}{2\nu^2} + d_{1(i_1,i_2)} + \frac{1}{2\nu},$$

$$F_{1(i_1,i_2)}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{\tau} y_{i_1,i_2}^j + \frac{1}{2\nu^2} \sum_{j\,'=0}^{j-1} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j\,'})} y^{j\,'+\frac{1}{2}} \tau + \varphi_{1(i_1,i_2)}.$$

$$\varkappa_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{\frac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1}}{\frac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1} - \frac{0.5h_1\tau}{2\nu^2} + 0.5h_1 d_{-1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{0.5h_1}{2\nu} + \frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}},$$

$$\varkappa_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{\frac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1}}{\frac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1} - \frac{0.5h_1\tau}{2\nu^2} + 0.5h_1 d_{+1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{0.5h_1}{2\nu} + \frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}},$$

$$\mu_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{\widetilde{\mu}_{-1}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau} y_0^j}{\frac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1} - \frac{0.5h_1\tau}{2\nu^2} + 0.5h_1 d_{-1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{0.5h_1}{2\nu} + \frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}},$$

$$\mu_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{\widetilde{\mu}_{+1}(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau} y_{N_1}^j}{\frac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1} - \frac{0.5h_1\tau}{2\nu^2} + 0.5h_1 d_{+1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{0.5h_1}{2\nu} + \frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}}.$$

Для вычисления правой части прогонки $F_{1(i_1,i_2)}^{j+\frac{1}{2}}$ на $j+\frac{1}{2}$–м слое необходимо использовать значение искомой функции y_{i_1,i_2}^j со всех предыдущих (нижних) слоев из-за слагаемого $\frac{1}{2\nu^2} \sum\limits_{j\,'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j\,'})} y^{j+\frac{1}{2}} \tau$, что значительно увеличивает объём вычислений, даже при малых разбиениях сетки. Во избежания этого, в работе предлагается рекуррентная формула для быстрого счета в многомерном случае, которая позволяет хранить на предыдущем слое значение указанной суммы, что по количеству операций не уступает двухслойной схеме.

Аппроксимируя $\frac{1}{\nu^2} \int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)} u(x,\tau) d\tau$ суммой $\frac{1}{\nu} \sum\limits_{s=1}^{pj+\alpha} \left(e^{-\frac{1}{\nu} t_{j+\frac{\alpha-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\nu} t_{j+\frac{\alpha-s+1}{p}}} \right) u^{\frac{s}{p}}$ таким образом, при $p=2$ на $j+\frac{1}{2}$–м слое рекуррентная формула для быстрого счета примет вид:

$$\frac{1}{2} S^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\nu^2} \sum_{j\,'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j\,'})} y^{j+\frac{1}{2}} \tau = \frac{1}{2\nu} \sum_{s=0}^{2j} \left(e^{-\frac{1}{\nu} t_{j-\frac{s}{2}}} - e^{-\frac{1}{\nu} t_{j+\frac{1-s}{2}}} \right) y^{\frac{s}{p}} =$$

$$= \frac{\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2\nu}}\right)}{\nu} y^{j+\frac{1}{2}} + e^{-\frac{\tau}{2\nu}} \frac{1}{2} S^j,$$

где $S^0 = 0$.

На втором этапе находим решение y_{i_1,i_2}^{j+1}. Для этого, как и в первом случае, при каждом значении $i_1 = \overline{1, N_1 - 1}$ решается задача

$$A_{2(i_1,i_2)} y_{i_1,i_2-1}^{j+1} - C_{2(i_1,i_2)} y_{i_1,i_2}^{j+1} + B_{2(i_1,i_2)} y_{i_1,i_2+1}^{j+1} = -F_{2(i_1,i_2)}^{j+1}, \ 0 < i_2 < N_2, \quad (6.8)$$

$$y_{i_1,0}^{j+1} = \varkappa_{21}(i_1 h_1, t_{j+1}) y_{i_1,1}^{j+1} + \mu_{21}(i_1 h_1, t_{j+1}),$$

$$y_{i_1,N_2}^{j+1} = \varkappa_{22}(i_1 h_1, t_{j+1}) y_{i_1,N_2-1}^{j+1} + \mu_{22}(i_1 h_1, t_{j+1}),$$

$$A_{2(i_1,i_2)} = \frac{(a_2)_{i_1,i_2}}{h_2^2}, \quad B_{2(i_1,i_2)} = \frac{(a_2)_{i_1,i_2+1}}{h_2^2},$$

$$C_{2(i_1,i_2)} = A_{2(i_1,i_2)} + B_{2(i_1,i_2)} + \frac{\varepsilon}{\tau} - \frac{\tau}{2\nu^2} + d_{2(i_1,i_2)} + \frac{1}{2\nu},$$

$$F_{2(i_1,i_2)}^{j+1} = \frac{\varepsilon}{\tau} y_{i_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\nu^2} \sum_{j'=0}^{j-1} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} y^{j'+1} \tau + \varphi_{2(i_1,i_2)}.$$

$$\varkappa_{21}(i_1 h_1, t_{j+1}) = \frac{\frac{(a_2)_{i_1,1}}{h_2}}{\frac{(a_2)_{i_1,1}}{h_1} - \frac{0.5 h_2 \tau}{2\nu^2} + 0.5 h_2 d_{-2,i_1}^{j+1} + \frac{0.5 h_2}{2\nu} + \frac{0.5 h_2 \varepsilon}{\tau}},$$

$$\varkappa_{22}(i_1 h_1, t_{j+1}) = \frac{\frac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2}}{\frac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2} - \frac{0.5 h_2 \tau}{2\nu^2} + 0.5 h_2 d_{+2,i_1}^{j+1} + \frac{0.5 h_2}{2\nu} + \frac{0.5 h_2 \varepsilon}{\tau}},$$

$$\mu_{21}(i_1 h_1, t_{j+1}) = \frac{\widetilde{\mu}_{-2}(i_1 h_1, t_{j+1}) + \frac{0.5 h_2 \varepsilon}{\tau} y_0^j}{\frac{(a_2)_{i_1,1}}{h_1} - \frac{0.5 h_2 \tau}{2\nu^2} + 0.5 h_2 d_{-2,i_1}^{j+1} + \frac{0.5 h_2}{2\nu} + \frac{0.5 h_2 \varepsilon}{\tau}},$$

$$\mu_{22}(i_1 h_1, t_{j+1}) = \frac{\widetilde{\mu}_{+2}(i_1 h_1, t_{j+1}) + \frac{0.5 h_2 \varepsilon}{\tau} y_{N_2}^j}{\frac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2} - \frac{0.5 h_2 \tau}{2\nu^2} + 0.5 h_2 d_{+2,i_1}^{j+1} + \frac{0.5 h_2}{2\nu} + \frac{0.5 h_2 \varepsilon}{\tau}}.$$

На $j+1-$м слое рекуррентная формула для быстрого счета имеет вид:

$$\frac{1}{2} S^{j+1} = \frac{1}{2\nu^2} \sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} y^{j+\frac{1}{2}} \tau = \frac{1}{2\nu} \sum_{s=0}^{2j+1} \left(e^{-\frac{1}{\nu} t_{j-\frac{1-s}{2}}} - e^{-\frac{1}{\nu} t_{j+\frac{2-s}{2}}} \right) y^{\frac{s}{p}} =$$

$$= \frac{\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2\nu}}\right)}{\nu} y^{j+1} + e^{-\frac{\tau}{2\nu}} \frac{1}{2} S^{j+\frac{1}{2}}.$$

Каждая из задач (6.7), (6.8) решается методом прогонки [26].

Список литературы

[1] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.

[2] Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения, 18:4 (1982), 689-700.

[3] van Duijn C.J., Cuesta C., Hulshof J. Infiltration in Porous Media with Dynamic Capillary Pressure: Travelling Waves // European Journal of Anaesthesiology, 11 (2000), 381-397.

[4] Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976.

[5] Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en regime de dessechement // L 'Eau et la Production Vegetale. Paris: Institut National de la Recherche Agronomique, 9 (1964), 27-62.

[6] Colton D.L. On the analytic theory of pseudoparabolic equations // Quart. J. Math. 23 (1972), 179-192.

[7] Дзекцер Е.С. Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // ДАН СССР. 220:3 (1975), 540-543.

[8] Chen P.J., Curtin M.E. On a theory of heat conduction involving two temperatures // Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). 19 (1968), 614-627.

[9] Ting T.W. Certain non-steady flows of second-order fluids // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 14 (1963), 1-26.

[10] Иванова М.В., Ушаков В.И. Вторая краевая задача для псевдопараболического уравнения в нецилиндрической области // Матем. заметки. 72:1 (2002), 48-53.

[11] Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т. О разрешимости решений второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 3 (2019), 41-47.

[12] Федоренко Р.П. О скорости сходимости одного итерационного процесса // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 4:3 (1964), 559-564.

[13] Бахвалов Н.С. О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 6:5 (1966), 861-883.

[14] Brandt A. Multi-level adaptive solutions to boundary value problems // Math. Comput. 31 (1977), 333-390.

[15] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.

[16] Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984.

[17] Ольшанский М.А. Анализ многосеточного метода для уравнений конвекции-диффузии с краевыми условиями Дирихле // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 44:8 (2004), 1450-1479.

[18] Olshanskii M.A., Reusken A. Convergence analysis of a multigrid solver for a finite element method applied to convection-dominated model problem // SIAM J. Num.Anal. 43 (2004), 1261-1291.

[19] Бештоков М.Х. Разностный метод решения одной нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнен. Т. 49, № 9, (2013), 1170-1177.

[20] Бештоков М.Х. Численный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 54:9 (2014), 1497-1514.

[21] Бештоков М.Х. Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 56:10 (2016), 1780-1794.

[22] Бештоков М.Х. Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 57:12 (2017), 2021-2041.

[23] Бештоков М.Х. Краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений дробного порядка и разностные методы их решения // Известия вузов. Математика, 2 (2019), 3-12.

[24] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференицальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 12:5 (1967), 3-122.

[25] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.:Наука, 1977.

[26] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

[27] Андреев В.Б. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 8:6 (1968), 1218-1231.

Numerical methods for solving the second boundary value problem for a multidimensional Sobolev type equation

M.KH. Beshtokov

Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkaria Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,

Department of Computational Methods, North-Caucasus Center for Mathematical Research, North-Caucasus Federal University

Abstract. The second boundary value problem is investigated for a multidimensional Sobolev-type differential equation with variable coefficients. The considered equation is reduced to an integro-differential equation of parabolic type with a small parameter. For an approximate solution of the obtained problem, a locally one-dimensional difference scheme is constructed. Using the method of energy inequalities, an a priori estimate is obtained for the solution of a locally one-dimensional difference scheme, which implies its stability and convergence. For a two-dimensional problem, an algorithm is constructed for the numerical solution of the second boundary value problem for a partial differential equation of Sobolev type.

Keywords: boundary value problems, a priori estimate, integro-differential equation, Sobolev type differential equation, locally one-dimensional scheme, stability. convergence.