ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 2, 2023
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Исследование асимптотической устойчивости нулевого решения для одного класса нелинейных нестационарных систем методом усреднения

А.Ю. Александров

Санкт-Петербургский государственный университет

a.u.aleksandrov@spbu.ru

Аннотация. Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая взаимодействие двух связанных подсистем, причем одна из этих подсистем является линейной, а другая — нелинейной и однородной с порядком однородности большим единицы. Предполагается, что на данную систему действуют нестационарные возмущения с нулевыми средними значениями. С помощью метода усреднения определяются достаточные условия, при выполнении которых возмущения не нарушают асимптотической устойчивости нулевого решения. Вывод указанных условий основан на использовании специальной конструкции нестационарной функции Ляпунова, учитывающей структуру действующих возмущений. Кроме того, рассматривается случай, когда в правых частях системы присутствует постоянное запаздывание. Предлагается оригинальный подход к построению функционала Ляпунова–Красовского для такой системы. С помощью этого функционала находятся условия, гарантирующие сохранение асимптотической устойчивости для любого положительного запаздывания.

Ключевые слова: нелинейные системы, нестационарные возмущения, асимптотическая устойчивость, усреднение, прямой метод Ляпунова, запаздывание.

1 Введение

При построении математических моделей динамических систем довольно часто требуется учитывать влияние внешних возмущений, действующих на системы. В результате модели становятся нестационарными, что существенно затрудняет их анализ. Эффективным подходом к решению данной проблемы является метод усреднения [1]. С его помощью (при определенных условиях) исследование исходной нестационарной системы может быть сведено к исследованию соответствующей усредненной системы, которая является автономной.

Метод усреднения широко и успешно используется для анализа устойчивости и стабилизации различных классов динамических систем [1, 2, 3, 4]. Однако в большинстве случаев для его применения требуется, чтобы в изучаемой системе присутствовал малый параметр. При этом важную задачу представляет собой оценка области значений данного параметра, при которых выводы, установленные для усредненной системы, переносятся и на исходную нестационарную систему.

В работах [5, 6] были предложены оригинальные подходы к построению функций Ляпунова для линейных систем с переменными коэффициентами. С помощью этих функций можно не только получать условия асимптотической устойчивости рассматриваемой нестационарной системы, но и конструктивным образом находить верхние границы допустимых значений малого параметра. В статье [7] разработан другой способ оценки области значений малого параметра для линейных систем, основанный на искусственном введении запаздывания.

В [8, 9, 10] подходы к построению функций Ляпунова, предложенные в [5, 6], были распространены на некоторые классы существенно нелинейных систем. В отличие от известных результатов, полученных с помощью метода усреднения, принципиальная новизна условий асимптотической устойчивости, найденных в [8, 9, 10], заключается в том, что в них не требуется наличия малого параметра в изучаемой системе.

В настоящей работе изучается система нелинейных дифференциальных уравнений специального вида. Она соответствует критическому по Ляпунову случаю нескольких нулевых собственных чисел матрицы системы линейного приближения [11]. Ее можно рассматривать как сложную систему, моделирующую динамику двух связанных подсистем, причем одна из этих подсистем является линейной, а другая — нелинейной и однородной. Стоит также отметить, что при определенных ограничениях на нелинейности она представляет собой классическую систему Лурье непрямого управления [12, 13].

Цель данной статьи — анализ влияния внешних нелинейных нестационарных возмущений с нулевыми средними значениями на устойчивость рассматриваемой системы. С помощью специальной конструкции функции Ляпунова, учитывающей структуру действующих возмущений, будут найдены условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость нулевого решения. Кроме того, исследуем случай, когда в правых частях системы присутствует постоянное запаздывание, и определим условия, при выполнении которых асимптотическая устойчивость сохраняется для любого положительного запаздывания.

2 Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Py(t) + H(z(t)), \\ \dot{z}(t) = Qy(t) + F(z(t)). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x(t) = (y(t), z(t))^\top \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $y(t) \in \mathbb{R}^k$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $k + m = n$, P и Q — постоянные матрицы размерностей $k \times k$ и $m \times k$ соответственно, вектор-функции $H(z)$ и $F(z)$ непрерывны при $z \in \mathbb{R}^m$ и являются однородными порядка $\mu > 1$.

Система (1) имеет нулевое решение. Устойчивость этого решения исследовалась в статье [14]. Строились вспомогательные подсистемы

$$\dot{y}(t) = Py(t), \tag{2}$$

$$\dot{z}(t) = F(z(t)) - QP^{-1}H(z(t)) \tag{3}$$

и считалось, что выполнены следующие предположения.

Предположение 1. Нулевое решение подсистемы (2) асимптотически устойчиво.

Предположение 2. Нулевое решение подсистемы (3) асимптотически устойчиво.

Заметим, что предположения 1 и 2 представляют собой некоторый аналог известных условий абсолютной устойчивости для систем Лурье непрямого управления [12].

В работе [14] с помощью метода декомпозиции было доказано, что если выполнены данные предположения, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Замечание 1. Следует отметить, что в [14] указанный результат получен при некоторых дополнительных ограничениях. Считалось, что изучаемая система сингулярна (в левой части первой подсистемы в качестве множителя при $\dot{y}(t)$ присутствует малый положительный параметр), а компоненты векторов $H(z)$ и $F(z)$ являются однородными формами. Однако анализ приведенного в [14] доказательства показывает, что выполнение предположений 1 и 2 гарантирует асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1) и без дополнительных ограничений.

Далее наряду с (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Py(t) + H(z(t)) + R(t, x(t)), \\ \dot{z}(t) = Qy(t) + F(z(t)) + G(t, x(t)). \end{cases} \tag{4}$$

Здесь вектор-функции $R(t, x)$ и $G(t, x)$ непрерывны при $t \geq 0$, $\|x\| < \Delta$ ($0 < \Delta \leq +\infty$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора) и удовлетворяют неравенствам

$$\|R(t, x)\| \leq c_1(\|y\|^\nu + \|z\|^\eta), \qquad \|G(t, x)\| \leq c_2(\|y\|^\nu + \|z\|^\eta),$$

где c_1, c_2, ν, η — положительные постоянные.

С использованием подхода, предложенного в [14], нетрудно проверить, что если $\nu > 1$, $\eta > \mu$, т.е. если порядок возмущений больше порядка правых частей исходных уравнений, то при выполнении предположений 1 и 2 нулевое решение системы (4) также будет асимптотически устойчивым.

В настоящей работе рассмотрим случай, когда возмущенная система представима в виде

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Py(t) + H(z(t)) + B(t)R(z(t)), \\ \dot{z}(t) = Qy(t) + F(z(t)) + C(t)G(z(t)), \end{cases} \tag{5}$$

где матрицы $B(t), C(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geq 0$, а $R(z)$ и $G(z)$ — непрерывно дифференцируемые при $z \in \mathbb{R}^m$ однородные порядка μ векторные функции. Таким образом, в (5) возмущения имеют тот же порядок однородности, что функции $H(z)$ и $F(z)$.

Предположение 3. Пусть равномерно относительно $t \geq 0$ выполнены условия

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} B(s)ds \to 0, \quad \frac{1}{T}\int_t^{t+T} C(s)ds \to 0 \quad \text{при} \;\; T \to +\infty.$$

Данное предположение означает, что возмущения имеют нулевые средние значения. Они могут представлять собой периодические или почти периодические колебания, причем на амплитуды этих колебаний никаких ограничений не накладывается.

Исследуем устойчивость нулевого решения системы (5). Кроме того, рассмотрим случай, когда в правых частях возмущенной системы присутствует постоянное запаздывание, и определим условия, гарантирующие сохранение асимптотической устойчивости при любом положительном запаздывании.

3 Анализ устойчивости возмущенной системы

В отличие от подхода, применявшегося в [14], вместо метода декомпозиции в данной статье будем использовать специальные конструкции функций Ляпунова и функционалов Ляпунова–Красовского.

Теорема 1 *Пусть выполнены предположения 1–3. Тогда нулевое решение системы (5) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из результатов, полученных в работах [11, 15], следует, что если справедливы предположения 1 и 2, то для любых чисел $\gamma_1 > 2$ и $\gamma_2 > 2$ существуют функции Ляпунова $V_1(y)$ и $V_2(z)$, которые являются дважды непрерывно дифференцируемыми при $y \in \mathbb{R}^k$, $z \in \mathbb{R}^m$, положительно определенными и однородными порядка γ_1 и γ_2 соответственно, причем их производные в силу подсистем (2) и (3) отрицательно определены. Используя такие функции, строим функцию Ляпунова для системы (5) в виде

$$V(x) = V_1(y) + V_2(z) - \left(\frac{\partial V_2(z)}{\partial z}\right)^\top QP^{-1}y. \tag{6}$$

Дифференцируя $V(x)$ в силу возмущенной системы, имеем

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial V_1(y(t))}{\partial y}\right)^\top \big(Py(t) + H(z(t)) + B(t)R(z(t))\big) +$$

$$+ \left(\frac{\partial V_2(z(t))}{\partial z}\right)^\top \big(F(z(t)) + C(t)G(z(t))\big) -$$

$$- \left(\frac{\partial V_2(z(t))}{\partial z}\right)^\top QP^{-1}\big(H(z(t)) + B(t)R(z(t))\big) -$$

$$-\big(Qy(t)+F(z(t))+C(t)G(z(t))\big)^{\top}\frac{\partial^2 V_2(z(t))}{\partial z^2}QP^{-1}y(t)=$$

$$=\left(\frac{\partial V_1(y(t))}{\partial y}\right)^{\top}Py(t)+\left(\frac{\partial V_2(z(t))}{\partial z}\right)^{\top}\big(F(z(t))-QP^{-1}H(z(t))\big)+$$

$$+\left(\frac{\partial V_1(y(t))}{\partial y}\right)^{\top}\big(H(z(t))+B(t)R(z(t))\big)+$$

$$+\left(\frac{\partial V_2(z(t))}{\partial z}\right)^{\top}\big(C(t)G(z(t))-QP^{-1}B(t)R(z(t))\big)-$$

$$-\big(Qy(t)+F(z(t))+C(t)G(z(t))\big)^{\top}\frac{\partial^2 V_2(z(t))}{\partial z^2}QP^{-1}y(t).$$

Теперь, в соответствии с подходом, разработанным в [8, 9, 10], определим новую функцию Ляпунова по формуле

$$\widetilde{V}(t,x)=V(x)-\left(\frac{\partial V_2(z)}{\partial z}\right)^{\top}\left(\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}C(s)dsG(z)-\right.$$

$$\left.-QP^{-1}\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}B(s)dsR(z)\right),$$

где ε — положительный параметр. Тогда

$$\dot{\widetilde{V}}=\left(\frac{\partial V_1(y(t))}{\partial y}\right)^{\top}Py(t)+\left(\frac{\partial V_2(z(t))}{\partial z}\right)^{\top}\big(F(z(t))-QP^{-1}H(z(t))\big)+$$

$$+\left(\frac{\partial V_1(y(t))}{\partial y}\right)^{\top}\big(H(z(t))+B(t)R(z(t))\big)-$$

$$-\left(\frac{\partial V_2(z(t))}{\partial z}\right)^{\top}\left(\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}C(s)ds\frac{\partial G(z(t))}{\partial z}-\right.$$

$$\left.-QP^{-1}\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}B(s)ds\frac{\partial R(z(t))}{\partial z}\right)(Qy(t)+F(z(t))+C(t)G(z(t)))-$$

$$-\big(Qy(t)+F(z(t))+C(t)G(z(t))\big)^{\top}\frac{\partial^2 V_2(z(t))}{\partial z^2}\left(\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}C(s)dsG(z(t))-\right.$$

$$\left.-QP^{-1}\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}B(s)dsR(z(t))\right)+$$

$$+\varepsilon\left(\frac{\partial V_2(z(t))}{\partial z}\right)^{\top}\left(\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}C(s)dsG(z)-QP^{-1}\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}B(s)dsR(z)\right)-$$

$$-\big(Qy(t)+F(z(t))+C(t)G(z(t))\big)^\top \frac{\partial^2 V_2(z(t))}{\partial z^2} QP^{-1}y(t).$$

Используя свойства однородных функций (см. [11]), приходим к оценкам

$$d_1\|y\|^{\gamma_1}+d_2\|z\|^{\gamma_2}-d_3\|y\|\|z\|^{\gamma_2-1}-\frac{1}{\varepsilon}d_4\|z\|^{\gamma_2+\mu-1}\le \widetilde{V}(t,x)\le$$

$$\le d_5\|y\|^{\gamma_1}+d_6\|z\|^{\gamma_2}+d_3\|y\|\|z\|^{\gamma_2-1}+\frac{1}{\varepsilon}d_4\|z\|^{\gamma_2+\mu-1},$$

$$\dot{\widetilde{V}}\le -d_7\|y(t)\|^{\gamma_1}-d_8\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1}+d_9\|y(t)\|^{\gamma_1-1}\|z(t)\|^{\mu}$$

$$+d_{10}\|z(t)\|^{\gamma_2-2}\left(\|y(t)\|+\frac{1}{\varepsilon}\|z(t)\|^{\mu}\right)\left(\|y(t)\|+\|z(t)\|^{\mu}\right)$$

$$+d_{11}\varepsilon\left(\left\|\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}C(s)ds\right\|+\left\|\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}B(s)ds\right\|\right)\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1},$$

где $d_j>0$, $j=1,\dots,11$.

Известно [1], что если справедливо предположение 3, то параметр ε можно выбрать так, чтобы при всех $t\ge 0$ выполнялось неравенство

$$d_{11}\varepsilon\left(\left\|\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}C(s)ds\right\|+\left\|\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}B(s)ds\right\|\right)<\frac{d_8}{4}.$$

Зафиксируем такое значение ε.

С использованием неравенства Юнга получаем

$$d_3\|y\|\|z\|^{\gamma_2-1}\le \frac{1}{\gamma_1}d_3(\theta\|y\|)^{\gamma_1}+\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1}d_3\left(\frac{\|z\|^{\gamma_2-1}}{\theta}\right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1-1}},$$

где θ — любое положительное число.

Если величина θ достаточно мала и $\gamma_2>\gamma_1$, то найдется число $\rho>0$ такое, что

$$\frac{1}{2}\left(d_1\|y(t)\|^{\gamma_1}+d_2\|z(t)\|^{\gamma_2}\right)\le \widetilde{V}(t,x(t))\le 2\left(d_5\|y(t)\|^{\gamma_1}+d_6\|z(t)\|^{\gamma_2}\right),$$

при $t\ge 0$, $\|x(t)\|<\rho$.

Аналогичным образом получаем, что если

$$\frac{\mu+1}{2}\gamma_1<\gamma_2+\mu-1<\mu\gamma_1, \tag{7}$$

а ρ достаточно мало, то

$$\dot{\widetilde{V}}\le -\frac{1}{2}\left(d_7\|y(t)\|^{\gamma_1}+d_8\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1}\right)$$

при $t \geq 0$, $\|x(t)\| < \rho$.

Заметим, что из (7) следует выполнение условия $\gamma_2 > \gamma_1$.

Теорема доказана.

4 Возмущенная система с запаздыванием

Далее рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Py(t) + H(z(t), z(t-\tau)) + B(t)R(z(t), z(t-\tau)), \\ \dot{z}(t) = Qy(t) + F(z(t), z(t-\tau)) + C(t)G(z(t), z(t-\tau)). \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $x(t) = (y(t), z(t))^\top \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^k$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, P и Q — постоянные матрицы, матрицы $B(t), C(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geq 0$, вектор-функции $H(z,\zeta)$, $F(z,\zeta)$, $R(z,\zeta)$, $G(z,\zeta)$ непрерывны при $z, \zeta \in \mathbb{R}^m$ и являются однородными порядка $\mu > 1$, τ — постоянное положительное запаздывание.

Пусть начальные функции $\varphi(\xi)$ для решений системы (8) выбираются из пространства непрерывных функций $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ с равномерной нормой $\|\varphi\|_\tau = \max_{\xi\in[-\tau,0]} \|\varphi(\xi)\|$. Обозначим через x_t отрезок решения, т.е. $x_t : \xi \mapsto x(t+\xi)$ при $\xi \in [-\tau, 0]$.

Строим вспомогательную однородную подсистему без запаздывания

$$\dot{z}(t) = F(z(t), z(t)) - QP^{-1}H(z(t), z(t)). \tag{9}$$

Предположение 4. Нулевое решение подсистемы (9) асимптотически устойчиво.

Предположение 5. При всех $z, \zeta \in \mathbb{R}^m$ вектор-функции $H(z,\zeta)$, $F(z,\zeta)$, $R(z,\zeta)$, $G(z,\zeta)$ непрерывно дифференцируемы по z.

Теорема 2 *Пусть выполнены предположения 1, 3–5. Тогда нулевое решение системы (8) асимптотически устойчиво при любом $\tau \geq 0$.*

Доказательство. Используя предположения 1 и 3, выбираем функцию Ляпунова в виде (6), где $V_1(y)$ и $V_2(z)$ — дважды непрерывно дифференцируемые при $y \in \mathbb{R}^k$, $z \in \mathbb{R}^m$ однородные порядка γ_1 и γ_2 соответственно функции Ляпунова, построенные для подсистем (2) и (9). Дифференцируя $V(x)$ в силу системы (8), имеем

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial V_1(y(t))}{\partial y}\right)^\top Py(t) + \left(\frac{\partial V_2(z(t))}{\partial z}\right)^\top \big(F(z(t), z(t)) - QP^{-1}H(z(t), z(t))\big) +$$

$$+\left(\frac{\partial V_1(y(t))}{\partial y}\right)^{\top}\big(H(z(t),z(t-\tau))+B(t)R(z(t),z(t-\tau))\big)+$$

$$+\left(\frac{\partial V_2(z(t))}{\partial z}\right)^{\top}\big(C(t)G(z(t),z(t-\tau))-QP^{-1}B(t)R(z(t),z(t-\tau))\big)+$$

$$+\left(\frac{\partial V_2(z(t))}{\partial z}\right)^{\top}\big(F(z(t),z(t-\tau))-F(z(t),z(t))\big)+$$

$$+\left(\frac{\partial V_2(z(t))}{\partial z}\right)^{\top}QP^{-1}\big(H(z(t),z(t))-H(z(t),z(t-\tau))\big)-$$

$$-\big(Qy(t)+F(z(t),z(t-\tau))+C(t)G(z(t),z(t-\tau))\big)^{\top}\frac{\partial^2 V_2(z(t))}{\partial z^2}QP^{-1}y(t).$$

Далее на основе подходов, разработанных в [8, 9, 10, 16], определим функционал Ляпунова–Красовского по формуле

$$W(t,x_t)=V(x(t))+\int_{t-\tau}^{t}(\alpha+\beta(\xi-t+\tau))\|z(\xi)\|^{\gamma_2+\mu-1}d\xi+\Omega(t,z(t),z_t),$$

где

$$\Omega(t,z,\psi)=\left(\frac{\partial V_2(z)}{\partial z}\right)^{\top}\left(\int_{-\tau}^{0}\Big(F(z,\psi(\xi))-QP^{-1}H(z,\psi(\xi))+\right.$$

$$+C(\xi+\tau)G(z,\psi(\xi))-QP^{-1}B(\xi+\tau)R(z,\psi(\xi))\Big)d\xi-$$

$$\left.-\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}C(s+\tau)dsG(z,z)+QP^{-1}\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}B(s+\tau)dsR(z,z)\right),$$

а ε, α и β — положительные параметры. Тогда

$$\dot W=\left(\frac{\partial V_1(y(t))}{\partial y}\right)^{\top}Py(t)+\left(\frac{\partial V_2(z(t))}{\partial z}\right)^{\top}\big(F(z(t),z(t))-QP^{-1}H(z(t),z(t))\big)+$$

$$+(\alpha+\beta\tau)\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1}-\alpha\|z(t-\tau)\|^{\gamma_2+\mu-1}-\beta\int_{t-\tau}^{t}\|z(\xi)\|^{\gamma_2+\mu-1}d\xi+$$

$$+\left(\frac{\partial V_1(y(t))}{\partial y}\right)^{\top}\big(H(z(t),z(t-\tau))+B(t)R(z(t),z(t-\tau))\big)-$$

$$-\big(Qy(t)+F(z(t),z(t-\tau))+C(t)G(z(t),z(t-\tau))\big)^{\top}\frac{\partial^2 V_2(z(t))}{\partial z^2}QP^{-1}y(t)+$$

$$+\varepsilon\left(\frac{\partial V_2(z(t))}{\partial z}\right)^{\top}\left(\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}C(s+\tau)dsG(z(t),z(t))-\right.$$

$$-QP^{-1}\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}B(s+\tau)dsR(z(t),z(t))\Big)+$$

$$+\left(\frac{\partial\Omega(t,z(t),z_t)}{\partial z}\right)^\top\big(Qy(t)+F(z(t),z(t-\tau))+C(t)G(z(t),z(t-\tau))\big).$$

Следовательно, справедливы оценки

$$d_1\|y(t)\|^{\gamma_1}+d_2\|z(t)\|^{\gamma_2}-d_3\|y(t)\|\|z(t)\|^{\gamma_2-1}-\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)d_4\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1}-$$

$$-d_5\|z(t)\|^{\gamma_2-1}\int_{t-\tau}^t\|z(\xi)\|^\mu d\xi+\alpha\int_{t-\tau}^t\|z(\xi)\|^{\gamma_2+\mu-1}d\xi\le W(t,x_t)\le$$

$$\le d_6\|y(t)\|^{\gamma_1}+d_7\|z(t)\|^{\gamma_2}+d_3\|y(t)\|\|z(t)\|^{\gamma_2-1}+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)d_4\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1}+$$

$$+d_5\|z(t)\|^{\gamma_2-1}\int_{t-\tau}^t\|z(\xi)\|^\mu d\xi+(\alpha+\beta\tau)\int_{t-\tau}^t\|z(\xi)\|^{\gamma_2+\mu-1}d\xi,$$

$$\dot W\le -d_8\|y(t)\|^{\gamma_1}-d_9\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1}+d_{10}\|y(t)\|^{\gamma_1-1}(\|z(t)\|^\mu+\|z(t-\tau)\|^\mu)+$$

$$+(\alpha+\beta\tau)\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1}-\alpha\|z(t-\tau)\|^{\gamma_2+\mu-1}-\beta\int_{t-\tau}^t\|z(\xi)\|^{\gamma_2+\mu-1}d\xi+$$

$$+d_{11}\|y(t)\|\|z(t)\|^{\gamma_2-2}(\|y(t)\|+\|z(t)\|^\mu+\|z(t-\tau)\|^\mu)+$$

$$+d_{12}\|z(t)\|^{\gamma_2-2}\left(\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|z(t)\|^\mu+\int_{t-\tau}^t\|z(\xi)\|^\mu d\xi+\right.$$

$$\left.+\|z(t)\|\int_{t-\tau}^t\|z(\xi)\|^{\mu-1}d\xi\right)(\|y(t)\|+\|z(t)\|^\mu+\|z(t-\tau)\|^\mu)+$$

$$+d_{13}\varepsilon\left(\left\|\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}C(s+\tau)ds\right\|+\left\|\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}B(s+\tau)ds\right\|\right)\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1},$$

где $d_j>0$, $j=1,\ldots,13$.

Используя неравенство Юнга, нетрудно показать, что если значения параметров ε, α и β достаточно малы, а порядки однородности функций $V_1(y)$ и $V_2(z)$ удовлетворяют условию (7), то найдется число $\rho>0$ такое, что

$$\frac{1}{2}\left(d_1\|y(t)\|^{\gamma_1}+d_2\|z(t)\|^{\gamma_2}+\alpha\int_{t-\tau}^t\|z(\xi)\|^{\gamma_2+\mu-1}d\xi\right)\le W(t,x_t)\le$$

$$\le 2\left(d_6\|y(t)\|^{\gamma_1}+d_7\|z(t)\|^{\gamma_2}+(\alpha+\beta\tau)\int_{t-\tau}^t\|z(\xi)\|^{\gamma_2+\mu-1}d\xi\right),$$

$$\dot W\le-\frac{1}{2}\left(d_8\|y(t)\|^{\gamma_1}+d_9\|z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1}+\beta\int_{t-\tau}^t\|z(\xi)\|^{\gamma_2+\mu-1}d\xi\right)$$

при $t\ge0$, $\|x_t\|_\tau<\rho$. Теорема доказана.

5 Пример

Предположим, что система (8) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Py(t) + (D + B(t))H(z(t-\tau)), \\ \dot{z}(t) = Qy(t) + (A + C(t))H(z(t-\tau)). \end{cases} \tag{10}$$

Здесь $y(t), z(t) \in \mathbb{R}^2$, $H(z) = (z_1^3, z_2^3)^\top$, τ — постоянное неотрицательное запаздывание,

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t & 0 \\ 0 & 4\sin t \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(2t) \\ -5\cos(2t) & 0 \end{pmatrix},$$

λ — некоторая постоянная. Заметим, что (10) соответствуют системе непрямого управления с двумя нелинейными исполнительными органами и запаздыванием в канале обратной связи (см. [12, 13]).

В данном случае матрица P является гурвицевой. Значит, предположение 1 выполнено.

Матрицы $B(t), C(t)$ и векторная функция $H(z)$ обладают свойствами, указанными в предположениях 3 и 5 соответственно.

Чтобы проверить выполнение предположения 4, строим вспомогательную подсистему

$$\dot{z}(t) = \left(A - QP^{-1}D\right) H(z(t)) = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} H(z(t)). \tag{11}$$

Используя результаты работы [17], нетрудно показать, что для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (11) необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство

$$\lambda < 1/2. \tag{12}$$

Применяя теорему 2, получаем, что если выполнено условие (12), то нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво при любом $\tau > 0$.

6 Заключение

Для рассмотренных типов систем дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений предложены оригинальные подходы к построению функций Ляпунова и функционалов Ляпунова–Красовского. Это позволило получить новые условия, при выполнении которых нестационарные возмущения не нарушают асимптотическую устойчивость нулевого решения. При этом, в отличие от известных результатов, установленных на основе метода усреднения, в данной работе не предполагается, что в изучаемых системах присутствует малый параметр. Кроме того, доказано, что сохранение асимптотической устойчивости имеет место при любом постоянном положительном запаздывании.

Список литературы

[1] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963.

[2] Гребенников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986.

[3] Khapaev M.M. Averaging in Stability Theory. Dordrecht: Kluwer, 1993.

[4] Khalil H.K. Nonlinear Systems. Upper Saddle River NJ: Prentice-Hall, 2002.

[5] Бодунов Н.А., Котченко Ф.Ф. О зависимости устойчивости линейных периодических систем от периода // Дифференц. уравнения, 1988, т. 24, 2, с. 338–341.

[6] Mitropolsky Yu.A., Martynyuk A.A. Development of the Lyapunov functions method in non-linear mechanics. Intern. Journal of Non-Linear Mechanics, 1980, vol. 15, no. 4–5, p. 377–386.

[7] Fridman E., Zhang J. Averaging of linear systems with almost periodic coefficients: A time-delay approach. Automatica, 2020, vol. 122, 109287.

[8] Александров А.Ю. Об асимптотической устойчивости решений систем нестационарных дифференциальных уравнений с однородными правыми частями // Докл. РАН, 1996, т. 349, 3, с. 295–296.

[9] Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Zhabko A.P. Stability analysis for a class of nonlinear nonstationary systems via averaging. Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 2013, vol. 13, no. 4, p. 332–343.

[10] Aleksandrov A., Efimov D. Averaging method for the stability analysis of strongly nonlinear mechanical systems. Automatica, 2022, vol. 146, 110576.

[11] Зубов В.И. Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1973.

[12] Lefschetz S. Stability of Nonlinear Control Systems. New York: Academic Press, 1964.

[13] Liao X., Yu P. Absolute Stability of Nonlinear Control Systems. New York, Heidelberg: Springer, 2008.

[14] Косов А.А., Козлов М.В. Об асимптотической устойчивости однородных сингулярных систем с переключениями // Автомат. и телемех., 2019, 3, с. 45–54.

[15] Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. Systems Control Lett., 1992, vol. 19, p. 467–473.

[16] Efimov D., Aleksandrov A. Analysis of robustness of homogeneous systems with time delays using Lyapunov–Krasovskii functionals. Int. J. Robust Nonlinear Control, 2021, vol. 31, no. 9, p. 3730–3746.

[17] Martynyuk A.A. Asymptotic stability criterion for nonlinear monotonic systems and its applications (review). Internat. Appl. Mech., 2011, vol. 47, no. 5, p. 475–534.

Asymptotic stability investigation of the zero solution for a class of nonlinear nonstationary systems by the averaging method

Aleksandrov A.Yu.

Saint Petersburg State University

a.u.aleksandrov@spbu.ru

Abstract. A system of nonlinear differential equations is considered that describes the interaction of two coupled subsystems, one of these subsystems is linear, and the other is nonlinear and homogeneous with an order of homogeneity greater than one. It is assumed that this system is affected by nonstationary perturbations with zero mean values. Using the averaging method, sufficient conditions are determined under which perturbations do not disturb the asymptotic stability of the zero solution. The derivation of these conditions is based on the use of a special construction of the nonstationary Lyapunov function which takes into account the structure of the acting perturbations. In addition, we consider the case where there is a constant delay in the right-hand sides of the system. An original approach to the construction of the Lyapunov-Krasovskii functional for such a system is proposed. Using this functional, conditions are found that guarantee the preservation of the asymptotic stability for any positive delay.

Keywords: nonlinear systems, nonstationary perturbations, asymptotic stability, averaging, the Lyapunov direct method, delay.