

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ  
УРАВНЕНИЯ  
И  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ  
№ 4, 2022  
Электронный журнал,  
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010  
ISSN 1817-2172  
<http://diffjournal.spbu.ru/>  
e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Прикладные задачи

## **О возможности описания аномальных гравитационных сил во Вселенной с позиции фракталоподобного характера распределения вещества в ней**

О.Н. Хатунцева

Публичное акционерное общество «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва»

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»  
ol-khatun@yandex.ru

**Аннотация.** Одной из главных основополагающих концепций современной астрофизики является космологический принцип, согласно которому распределения вещества во Вселенной на достаточно больших масштабах является однородным. Однако в последнее время появляется все большее количество наблюдательных фактов, находящихся в видимом противоречии с этим принципом. Подсчеты галактик показывают неоднородность распределения на масштабах свыше 400 миллионов световых лет. Обнаруживают существование внегалактических систем, протяженность которых исчисляется миллиардами световых лет (Громадная группа квазаров с наибольшей длиной в 4 миллиарда световых лет, галактическая стена Геркулес – Северная Корона длиной 10 миллиардов световых лет). Это позволяет взглянуть на структуру Вселенной с позиции иерархического распределения вещества в ней в широком диапазоне масштабов. В настоящее время довольно много работ посвящено описанию видимой части Вселенной с точки зрения ее фракталоподобной геометрии и определению дробной размерности. Данное исследование посвящено вопросу учета влияния фракталоподобной геометрии распределения вещества во Вселенной на динамику ее объектов. В работе предложен метод описания действия сил гравитации в системе тел, образующих фрактальную структуру. Показано, что учет масштаба рассмотрения движения тела в гравитационном поле других тел, имеющих фракталоподобный характер распределения, может приводить к такого рода эффектам, которые могут трактоваться, как наличие либо дополнительной силы притяжения, либо дополнительной силы отталкивания. На сегодняшний день, с точки зрения современной

науки, такие эффекты считаются обусловленными существованием темной материи и темной энергии.

**Ключевые слова:** фрактал, дробная размерность, силы гравитации, темная материя, темная энергия.

## 1. Введение

Описание аномального поведения астрономических объектов за счет введения таких понятий как «темная энергия» и «темная материя» стали главными тенденциями современной астрофизики в последние десятилетия.

Считается, что темная энергия проявляет себя в виде силы, приводящей к ускоренному расширению пространства, что обнаруживается при измерении скоростей звезд и галактик, находящихся на больших расстояниях друг от друга. Исследование масштабов, сравнимых с размерами видимой части Вселенной, в современной астрофизике осуществляется за счет совместного использования методов оптического исследования звезд («стандартных свечей») и детектирования красного смещения.

Метод «стандартных свечей» заключается в определении расстояния до галактик по изменению яркости эталонных объектов с известной мощностью излучения. В качестве таких эталонных объектов - «стандартных свечей» - используются либо цефеиды — пульсирующие переменные звезды, светимость которых тем больше, чем больше период изменения их блеска, либо сверхновые звезды типа Ia. Метод сводится к измерению яркости объекта и использовании связи между яркостью и светимостью для определения расстояния.

Детектирование красного смещения от исследуемого объекта позволяет вычислить скорость удаления объекта от Земли, поскольку длина волны света увеличивается при увеличении скорости удаляющегося объекта (эффект Доплера). После этого используют закон Хаббла и определяют расстояние до объекта.

В последнее время также широко используются методы исследования микроволнового фона.

Все эти исследования показывают, что объекты, находящиеся на значительных расстояниях друг от друга (на расстояниях больших  $\sim 1.5^{\circ}-2^{\circ}$  *Mpc*), ускоренно увеличивают расстояние между собой. Для объяснения этого эффекта было введено понятие «темная энергия».

Главными факторами, ответственными за возникновения понятия «темная материя» являются аномальное распределение скоростей звезд и галактик-спутников на периферии крупных спиральных галактик, а также аномальное искажение света при гравитационном линзировании.

Если вещество в галактике распределено однородно, то в удалении от ее центра, массу можно рассматривать, как точно распределенную величину. И, следовательно, скорость звезды должна падать с увеличением расстояния от центра скопления (см. кривую (A) на рис.1).

Однако, астрофизик Фриц Цвикки, а вслед за ним астрономы Вера Рубин и Кент Форд, исследуя спиральные галактики, обнаружили, что скорость звезд на их периферии не уменьшается с увеличением радиуса, а остается практически постоянной и даже немного возрастает (см. кривую (B) на рис.1).

Для объяснения этого эффекта была привлечена дополнительная сущность — «темная материя», которая должна была обладать некоторыми специфическими, в том числе гравитационными свойствами, например, образовывать сферическое гало вокруг галактики (заполняя пустоты между скоплениями галактик) и, при этом, не показывать никаких сингулярностей (каспов) в своем распределении.

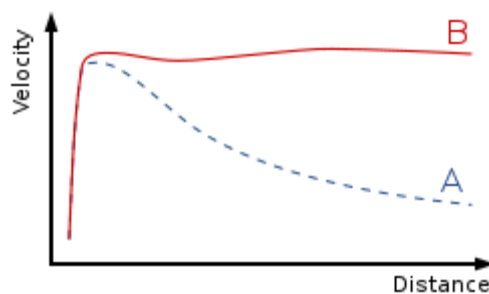


Рис. 1. Кривая вращения галактик: (A) ожидаемая, (B) – реальная (<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b9/GalacticRotation2.svg>)

Гравитационное линзирование проявляется, как отклонение света удалённых объектов гравитационным полем находящихся на его пути массивных скоплений. В результате изображения более удалённых галактик, проецирующихся на некое наблюдаемое скопление, оказываются искажёнными (слабое гравитационное линзирование) или даже расщепляются на несколько «копий» (сильное гравитационное линзирование). По характеру искажений определяется распределение массы в гравитационных линзах. При квазиоднородном распределении вещества во Вселенной и при отсутствии близкой концентрации скрытой массы ориентация далеких фоновых галактик должна быть хаотической. Если же такая масса присутствует, это приводит к изменению видимых форм галактик и к появлению некоторой упорядоченности в их ориентациях. Поскольку используется концепция квазиоднородного распределения вещества в пространстве, то делается вывод о наличии скрытой массы в гравитационных линзах.

Существует еще довольно много аспектов аномального поведения космических объектов, которые пытаются объяснить и с помощью уже упомянутых понятий «темная энергия» и «темная материя», и с помощью других «темных» артефактов, например, «темное излучение» и, даже, «темные силы».

В качестве альтернативы этим подходам для описания аномального поведения космических объектов используются различные версии модифицированных теорий Ньютона (MOND), главными недостатками которых, видится искусственно вводимое изменение законов гравитации на больших космических масштабах.

В данной работе попытаемся рассмотреть возможность описания некоторых аспектов аномального поведения космических объектов исходя из неоднородного фракталоподобного распределения вещества во Вселенной.

Данная работа не претендует на полноту описания всех имеющихся данных по аномальному поведению космических объектов. Целью ее является желание показать, что, по крайней мере, на таких масштабах рассмотрения, когда, справедливо приближение «плоской» Вселенной, гравитационное воздействие вещества, имеющего фракталоподобный характер распределения, может иметь существенное влияние на динамику объектов, который необходимо учитывать при обработке данных по их наблюдению.

## 2. Метод описания физических процессов в пространствах с фрактальной геометрией

В последнее время большой интерес вызывает описание систем, обладающих фрактальной (с дробной размерностью) структурой и процессов, протекающих в них. В основном, речь идет о рассмотрении вопросов теплопроводности (диффузии), массопереноса, распространения звуковых волн в пористых средах (грунтах, почвах и пр.), в структурах живых организмов (таких как, нервная, дыхательная и кровеносная системы), а также в некоторых технических системах, обладающих свойством самоподобия в каком-либо диапазоне масштабов.

Однако и самый большой из известных нам объектов – Вселенная, обладает, по мнению многих авторов (см., например, [1-2]) фракталоподобной структурой.

Впервые, идея о том, что Вселенная должна иметь иерархическую структуру (название «фрактал» для такого рода объектов тогда еще не существовало) была предложена Ламбертом в 1761 году в работе «Космологические письма о строении Вселенной». В 1908 году Карл Шарлье применил эту идею для разрешения парадокса Зеелигера, который состоит в том, что гравитационный потенциал для бесконечной Вселенной принимает конечное значение только в том случае, если средняя плотность вещества во Вселенной с ростом расстояния  $R$  убывает быстрее, чем  $1/R^2$ .

В настоящее время довольно много работ посвящено описанию видимой части Вселенной с точки зрения ее фрактальной геометрии и определению ее дробной размерности. Мало у кого остаются сомнения, что существует достаточно большой диапазон масштабов (по крайней мере, от  $\sim 0.1$  Мпк до  $\sim 100$  Мпк), в котором распределение вещества во Вселенной можно считать фракталоподобным.

Имеются исследования, в которых осуществляются попытки использовать особенности геометрического строения Вселенной для описания некоторых отдельных аспектов ее динамики (см., например, [3-4]). Так, например, в работе [3] предлагается модель Вселенной в виде пены. Внутри сферических образований гравитационные силы уравновешивают друг друга. В результате, удается интерпретировать эффекты, связанные с красным смещением и ускоренным расширением Вселенной в ограниченном размере сферических образований диапазоне масштабов. В работе [4] динамика крупномасштабных объектов Вселенной – форма и вращение гало – рассматривается с позиции неравномерного распределения (анизотропии) вещества.

В работе [5] говорится о фрактальном распределении вещества во Вселенной и упомянуто о том, что это может вызвать изменение динамики объектов, однако математической модели этой динамики не приводится.

В работе [6] показано, что причиной образования наблюдаемых «инфракрасных» структур в виде «пузырей» и «раковин» в галактике может быть связано с наличием молекулярного облака, внутренняя структура, которого характеризуется фрактальной (мультифрактальной) размерностью. Высказывается предположение, что значительная дисперсия скоростей звезд может быть обусловлена такой фрактальной структурой. Показана статистическая корреляция размерности фрактальных образований со звездообразованием. К сожалению, модели динамики тел в галактике, связанной с фрактальной структурой пространственного распределения объектов, в работе также не приводится.

В работе [7] довольно подробно проводится анализ гравитационных сил, действующих на выделенную частицу со стороны других частиц, распределение которых в пространстве имеет фрактальный характер. В результате, обнаруживается расходимость средней гравитационной силы либо на малых, либо на больших масштабах, в зависимости от значения размерности фрактального распределения частиц. К сожалению, вопросов, непосредственно связанных с динамикой выделенной частицы в работе не затрагивается.

Данное исследование посвящено вопросу учета фракталоподобного распределения вещества во Вселенной на динамику ее объектов с точки зрения одновременной интерпретации эффектов, которые на сегодняшний день считаются обусловленными существованием темной энергией и темной материи.

В большинстве работ (см., например, [8-9]) методы, применяемые для описания процессов во фрактальных структурах, связаны с заменой производных по времени и производных по пространственным переменным на производные в дробной степени, соответствующие производным типа Римана-Лиувилля.

В работах [10-11] были выявлены недостатки, связанные с этим методом, и обоснована необходимость разработки новых подходов к описанию процессов во фрактальных структурах. В этих работах был также предложен метод описания таких процессов на основе

расширения фазового пространства, за счет введения дополнительной переменной  $\delta$  ( $0 < \delta \leq 1$ ), описывающей масштаб рассмотрения фрактальной системы. Основой разработанного метода послужило использование свойства самоподобия фрактальных структур на разных масштабах их рассмотрения, причем диапазон этих масштабов может быть ограниченным, то есть структура может быть не идеально фрактальной (в математическом смысле), а фракталоподобной.

Напомним кратко вывод основных положений этого метода и на его основе рассмотрим действие сил гравитации на выделенное тело в системе тел, образующих фрактальную структуру.

Предположим, что на фиксированном масштабе фрактальной структуры мы исследуем изменение какой-либо функции, являющейся характеристикой рассматриваемого физического процесса на интервале времени  $\Delta t_1 = t_1 - t_{in}$  ( $\Delta t_1 \neq 0$ ). Здесь  $t_{in}$  - начало отсчета времени рассматриваемого процесса (момент времени задания начальных условий задачи). При переходе к другому масштабу (при сохранении всех прочих характеристик геометрии пространства), можно будет обнаружить, что для точно такого же изменения функции потребуется другой интервал времени  $\Delta t_2 = t_2 - t_{in}$ . Проведя такую процедуру много раз, можно каждому масштабу  $\delta_k$  поставить в соответствие свой интервал времени:  $\Delta t_k = \Delta t_k(\delta_k)$ .

Обычно в реальности масштаб меняется скачком (см. например, [12]), но в качестве модели можно рассмотреть фазовое пространство с непрерывным изменением масштаба. То есть считать, что, обезразмеренные на единицу масштабы фрактальной структуры плавно изменяются от начального – единичного масштаба:  $\delta = 1$ , до масштаба  $\delta = \delta_0$ , где  $0 < \delta_0 < 1$ . В этом случае изменение интервалов времени так же будет непрерывным:  $\Delta t = \Delta t(\delta)$  ( $\Delta t \neq 0$ ). Следовательно, можно найти производную

$$\frac{d(\Delta t(\delta))}{d\delta} = \frac{d(t(\delta) - t_{in})}{d\delta} = \frac{dt}{d\delta} = \frac{1}{\delta}.$$

Необходимо отметить, что вышеприведенные рассуждения верны в том случае, если в рассматриваемом физическом процессе мы исследуем изменение, либо только одной функции, либо нескольких, но таких, для которых изменение интервалов времени на разных масштабах происходит согласовано.

Если диапазон масштабов  $\delta$  ограничен значениями:  $\delta_0 \leq \delta \leq 1$ , где  $0 < \delta_0 < 1$ , то объем, занимаемый фрактальной структуры  $V(R)$ , в приближении непрерывности изменения масштаба можно представить в виде:

$$V(R) = \int_{\delta_0}^1 G(R, \delta) d\delta,$$

где  $G(R, \delta)$  - плотность распределения объема, занимаемого фрактальной (фракталоподобной) структурой в евклидовом пространстве, по масштабам  $\delta$ .

Следует подчеркнуть, что в силу того, что мы рассматриваем ограниченный диапазон масштабов  $\delta$ , величина  $V(R)$  - это объем, занимаемый фракталоподобной структурой, вложенной в евклидовое пространство  $R^n$ , а не мера множества дробной размерности. У такой структуры может быть измерен объем в евклидовом пространстве  $R^n$  (с «небольшими» фракталоподобными объектами можно поступить, например, так, как это сделал Архимед с короной царя Сиракуз Гиерона, обладающей сложной формой).

Выражение для объема можно переписать в виде:

$$\int_{\delta_0}^1 \varphi(\delta) d\delta = 1, \quad (1)$$

где  $\varphi(\delta)=G(R,\delta)/V(R)$  - удельная плотность распределения фрактальной структуры на масштабе рассмотрения  $\delta$ .

Будем рассматривать только самоподобные (а не самоафинные и пр.) фрактальные структуры. Размерность подобия такой структуры будет совпадать с фрактальной размерностью  $D$  в выражении  $V(R)=aR^D+b$  и может быть записана в виде соотношения [13]:

$$D = \frac{\ln N}{\ln r^{-1}} = \frac{\ln(G(R,\delta)/G(R,r\delta))}{\ln r^{-1}}, \quad (2)$$

где  $r=const$  - коэффициент подобия,  $0 < r \leq 1/2$ . Диапазон значений коэффициента  $r$  определен из требования, чтобы минимальное количество элементов, получающихся из одного начального при изменении масштаба рассмотрения самоподобного фрактала, было не меньше двух.

Значение размерности  $D$  для фрактальной области, вложенной в трехмерное пространство, должно быть меньше трех:  $0 < D < 3$ .

Выражение для размерности (2) задает скейлинговое соотношение:

$$G(R,r\delta)=r^D G(R,\delta). \quad (3)$$

Используя зависимость (3), можно найти приближенное выражение для производной  $\partial G/\partial \delta$  при переходе к рассмотрению фазового пространства с непрерывным изменением масштаба. В самом деле,

$$\frac{\partial G(R,\delta)}{\partial \delta} = \lim_{\Delta \delta \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{G(R,\delta) - G(R,r\delta)}{\delta - r\delta} = \frac{1-r^D}{1-r} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{G(R,\delta)}{\delta}.$$

Таким образом, мы получили производную  $\partial G/\partial \delta$  для малых значений  $\delta$ . Но поскольку фрактал является самоподобным объектом, то следует экстраполировать это выражение и на диапазон значений  $\delta$ :  $\delta_0 \leq \delta \leq 1$ , где  $0 < \delta_0 < 1$ . Поэтому окончательно можно записать:

$$\frac{\partial G(R,\delta)}{\partial \delta} = \frac{1-r^D}{1-r} \frac{G(R,\delta)}{\delta} = \beta \frac{G(R,\delta)}{\delta}, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{1-r^D}{1-r}. \quad (4)$$

Следовательно,

$$\frac{d\varphi(\delta)}{d\delta} = \beta \frac{\varphi}{\delta}.$$

Величина  $\beta$  является константой для каждого конкретного фрактала и принимает значения из диапазона:  $0 < \beta < 2$ , для любых значений  $0 < D < 3$  и  $0 < r \leq 1/2$ .

Из последнего уравнения находим, что  $\varphi(\delta) = \varphi_0 \delta^\beta$ , где  $\varphi_0 = const$ . Значение  $\varphi_0$  можно найти, решив уравнение

$$\int_{\delta_0}^1 \varphi(\delta) d\delta = \varphi_0 \int_{\delta_0}^1 \delta^\beta d\delta = 1.$$

Из него получаем:

$$\varphi_0 = \frac{\beta + 1}{1 - \delta_0^{\beta+1}}.$$

И, следовательно,

$$\varphi(\delta) = \frac{\beta + 1}{1 - \delta_0^{\beta+1}} \delta^\beta. \tag{5}$$

Найдем среднее значение величины  $(t(\delta) - t_{in})/\delta$  на масштабе рассмотрения  $\delta$ , определяемое заданной функцией распределения  $\varphi(\delta)$ :

$$\left\langle \frac{t(\delta) - t_{in}}{\delta} \right\rangle = \int_{\delta_0}^1 \frac{t(\delta) - t_{in}}{\delta} \varphi(\delta) d\delta = \frac{\beta + 1}{1 - \delta_0^{\beta+1}} \int_{\delta_0}^1 \frac{t(\delta) - t_{in}}{\delta} \delta^\beta d\delta = \frac{\beta + 1}{\beta(1 - \delta_0^{\beta+1})} \int_{\delta_0}^1 (t(\delta) - t_{in}) d\delta^\beta.$$

Интегрируя полученное выражение по частям, находим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{t(\delta) - t_{in}}{\delta} \right\rangle &= \frac{\beta + 1}{\beta(1 - \delta_0^{\beta+1})} \left( (t_1 - t_{in}) - (t_0 - t_{in}) \delta_0^\beta \right) - \frac{\beta + 1}{\beta(1 - \delta_0^{\beta+1})} \int_{\delta_0}^1 \frac{d(t - t_{in})}{d\delta} \delta^\beta d\delta = \\ &= \frac{\beta + 1}{\beta(1 - \delta_0^{\beta+1})} \left( (t_1 - t_{in}) - (t_0 - t_{in}) \delta_0^\beta \right) - \frac{1}{\beta} \int_{\delta_0}^1 \frac{d(t - t_{in})}{d\delta} \varphi(\delta) d\delta = \\ &= \frac{\beta + 1}{\beta(1 - \delta_0^{\beta+1})} \left( (t_1 - t_{in}) - (t_0 - t_{in}) \delta_0^\beta \right) - \frac{1}{\beta} \left\langle \frac{d(t(\delta) - t_{in})}{d\delta} \right\rangle, \end{aligned} \tag{6}$$

где  $t_1 - t_{in} = t(\delta)|_{\delta=1} - t_{in}$  и  $t_0 - t_{in} = t(\delta)|_{\delta=\delta_0} - t_{in}$  - интервалы времени, соответствующие процессу, рассматриваемому на масштабах  $\delta=1$  и  $\delta=\delta_0$ , при любом  $\delta$ :  $\delta_0 \leq \delta \leq 1$ .

Полученное выражение можно переписать в виде:

$$\left\langle \frac{d(t(\delta) - t_{in})}{d\delta} \right\rangle = \left\langle \frac{\beta + 1}{1 - \delta_0^{\beta+1}} \left( (t_1 - t_{in}) - (t_0 - t_{in}) \delta_0^\beta \right) - \beta \frac{t(\delta) - t_{in}}{\delta} \right\rangle.$$

Так как фрактальное множество является самоподобным для различных значений  $\delta$ , то равенство, которое выполняется для величин, осредненных по всем значениям  $\delta$ , должно выполняться при осреднении по отдельным интервалам  $\delta$ , а в предположении непрерывности  $\delta$  (устремляя эти интервалы к нулю) и для самих этих величин, измеренных в локальных областях этого пространства. Поэтому от полученного уравнения для средних можно перейти к соотношению, связывающему выражения в точках локальных значений  $\delta$ , при  $t(\delta) > t_{in}$ :

$$\frac{d(t(\delta) - t_{in})}{d\delta} = \frac{\beta + 1}{1 - \delta_0^{\beta+1}} \left( (t_1 - t_{in}) - (t_0 - t_{in}) \delta_0^\beta \right) - \beta \frac{t(\delta) - t_{in}}{\delta}. \quad (7)$$

Необходимо отметить, что  $t(\delta)$  в полученном уравнении не может быть в точности равно началу отсчета времени физического процесса  $t_{in}$ . В самом деле, несмотря на то, что уравнение описывает продолжительность протекания физического процесса в зависимости от масштаба в ограниченном масштабном интервале:  $\delta_0 \leq \delta \leq 1$ , структура фрактала предполагается «идеальная» с математической точки зрения и, следовательно, имеющая бесконечный масштабный ряд. На других (за пределами рассматриваемых) масштабах время должно отсчитываться также от значения  $t_{in}$  и, следовательно, должны существовать меньшие интервалы времени  $t(\delta) - t_{in}$  по сравнению с рассматриваемыми из интервала  $\delta_0 \leq \delta \leq 1$ .

Решением уравнения (7), является выражение

$$t(\delta) - t_{in} = (t_0 - t_{in}) \left( \frac{\delta_0}{\delta} \right)^\beta + \frac{(t_1 - t_{in}) - (t_0 - t_{in}) \delta_0^\beta}{1 - \delta_0^{\beta+1}} \delta.$$

Если в полученную зависимость подставить значение  $\delta = 1$  и соотношение  $t(\delta)|_{\delta=1} - t_{in} = t_1 - t_{in}$ , то найдем, выражение, связывающее  $t_1 - t_{in}$  и  $t_0 - t_{in}$ :

$$t_1 - t_{in} = (t_0 - t_{in}) \delta_0^\beta.$$

Учитывая это, можно записать:

$$t(\delta) - t_{in} = (t_0 - t_{in}) \left( \frac{\delta_0}{\delta} \right)^\beta = \frac{t_1 - t_{in}}{\delta^\beta}.$$

А, поскольку,



$$\dot{\delta} = \frac{1}{d(t(\delta) - t_{in})/d\delta},$$

то

$$\dot{\delta} = -\frac{\delta^{\beta+1}}{\beta(t_1 - t_{in})}, \quad \text{где } t_1 > t_{in}. \quad (8)$$

Совместное использование выражения (8) и уравнений, полученных для описания физических процессов в евклидовом пространстве, позволит описывать аналогичные процессы в пространстве с фрактальной геометрией.

Остановимся на этом подробнее. Введем дополнительную переменную  $\delta$ , характеризующую масштаб фрактальной структуры, в фазовое пространство переменных, используемых в уравнениях в частных производных:  $(t, \bar{x}) \rightarrow (t, \bar{x}; \delta)$ .

Предположим, что в евклидовом пространстве функция  $f(t, \bar{x})$  описывает исследуемый физический процесс, удовлетворяя при этом уравнению:  $df/dt = \hat{A}f$ , ( $\hat{A}$  - произвольный дифференциальный оператор, вид которого зависит от конкретной задачи, определяющий протекание процессов обмена выделенной области с внешней средой и влияние на эту область внешних воздействий).

Для того чтобы описать аналогичный процесс в пространстве с дробной размерностью с учетом влияния масштаба структурного элемента фрактала, будем рассматривать функцию  $f(t, \bar{x}; \delta)$ .

Полную производную по времени от искомой функции можно записать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t, \bar{x} + \Delta \bar{x}, \delta + \Delta \delta) - f(t, \bar{x}, \delta)}{\Delta t}.$$

Добавляя и одновременно вычитая слагаемые в этом выражении, его можно переписать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{f(t + \Delta t, \bar{x} + \Delta \bar{x}, \delta + \Delta \delta) - f(t, \bar{x} + \Delta \bar{x}, \delta + \Delta \delta)}{\Delta t} + \frac{f(t, \bar{x} + \Delta \bar{x}, \delta + \Delta \delta) - f(t, \bar{x}, \delta + \Delta \delta)}{\Delta t} + \frac{f(t, \bar{x}, \delta + \Delta \delta) - f(t, \bar{x}, \delta)}{\Delta t} \right].$$

В результате можно заметить, что при выполнении условий:  $\Delta \bar{x} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ ,  $\Delta \delta \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ , в полученном выражении для полной производной первое слагаемое равно:  $\partial f / \partial t$ ; второе

слагаемое:  $\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ; третье слагаемое:  $\frac{d\delta}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \delta}$ .

То есть, при описании такого процесса, полную производную  $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$  следует заменить новой полной производной, имеющей вид:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{d\delta}{dt} \frac{\partial f}{\partial \delta}.$$

Производная  $d\delta/dt$  в этом соотношении задается выражением (8).

Если физический процесс является стационарным, то уравнение, описывающее его во всем фрактальном пространстве, характеризуемом постоянной  $\beta$  (см. (8)), задается в виде:

$$\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\delta^{\beta+1}}{\beta(t_1 - t_{in})} \frac{\partial f}{\partial \delta} = \hat{A}f$$

или

$$\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{\mu}} = \hat{A}f, \text{ где } f = f(\bar{x}; \tilde{\mu}(\delta)), \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\delta) = (t_1 - t_{in})\delta^{-\beta}, t_1 > t_{in}.$$

Таким образом, в стационарном случае во фрактальной структуре также будет зависимость искомой функции от масштаба, только эта зависимость будет стационарной. Параметр  $(t_1 - t_{in})$  является константой с размерностью времени. Он характеризует искомую функцию на единичном масштабе. Его значение определяется видом конкретной задачи, а также начальными и граничными условиями к ней.

Если описываемый процесс является нестационарным, то время протекания физического процесса  $t_1$  на единичном масштабе  $\delta_1 = 1$  в выражении (8), является просто временем  $t$  ( $t > t_{in}$ ), отсчитываемым от начала рассмотрения физического процесса, при описании этого процесса с помощью дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями.

В этом случае, уравнение, описывающее нестационарный физический процесс во всем фрактальном пространстве, характеризуемом постоянной  $\beta$  (см. (4)), можно записать в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\delta^{\beta+1}}{\beta(t - t_{in})} \frac{\partial f}{\partial \delta} = \hat{A}f, \quad t > t_{in} \quad (9)$$

или в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{t - t_{in}} \frac{\partial f}{\partial \mu} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \hat{A}f, \text{ где } f = f(t, \bar{x}; \mu(\delta)), \mu = \mu(\delta) = \delta^{-\beta}. \quad (10)$$

Дополнительная переменная  $\delta$  (или  $\mu(\delta)$ ) в дифференциальных уравнениях (9)-(10) обеспечит учет влияния масштаба рассмотрения фрактального множества на протекание физического процесса.

Сделаем попытку на основе разработанного метода расширения фазового пространства за счет дополнительной масштабной переменной  $\mu(\delta)$  решить задачу о действии сил гравитации на выделенное тело в системе большого количества тел, образующих фрактальную геометрическую структуру.

### 3. Описание движения тела в поле гравитации других тел, образующих фракталоподобную геометрическую структуру

Рассмотрим динамику объектов, движущихся в гравитационных полях других объектов, на таких масштабах рассмотрения, когда, с одной стороны, характер распределения объектов в пространстве можно считать фрактальным, а, с другой стороны, справедливо приближение «плоской» геометрии пространства.

Если выделенное тело движется в поле тяжести других тел, образующих фрактальную структуру, то для стороннего наблюдателя траектория движения выделенного тела будет иметь стохастический, фрактальный характер и, соответственно, будет обладать дробной размерностью.

В самом деле, если наблюдатель будет исследовать систему на «большом» масштабе  $\delta_1$ , то размеры структурных элементов системы, которые за счет сил гравитации воздействуют на выделенное тело, должны быть порядка этого масштаба. То есть при таком подходе всю рассматриваемую систему можно разбить на «блоки» с характерным размером  $\delta_1$ , в каждом «блоке» определить центр масс (ЦМ) и считать, что вся масса этих «блоков», расположенная в их ЦМ, воздействует на рассматриваемое тело. Под действием гравитационных сил всех «блоков» с точки зрения стороннего наблюдателя выделенное тело будет двигаться по определенной траектории, характерной для данного масштаба рассмотрения системы.

При меньшем масштабе  $\delta_2$  рассмотрения системы, данную систему тел, оказывающих воздействие на выделенное тело, нужно разбить на «блоки» с меньшим характерным размером  $\delta_2$ . При этом траектория выделенного тела будет формироваться под воздействием массы «маленьких» блоков, расположенных в их ЦМ.

Если тела в рассматриваемой системе расположены однородно, то масштаб рассмотрения не будет влиять на траекторию выделенного тела, так как сумма радиус-векторов выделенного тела относительно выбранной системы координат не будет зависеть от масштаба рассмотрения системы. Однако если объекты в пространстве расположены фрактально, то при определении координаты ЦМ в структурном элементе системы масштаба  $\delta$  всегда существует неопределенность порядка  $\delta \cdot r$ , где  $0 < r \leq 1/2$  - коэффициент подобия фрактала. Поэтому, масштаб рассмотрения системы выступает в качестве меры неопределенности при описании системы с помощью радиус-вектора. На меньшем масштабе рассмотрения величина и направление радиус-вектора уточняются и принимают значения отличные от радиус-вектора при рассмотрении системы на большем масштабе. Причем, в силу особенности фрактальной геометрии системы, когда структура представляет собой множества из «пустот» и «заполненных» элементов, для стороннего наблюдателя такое уточнение радиус-вектора при уменьшении масштаба рассмотрения системы не будет носить характера гладкого изменения его величины и направления. Траектория выделенного тела, движущегося в поле тяжести других тел, образующих фрактальную структуру, будет иметь стохастический, фрактальный характер.

Применим метод расширения фазового пространства за счет дополнительной масштабной переменной  $\mu(\delta)$ , основные положения которого приведены выше, к описанию траектории выделенного тела, движущегося в системе большого количества тел, образующих фрактальную геометрическую структуру.

Для этого запишем второй закон Ньютона для  $j$ -го элемента системы в пространстве с фрактальной геометрией в виде:

$$\frac{\partial \vec{V}_j}{\partial t} + \frac{1}{t-t_{in}} \frac{\partial \vec{V}_j}{\partial \mu} = G \sum_{i \neq j} m_i \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^3}, \quad \mu = \mu(\delta) = \delta^{-\beta}, \quad t > t_{in}, \quad (11)$$

где  $G$  - гравитационная постоянная,  $m_i$  - масса  $i$ -го элемента системы,  $\vec{r}_{ij}(t, \mu(\delta)) = \vec{R}_i - \vec{R}_j$  - разность радиус-векторов  $i$ -го ( $i \neq j$ ) элемента системы и выделенного  $j$ -го - элемента относительно выбранной системы координат на масштабе рассмотрения системы  $\delta$ ,  $\vec{V}_j(t, \mu(\delta))$  - скорость выделенного -  $j$ -го - элемента относительно выбранной системы координат на масштабе рассмотрения системы  $\delta$ .

Отметим, что переход к пространству, расширенному с помощью масштабной переменной, позволяет полную производную скорости по времени записать с использованием дополнительного слагаемого, пропорционального частной производной скорости по масштабу. Такой переход к модифицированному уравнению Ньютона в расширенном фазовом пространстве аналогичен переходу от второго закона Ньютона, описывающего движение твердого тела, к уравнениям Навье-Стокса, характеризующим течение жидкости. Уравнения Навье-Стокса так же, как и второй закон Ньютона, описывают ускорение выделенного объема жидкости под действием сил, действующих на него. Однако, зависимость скорости выделенного объема жидкости, в отличие от скорости твердого тела, перестает быть функцией только времени, а становится функцией еще и пространственных координат. Поэтому ускорение помимо частных производных скорости по времени:  $\partial \vec{V} / \partial t$ , характеризуется дополнительными - конвективными членами:  $\dot{x}_i \partial \vec{V} / \partial x_i$  [14-15].

Поделив и умножив правую часть уравнения (3) на величину  $M = \sum_{i \neq j} m_i$  уравнение (11)

можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \vec{V}_j}{\partial t} + \frac{1}{t-t_{in}} \frac{\partial \vec{V}_j}{\partial \mu} = GM \left\langle \frac{\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3} \right\rangle, \quad \text{где} \quad \left\langle \frac{\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3} \right\rangle = \frac{\sum_{i \neq j} m_i \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^3}}{\sum_{i \neq j} m_i}. \quad (12)$$

### 3.1. Описание процесса «разбегания» объектов во Вселенной, находящихся на значительных расстояниях друг от друга, в рамках концепции фракталоподобного распределения вещества в ней

Для того чтобы корректно сначала найти решение уравнение (12), а затем, сравнить это решение с экспериментальными данными необходимо определиться с положением наблюдателя относительно наблюдаемого  $j$ -ого тела. Поясним сказанное.

Если наблюдатель находится на расстоянии  $R$  от  $j$ -ого тела, таком, что даже самый маленький доступный масштаб рассмотрения системы  $\delta_0$  является не достаточно малым для приемлемо точного определения положения  $j$ -ого тела, а именно, если погрешность рассмотрения системы в абсолютных значениях:  $R\delta_0 r$  (где  $r$  - коэффициент подобия фракталоподобной структуры Вселенной), превосходит амплитуду изменения средневзвешенного значения за счет изменения направления вектора  $\vec{r}_j$ , то в этом случае можно считать, что абсолютное значение средневзвешенного не превосходит среднего по масштабам фрактального множества:

$$\left\langle \frac{\bar{r}_j}{|\bar{r}_j|^3} \right\rangle \leq \int_{\delta_0}^1 \frac{\varphi(\delta)}{\tilde{R}(\delta)^2} d\delta, \quad \text{где} \quad \tilde{R}(\delta)^2 = R^2 + R^2 r^2 \delta^2. \quad (13)$$

Здесь  $\varphi(\delta)$  - удельная плотность распределения фрактальной структуры (см. (1), (5)).

Выражение (13) с учетом (5) можно переписать в виде:

$$\left\langle \frac{\bar{r}_j}{|\bar{r}_j|^3} \right\rangle \leq \frac{1}{R^2} \frac{\beta+1}{1-\delta_0^{\beta+1}} \int_{\delta_0}^1 \frac{\delta^\beta}{1+r^2\delta^2} d\delta.$$

Значения коэффициента подобия находятся в диапазоне  $0 < r \leq 1/2$  для любых самоподобных фракталов. А в случае, когда фрактал имеет довольно «рыхлую» - некомпактную структуру, можно считать, что  $r \ll 1$ . Вселенная на больших масштабах состоит из «волокон» и пустот – войдов (см., например, изображения распределения плотностей вещества в работе [6]). Поэтому при исследовании структуры Вселенной на больших масштабах с точки зрения ее фрактальной геометрии можно считать, что  $r \ll 1$ , и, следовательно, для любого значения  $D \geq 1$ , можно с точностью до  $O(r)$  записать:  $\beta = (1-r^D)/(1-r) \approx 1$ . Интегрируя выражение для среднего, и раскладывая при этих условиях получившееся соотношение в ряд Тейлора до второго члена включительно, запишем

$$\left\langle \frac{\bar{r}_j}{|\bar{r}_j|^3} \right\rangle \leq \frac{\ln(1+r^2) - \ln(1+r^2\delta_0^2)}{R^2 r^2 (1-\delta_0^2)} \approx \frac{1}{R^2}.$$

Из этой оценки видно, что правая часть уравнения (12) не зависит (с принятой точностью) от величины «минимального» масштаба рассмотрения  $\delta_0$ , то есть увеличение разрешения инструментов наблюдения не приведет к эффекту выявления новых аспектов характера движения наблюдаемого объекта, обусловленного правой частью уравнения (12).

Поскольку, предполагается фрактальный характер распределения вещества, то выражение для массы  $M$ , стоящей в правой части уравнения (12), можно записать в виде:  $M = b_D \rho_D R^D$ , где  $D$  - фрактальная размерность распределения вещества,  $\rho_D$  - плотность вещества в  $D$ -мерном пространстве,  $b_D = const$  - коэффициент, определяющий форму объекта в этом пространстве. И, следовательно, правая часть уравнения (12) будет изменяться в зависимости от расстояния до наблюдателя, как  $R^{D-2}$ . То есть, если фрактальная размерность распределения вещества во Вселенной на больших масштабах рассмотрения меньше двойки:  $D < 2$ , (некоторые оценки подтверждают это предположение), даже если отличие размерности от двойки незначительное, то на больших масштабах рассмотрения Вселенной средневзвешенное значение и, следовательно, правая часть уравнения (12) стремится к нулю, как степень  $D-2$  расстояния до наблюдателя. И для внешнего наблюдателя, достаточно далеко находящегося от  $j$ -ого тела, оно будет двигаться в гравитационном поле взаимно скомпенсированных сил. В этом случае от уравнения (12) можно перейти к соотношению:

$$\frac{\partial \vec{V}_j}{\partial t} + \frac{1}{t - t_{in}} \frac{\partial \vec{V}_j}{\partial \mu} = 0. \quad (14)$$

Обозначив,  $\tau = \ln((t - t_{in}) / (t_1 - t_{in}))$ , где  $t \geq t_1 > t_{in}$ , уравнение (14) запишем в виде:

$$\frac{\partial \vec{V}_j}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{V}_j}{\partial \mu} = 0. \quad (15)$$

Решение уравнения (15) будем искать в виде:  $\vec{V}_j = \vec{k}_j T(\tau) F(\mu)$ , где  $\vec{k}_j$  - единичный вектор, сонаправленный с вектором  $\vec{V}_j$ . В результате подстановки в уравнение (15), и, учитывая, что  $\mu(\delta) = \delta^\beta$ , получаем соотношение:  $\vec{V}_j = \vec{k}_j c ((t - t_{in}) / (t_1 - t_{in}))^\kappa e^{-\kappa \delta^{-\beta}}$ , где  $c = const$ ,  $\kappa = const$ .

Обозначая:  $\vec{V}_j \Big|_{\delta=1, t=t_1} = \vec{V}_{j(1)} \Big|_{t=t_1}$ , приходим к соотношению:

$$\vec{V}_j = \vec{V}_{j(1)} \Big|_{t=t_1} \left( \frac{t - t_{in}}{t_1 - t_{in}} \right)^\kappa e^{\kappa(1 - \delta^{-\beta})}. \quad (16)$$

Для того чтобы найти зависимость  $\vec{R}_j(t, \mu(\delta))$ , необходимо решить уравнение:

$$\frac{\partial \vec{R}_j}{\partial t} + \frac{1}{t - t_{in}} \frac{\partial \vec{R}_j}{\partial \mu} = \vec{V}_j.$$

Учитывая соотношение (16) и выражение:  $\mu(\delta) = \delta^\beta$ , приходим к зависимости:

$$\frac{\partial \vec{R}_j}{\partial t} + \frac{1}{t - t_{in}} \frac{\partial \vec{R}_j}{\partial \mu} = \vec{V}_{j(1)} \left( \frac{t - t_{in}}{t_1 - t_{in}} \right)^\kappa e^{\kappa(1 - \mu)}.$$

Введя обозначение:  $\vec{R}_j \Big|_{\delta=1, t=t_1} = \vec{R}_{j(1)} \Big|_{t=t_1}$ , его можно записать в виде:

$$\vec{R}_j = \vec{R}_{j(1)} \Big|_{t=t_1} \left( \frac{t - t_{in}}{t_1 - t_{in}} \right)^{\kappa+1} e^{\kappa(1 - \delta^{-\beta})}.$$

Корреляцию радиус-векторов для двух тел:  $j$ -го и  $i$ -го, находящихся друг от друга и от наблюдателя на расстояниях больших, чем характерный масштаб неоднородности Вселенной, можно записать, учитывая соотношение (17), в виде:

$$\langle \vec{R}_j \vec{R}_i \rangle = \left\langle \vec{R}_{j(i)} \Big|_{t=t_1} \vec{R}_{i(i)} \Big|_{t=t_1} \right\rangle \left( \frac{t - t_{in}}{t_1 - t_{in}} \right)^{2(\kappa+1)} e^{2\kappa(1-\delta^{-\beta})}.$$

То есть среднее расстояние между телами на больших масштабах рассмотрения:  $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ , описывается выражением:

$$\langle R^2 \rangle^{1/2} \sim \left( (t - t_{in}) / (t_1 - t_{in}) \right)^{\kappa+1} e^{\kappa(1-\delta^{-\beta})}. \quad (18)$$

Используя соотношение (18), можно также записать выражение для частной производной по времени от расстояния между телами, достаточно далеко расположенными друг от друга:

$$\partial \langle R^2 \rangle^{1/2} / \partial t \sim \left( (t - t_{in}) / (t_1 - t_{in}) \right)^{\kappa} e^{\kappa(1-\delta^{-\beta})}. \quad (19)$$

Используя совместно соотношения (19) и (18), запишем:

$$\partial \langle R^2 \rangle^{1/2} / \partial t \sim \left( \langle R^2 \rangle^{1/2} e^{1-\delta^{-\beta}} \right)^{\kappa/(\kappa+1)}. \quad (20)$$

Выражение (20) определяет среднюю скорость изменения расстояния между телами, находящимися на расстоянии  $\langle R^2 \rangle^{1/2}$  друг от друга - ту, которую измеряют в эксперименте (не путать с полной производной по времени от  $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ ).

Значение параметра  $\kappa/(\kappa+1)$ , входящего в показатель степени в выражении (20), можно оценить, вновь используя концепцию фрактальной Вселенной.

Поскольку во Вселенной вряд ли удастся выбрать «самый большой» масштаб рассмотрения системы, то за единичный масштаб придется выбирать какое-то произвольное расстояние между телами. Однако в случае изменения расстояния между телами и, следовательно, изменения (увеличения или уменьшения) длины «единичного» масштаба, полученные уравнения также должны выполняться. То есть, уравнение (20) должно быть согласовано и для обратной к нему величины  $l = \langle R^2 \rangle^{-1/2}$ . В этом случае, основные параметры фрактала (размерность, коэффициент подобия) будут оставаться неизменными.

Сделав в соотношении (20) замену  $\langle R^2 \rangle^{1/2} = 1/l$ , получим:

$$\partial l / \partial t \sim -l^{2-\kappa/(\kappa+1)} e^{\kappa(1-\delta^{-\beta})/(\kappa+1)}.$$

Сравнивая последнее выражение и соотношение (20) заметим, что средние расстояния между телами  $\langle R^2 \rangle^{1/2}$  и обратная к нему величина  $l = \langle R^2 \rangle^{-1/2}$  будут изменяться по одному и тому же

степенному закону, если показатели степени  $2 - \kappa/(\kappa + 1)$  и  $\kappa/(\kappa + 1)$  будут равны, то есть, когда  $\kappa/(\kappa + 1) \rightarrow 1$ . Следовательно, соотношение (20) должно иметь вид:

$$\partial \langle R^2 \rangle^{1/2} / \partial t \sim \langle R^2 \rangle^{1/2} e^{(1-\delta^{-\beta})}. \quad (21)$$

Из соотношения (21) видно, что на каждом фиксированном масштабе рассмотрения системы  $\delta$ , скорость изменения расстояния между телами, далеко удаленными друг от друга, растет с ростом расстояния между ними по линейному закону.

Этот вывод хорошо соотносится с важным аспектом динамики объектов во Вселенной - «разбеганием» тел, находящихся на значительных расстояниях друг от друга, со скоростью, увеличивающейся с ростом расстояния между ними, который еще в двадцатые годы прошлого века был обнаружен и исследован американским астрономом Эдвином Хабблом.

Однако при рассмотрении тел, находящихся на всё больших и больших расстояниях, будет увеличиваться и масштаб фрактальной структуры распределения вещества  $\delta$ . В результате, как видно из выражения (21), показатель степени экспоненты увеличится, и зависимость роста скорости от расстояния перестанет быть линейной. Этим можно объяснить ускоренное «разбегание» тел, находящихся на значительных расстояниях друг от друга, обнаруженное в конце 1990-х годов [16].

В описанном выше случае механизм ускоренного «разбегания» объектов Вселенной, взаимодействующих посредством гравитации и находящихся на значительных расстояниях друг от друга, связан только с фрактальными свойствами распределения вещества в пространстве и не нуждается в дополнительном введении понятия «темная энергия».

В некотором смысле, этот процесс можно сравнить с диффузией частиц при броуновском движении, в результате которого, среднее расстояние между частицами с течением времени также увеличивается. Разумеется, такая аналогия является достаточно грубой, далекой от рассматриваемого движения тел в гравитационных полях других тел, и ее ни в коей мере нельзя использовать напрямую.

Поделив левую и правую часть выражения (21) на  $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ , получим выражение, характеризующее постоянную Хаббла (на заданном масштабе  $\delta$ )  $H(\delta)$ :

$$H(\delta) = \frac{\partial \langle R^2 \rangle^{1/2} / \partial t}{\langle R^2 \rangle^{1/2}} = c \cdot \exp(1 - \delta^{-\beta}), \quad \text{где } c = \text{const} = H|_{\delta=1}.$$

Найденное выражение можно использовать, в том числе, для определения возможного отличия значений постоянной Хаббла, при его нахождении различными экспериментальными методами. В самом деле, при неучете фракталоподобного характера распределения вещества основная величина погрешности, привносимая разными экспериментальными методами, будет обусловлена величиной разности соседних масштабов фрактальной структуры  $\Delta\delta$ . Поэтому погрешность определения постоянной Хаббла можно записать в виде:

$$\Delta H = \frac{dH}{d\delta} \Big|_{\delta=1} \Delta\delta = c \cdot \beta \cdot \delta^{-\beta-1} \cdot \exp(1 - \delta^{-\beta}) \Big|_{\delta=1} \cdot \Delta\delta = H|_{\delta=1} \cdot \beta \cdot \Delta\delta.$$



Значение величины  $c=H|_{\delta=1}$ , можно принять равным значению постоянной Хаббла, найденное каким-либо экспериментальным методом. Константа  $\beta=(1-r^D)/(1-r)$ , характеризующая фрактальную структуру Вселенной на достаточно больших масштабах, примерно равна единице, поскольку для нее коэффициент подобия  $r \ll 1$ . В качестве приближенного значения можно принять  $r \sim 0.1$  (это значение может быть в дальнейшем уточнено на основе наблюдательных данных). Погрешность, обусловленная неучетом влияния масштаба фрактальной структуры, по порядку величины равна коэффициенту подобия, то есть  $\Delta\delta \sim r \sim 0.1$ . Учитывая, что значение постоянной Хаббла  $H \approx 70 \text{ (km/c)/Mps}$ , можно записать:  $\Delta H \sim 7 \text{ (km/c)/Mps}$ .

Эта величина хорошо соотносится с разницей значений постоянной Хаббла экспериментально найденными разными способами: на основе метода детектирования стандартных «свечей»  $H \approx 75.8 \text{ (km/c)/Mps}$  [17] и метода исследования микроволнового фона  $H \approx 68.0 \text{ (km/c)/Mps}$  [18].

Различие экспериментальных данных по определению постоянной Хаббла разными методами не удается объяснить в рамках существующих теорий. Предложенный метод описания наблюдаемых астрофизических явлений на основе учета фракталоподобного распределения вещества позволяет обозначить пути решения этой проблемы, и может служить, по крайней мере, косвенным подтверждением корректности работоспособности представленного метода.

### 3.2. Объяснение эффекта аномально больших скоростей звезд на периферии галактики в рамках концепции фракталоподобного распределения вещества в ней

Обратимся вновь к уравнению (12) и остановимся теперь на случае, когда расстояние между наблюдателем и наблюдаемым  $j$ -м телом не настолько велико, чтобы можно было говорить о статистической компенсации гравитационного воздействия на  $j$ -ое тело со стороны окружающих его тел. В этом случае наблюдатель будет видеть движение наблюдаемого тела относительно некоторого центра. Таким наблюдаемым телом может быть звезда в составе галактики.

Назовем точку, в которую, с точки зрения наблюдателя, в данный момент времени от  $j$ -го тела направлен радиус-вектор  $\left\langle \frac{\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3} \right\rangle$ , стоящий в правой части уравнения (12), центром масс системы. В соответствии с теоремой Гаусса, практически не ограничивая общности, можно считать, что  $M$  - это общая масса тел, находящихся внутри сферы с ЦМ системы, радиус которой равен

$$\left\langle \frac{\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3} \right\rangle^{-1/2} = \left| \frac{\sum_{i \neq j} m_i \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^3}}{\sum_{i \neq j} m_i} \right|^{-1/2},$$

где суммирование ведется только по телам, находящимся внутри этой сферы. Если количество тел, находящихся в подпространстве внутри сферы достаточно большое, так что при движении  $j$ -го тела можно пренебречь изменением расстояния до ЦМ системы, то изменением абсолютного значения правой части уравнения (12) также можно пренебречь.

Обозначив,  $\tau = \ln((t-t_{in})/(t_0-t_{in}))$ , где  $t_0$  - произвольно заданный момент времени,  $t \geq t_0 > t_{in}$ , запишем

$$\frac{\partial \vec{V}_j}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{V}_j}{\partial \mu} = \vec{K}_j(t_0 - t_{in})e^\tau, \quad \vec{K}_j = GM \left\langle \frac{\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3} \right\rangle, \quad |\vec{K}_j| = const \quad (22)$$

Решение уравнения (22) будем искать в виде:

$$\vec{V}_j = \vec{k}_j e^\tau F_j(\mu) + \vec{c}_j, \quad \text{где} \quad \vec{k}_j = \frac{\vec{K}_j}{|\vec{K}_j|} = \frac{\langle \vec{r}_j / |\vec{r}_j|^3 \rangle}{\left| \langle \vec{r}_j / |\vec{r}_j|^3 \rangle \right|}, \quad \vec{c}_j = const.$$

Здесь  $\vec{k}_j$  - единичный вектор, который в «неподвижной» системе координат, связанной с наблюдателем, может изменять свое направление при движении  $j$ -го тела, если смотреть за ним из «неподвижной» системы координат. В результате подстановки в уравнение (22), получаем соотношение:

$$dF_j/d\mu + F_j(1 + \vec{k}_j d\vec{k}_j/d\tau) = |\vec{K}_j|(t_0 - t_{in}).$$

Поскольку,  $\vec{k}_j d\vec{k}_j/d\tau = 1/2 \cdot d\vec{k}_j^2/d\tau$  и  $\vec{k}_j^2 = 1$ , следовательно,  $\vec{k}_j d\vec{k}_j/d\tau = 0$ . В результате, найденное соотношение приобретает вид:

$$dF_j/d\mu + F_j = |\vec{K}_j|(t_0 - t_{in}).$$

Решением которого является выражение:

$$F_j(\mu) = (t_0 - t_{in}) \left( |\vec{K}_j| + a_j e^{-\mu} \right), \quad a_j = const.$$

Следовательно,

$$\vec{V}_j = \vec{k}_j e^\tau (t_0 - t_{in}) \left( |\vec{K}_j| + a_j e^{-\mu} \right) + \vec{c}_j = \vec{k}_j (t - t_{in}) \left( |\vec{K}_j| + a_j e^{-\delta^{-\beta}} \right) + \vec{c}_j, \quad t \geq t_0 > t_{in}, \quad 0 < \delta \leq 1 \quad (23)$$

Выберем такой момент времени  $t=t_0$  близкий к начальному  $t_{in}$ , чтобы для любой доступной заданной точности первое слагаемое в выражении (23) в этот момент времени стремилось бы к нулю. Тогда, как следует из выражения (23), значение константы  $\vec{c}_j$  равно:

$$\vec{c}_j \approx \vec{V}_j \Big|_{t=t_0}.$$

Исследуем полученное соотношение для скорости. Если при рассмотрении системы на одном – «самом большом» для данной системы - масштабе  $\delta=1$  (и, следовательно, при  $\mu(\delta)|_{\delta=1}=1$ ) в заданный момент времени  $t_0$ , скорость равнялась

$$\vec{V}_{j(1)}\Big|_{t=t_0} = \frac{\partial \vec{R}_j\Big|_{\delta=1}}{\partial t}\Big|_{t=t_0} + \frac{1}{t_0 - t_{in}} \frac{\partial \vec{R}_j\Big|_{t=t_0}}{\partial \mu}\Big|_{\mu=1} \approx \frac{1}{t_0 \rightarrow t_{in}} \frac{1}{t_0 - t_{in}} \left( \vec{R}_{j(1)}\Big|_{t=t_0} - \vec{R}_{j(1)}\Big|_{t=t_{in}} + \frac{\partial \vec{R}_j\Big|_{t=t_0}}{\partial \mu}\Big|_{\mu=1} \right),$$

где  $\vec{V}_{j(1)}\Big|_{t=t_0} := \vec{V}_j\Big|_{\delta=1, t=t_0}$ ,  $\vec{R}_{j(1)}\Big|_{t=t_0} := \vec{R}_j\Big|_{\delta=1, t=t_0}$ ,  $\vec{R}_{j(1)}\Big|_{t=t_{in}} := \vec{R}_j\Big|_{\delta=1, t=t_{in}}$ , то значение константы  $a_j$  можно определить из соотношения (23):

$$a_j = \left( \left( \frac{\vec{V}_{j(1)}\Big|_{t=t_1} - \vec{V}_j\Big|_{t=t_0}}{t_1 - t_{in}} \vec{k}_j \right) - |\vec{K}_j| \right) e \Big|_{t_0 \rightarrow t_{in}} \left( \left( \dot{\vec{V}}_{j(1)}\Big|_{t=t_1} \vec{k}_j \right) - |\vec{K}_j| \right) e,$$

где

$$\dot{\vec{V}}_{j(1)}\Big|_{t=t_1} \approx \left( \vec{V}_{j(1)}\Big|_{t=t_1} - \vec{V}_j\Big|_{t=t_0} \right) / (t_1 - t_0)$$

это ускорение  $j$ -го тела на «самом большом» – единичном масштабе - в начальный момент времени,  $e$ - основание натурального логарифма.

Учитывая найденные значения констант, выражение для скорости можно записать в виде:

$$\vec{V}_j = \vec{k}_j(t - t_{in}) \left( |\vec{K}_j| + (B_{j(1)} - |\vec{K}_j|) e^{1-\delta^{-\beta}} \right) + \vec{V}_j\Big|_{t=t_0}, \quad B_{j(1)} = \left( \dot{\vec{V}}_{j(1)}\Big|_{t=t_1} \vec{k}_j \right), \quad (24)$$

где  $B_{j(1)}$  - проекция ускорения  $j$ -го тела в момент времени  $t_1$  на единичном масштабе рассмотрения на вектор  $\vec{k}_j$ .

Из выражения (24) следует, что выделенное тело, находящееся в поле гравитации большого количества тел, образующих фрактальную структуру, будет двигаться с ускорением, зависящем от масштаба  $\delta$  рассмотрения системы, и равным

$$\dot{\vec{V}}_j = \left( \vec{k}_j + \dot{\vec{k}}_j(t - t_{in}) \right) \left( |\vec{K}_j| + (B_{j(1)} - |\vec{K}_j|) e^{1-\delta^{-\beta}} \right) + \vec{k}_j(t - t_{in}) \left( \dot{\vec{V}}_{j(1)}\Big|_{t=t_1} \vec{k}_j \right) e^{1-\delta^{-\beta}}, \quad \dot{\vec{k}}_j = \frac{d\vec{k}_j}{dt}.$$

Под ускорением здесь, разумеется, подразумевается частная производная скорости по времени, то есть то, что определяется в эксперименте при исследовании динамики системы.

Умножив левую и правую часть полученного выражения два раза последовательно на вектор  $\vec{k}_j$ , учитывая при этом, что  $\vec{k}_j^2 = 1$  и  $\vec{k}_j d\vec{k}_j/dt = 0$ , нетрудно перейти к соотношению

$$\dot{\vec{V}}_j = \vec{k}_j \left( \vec{K}_j \right) + \left( B_{j(t)} - \left| \vec{K}_j \right| \right) e^{1-\delta-\beta}. \quad (25)$$

При  $\delta \rightarrow 1$ , ускорение выделенного тела не будет зависеть от суммарной массы  $M$  всех тел в рассматриваемой системе - будет оставаться постоянным – таким же, каким оно было на этом масштабе в фиксированный момент времени:

$$\dot{\vec{V}}_{j(t)} = \vec{k}_j \left( \vec{k}_j \dot{\vec{V}}_{j(t)} \Big|_{t=t_1} \right) = \dot{\vec{V}}_{j(t)} \Big|_{t=t_1}. \quad (26)$$

То есть на «самом большом» масштабе рассмотрения, будем видеть, что тело движется со всеми остальными телами рассматриваемой системы в том же направлении, в каком они двигались в момент времени  $t_1$  (звезда в составе галактики движется в том же направлении, что и вся галактика).

Выясним, как будет выглядеть движение выделенного тела при рассмотрении системы на малых масштабах. При  $\delta \rightarrow 0$ , ускорение выделенного тела перестает зависеть от начальных условий и стремится к значению:

$$\dot{\vec{V}}_{j(0)} \approx \vec{k}_j \left| \vec{K}_j \right| = GM \left\langle \vec{r}_j / \left| \vec{r}_j \right|^3 \right\rangle = GM / \tilde{R}_j^2, \quad \text{где} \quad \tilde{R}_j = \left\langle \left| \vec{r}_j \right| / \left| \vec{r}_j \right|^3 \right\rangle^{-1/2}. \quad (27)$$

Соотношение (27) описывает движение  $j$ -го тела по окружности с центром, совпадающим с центром масс системы, радиус которой равен  $\tilde{R}_j$ , со значением тангенциальной скорости  $V_{j(0)}$ .

Величина ускорения  $\dot{\vec{V}}_{j(0)}$  зависит от суммарной массы  $M$  всех тел, находящихся внутри сферы с центром, совпадающим с центром масс системы, радиус которой равен  $\tilde{R}_j$ . Будем предполагать возможность произвольного, в том числе и фракталоподобного распределения вещества в галактике. В этом случае выражение для массы  $M$  внутри сферы радиуса  $\tilde{R}_j$  можно записать в виде:

$$M = b_D \rho_D \tilde{R}_j^D,$$

где  $D$  - размерность распределения вещества в рассматриваемой галактике,  $\rho_D$  - плотность вещества в ней,  $b_D = const$  - коэффициент, определяющий форму галактики в этом пространстве.

Ускорение тела, движущегося с тангенциальной скоростью  $V_{j(0)}$  по криволинейной траектории, с радиусом кривизны  $\tilde{R}_j$ , обусловленное инерциальными – центростремительными силами, равно  $V_{j(0)}^2 / \tilde{R}_j$ . В соответствии с законами Ньютона и теоремой Гаусса для круговой замкнутой траектории, можно записать:

$$GM/\tilde{R}_j^2 = V_{j(0)}^2/\tilde{R}_j.$$

И, следовательно,

$$V_{j(0)} = \sqrt{GM/\tilde{R}_j} = \sqrt{Gb_D\rho_D} \cdot \tilde{R}_j^{(D-1)/2}. \quad (28)$$

В центре галактики распределение звезд и вещества можно считать квазиоднородным трехмерным, поэтому  $D=3$ ,  $b_D=4/3 \cdot \pi$ ,  $[\rho_D]=\kappa z/M^3$  и, следовательно,  $V_{j(0)} \sim \tilde{R}_j$ .

Такой линейный рост скорости с удалением от центра галактики характерен для звезд, находящихся в центральной ее части, и подтверждается астрофизическими наблюдениями (см. растущий участок функции на рис. 2).

Если бы вещество во всей галактике было бы распределено однородно, то в удалении от ее центра, массу можно было бы рассматривать, как точечно распределенную величину ( $D=0$ ). И, следовательно, скорость звезд, находящихся на периферии галактики, должна была бы падать с увеличением расстояния от центра скопления, как  $V_{j(0)} \sim 1/\sqrt{\tilde{R}_j}$  (см. кривую (А) на рис. 2). Однако астрофизические наблюдения показывают, что скорость звезд на периферии спиральных галактик не уменьшается с увеличением радиуса, а остается практически постоянной и даже немного возрастает (см. кривую (В) на рис. 2).

Обычно это противоречие разрешают, прибегая к использованию понятия «темная материя» - скрытой массы в галактиках, количество которой существенно превосходит массу барионного вещества.

Однако разрешить противоречие между теоретическими и экспериментальными данными можно и по-другому: достаточно предположить, что допущение об однородном распределении вещества на периферии спиральной галактики – в ее в «рукавах» - является слишком грубым, и что, на самом деле, распределение вещества там имеет фракталоподобный характер, размерность  $D$  которого, равна единице или незначительно отличается от нее. В этом случае, как следует из формулы (28), скорость звезд будет мало зависеть от расстояния до центра скопления (см. кривую (С) на рис. 2).

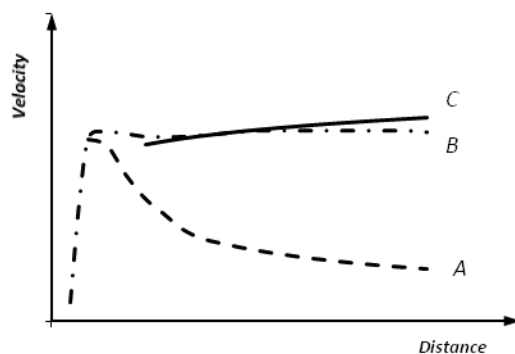


Рис. 1. Кривая вращения галактик: (А) ожидаемая, (В) – реальная (<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b9/GalacticRotation2.svg>) (С) – ожидаемая с учетом фрактального распределения вещества при  $D \approx 1.2$ .

Значение размерности  $D \sim 1$  вполне может характеризовать распределение звезд в «рукавах» галактик. В работе [19] приводятся данные о том, что значения размерности для спиральных галактик можно считать, равным  $D \approx 1.2$ . При этом, каждая звезда, находясь на периферии

галактики, взаимодействует не только с основной массой звезд, расположенных в ее центре (достаточно далеко от этой звезды), но, в первую очередь, со звездами, расположенными в «рукаве» этой галактики.

С другой стороны, если предполагать, что размерность фракталоподобной структуры распределения вещества на больших масштабах (характеризующих распределение галактик и метagalactic) определяется тем же значением:  $D \approx 1.2$ , или значениями из диапазона:  $D < 2$ , то можно объяснить характер ускоренного «разбегания» объектов, далеко расположенных друг от друга на основе соотношения (21).

Оба этих факта говорят о возможности описания видимых эффектов динамики объектов Вселенной, происходящих на разных масштабах рассмотрения, лишь на основе учета особенностей фракталоподобного распределения вещества в пространстве, без привлечения дополнительных «темных» артефактов.

Фракталоподобный характер распределения вещества в галактиках (или в скоплениях галактик), являющихся гравитационными линзами, может быть также причиной изменения видимых форм галактик-изображений, а также быть ответственным за появление некоторой упорядоченности в их ориентациях, которое наблюдается при гравитационном линзировании. Математические аспекты этого явления здесь рассматриваться не будут, но могут служить источником дальнейших исследований.

#### 4. Заключение

В данной работе рассмотрены некоторые аспекты динамики объектов Вселенной, возникающие из-за неоднородного (фракталоподобного) распределения вещества в ней.

Фрактальные структуры характеризуются дробной размерностью и обладают свойством самоподобия при рассмотрении их на разных масштабах. Для исследования процессов, происходящих в таких системах, предложен метод модификации дифференциальных уравнений, описывающих аналогичные процессы в евклидовых пространствах, на основе учета размерности и масштаба рассмотрения фрактальных систем. С учетом этого подхода построен метод описания действия сил гравитации в системе тел, образующих фрактальную структуру. В такой модели динамика исследуемого объекта зависит от размерности и масштаба фрактальной системы, а также от положения наблюдателя. Показано, что учет этих факторов при расчете динамики движения тела в гравитационном поле других тел, имеющих фракталоподобный характер распределения, может приводить к такого рода эффектам, которые могут трактоваться, как наличие либо дополнительной силы притяжения, либо дополнительной силы отталкивания. Это, в принципе, говорит о возможности описания видимых эффектов динамики объектов Вселенной лишь на основе учета особенностей фракталоподобного распределения вещества в ней, без привлечения таких дополнительных понятий, как «темная энергия» и «темная материя».

В работе найдено выражение для постоянной Хаббла, учитывающее изменение масштаба фракталоподобного распределения вещества во Вселенной. Анализ этого выражения показывает, что скорость среднего увеличения расстояния между телами во Вселенной должна возрастать с ростом этого расстояния за счет увеличения масштаба в структуре фракталоподобного распределения вещества. Этот результат хорошо совпадает с крупномасштабными экспериментальными астрофизическими данными.

Найденное выражение для постоянной Хаббла позволило также определить возможное отличие значений постоянной Хаббла, при его нахождения различными экспериментальными методами, например, на основе метода детектирования стандартных «свечей» и метода исследования микроволнового фона. Различие экспериментальных данных по определению постоянной Хаббла разными методами не удастся объяснить в рамках существующих теорий. Полученное численное значение возможной погрешности определения постоянной Хаббла на основе предложенного в работе метода учета фракталоподобного распределения вещества позволяет обозначить пути решения этой проблемы, хорошо соотносится с имеющимися

экспериментальными данными и может служить, по крайней мере, косвенным подтверждением корректности представленного метода.

Представленный в работе подход позволил также описать постоянную или даже медленно возрастающую зависимость скорости звезд, находящихся на периферии спиральных галактик, с удалением от их центра, в том случае, если фрактальная размерность распределения вещества в их «рукавах» близка к единице.

Все это может служить, подтверждением работоспособности представленного метода.

Не претендуя на полноту описания всех имеющихся данных по аномальному поведению космических объектов, хотелось бы отметить важность учета неоднородного распределения вещества в пространстве при обработке данных наблюдений за динамикой космических объектов.

### 3. Литература

- [1] Sanchez N., Anez N., Alfaro E.J., Odekon M.C. The fractal dimension of star-forming regions at different spatial scales in M33 // *The Astrophysical Journal*. 2010; 720: pp. 541–547.
- [2] Mittal A. K., Seshadri T. R. Fractals and the Large-Scale Structure in the Universe. *Resonance*. 2002; vol. 7, issue 2, pp. 39-47.
- [3] Marra V., Kolb E.W., Matarrese S., Riotto A. On cosmological observables in a swiss-cheese universe. E-Print: arXiv:0708.3622 [astro-ph]; 2007.
- [4] Libeskind N.I., Hoffman Y., Forero-Romero J., Gottlöber S., Knebe A., Steinmetz M., Klypin A. The velocity shear tensor: tracer of halo alignment. *MNRAS*; 2012.
- [5] Pfenniger, Combes Is dark matter in spiral galaxies cold gas? II. Fractal models and star non-formation. *A&A*; 1993.
- [6] Walch S., Whitworth A.P., Bisbas T.G., Wünsch R., Hubber D.A. Clumps and triggered star formation in ionized molecular clouds. *MNRAS*. 2013.
- [7] Gabrielli A., Labini F.S., Joyce M., Pietronero L. *Statistical Physics for Cosmic Structures*. Berlin: Springer, 2005.
- [8] Hentschel H.G.E., Procaccia I. Fractal nature of turbulence as manifested in turbulent diffusion. 1983; *Phys. Rev.*, A27, pp. 1266-1269.
- [9] Hentschel H.G.E., Procaccia I. Relative diffusion in turbulent media: The fractal dimension of clouds. 1984. *Phys. Rev.*, A29, pp. 1461-1470.
- [10] Khatuntseva O. N. Specific features of the description of physical processes in fractal spaces *Numerical Analysis and Applications*. 2010; vol. 3, issue 1, pp. 82-89.
- [11] Khatuntseva O.N. Method for Description of Heat Transfer Processes in Fractal Systems Using Scale Variable. *Numerical Analysis and Applications*. 2015; vol. 8, issue 1, pp. 81-88.
- [12] Khatuntseva O.N. Theoretical determination of the dimension of simply connected fractal objects in problems of formation of viscous “fingers” and growth of dendrites. *Numerical Analysis and Applications*. 2009; vol. 2, issue 2, pp. 187-195.
- [13] Feder J. *Fractals*. New York: Plenum Press; 1988.
- [14] Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения плоской задачи Куэтта для турбулентного режима течения жидкости // *Труды МАИ*. 2022. № 122. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=164194>
- [15] Хатунцева О.Н. Обобщенное аналитическое решение плоской задачи Пуазейля для турбулентного режима течения несжимаемой жидкости // *Труды МАИ*. 2022. № 123. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=165492>
- [16] Jones M.H.; Lambourne R.J. *An Introduction to Galaxies and Cosmology*. Cambridge University Press; 2004.
- [17] de Jaeger T., Stahl B., Zheng W., Filippenko A.V., et al. 2020 *MNRAS*.
- [18] Domínguez Alberto et al. *Astr. J.* 2019. 885 (2): 137.
- [19] Davis M. *Critical Dialogues in Cosmology*. In the Proc. of the Conference ed. Turok World Scientific, Singapore. 1997. pp. 13.

## **On the possibility of describing anomalous gravitational forces in the Universe from the perspective of the fractal-like nature of the distribution of matter in it**

O.N. Khatuntseva

Korolev, RSC S.P. Korolev Rocket and Space Corporation «Energia», Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education " Moscow Institute of Physics and Technology (State University)"  
ol-khatun@yandex.ru

**Abstract.** At present, there are a lot of papers concerning a description of Universe visible part from the viewpoint of fractal-like geometry and the estimation of its fractal dimension. This research is devoted to the issue of accounting for the fractal-like geometry of the distribution of matter in the Universe on the dynamics of its objects. Herein, the method is offered for the description of gravitation forces action in the system of bodies having a fractal structure. The account of scale at analysis of the movement of a body in the gravitation field of other bodies with fractal-like nature of the distribution may cause such effects that may be considered as the presence of the additional attracting force or additional repulsion. Today, from the point of view of modern science, such effects are considered to be caused by the existence of dark matter and dark energy.

**Keywords:** fractal, fractional dimension, gravitational forces, dark matter, dark energy.