

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 2, 2023

Электронный журнал,  
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

*Общая теория управления*

## Об одной задаче управления беспилотным летательным аппаратом самолетного типа с заданными промежуточными значениями разных частей координат

В. Р. Барсегян<sup>1,2,\*</sup>, А. Г. Матевосян<sup>2,\*</sup>,

<sup>1</sup>Институт механики НАН Армении,

<sup>2</sup>Ереванский государственный университет

\* [barseghyan@sci.am](mailto:barseghyan@sci.am);

\*\* [amatevosya@ysu.am](mailto:amatevosya@ysu.am)

**Аннотация.** Рассмотрена математическая модель пространственного полета беспилотного летательного аппарата самолетного типа. Для линеаризованной математической модели беспилотного летательного аппарата решена задача синтеза законов управления с заданными начальными, конечными значениями фазового вектора и промежуточными значениями разных частей координат в разные моменты времени. Сформулировано необходимое и достаточное условие существования программного управления и соответствующего движения. Построены функции управления и соответствующие фазовые траектории движения. В качестве приложения предложенного подхода для конкретных численных значений построены явные выражения функции программного управления и программного движения.

**Ключевые слова:** беспилотный летательный аппарат, управление полетом, промежуточные условия, фазовые траектории.

### Введение

В настоящее время все большее распространение получают беспилотные летательные аппараты (БПЛА), что является весьма актуальным. Изначально БПЛА создавались предпочтительно для военных целей, но с развитием технологий БПЛА нашли свое применение в гражданских сферах. БПЛА предназначены для выполнения миссий, представляющих

существенную опасность для людей, а также миссий, имеющих неоправданный большой расход ресурсов на выполнение примитивных действий. Поэтому многие страны начинают развивать отрасль производства БПЛА различного класса и назначения. Многообразие сфер применения предполагает использование разных типов БПЛА. БПЛА делятся на самолётные, с несущими плоскостями-крыльями, и вертолётные — квадрокоптеры, с вертикальными роторными приводами. Оба типа БПЛА обладают своими особенностями и преимуществами, а сферы их применения заметно различаются. Ключевые особенности БПЛА самолётного типа — большая высота, дальность и продолжительность полёта. Полет БПЛА может функционировать с различной степенью автономии: с помощью устройства дистанционного управления; с помощью системы автоматического пилотирования. В БПЛА может быть установлено соответствующее программное обеспечение на выполнение различных задач в автономном режиме, то есть без участия человека. БПЛА как динамический объект управления представляет собой сложную динамическую систему. Для управления движением БПЛА необходимо воздействовать на силы и моменты, действующие на летательный аппарат [1-5].

При проектировании движением различных механических систем, а также летательных аппаратов возникают задачи управления с многоточечными промежуточными условиями. Вообще, важное прикладное и теоретическое значение имеют задачи управления, в которых наряду с классическими краевыми (начальное и конечное) условиями заданы также многоточечные промежуточные условия [6-11].

В настоящей работе рассматривается пространственное движение БПЛА самолётного типа. Управляющие воздействия формируются с помощью органов управления тягой двигателя и аэродинамическими рулями - элеронами. В математической модели движения БПЛА учитываются особенности динамики управляемой БПЛА. Используя методы теории управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями для систем линеаризованных дифференциальных уравнений рассмотрена задача управления движением БПЛА самолётного типа с заданными промежуточными значениями разных частей координат в разные моменты времени. Построены функции управления и соответствующие фазовые траектории движения. Для конкретных числовых значений построены явные выражения функции программного управления и программного движения, а также соответствующие графики функции.

## 1. Математическая модель динамики БПЛА самолётного типа и постановка задачи.

В качестве объекта управления будем рассматривать БПЛА самолётного типа как тела с жестко фиксированной внешней оболочкой, т.е. не будут учитываться упругие деформации конструкции,

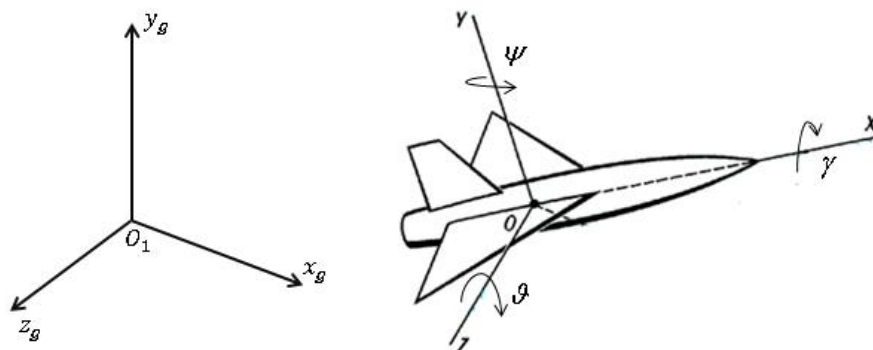


Рис. 1. БПЛА самолётного типа.

которые могут иметь место при внешних нагрузках (рис.1)

Движение БПЛА в задачах управления полетом рассматривается как сложное – движение центра масс и движение вокруг центра масс. Для описания динамики БПЛА используются

следующие системы координат: траекторная система координат; связанная система координат; земная система координат; скоростная система координат [1-5]. Проекция этих систем координат используются для описания уравнения движения БПЛА.

Для составления математической модели БПЛА приняты следующие допущения [1-3]:

- процессы, происходящие внутри оболочки БПЛА, считаются стационарными;
- конфигурация БПЛА имеет плоскость симметрии, массы распределены симметрично по отношению к этой плоскости;
- внешняя среда, в которой происходит движение БПЛА, считается неизменной, а характеристики этой среды однозначно известны;
- вращением Земли и кривизной ее поверхности можно пренебречь.

Движение управляемого БПЛА основано на создании изменяемых по величине и направлению сил и моментов, влияющих на БПЛА. Предполагается, что рассматриваемый БПЛА оснащен органами управления тягой двигателя и аэродинамическими рулями - элеронами. При изменении положений элеронов изменяются и направления воздушных потоков, из-за которых возникают дополнительные аэродинамические силы. В качестве регулирующих факторов, позволяющих воздействовать на летательный аппарат для управления его движением, используются тяга двигателя, углы отклонения руля высоты, руля направления, элеронов.

Вывод уравнения движения БПЛА основан на теоремах о движении центра масс тела, об изменении количества движения, кинетического момента и кинетической энергии. С учетом всех действующих сил и моментов уравнения пространственного движения БПЛА имеют весьма сложный вид. В принятых допущениях достаточно полную систему уравнений движения БПЛА записать в виде [1-3]:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{1}{m} (P_{xk} - \sum X_{pk} - X_k + Q_{xk}), v\dot{\theta} = \frac{1}{m} (P_{yk} - \sum Y_{pk} - Y_k + Q_{yk}), \\ v \cos \theta \dot{\Psi} &= -\frac{1}{m} (P_{zk} - \sum Z_{pk} - Z_k), \quad J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z = M_x + M_{px}, \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= M_y + M_{py}, J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y = M_z + M_{pz}, \\ \dot{\vartheta} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma, \dot{\psi} = \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma), \dot{\gamma} = \omega_x - tg \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma), \\ \dot{x}_g &= v \cos \theta \cos \Psi, \dot{y}_g = v \sin \theta, \dot{z}_g = -v \cos \theta \sin \Psi, \end{aligned}$$

где  $m$  – масса БПЛА,  $v$  – скорость БПЛА,  $g$  – ускорение, создаваемое силой тяжести,  $J_x, J_y, J_z$  – основные моменты инерции БПЛА,  $M_x, M_y, M_z$  – проекции моментов сил, действующих на БПЛА,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – угловые скорости БПЛА в проекциях на оси связанной системы координат,  $\alpha$  – угол атаки,  $\beta$  – угол скольжения между вектором скорости и его проекций на вертикальную плоскость симметрии БПЛА,  $\gamma_c$  – угол крена в скоростной системе координат,  $\theta$  – угол наклона траектории,  $\Psi$  – угол поворота траектории БПЛА,  $\psi$  – угол рыскания,  $\vartheta$  – угол тангажа,  $\gamma$  – угол крена.

Так как уравнения движения центра масс БПЛА записаны в траекторных системах, уравнения движения относительно центра масс и кинематические уравнения – в связанной системе, а аэродинамические силы и моменты зависят от углов атаки и скольжения между скоростными и связанными осями, то к приведенным уравнениям добавляются следующие геометрические соотношения между этими углами:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta &= \sin \theta \cos \alpha \cos \beta + \cos \theta (\sin \alpha \cos \gamma_c + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_c), \\ \sin \psi \cos \gamma &= \sin \Psi \cos \beta \cos \gamma_c + \cos \Psi (\sin \beta \cos \theta + \sin \gamma_c \sin \theta \cos \beta) - \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma, \\ \cos \vartheta \sin \gamma &= \sin \gamma_c \cos \beta \cos \theta - \sin \beta \sin \theta, \end{aligned}$$

Приведенная система уравнений движения БПЛА является нелинейной системой дифференциальных уравнений. Для исследования конкретных задач управления и аналитического представления решения целесообразно иметь линейное приближение системы дифференциальных уравнений. Для линеаризации системы относительно малых отклонений параметров движения разложим правую часть системы уравнений в ряд Тейлора и после некоторого упрощения получим систему линеаризованных уравнений в форме Коши, описывающих динамику БПЛА:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4, \quad \dot{x}_2 = -x_8 u_*, \quad \dot{x}_3 = -x_9 u_*, \quad \dot{x}_4 = \frac{u_1}{m} - \frac{x_8}{m} Q, \quad \dot{x}_5 = \frac{u_4}{J_x}, \quad \dot{x}_6 = \frac{u_5}{J_y}, \\ \dot{x}_7 &= \frac{u_6}{J_z}, \quad \dot{x}_8 = \frac{u_2}{m v_*}, \quad \dot{x}_9 = \frac{u_3}{m v_*}, \quad \dot{x}_{10} = x_6, \quad \dot{x}_{11} = x_7, \quad \dot{x}_{12} = x_5, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где обозначения  $x_i, i = 1, \dots, 12$  соответствуют следующим переменным

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = v, \quad x_5 = \omega_x, \quad x_6 = \omega_y, \\ x_7 &= \omega_z, \quad x_8 = \theta, \quad x_9 = \psi, \quad x_{10} = \psi, \quad x_{11} = \vartheta, \quad x_{12} = \gamma, \end{aligned}$$

а управляющие воздействия, связанные с силами и моментами действующими на БПЛА, обозначены следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{xk} - \sum X_{pk} - X_k &= u_1, \quad P_{yk} - \sum Y_{pk} - Y_k = u_2, \quad P_{zk} - \sum Z_{pk} - Z_{zk} = u_3, \\ M_x + M_{px} &= u_4, \quad M_y + M_{py} = u_5, \quad M_z + M_{pz} = u_6. \end{aligned}$$

Отметим, что непосредственной проверкой можно убедиться, что система (1.1) является вполне управляемой [10, 12].

Пусть заданы начальное и конечное

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_T \quad (1.2)$$

состояния системы (1.1) и в некоторые промежуточные моменты времени  $t = t_1$  и  $t = t_2$ ,  $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < T$ , следующие значения части координат фазового вектора

$$x_3(t_1) \text{ и } x_1(t_2), x_2(t_2). \quad (1.3)$$

Рассматривается следующая задача: требуется определить оптимальную программу управления, переводящую систему (1.1) из любого заданного начального состояния в заданное конечное состояние (в частности, в начало фазовых координат) за минимальный отрезок времени.

Требуется найти условия, при которых существует программное управляющее воздействие  $U(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$  и программное движение  $x = x(t)$ , удовлетворяющие системе (1.1) и условиям (1.2) и (1.3), а также построить их.

## 2. Решение задачи.

Напишем решение уравнения (1.1) следующим образом [8-10, 12]:

$$x(t) = X[t, t_0]x(t_0) + \int_{t_0}^t H[t, \tau]U(\tau)d\tau, \quad (2.1)$$

где через  $X[t, \tau]$  обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородной части уравнения (1.1),  $H[t, \tau]$  импульсно-переходная матрица, которая имеет вид:

$$H^T[t, \tau] = \begin{pmatrix} \frac{T-\tau}{m} & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Q(T-\tau)^2}{2m^2V} & \frac{\tau-T}{m} & 0 & \frac{Q(T-\tau)}{m^2V} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{mV} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tau-T}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{mV} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{T-\tau}{J_y} & 0 & \frac{T-\tau}{J_x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{T-\tau}{J_z} & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь и далее буква « $T$ » в верхнем индексе означает операцию транспонирования.

Для определения законов управления, учитывая промежуточные (1.3) и конечные (1.2) условия, применяем подходы, приведенные в работах [8-10], тогда получим, что управляющее воздействие должно удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \left( \frac{(T-t)u_1(t)}{m} + \frac{Q(T-t)^2u_2(t)}{2m^2V} \right) dt &= C_1, \quad \int_{t_0}^T \frac{(t-T)u_2(t)}{m} dt = C_2, \quad \int_{t_0}^T \frac{(t-T)u_3(t)}{m} dt = C_3, \\ \int_{t_0}^T \left( \frac{u_1(t)}{m} + \frac{Q(T-t)u_2(t)}{m^2V} \right) dt &= C_4, \quad \int_{t_0}^T \frac{u_4(t)}{J_x} dt = C_5, \quad \int_{t_0}^T \frac{u_5(t)}{J_y} dt = C_6, \quad \int_{t_0}^T \frac{u_6(t)}{J_z} dt = C_7, \\ \int_{t_0}^T \frac{u_2(t)}{mV} dt &= C_8, \quad \int_{t_0}^T \frac{u_3(t)}{mV} dt = C_9, \quad \int_{t_0}^T \frac{(t-T)u_5(t)}{J_y} dt = C_{10}, \quad \int_{t_0}^T \frac{(t-T)u_6(t)}{J_z} dt = C_{11}, \\ \int_{t_0}^T \frac{(t-T)u_4(t)}{J_x} dt &= C_{12}, \quad \int_{t_0}^{t_1} \frac{(t-t_1)u_3(t)}{m} dt = C_{13}, \quad \int_{t_0}^{t_2} \left( \frac{(t_2-t)u_1(t)}{m} + \frac{Q(t_2-t)^2u_2(t)}{2m^2V} \right) dt = C_{14}, \\ \int_{t_0}^{t_2} \frac{(t-t_2)u_2(t)}{m} dt &= C_{15}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= x_1(T) - x_1(t_0) - (T - t_0)x_4(t_0) - \frac{Q(T-t_0)^2x_8(t_0)}{2m}, \quad C_2 = x_2(T) - x_2(t_0) + V(T - t_0)x_8(t_0), \\ C_3 &= x_3(T) - x_3(t_0) + V(T - t_0)x_9(t_0), \quad C_4 = x_4(T) - x_4(t_0) - \frac{Q(T-t_0)x_8(t_0)}{m}, \\ C_j &= x_j(T) - x_j(t_0), \quad j = 5, 6, \dots, 9, \\ C_{10} &= x_{10}(T) - (T - t_0)x_6(t_0) - x_{10}(t_0), \quad C_{11} = x_{11}(T) - (T - t_0)x_7(t_0) - x_{11}(t_0), \\ C_{12} &= x_{12}(T) - (T - t_0)x_5(t_0) - x_{12}(t_0), \quad C_{13} = x_3(t_1) - x_3(t_0) + V(t_1 - t_0)x_9(t_0), \\ C_{14} &= x_1(t_2) - x_1(t_0) - (t_2 - t_0)x_4(t_0) - \frac{Q(t_2-t_0)^2x_8(t_0)}{2m}, \\ C_{15} &= x_2(t_2) - x_2(t_0) + V(t_2 - t_0)x_8(t_0). \end{aligned}$$

Полученные интегральные соотношения в векторно-матричной записи представим в виде:

$$\int_{t_0}^T H(t)U(t)dt = \eta(t_0, t_1, t_2, T), \tag{2.2}$$

где

$$U(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), u_5(t), u_6(t))^T, \quad \eta(t_0, t_1, t_2, T) = (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_{15})^T.$$

Матрица  $H(t)$  имеет размерность  $(15 \times 6)$ , элементы которой имеют следующий вид

$$\begin{aligned} h_1^{(1)}[t_2, t] &= h_2^{(2)}[t_2, t] = h_3^{(3)}[t_2, t] = \frac{T-t}{m}, & h_1^{(2)}[t_2, t] &= \frac{Q(T-t)^2}{2m^2V}, & h_4^{(1)}[t_2, t] &= \frac{1}{m}, \\ h_4^{(2)}[t_2, t] &= \frac{Q(T-t)}{m^2V}, & h_5^{(4)}[t_2, t] &= \frac{1}{J_x}, & h_6^{(5)}[t_2, t] &= \frac{1}{J_y}, & h_7^{(6)}[t_2, t] &= \frac{1}{J_z}, \\ h_8^{(2)}[t_2, t] &= h_9^{(3)}[t_2, t] = \frac{1}{mV}, & h_{10}^{(5)}[t_2, t] &= \frac{T-t}{J_y}, & h_{11}^{(6)}[t_2, t] &= \frac{T-t}{J_z}, & h_{12}^{(4)}[t_2, t] &= \frac{T-t}{J_x}, \end{aligned}$$

$$h_{13}^{(3)}[t_1, t] = \begin{cases} -\frac{t_1-t}{m}, & \text{при } t_0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & \text{при } t_1 < t \leq T \end{cases}, \quad h_{14}^{(1)}[t_2, t] = \begin{cases} \frac{t_2-t}{m}, & \text{при } t_0 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{при } t_2 < t \leq T \end{cases}$$

$$h_{14}^{(2)}[t_2, t] = \begin{cases} \frac{Q(t_2-t)^2}{2m^2V}, & \text{при } t_0 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{при } t_2 < t \leq T \end{cases}, \quad h_{15}^{(2)}[t_2, t] = \begin{cases} -\frac{t_2-t}{m}, & \text{при } t_0 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{при } t_2 < t \leq T \end{cases}$$

где нижний индекс функции  $h_j^{(i)}$  это номер строки, а верхний индекс - номер столбца матрицы. Все остальные элементы матрицы  $H(t)$ , которые не приведены, равны нулю.

Управляющее воздействие  $U(t)$ , удовлетворяющее интегральному соотношению (2.1) (или (2.2)), представим в виде [9-10, 12, 13]

$$U(t) = H^T(t)Q^{-1}\eta + f(t), \tag{2.3}$$

где  $H^T(t)$  - транспонированная матрица,  $f(t)$  - вектор-функция и такая, что

$$\int_{t_0}^T H(t) f(t)dt = 0, \quad Q = \int_{t_0}^T H(t)H^T(t)dt. \tag{2.4}$$

Таким образом, решение задачи можно сформулировать в виде следующей теоремы, аналогичной теореме, доказанной в [10, 13].

**Теорема.** Для того чтобы существовало программное управление (2.2) и соответствующее ему решение системы (1.1), удовлетворяющее условиям (2.1) (или (2.2)), необходимо и достаточно, чтобы матрица  $Q$  (2.3) была не особой или чтобы ранги матрицы  $Q$  и расширенной матрицы  $\{Q, \eta\}$  совпадали между собой.

Отметим, что матрица  $Q$  имеет размерность  $(15 \times 15)$ , для которой

$$\begin{aligned} \det Q &= \frac{(t_1 - t_0)^3(t_2 - t_0)^6(T - t_0)^{15}(T - t_1)^3(T - t_2)^6}{1547934105600m^2V^8J_x^4J_y^4J_z^4} \times \\ &\times \{19200m^4V^4 + 160m^2Q^2V^2[2t_0^2 + 3t_2^2 + 2T^2 - t_0T - 3t_2(t_0 + T)] + 3Q^4(t_2 - t_0)^2(T - t_2)^2\}. \end{aligned}$$

Ясно, что  $\det Q \neq 0$ , матрица  $Q$  не особая.

Таким образом, имея выражение для функции управления  $U(t)$ , соответствующее программное движение запишется в виде формулы Коши (2.1).

Если найденные выражения функции управления  $U(t)$  подставить в (1.1) и на каждом промежутке времени проинтегрировать эти уравнения при заданных начальном и промежуточных значениях фазового вектора, получим законы движения

### 3. Пример.

Для иллюстрации вышеизложенного построения предположим, что  $t_0 = 0, t_1 = 3, t_2 = 7, T = 12$ . Начальное и конечное состояние фазового вектора выберем следующим образом  $x(0) = (1, 2, 3, 5, 3, 4, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 3, 1, 2)^T, x(T) = (4, 5, 6, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4)^T$ .

Пусть в промежуточные моменты времени  $t_1 = 3, t_2 = 7$  заданы значения части координат фазового вектора в виде:

$$x_3(t_1) = 70 \text{ и } x_1(t_2) = 110; x_2(t_2) = 120.$$

Таким образом, вычисляя значения  $H^T(t), Q^{-1}, \eta$  и подставляя значения этих матриц и вектора  $\eta$  в (2.3), (при  $f(t) = 0$ ) для управляющих воздействий будем иметь следующие явные выражения:

$$u_1(t) = \begin{cases} \frac{29189007}{1135820} - \frac{1932706t}{397537}, & \text{при } 0 \leq t \leq 7 \\ \frac{2797233}{4056500} - \frac{1307186t}{1014125}, & \text{при } 7 < t \leq 12 \end{cases}, u_3(t) = \begin{cases} -\frac{277}{9} + \frac{137t}{9}, & \text{при } 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{1873}{81} - \frac{667t}{243}, & \text{при } 3 < t \leq 12 \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} \frac{592413}{113582} - \frac{5188783t}{397537} + \frac{966353t^2}{397537}, & \text{при } 0 \leq t \leq 7 \\ \frac{344796999}{2028250} - \frac{24428267t}{1014125} + \frac{653593t^2}{1014125}, & \text{при } 7 < t \leq 12 \end{cases}$$

$$u_4(t) = -\frac{7}{8} + \frac{5t}{48}, u_5(t) = -\frac{11}{8} + \frac{25t}{144}, u_6(t) = -\frac{17}{8} + \frac{13t}{48}.$$

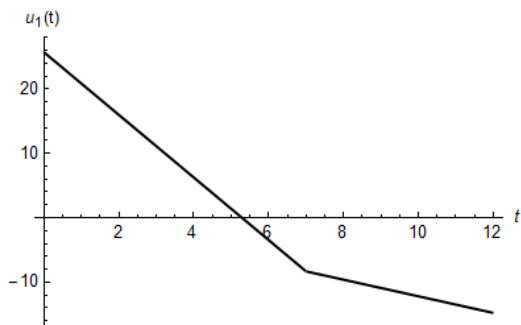


Рис. 2. График функции управления  $u_1(t)$ .

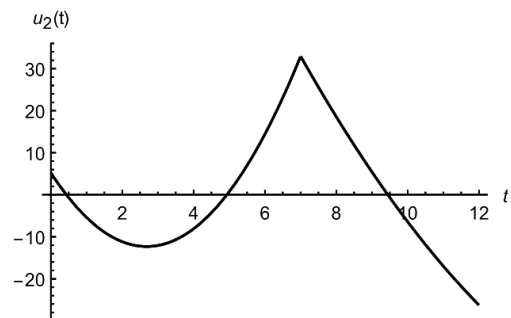


Рис. 3. График функции управления  $u_2(t)$ .

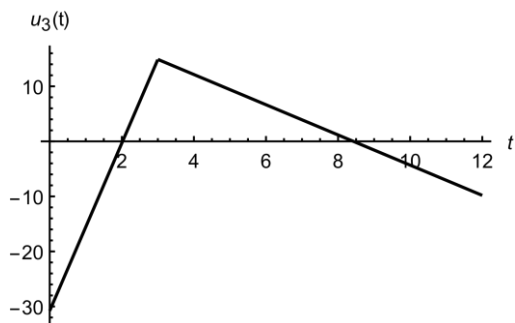


Рис. 4. График функции управления  $u_3(t)$ .

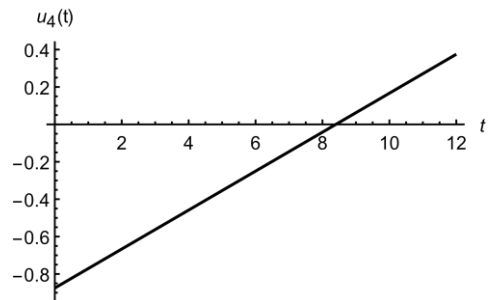


Рис. 5. График функции управления  $u_4(t)$ .

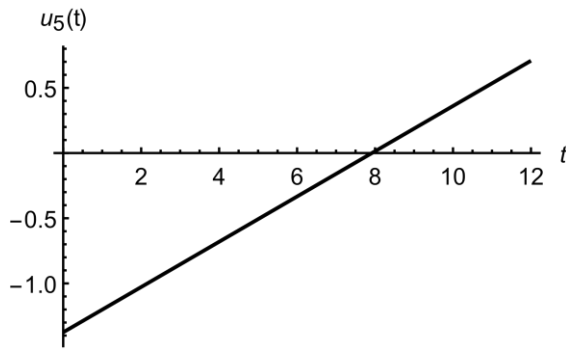


Рис. 6. График функции управления  $u_5(t)$

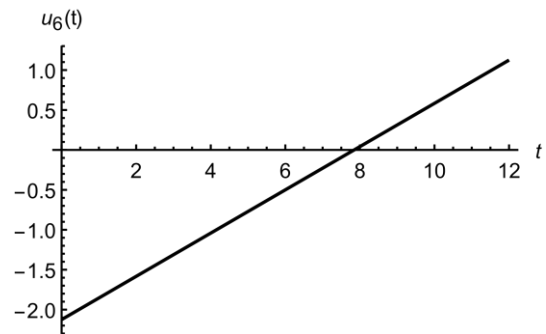


Рис. 7. График функции управления  $u_6(t)$

Если найденные выражения функции управления  $U(t)$  подставить в (1.1) и на каждом промежутке времени проинтегрировать эти уравнения при заданных начальном и промежуточных значениях фазового вектора, получим законы движения геометрических координат в следующем виде:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 + 5t + \frac{31460647t^2}{2271640} + \frac{281479t^3}{4770444} - \frac{5188783t^4}{9540888} + \frac{966353t^5}{23852220}, & \text{при } 0 \leq t \leq 7 \\ -\frac{2396832194}{724375} + \frac{1821032602t}{1014125} - \frac{2742868119t^2}{8113000} + \\ + \frac{342182627t^3}{12169500} - \frac{24428267t^4}{24339000} + \frac{653593t^5}{60847500}, & \text{при } 7 < t \leq 12 \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 2 - 2t - \frac{592413t^2}{227164} + \frac{5188783t^3}{2385222} - \frac{966353t^4}{4770444}, & \text{при } 0 \leq t \leq 7 \\ -\frac{246452237}{144875} + \frac{686416338t}{1014125} - \frac{344796999t^2}{4056500} + \frac{24428267t^3}{6084750} - \frac{653593t^4}{12169500}, & \text{при } 7 < t \leq 12 \end{cases}$$

$$x_3(t) = \begin{cases} 3 - t + \frac{277t^2}{18} - \frac{137t^3}{54}, & \text{при } 0 \leq t \leq 3 \\ -\frac{2102}{27} + \frac{2156t}{27} - \frac{1873t^2}{162} + \frac{667t^3}{1458}, & \text{при } 3 < t \leq 12 \end{cases}$$

Графики фазового вектора-функции  $x(t)$  при  $t \in [0,12]$ , по геометрическим координатам  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$  представлены на рис. 8 - 10.

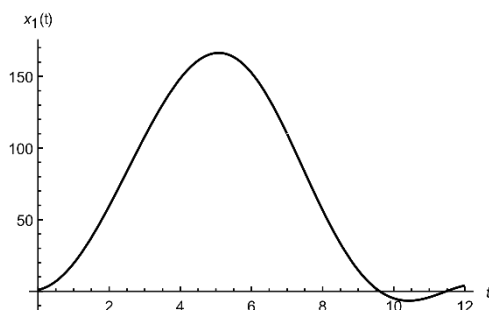


Рис.8. График функции  $x_1(t)$ .

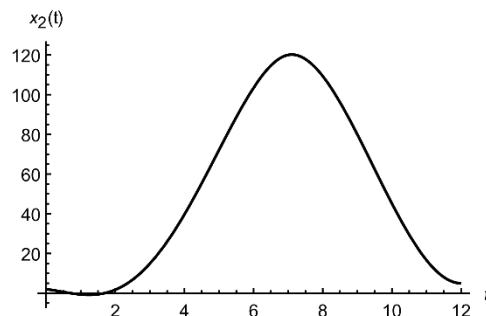


Рис.9. График функции  $x_2(t)$ .



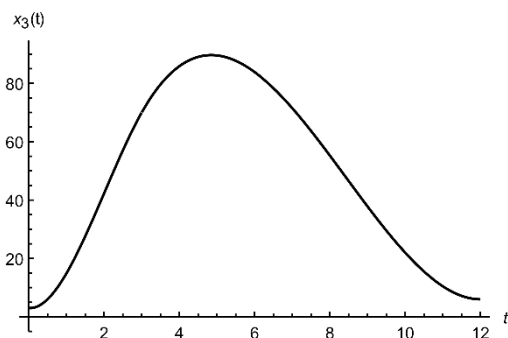


Рис.10. График функции  $x_3(t)$ .

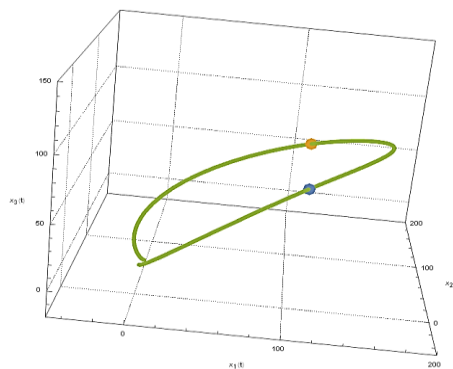


Рис.11. Траектория движения.

Таким образом, для системы (1.1) с заданными начальными, конечными значениями фазового вектора и промежуточными значениями для части координат получены явные виды программного управления и программного движения.

## Заключение.

Для систем линеаризованных дифференциальных уравнений пространственного движения БПЛА самолетного типа решена задача управления полетом с заданными начальными, конечными условиями и заданными промежуточными значениями разных частей координат в разные моменты времени. Сформулированы необходимые и достаточные условия существования программного управления и программного движения. В качестве приложения предложенного подхода построены явные выражения функции программного управления и программного движения с заданными значениями разных частей координат в двух разных промежуточных моментах времени, а также построены соответствующие графики функции.

## Литература

- [1] Лебедев, А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 615 с.
- [2] Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Прикладные задачи теории оптимального управления движением беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 328 с.
- [3] Телухин С.В., Матвеев В.В. Беспилотный летательный аппарат как объект управления. Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 10. С. 7-10
- [4] Богословский С.В., Дорофеев А.Д. Динамика полёта летательных аппаратов. СПб.: СПбГУАП, 2002. С. 34—41.
- [5] Колесников А.А. Новые нелинейные методы управления полетом. М.: Физматлит, 2013.с.
- [6] Ащепков Л.Т. Оптимальное управление системой с промежуточными условиями. ПММ, 1981, т. 45, вып. 2, с. 215-222.
- [7] Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. Принцип максимума для гладких задач оптимального импульсного управления с многоточечными фазограничениями. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009, т. 49, № 6, с. 981-997.
- [8] Барсегян В.Р. Управление линейными динамическими системами с ограничениями на значения частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени. Докл. НАН Армении. 2010. Т. 110. № 3. С. 251–260.

- [9] Barseghyan V.R. and Barseghyan T.V. On an Approach to the Problems of Control of Dynamic System with Nonseparated Multipoint Intermediate Conditions. Automation and Remote Control, 2015, Vol. 76, № 4, pp. 549-559.
- [10] Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
- [11] Barseghyan, V. and Solodusha, S. On One Problem in Optimal Boundary Control for String Vibrations with a Given Velocity of Points at an Intermediate Moment of Time. Conference Paper. Publisher: IEEE. 2021 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), pp.343-349, 2021. Doi: 10.1109/RusAutoCon52004.2021.9537514.
- [12] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
- [13] Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975, 496 с.

## **On one problem of controlling an airplane-type unmanned aerial vehicle with given intermediate values of different parts of coordinates**

Barseghyan V. R.<sup>1,2,\*</sup>, Matevosyan A. G.<sup>2,\*\*</sup>,

<sup>1</sup> Institute of Mechanics of National Academy of Science of Armenia, Yerevan, Armenia

<sup>2</sup> Yerevan State University, Yerevan, Armenia

\* [barseghyan@sci.ame](mailto:barseghyan@sci.ame)

\*\* [amatevosyan@ysu.am](mailto:amatevosyan@ysu.am)

**Abstract.** The mathematical model of spatial flight of an unmanned airplane-type vehicle is considered. For a linearized mathematical model of an unmanned aerial vehicle the problem of synthesis of control laws with given initial, finite values of the phase vector and intermediate values of different parts of coordinates at different moments of time is solved. A necessary and sufficient condition for the existence of program control and the corresponding motion is formulated. The control functions and corresponding phase trajectories of motion are constructed. As an application of the proposed approach, explicit expressions of the program control function and program motion are constructed for specific numerical values.

**Keywords:** unmanned aerial vehicle, flight control, intermediate conditions, phase trajectories.