ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2022
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных

О корректности задачи Дирихле для уравнений с гессиановскими операторами

Прокофьева С.И.1,*, Рябикова Т.В.1,**, Якунина Г.В.1,***

Санкт-Петербургский государственный строительный университет

* prokof_1960@mail.ru
**tanya.dovid@gmail.com
*** yakuninagalina@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматриваются полностью нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка, называемые гессиановскими, т.е. зависящими только от вторых производных решений. Проведено сравнение важности понятия эллиптичности для линейных и гессиановских дифференциальных уравнений. В работе приведен пример уравнения, показывающий, что множество эллиптичности оператора не является корректным для разрешимости задачи Дирихле. Предложено альтернативное множество – конус положительной монотонности оператора, в котором задача Дирихле имеет единственное решение. Из примера следует, что задача Дирихле имеет, по крайней мере, два различных решения, удовлетворяющих условию эллиптичности, но одно из них из конуса, а другое в конус не входит.

Ключевые слова: гессиановские уравнения, эллиптичность, конус Гординга, монотонный оператор.

1. Введение

Данная работа является обобщением работы [1], посвященной пересмотру важности понятия эллиптичности для полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим функцию $u \in C^2(\overline{\Omega})$, где $C^2(\overline{\Omega})$ – пространство, состоящее из дважды непрерывно дифференцируемых функций, заданных в ограниченной области $\overline{\Omega} \subset R^n$, $\partial\Omega$ – граница области Ω. Символом $u_x = (u_1,\ u_2, \dots, u_n)$, где $u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$, $i = \overline{1,n}$, обозначим вектор градиента функции u, а символом $u_{xx} = (u_{ij})$, $i,j = \overline{1,n}$, где $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$,– симметричную матрицу вторых частных производных функции u, называемую матрицей Гессе.

Введем симметричную матрицу коэффициентов $A(x) = \left(A^{ij}(x)\right), i,j = \overline{1,n}$. Дифференциальный оператор второго порядка $L[u] = F(u, u_x, u_{xx})$ называется линейным, если он представляет собой линейную комбинацию функции u и её частных производных:

$$L[u] = A^{ij}u_{ij} + A^i u_i + Au. \tag{1}$$

Здесь используется тензорное правило: по повторяющимся верхним и нижним индексам ведется суммирование.

<u>Определение 1</u>. Линейный оператор называется *эллиптическим* , если матрица коэффициентов $\left(A^{ij}(x)\right)$ является положительно определенной. Это означает, что справедливы неравенства $0 < \lambda(x) \leq \sum_{i,j} A^{ij}(x)\xi^i\xi^j \leq \Lambda(x)$ для всех векторов $\xi \in \mathrm{R}^n$, $|\xi| = 1$.

Линейный оператор (1) будем называть равномерно эллиптическим в Ω, если отношение Λ/λ ограничено в Ω. Классическим примером линейного эллиптического оператора является оператор Лапласа $L[u] = \Delta u \equiv tr(u_{xx})$. Одним из важнейших следствий эллиптичности для линейного оператора (1) с коэффициентами из $C^2(\overline{\Omega})$ является единственность решения задачи Дирихле:

$$\begin{aligned} &L[u] = f(x), \qquad x \in \Omega, \\ &u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

где $\partial\Omega$ – граница области Ω.

Теория полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка появилась в конце прошлого века. В таких уравнениях оператор $F[u]$ нелинейно зависит от первых и вторых производных решения. Сначала в этой теории были попытки использовать методы линейной теории, и для полностью нелинейного оператора F было распространено понятие эллиптичности.

Рассмотрим оператор $F[u]$, зависящий только от вторых производных функции $u \in C^2(\Omega)$, т.е. $F[u] = F(u_{xx})$. Такой оператор называется *гессиановским*.

<u>Определение 2</u>. Оператор F называется *эллиптическим* на функции $u \in C^2(\Omega)$, если выполнено неравенство:

$$\nu[u] \leq \frac{\partial F[\mathrm{u}]}{\partial u_{ij}}\xi^i\xi^j \leq \mu[u], \tag{3}$$

где векторы $\xi \in \mathrm{R}^n$, $|\xi| = 1$.

Заметим, что для линейного оператора $\frac{\partial F[\mathrm{u}]}{\partial u_{ij}} = A^{ij}(x)$, а для полностью нелинейного оператора $A^{ij}[u] = F_{ij}[u] = \frac{\partial F(u_{xx})}{\partial u_{ij}}$ зависят от функции u.

Если неравенство (3) справедливо для всех $u \in C^2(\Omega)$, то оператор F называется тотально эллиптическим. Если к тому же существуют положительные постоянные ν_0, μ_0 такие, что $\nu[u] \geq \nu_0$, $\mu[u] \leq \mu_0$, то оператор F называется равномерно эллиптическим в области $D_F(\overline{\Omega})$, где $D_F(\overline{\Omega})$ – область определения оператора F.

В отличие от линейных операторов большинство полностью нелинейных операторов не являются тотально эллиптическими, т.е. не сохраняют эллиптичность на всех функциях из пространства C^2. Более того, в работе [1] было показано, что эллиптичность оператора не гарантирует единственность решения задачи Дирихле для полностью нелинейных уравнений. В данной работе приводится пример наличия двух решений задачи Дирихле для m-гессиановских уравнений, на каждом из которых оператор $F[u]$ является равномерно эллиптическим, и показано, что конус монотонности является естественным множеством разрешимости и единственности задачи Дирихле для таких уравнений.

2. Постановка задачи и решение

Рассмотрим пространство $Sym(n)$ симметричных матриц размера $n \times n$. Зафиксируем целое число m такое, что $1 \leq m \leq n$.

Определение 3. *Главным минором порядка* m определителя матрицы $S \in Sym(n)$ называется определитель матрицы, которая составлена из элементов матрицы S, стоящих на пересечении каких-либо m строк и m столбцов с одинаковыми номерами.

Определение 4. *Следом порядка* m (или m-следом) матрицы $S \in Sym(n)$ называется сумма всех главных миноров порядка m определителя матрицы S и обозначается символом $tr_m S$.

По определению полагают $tr_0 S = 1$. В частности, $tr_1 S = trS$ – это след матрицы S, т.е. сумма элементов матрицы S, стоящих на главной диагонали; $tr_n S = \det S$ – определитель матрицы S.

Рассмотрим функцию, заданную формулой

$$F_m(S) = \left(\frac{tr_m S}{C_n^m}\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{4}$$

и матричный конус

$$\mathrm{K}_m = \{S \in Sym(n)\colon\ F_i(S) > 0,\ \ i = \overline{1, m}\}. \tag{5}$$

Матрицы $S \in \mathrm{K}_m$ называются *m-положительными*.

Конусы (5) были введены и частично исследованы в работах Н.М. Ивочкиной [3], [4], [5]. В частности, показано, что это связные множества и справедливы включения

$$\mathrm{K}_1 \supset \mathrm{K}_2 \supset \cdots \supset \mathrm{K}_n, \tag{6}$$

где K_n – это конус положительно определенных матриц.

Определение 5. Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega} \subset R^n$. Введем оператор, порожденный функцией F_m: $F_m[u] = F_m(u_{xx})$, который называется *m-гессиановским оператором*. Так же называются соответствующие оператору $F_m[u]$ уравнения. В частности, при $m = 1$ получаем оператор Лапласа $F_1[u] = tr_1(u_{xx})/n = \Delta u/n$, при $m = n$ имеем оператор Монжа-Ампера $F_n[u] = (tr_n(u_{xx}))^{1/n} = (\det u_{xx})^{1/n}$.

Проблема классической разрешимости m-гессиановских уравнений впервые рассматривалась в работе Н.М. Ивочкиной [4] в случае выпуклой области и нулевого граничного условия, а для более общего случая – в работе Л.Каффарелли, Л.Ниренберга и Д. Спрука [6] в случае операторов $F[u] = \sigma_m(\lambda)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, где σ_m – элементарная симметрическая функция от собственных значений матрицы Гессе u_{xx}.

В статье [6] впервые в математической литературе упоминается работа Л.Гординга 1959 г. [7], в которой были введены понятия гиперболических многочленов и конусов. Отметим, что к моменту написания автору статьи [3] эта работа Гординга не была известна и оказалось, что конусы (5) являются примером конусов Гординга.

Поскольку m-гессиановские операторы не являются тотально эллиптическими, то для исследования разрешимости задачи Дирихле для m-гессиановских уравнений было введено понятие m-допустимой функции.

Определение 6. Функция $u \in C^2\ (\Omega)$ называется *m-допустимой* в области Ω, если $u_{xx} \in \mathrm{K}_m,\ \ x \in \Omega$.

Множество m-допустимых функций образует функциональный конус

$$\mathcal{K}_m(\Omega) = \{u \in C^2\ (\Omega),\ \ u_{xx} \in \mathrm{K}_m,\ \ x \in \Omega\}. \tag{7}$$

Для конусов $\mathcal{K}_m(\Omega)$ справедлива цепочка включений: $\mathcal{K}_1(\Omega) \supset \mathcal{K}_2(\Omega) \supset \cdots \supset \mathcal{K}_n(\Omega)$.

Отметим, что оператор F_m эллиптичен на любой функции из $\mathcal{K}_m(\Omega)$.

Рассмотрим задачу Дирихле в области $\Omega = B_1(0) \in \mathrm{R}^6,\ \ u \in C^2\ (B_1(0))$, где $B_1(0)$ – шар единичного радиуса с центром в начале координат:

$$\begin{aligned} &F_5[u] = f(\alpha),\\ &u|_{\partial\Omega} = \varphi(\alpha, x), \alpha \in \mathrm{R}. \end{aligned} \tag{8}$$

Входящие в формулы (8) функции определены равенствами: $F_5[u] = \left(\frac{1}{C_6^5} \cdot tr_5(u_{xx})\right)^{1/5}$, $f(\alpha) = \left(\frac{8}{3} \cdot (5\alpha - 2)\right)^{1/5}$, $\varphi(\alpha, x) = (x^1)^2\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) - 1$.

Проверим, что функция

$$\omega(x) = \omega(\alpha, x) = \frac{\alpha}{2}(x^1)^2 - \sum_{i=2}^{6}\left(x^i\right)^2 \tag{9}$$

является решением задачи (8) при некотором α.

Для функции (9) вычислим градиент:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^i} = (\alpha x^1, -2x^2\ , -2x^3, -2x^4, -2x^5, -2x^6), \tag{10}$$

матрицу Гессе:

$$(\omega_{xx}) = \frac{\partial\omega}{\partial x^i x^j} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

и сумму главных миноров 5-го порядка

$$tr_5(\omega_{xx}) = (-2)^5 + (-2)^4 \cdot \alpha \cdot C_5^4 = 16(5\,\alpha - 2), \tag{12}$$

$$F_5[\omega] = \left(\frac{1}{6} \cdot 16(5\,\alpha - 2)\right)^{1/5} = \left(\frac{8}{3} \cdot (5\,\alpha - 2)\right)^{1/5}. \tag{13}$$

На границе шара $B_1(0)$ наша функция $\omega(x)$ принимает вид:

$$\omega(x) = \omega(\alpha, x) = \frac{\alpha}{2}(x^1)^2 + (x^1)^2 - (x^1)^2 - \sum_{i=2}^{6}\left(x^i\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)(x^1)^2 - 1. \quad (14)$$

Таким образом, функция (9) является решением задачи (8).

Проверим эллиптичность оператора $F_5[\omega]$, т.е. выполнение неравенства

$$\frac{\partial F_5[\omega]}{\partial \omega_{ij}}\xi^i\xi^j \geq \nu^\alpha > 0,\ \ \xi \in \mathrm{R}^n,\ \ |\xi| = 1. \quad (15)$$

Используя диагональность матрицы Гессе и определение 4, получаем:

$$tr_5(\omega_{xx}) = \omega_{11}\omega_{22}\omega_{33}\omega_{44}\omega_{55} + \omega_{11}\omega_{22}\omega_{33}\omega_{44}\omega_{66} + \omega_{11}\omega_{22}\omega_{33}\omega_{55}\omega_{66} + \\ +\omega_{11}\omega_{22}\omega_{44}\omega_{55}\omega_{66} + \omega_{11}\omega_{33}\omega_{44}\omega_{55}\omega_{66} + \omega_{22}\omega_{33}\omega_{44}\omega_{55}\omega_{66}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial tr_5(\omega_{xx})}{\partial \omega_{ij}} = 0,\ \ \text{при}\ \ i \neq j. \quad (17)$$

В данном случае $\omega_{11} = \alpha,\ \omega_{jj} = -2$ при $j = \overline{2{,}6}$, тогда $\frac{\partial tr_5(\omega_{xx})}{\partial \omega_{11}} = (-2)^4 \cdot 5 = 80,\ \frac{\partial tr_5(\omega_{xx})}{\partial \omega_{jj}} = 16(1 - 2\alpha)$.

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial F_5[\omega]}{\partial \omega_{ii}}(\xi^i)^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}tr_5(\omega_{xx})\right)^{-4/5} \cdot \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\frac{\partial tr_5(\omega_{xx})}{\partial \omega_{ii}}(\xi^i)^2 = \\ = \frac{1}{30}\left(\frac{8}{3}(5\alpha - 2)\right)^{-4/5} \cdot \left(80(\xi^1)^2 + \sum_{i=2}^{6}16(1 - 2\alpha)\left(\xi^i\right)^2\right) = \\ = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{1/5}(5\alpha - 2)^{-4/5} \cdot \left((1 - 2\alpha) + (4 + 2\alpha)(\xi^1)^2\right) \geq \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{1/5}\frac{1 - 2\alpha}{(5\alpha - 2)^{4/5}}. \quad (18)$$

Если положить, что

$$\nu^\alpha = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{1/5}\frac{1 - 2\alpha}{(5\alpha - 2)^{4/5}}, \quad (19)$$

то неравенство (15) выполняется при условиях

$$\begin{cases} 4 + 2\alpha > 0 \\ 1 - 2\alpha > 0, \\ 5\alpha - 2 > 0 \end{cases} \quad (20)$$

т.е. при $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

Таким образом, эллиптичность доказана.

Кроме того,

$$F_4[\omega] = \left(\frac{tr_4(\omega_{xx})}{C_6^4}\right)^{1/4} = \left(\frac{1}{15}\cdot((-2)^3\cdot\alpha\cdot C_5^3 + (-2)^4\cdot 5)\right)^{1/4} = \left(\frac{16}{3}\cdot(1-\alpha)\right)^{1/4},$$
$$F_3[\omega] = \left(\frac{tr_3(\omega_{xx})}{C_6^3}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{20}\cdot((-2)^2\cdot\alpha\cdot C_5^2 + (-2)^3\cdot C_5^3)\right)^{1/3} = \left(2\cdot(\alpha-2)\right)^{1/3}. \tag{21}$$

При $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$ мы имеем $F_4[\omega] > 0$, $F_3[\omega] < 0$ и поэтому $\omega(\alpha, x) \notin \mathcal{K}_5$, где функциональный конус $\mathcal{K}_5$ определен формулами:

$$\mathcal{K}_5(B_1(0)) = \{u \in C^2(B_1(0)),\ u_{xx} \in K_5,\ x \in B_1(0)\},$$
$$K_5 = \{S \in Sym(6):\ F_i(S) > 0,\ i = \overline{1{,}5}\}. \tag{22}$$

С другой стороны, из работы [6] следует однозначная разрешимость задачи (8) в конусе $\mathcal{K}_5$. Для m-гессиановских уравнений доказательство этого результата приведено в работе Н.В. Филимоненковой [8]. Приведем его формулировку.

Теорема 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{l+\alpha}$ – строго $(m-1)$ выпуклая поверхность, $\varphi \in C^{l+\alpha}(\partial\Omega)$, $f \in C^{l-2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $f \geq \nu > 0$ в $\overline{\Omega}$, $l \geq 4$, $0 < \alpha < 1$. Тогда существует единственное m-допустимое решение $u \in C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ задачи $F_m[u] = f, u|_{\partial\Omega} = \varphi$ в $\overline{\Omega}$.

Таким образом, задача (8) имеет, по крайней мере, два различных решения: одно, принадлежащее конусу, другое – вне конуса, и на каждом из этих решений оператор F_m эллиптичен.

3. О понятии монотонности для гессиановских операторов

В случае эллиптических операторов для доказательства единственности задачи Дирихле используется принцип максимума. Для монотонных полностью нелинейных операторов аналогом принципа максимума является теорема сравнения. Прежде, чем доказать эту теорему, дадим следующее определение монотонного оператора.

Пусть $\Omega \subset R^n$, $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\overline{Sym^+(n)}$ – пространство неотрицательно определенных симметричных матриц размера $n \times n$. Рассмотрим оператор $F[u] = F(u_{xx})$, $F[u] := D_F(\overline{\Omega}) \to R$.

Определение 7. Оператор F называется *монотонным* в $D_F(\overline{\Omega})$, если для любых $\overline{S^+} \in \overline{Sym^+(n)}$ выполнены неравенства

$$F\left(u_{xx} + \overline{S^+}\right) \geq F(u_{xx}), \tag{23}$$

а также

$$F(u_{xx} + tI) > F(u_{xx}),\ t \in R,\ t > 0, \tag{24}$$

$u \in D_F(\overline{\Omega})$, I – единичная матрица.

Теорема 2. Пусть оператор $F[u] = F(u_{xx})$ монотонный в $D_F(\overline{\Omega})$. Предположим, что для $u, v \in D_F(\overline{\Omega})$ выполнено неравенство

$$F[u] \geq F[v]. \tag{25}$$

Тогда выполняется

$$(u-v) \leq \sup_{\partial\Omega}(u-v). \tag{26}$$

Доказательство. Рассмотрим при произвольном $\varepsilon > 0$ вспомогательную функцию $w^{\varepsilon}(x) = u(x) + \frac{\varepsilon}{2}x^2$ и предположим, что разность $w^{\varepsilon}(x) - v(x)$ достигает наибольшего значения во внутренней точке $x_0 \in \Omega$. Тогда $w^{\varepsilon}(x_0) - v(x_0) \geq w^{\varepsilon}(x) - v(x),\ x \in \Omega$. Следовательно, в точке x_0 выполнено неравенство $w^{\varepsilon}_{xx}(x_0) - v_{xx}(x_0) \leq 0$ или

$$v_{xx}(x_0) - w^{\varepsilon}_{xx}(x_0) \geq 0. \tag{27}$$

Используя неравенства (23), (24) и (27), получим

$$\begin{aligned} &F(v_{xx})(x_0) = F\big(w^{\varepsilon}_{xx} + (v_{xx} - w^{\varepsilon}_{xx})\big)(x_0) \geq F(w^{\varepsilon}_{xx})(x_0) = \\ &= F(u_{xx} + \varepsilon I)(x_0) > F(u_{xx})(x_0). \end{aligned} \tag{28}$$

Последнее противоречит неравенству (25), справедливому при всех $x \in \overline{\Omega}$. Следовательно, точка x_0, в которой функция $w^{\varepsilon}(x) - v(x)$ достигает наибольшего значения, лежит на границе $\partial\Omega$. Из этого утверждения и определения функции $w^{\varepsilon}(x)$ следует, что для всех $x \in \overline{\Omega}$ и $x_0 \in \partial\Omega$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &u(x) - v(x) \leq u\,(x) + \frac{\varepsilon}{2}x^2 - v(x) = w^{\varepsilon}(x) - v(x) \leq w^{\varepsilon}(x_0) - v(x_0) = \\ &= u\,(x_0) - v(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}x_0^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Таким образом, $(u-v)(x) \leq (u-v)(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}x_0^2$, где $x_0 \in \partial\Omega$.

Так как ε – произвольное положительное число, то, переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим (26). Теорема доказана.

4. Благодарности

Авторы статьи выражают свою благодарность доктору физико-математических наук, профессору кафедры математики Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета Нине Михайловне Ивочкиной за оказанную помощь при подготовке статьи.

5. Литература

[1] Прокофьева С. И., Якунина Г. В. О понятии эллиптичности для полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка//Эл. Журнал Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2012.№1.142-145с.

[2] Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка: Пер. с англ. /Под ред. А. К. Гущина. -М.: Наука, 1989. 464с.

[3] Ивочкина Н. М. Описание конусов устойчивости, порождаемых дифференциальными операторами типа Монжа-Ампера// Мат. Сборник. 1983. Т122(164), №2(10), 265-275с.

[4] Ивочкина Н. М. Решение задачи Дирихле для некоторых уравнений типа Монжа-Ампера// Мат. Сборник. 1985. Т 128(170), №3(11), 403-415с.
[5] Ивочкина Н. М., Якунина Г. В., Прокофьева С. И. Конусы Гординга в современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка// Проблемы мат. анализа. 2012. Вып.64, 63-80с.
[6] Caffarelly L., Nirenberg L., Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations III. Functions of the eigenvalues of the Hessian // Acta Math. 1985. V155, 261-301p.
[7] Garding L. An inequality for hyperbolic polynomials //J. Math. Mech. 1959. V.8. 957-965p.
[8] Филимоненкова Н. В. О классической разрешимости задачи Дирихле для невырожденных m-гессиановских уравнений// Проблемы мат. анализа. 2011. Вып. 60, 89-110с.

On the correctness of the Dirichlet problem for equations with Hessian operators

Prokof'eva S.I.[1,*], Ryabikova T.V.[1,**], Yakunina G.V.[3,***]

[1] St. Petersburg State University of Civil Engineering
[*] prokof_1960@mail.ru
[**] tanya.dovid@gmail.com
[***] yakuninagalina@yandex.ru

Abstract. The article deals with completely nonlinear partial differential equations of the second order, called Hessian, i.e. depending only on the second derivative solutions. The importance of the concept of ellipticity for linear and Hessian differential equations is compared. The work gives an example of an equation showing that the ellipticity of the operator is not correct for the solvability of the Dirichlet problem. An alternative set is proposed – a cone of positive monotonicity of the operator, on which the Dirichlet problem has a unique solution. It follows from the example that this equation has at least two different solutions satisfying the ellipticity condition, but one of them is from the cone and the other is not included in the cone.
.

Keywords: Hessian equations, ellipticity, Gording cone, monotone operator.

Acknowledgements The authors of the article express their gratitude to Nina Mikhailovna Ivochkina, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Mathematics Department of the St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, for her assistance in preparing the article.