ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 2, 2022
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория сингулярных уравнений в частных производных

Задача Пуанкаре для уравнение Стокса-Бицадзе со сверхсингулярной точкой в младших коэффициентах

Федоров Ю.С.
НИУ МЭИ,
FedorovYS@mpei.ru

Аннотация. Доказано, что любая эллиптическая система уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами с двумя искомыми функциями от двух переменных приводится к одному из уравнений Лапласа или Бицадзе в комплексных переменных. Уравнение Лапласа изучено достаточно хорошо, чего нельзя сказать об уравнении Бицадзе. В настоящей работе устанавливается связь между уравнениями Стокса и Бицадзе. Кроме того, для уравнения Стокса-Бицадзе со сверхсингулярной точкой в младших коэффициентах найдено решение задачи Пуанкаре в классах функций, удовлетворяющих условию Гельдера. После сведения задачи Пуанкаре к задаче Римана-Гильберта исследуются вопросы единственности решения задачи Пуанкаре и представления решения в виде явной формулы (в зависимости от индекса этой задачи).

Ключевые слова: Стокса-Бицадзе уравнения, задача Пуанкаре, задача типа Римана–Гильберта, оператор Помпейу-Векуа.

Введение

В теории эллиптических уравнений система уравнений Бицадзе [1]:

$$\begin{cases} u_{1xx} - u_{1yy} - 2u_{2xy} = 0, \\ 2u_{1xy} + u_{2xx} - u_{2yy} = 0, \end{cases}$$

занимает важное место. Как известно, любая эллиптическая система уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами с двумя искомыми функциями от двух переменных приводится к одному из комплексных уравнений

$$\begin{cases} u_{z\bar{z}} = 0, \\ u_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \end{cases}$$

где $u = u_1 + iu_2,\ 2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$ оператор Коши-Римана .

Уравнение $u_{z\bar{z}} = 0$ хорошо изучено, чего нельзя сказать об уравнении Бицадзе. Как следует из работ Бочева П.Б. [2] и М. Тахира и А. Дэвис [3], уравнение Бицадзе непосредственно связано с уравнением Стокса. Согласно [3] плоский случай уравнения Стокса, который базируется на функции потока $u_1(x, y)$ и функции напряжения $u_2(x, y)$, имеет вид

$$u_{1xx} - u_{1yy} = -4\eta u_{2xy},$$
$$-u_{1xy} = \eta(u_{2yy} - u_{2xx}),$$

где η- постоянная. Подстановка $2\eta u_2 \to u_2$ переводит эту систему в систему уравнений Бицадзе.

Некоторые факты из работ [2], [3] о сведении уравнения Стокса в плоском случае к уравнению Бицадзе мы приводим ниже. Авторами работы [3] также рассмотрены некоторые краевые задачи. Вводя матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = -A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

вышеприведенную систему уравнений Бицадзе можно представить в матричной форме

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0. \tag{1}$$

В работе [4] для уравнения Стокса-Бицадзе решение задачи Пуанкаре

$$p_1u_x + p_2u_y + qu = g(x, y), (x, y) \in \Gamma \tag{2}$$

где p_1, p_2, q действительнозначные матричные функции с размерностью 2×2 и $g(x, y)$ действительнозначный вектор заданный на контуре Γ, находится из класса $C^4(D)$. Показана единственность решения системы уравнений Бицадзе (1) с краевой задачей (2), имеющей четыре дополнительных одноточечные условия. Автор также показывает способ построения решения, но явного вида не приводит.

Некоторые краевые задачи для комплексных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в кольцевой области были рассмотрены T. Vaitekhovich [5]. Заметим,что внутри единичного круга краевая задача для уравнения Бицадзе рассмотрена А. Бабаяном. Им было доказано, что она является нётеровой. Некоторые краевые задачи также рассмотрены в работах Б.Б.Ошорова [10], S.Hizliyel и M. Cagliyan[11] и др.

1. Постановка задачи Пуанкаре (задача P). В настоящей работе рассматривается уравнение

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + \frac{a}{2r^n}u_x + \frac{b}{2r^n}u_y + cu = f, \tag{3}$$

с матричными младшими коэффициентами

$$a = \begin{pmatrix} -\mathrm{Re}(e^{i\alpha}a_0) - r^n\varphi_1 & -\mathrm{Im}(e^{i\alpha}a_0) - r^n\varphi_2 \\ \mathrm{Im}(e^{i\alpha}a_0) + r^n\varphi_2 & \mathrm{Re}(e^{i\alpha}a_0) + r^n\varphi_1 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} \mathrm{Im}(e^{i\alpha}a_0) + r^n\varphi_1 & -\mathrm{Re}(e^{i\alpha}a_0) - r^n\varphi_2 \\ \mathrm{Re}(e^{i\alpha}a_0) + r^n\varphi_2 & \mathrm{Im}(e^{i\alpha}a_0) + r^n\varphi_1 \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

и матрица $c = (c_{ij}),\ i, j = 1, 2$ с элементами $c_{11} = \varphi_1\mathrm{Re}(e^{i\alpha}a_0) - \varphi_2\mathrm{Im}(e^{i\alpha}a_0) + (\varphi_1^2 - \varphi_2^2)|z|^{n-1},\ c_{22} = \varphi_2\mathrm{Re}(e^{i\alpha}a_0) + \varphi_1\mathrm{Im}(e^{i\alpha}a_0) + 2\varphi_1\varphi_2|z|^{n-1},\ c_{12} = c_{21} = 0$, причем, где $a_0 \in C(\overline{D}),\ \varphi(z) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y)$ - аналитическая функция, $z = re^{i\alpha}$ и с правой частью $f \in C(\overline{D})$. Следовательно, 2×2 матричные коэффициенты $a,\ b,\ c \in C(\overline{D})$.

Под решением уравнения (3) понимается функция u, принадлежащая соболевскому пространству $W^{1,p}(D \cap |z| > \varepsilon\})$ при любом $\varepsilon > 0$ и удовлетворяющая уравнению (3) в обобщенном смысле.

Для этого уравнения в классе $C^\mu(\overline{D}), \quad 0 < \mu < 1 - 2/p,\ p > 2$ ставится следующая задача Пуанкаре.

Задача **P**. *Найти решение уравнения (3) в классе*

$$u,\ p_1u_x + p_2u_y + qu \in C^\mu(\overline{D}), \quad 0 < \mu < 1 - 2/p,\ p > 2,$$

удовлетворяющее на Γ *граничному условию (2), где* $p_1,\ p_2,\ q,\ g \in C^\mu(\Gamma)$, *причем*

$$p_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ G_2^0 & -G_2^1 \end{pmatrix}, p_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -G_2^1 & G_2^0 \end{pmatrix},$$

$$q = \begin{pmatrix} G_1^0 & -G_1^1 \\ -G_2^0\varphi_1 + G_2^1\varphi_2 & -G_2^0\varphi_2 + G_2^1\varphi_1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} g_1 \\ e^\omega g_2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$p_j, j = 1, 2,\ q,$ *действительнозначные матричные функции размерности* 2×2, *и* $g(x, y)$ *действительнозначный вектор, заданный на контуре* Γ.

Заметим, что $G_k = G_k^0 + iG_k^1$, $g = g_1 + ig_2$.

Так как эту задачу мы решаем сведением к задаче Римана–Гильберта, приводим некоторые утверждения из классической теории.

2. Классическая задача Римана–Гильберта. Предварительно напомним хорошо известные результаты относительно классической задачи Римана– Гильберта, полученные в монографиях Н.И. Мусхелишвили[7] и А.П. Солдатова [8]: найти аналитическую в области D функцию $\phi(z)$, которая на границе $\Gamma = \partial D$ удовлетворяет условию

$$\mathrm{Re} G\phi\big|_{\Gamma} = g, \tag{4}$$

где функция $G = \alpha + i\beta \in C^{\nu}(\Gamma)$ всюду отлична от нуля . Если $g(z) \equiv 0$, то задача Римана–Гильберта называется однородной; в противном случае ее называют неоднородной. В дальнейшим, мы воспользуемся компактным изложением А.П. Солдатова относительно решения задача Римана-Гильберта.

В дальнейшем предполагается, что функция $G(t) \neq 0$ всюду на Γ. В данном разделе эту задачу рассмотрим для односвязной области D, ограниченной простым контуром Γ. В случая, когда область D является единичным кругом, задача (4) легко сводится к задаче линейного сопряжения и, следовательно, допускает эффективное решение. С этой целью функцию ϕ продолжим в область $D' = \{|z| > 1\}$, полагая

$$\phi(z) = \overline{\phi(1/\bar{z})}, \quad |z| > 1.$$

Очевидно, так продолженная функция будет аналитической в $\mathbb{C} \setminus \Gamma = D \cup D'$ класса $C_0^{\mu}(\overline{D} \vee \overline{D}')$. Она удовлетворяет условию $\phi = \phi_*$, где ϕ_* определяется с помощью инверсии

$$\phi_*(z) = \overline{\phi(1/\overline{z})} \tag{5}$$

Операция $\phi \to \phi_*$ является линейной над полем $\mathbb{R}$ и инволютивной, т.е. $(\phi_*)_* = \phi$. Из определения (5) следует, что

$$\phi_*^{\pm}(t) = \overline{\phi^{\mp}}, \quad t \in \Gamma. \tag{6}$$

В частности, краевое условие (4) для так продолженной функции ϕ перепишется в форме:

$$G\phi^{+} + \overline{G}\phi^{-} = 2g. \tag{7}$$

Верно и обратное: если $\phi \in C_0^\mu(\overline{D} \vee \overline{D}')$ есть решение этой задачи линейного сопряжения, подчиненное дополнительному требованию $\phi = \phi_*$, то сужение ϕ на D служит решением задачи (4).

Очевидно, задачу (7) мы можем представить в форме (4) по отношению к коэффициенту $\widetilde{G} = -\overline{G}/G$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $æ = \mathrm{Ind}_\Gamma G$, *так что функция* $a(t) = \arg G(t) - æ \arg t \in C^\mu(\Gamma)$, *и пусть*

$$R(z) = \begin{cases} 1, & |z| < 1, \\ z^{2æ}, & |z| > 1, \end{cases} \qquad H(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\pi - 2a(t)}{t - z} dt. \tag{8}$$

Тогда функция

$$X(z) = R(z) e^{H(z) - H(0)/2} \tag{9}$$

является $\widetilde{G}$*-канонической и обладает свойством*

$$X_*(z) = X(z) z^{-2æ}. \tag{10}$$

Доказательство.

В классе многочленов P_n введем операцию

$$\widehat{p}(z) = z^n p_*(z), \tag{11}$$

которая действует по формуле $(c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n)^\wedge = \overline{c}_n + \overline{c}_{n-1} z + \ldots + \overline{c}_0 z^n$ и, очевидно, инволютивна: $(\widehat{p})^\wedge = p$.

Из (10) и определения (11) непосредственно следует, что

$$(Xp)_* = X\widehat{p}, \quad p \in P_{-2æ}. \tag{12}$$

Утверждается, что на единичной окружности имеет место соотношение

$$\overline{\left[\frac{tp(t)}{G(t)X^+(t)}\right]} = -\frac{t\widehat{q}(t)}{G(t)X^+(t)}, \quad q \in P_{2æ-2},\ t \in \Gamma. \tag{13}$$

Обратимся к исходной задаче (4) и рассмотрим класс $P_n^0 = \{p \in P_n,\ \widehat{p} = p\}$. Очевидно, любой элемент $p \in P_n$ единственным образом представим в виде $p = p^0 + ip^1$, где $p^1 \in P_n^0$, так что $\mathbb{R}$- линейное подпространство $P_n^0 \subseteq P_n$ имеет размерность $n + 1$.

Теорема 1. *В условиях леммы 1 все решения задачи (4) в классе* $C^\mu(\overline{D})$ *описываются формулой*

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{dt}{t - z} + X(z)p(z), \quad p \in P^0_{-2æ}, \tag{14}$$

где функция g *удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int_\Gamma \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q(t)dt = 0, \quad q \in P^0_{2æ-2}. \tag{15}$$

Очевидно, при $æ \leq 0$ размерность пространства $P^0_{-2æ}$ над полем $\mathbb{R}$ равна $-2æ+1$. Аналогично при $æ \geq 0$ размерность пространства $P^0_{2æ-2}$ равна $2æ-1$. Во всех случаях индекс задачи (4) равен $-2æ+1$ и, в частности, всегда отличен от нуля.

Обратимся к общему случаю односвязной области D. Пусть простой контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, тогда по теореме Келлога конформное отображение $w = \omega(z)$ этой области на единичный круг D_0 принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$ или, что равносильно, его производная $\omega' \in C^\mu(\overline{D})$. Зафиксируем точку $z_0 \in D$, такую что $\omega(z_0) = 0$.

Теорема 2 *Пусть* $æ = \mathrm{Ind}_\Gamma G$, *так что функция* $a(t) = \arg G(t) - æ \arg t \in C^\mu(\Gamma)$, *и пусть* $X(z) = e^{A(z)}$, *где функция* $A \in C^\mu(\overline{D})$ *определяется как решение задачи Дирихле*

$$\mathrm{Im}\, A^+ = \frac{\pi}{2} - a, \quad \mathrm{Re}\, A(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma a(t)|\omega'(t)|d_1 t. \tag{16}$$

Тогда все решения задачи (4) в классе $C^\mu(\overline{D})$ *описываются формулой*

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{\omega'(t)dt}{\omega(t)-\omega(z)} + X(z)p[\omega(z)], \quad p \in P^0_{-2æ}, \tag{17}$$

где функция f *удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int_\Gamma \frac{f(t)}{G(t)X^+(t)} q[\omega(t)]\omega'(t)dt = 0, \quad q \in P^0_{2æ-2}. \tag{18}$$

3. Решение задачи P. Из изложенного выше следует, что уравнение (3) удобно свести к комплекснозначной форме с применением обозначений $u(z) = u_1(x,y) + iu_2(x,y), 2\,\partial_{\bar z} = \partial_x + i\partial_y,\ f_1(x,y) + if_2(x,y) = f(z)$. В результате, получим уравнение

$$u_{\bar z \bar z} + \frac{a_0}{\rho}u_{\bar z} + b_0 u = f \tag{19}$$

где

$$\rho(z) = \bar z |z|^{n-1},\ n > 1$$

с коэффициентами $a_0 \in C(\overline{D})$ и

$$b_0 = -(\frac{a_0}{\rho}\varphi + \varphi^2)$$

и некоторой функцией $\varphi(z) \in C(\overline{D})$, аналитической в области D.

Аналогичным образом граничное условие (2) задачи Пуанкаре преобразуется в условие краевой задачи типа Римана– Гильберта

$$\mathrm{G_1 u}\big|_\Gamma = \mathrm{g_1}, \quad \mathrm{G_2 e^{-\omega}(u_{\bar z} - \varphi u)}\big|_\Gamma = \mathrm{g_2}, \tag{20}$$

где функции $G_k, g_k \in C^\nu(\Gamma)$, причем G_1 и G_2 всюду отличны от нуля. Заметим, что

$$G_k = G_k^0 + iG_k^1, \ \ k = 1, 2.$$

Для решения задачи (19),(20) воспользуемся интегральным оператором Помпейу- Векуа ([6], с.31)

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_G \frac{f(\zeta)d_2\zeta}{\zeta - z}, \tag{21}$$

где здесь и ниже $d_2\zeta$ обозначает элемент площади. Если $f \in L^p(D), \ p > 2$, то функция $U = Tf$ принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D)$ и удовлетворяет уравнению $U_{\bar z} = f$, причем оператор T ограничен

$$L^p(D) \to W^{1,p}(D)$$

.

Для коэффициента при $u_{\bar z}$, фигурирующего в (19), отметим следующий результат [9].

Теорема 3. *Пусть*

$$A = \frac{a_0}{\rho}, \ \ A_0(z) = \frac{a_0(z) - a_0(0)}{\rho}.$$

Если $A_0(z) \in L^p(D)$, тогда функция TA существует, удовлетворяет уравнению $(TA)_{\bar z} = A$ в области D_0 и представима в виде $(TA)(z) = -a_0(0)\omega + h(z)$, где положено

$$\omega = \frac{2}{(n-1)|z|^{n-1}}; \ \ h(z) = (TA_0)(z) + \frac{1}{\pi i}\frac{a_0(0)}{(n-1)}\int_{\partial D}\frac{1}{|\zeta|^{n-1}}\frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Теорема 4. *Пусть $A_0(z) \in L^p(D)$ и $\operatorname{Re} a_0(0) \le 0$. Тогда при $e^{-a_0(0)\omega}f \in L^p(D)$ любое решение и уравнения (19) в области D_0, для которого*

$$U = u_{\bar z} - \varphi u \in L^p(D),$$

дается формулой

$$u = e^{T\varphi}\phi_1 + (e^{T\varphi}Te^{-TA-2T\varphi})\phi_2 + (e^{T\varphi}Te^{-TA-2T\varphi}Te^{TA+T\varphi})f, \tag{22}$$

где функции ϕ_1, ϕ_2 *аналитичны в области* D_0, *причем* $e^{a_0(0)\omega}\phi_2 \in L^p(D)$, *и определяются однозначно по* u.

Теперь рассмотрим задачу Римана- Гильберта (31) для уравнение Бицадзе (19). После некоторых переобразований приходим к классической задаче Римана– Гильберта [7] для аналитических функций ϕ_1, ϕ_2 :

$$\widetilde{\mathrm{G}}_{\mathrm{k}}\phi_{\mathrm{k}}\big|_{\Gamma} = \widetilde{\mathrm{g}}_{\mathrm{k}}, \;\; \mathrm{k} = 1, 2, \tag{23}$$

где функции $\widetilde{G}_1 = G_1 e^{-T\varphi - h}$, $\widetilde{G}_2 = G_2 e^{T\varphi}$, $\widetilde{g_j} = \widetilde{g_j}(g_j, f)$, причем $G_j \in C^\nu(\Gamma)$ всюду отлична от нуля. Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$ и функция $\zeta = \alpha(z)$ осуществляет конформное отображение области D на единичный круг $|\zeta| < 1$. Тогда по теореме Келлога [7] эта функция принадлежит классу $C^{1,\nu}(\overline{D})$. Считая контур Γ ориентированным против часовой стрелки, введем индекс Коши

$$æ_k = \frac{1}{2\pi} \arg G_k\big|_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} \arg \widetilde{G_k}\big|_{\Gamma}, \; k = 1, 2.$$

Используя теорему 2 для классической задачи Римана– Гильберта сформулируем результат относительно задачи (23).

Теорема 5. *Пусть*

$$æ_k = \mathrm{Ind}_{\Gamma} G_k, \; k = 1, 2$$

, так что функция

$$a_k(t) = \arg G_k(t) - æ_k \arg t \in C^\mu(\Gamma)$$

, и пусть $X_k(z) = e^{A_k(z)}$, *где функция* $A_k \in C^\mu(\overline{D})$ *определяется как решение задачи Дирихле* $\mathrm{Im}\, A_k^+ = \frac{\pi}{2} - a_k, \quad \mathrm{Re}\, A_k(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma a_k(t)|\omega'(t)|d_1 t, \; k = 1, 2.$

Тогда все решения задачи (23) в классе $C^\mu(\overline{D})$ *описываются формулой*

$$\phi_k(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{g_k(t)}{G_k(t) X_k^+(t)} \frac{\omega'(t)dt}{\omega(t) - \omega(z)} + X_k(z) p[\omega(z)], \quad p \in P^0_{-2æ_k}, \; k = 1, 2 \tag{24}$$

где функция g_k *удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int_\Gamma \frac{g_k(t)}{G_k(t) X_k^+(t)} \tilde{q}[\omega(t)]\omega'(t)dt = 0, \quad \tilde{q} \in P^0_{2æ_k - 2}, \; k = 1, 2. \tag{25}$$

Теорема 6. *Пусть* $æ_k = \mathrm{Ind}_\Gamma G_k < 0, \; k = 1, 2$ *и в задаче* $(\boldsymbol{P})$ *функции*

$$p_j, j = 1, 2, \; q, \; g \in C^\mu(\Gamma), \; \mu = 1 - \frac{2}{p}, \; p > 2$$

и выполняются условия теорем 3,4, а также условия разрешимости (25).

Тогда задача Пуанкаре $(\boldsymbol{P})$ *для уравнения (14), т.е. задача (14),*$(\boldsymbol{P})$ *в классе* $C^{\mu}(\overline{D})$, $\quad 0 < \mu < 1 - 2/p$ *имеет единственное решение, которое дается формулой (22), в котором произвольные аналитические функции* ϕ_k, $k = 1, 2$ *определяются формулами (24).*

Список литературы

[1] *Бицадзе А. В.)* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.

[2] *Bochev P.B.*Analysis of least-squares finite element methods Muhammad Tahir , A. R. Davies for the Navier-Stokes equations , Siam J. Numer. Anal.,34:5(1997), 1817-1844.

[3] *M.Tahir, A.R. Davies* Stokes-Bitsadze problem - i Punjab UniversityJournal of Mathematics (ISSN 1016-2526)Vol. 32(2005), 77-90.

[4] *M. Tahir;*The Stokes-Bitsadze system, Punjab Univ. J. Math. XXXII, (1999), 173-180.

[5] *T. Vaitekhovich*; Boundary value problems to second order complex partial differential equations in a ring domain, Siauliai Math. Semin. 2:10 (2007), 117-146.

[6] *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. 2-е изд., М., Наука, 1988.

[7] *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

[8] *Солдатов А. П.* Краевая задача линейного сопряжения теории функций. Изв. АН СССР. Сер. мат. ,43:1(1979), 184–202.

[9] *Abdurauf B. Rasulov ; Yurii S. Fedorov ; Anna M. Sergeeva.* Integral Representations of Solutions for the Bitsadze Equation with the set of Supersingular points in the Lower Coefficients, (2019), International Conference on Applied and Engineering Mathematics (ICAEM) IEEE Electronic ISBN: 978-1-7281-2353-0 Print on Demand(PoD) ISBN: 978-1-7281-2354-7 ,p. 13 - 17.

[10] *B. B. Oshorov*; On boundary value problems for the Cauchy-Riemann and Bitsadze systems of equations, Doklady Mathematics 73:2 (2006), 241-244.

[11] *S. Hizliyel, M. Cagliyan*; A boundary value problem for Bitsadze equation in matrix form. Turkish J. Math. 35:1 (2011), 29-46.

Poincare problem for the Stokes-Bitsadze equation with supersingular point in the junior coefficients

Fedorov Y.S.
National Research University MPEI
FedorovYS@mpei.ru

Abstract. It is proved that any elliptic system of second order equations with constant coefficients and two functions from two variables is reduced to one of the Laplace or Bitsadze equations in complex variables. The Laplace equation has been studied well enough, which cannot be said about the Bitsadze equation. This paper establishes the relationship between the Stokes and Bitsadze equations. In addition, for the Stokes-Bitsadze equation with a supersingular point in junior coefficients the solution of the Poincare problem in the classes of functions satisfying the Gelder condition is found. After reducing the Poincare problem to the Riemann-Hilbert problem the singularity of the solution of Poincare's problem and representation of the solution by an explicit form (depending on the index of the problem) are investigated

Keywords: Stokes-Bitsadze equations, Poincare problem, Riemann-Hilbert type problem, Pompeiu-Vekua operator.