ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2023
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных
дифференциальных уравнений

Применение степенного преобразования к орбите 2-го уравнения Пенлеве и решение дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями через 2-й трансцендент Пенлеве и в полиномах

Хакимова З.Н., Тимофеева Л.Н., Атоян А.А.

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург

vka@mil.ru

Аннотация. Рассматривается 2-е уравнение Пенлеве как представитель класса обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 2-го порядка с полиномиальными правыми частями, а также более общего класса уравнений 2-го порядка с дробно-полиномиальными правыми частями. Второе уравнение Пенлеве с тремя слагаемыми в правой части имеет орбиту в классе дробно-полиномиальных уравнений по псевдогруппе 36-го порядка, а при отсутствии 3-го слагаемого – 60-го порядка.
В данной работе приведено степенное преобразование с произвольным параметром, сохраняющее полиномиальный или дробно-полиномиальный вид уравнений. Это степенное преобразование применено к уравнениям орбит 2-го уравнения Пенлеве с тремя и двумя слагаемыми в правых частях уравнений. Построены псевдогруппы преобразований, индуцированные указанными выше псевдогруппами 36-го и 60-го порядков. Найдены все уравнения с одноконстантным произволом, соответствующие вершинам графов индуцированных псевдогрупп. Получены общие решения всех найденных уравнений через 2-й трансцендент Пенлеве или в полиномах. Приведена теорема, позволяющая с помощью операции масштабирования найти общие решения всех указанных выше уравнений с произвольными коэффициентами.
Ключевые слова: Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка, полиномиальные и дробно-полиномиальные дифференциальные уравнения, дискретная группа преобразований, группа диэдра, псевдогруппа преобразований, 2-е уравнение Пенлеве, 2-й трансцендент Пенлеве.

1. Введение

Одна из ключевых задач теории дифференциальных уравнений – нахождение точных решений уравнений. Разработанный В.Ф. Зайцевым дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) позволяет находить дискретные симметрии дифференциальных уравнений и, как следствие, точные решения десятков и сотен уравнений исследуемых классов уравнений [1]. В противовес этому алгоритмическому подходу, ранее на протяжении многих десятков лет поиск точных решений ОДУ являлся искусством. Требовалось много усилий исследователя для того, чтобы решить некоторое уравнение с конкретными параметрами. В справочнике [2], которым научно-технические работники пользовались в течение длительного времени, содержатся лишь единичные разрешимые ОДУ некоторых классов, тогда как в справочнике [1], а также в серии более поздних справочников, в частности, в одном из последних справочников [3], содержатся десятки и сотни разрешимых уравнений этих же классов.

В данной статье рассматривается 2-е уравнение Пенлеве.

В работах [4, 5] был проведён дискретно-групповой анализ 2-го уравнения Пенлеве. Были найдены дискретные группы и псевдогруппы преобразований, а также получены решения всех полиномиальных и дробно-полиномиальных дифференциальных уравнений, принадлежащих орбите 2-го уравнения Пенлеве.

В представленной работе прежние дискретные симметрии расширены с помощью степенного преобразования, действующего в исследуемых классах уравнений. Получены решения расширенной орбиты 2-го уравнения Пенлеве.

Поскольку указанное степенное преобразование содержит произвольную константу, то новые интегрируемые уравнения расширенной орбиты 2-го уравнения Пенлеве имеют существенный одноконстантный произвол.

2. Псевдогруппа преобразований 36-го порядка для 2-го уравнения Пенлеве с тремя слагаемыми в правой части

Рассмотрим 2-е уравнение Пенлеве с тремя слагаемыми в правой части ($p \neq 0$)

$$y''_{xx} = xy + 2y^3 + p. \qquad (1)$$

2-е уравнение Пенлеве принадлежит классу полиномиальных уравнений

$$y''_{xx} = \sum_{i=1}^{3} A_i x^{k_i} y^{l_i} \left(y'_x\right)^{m_i} \left(xy'_x - y\right)^{n_i}, \qquad (2)$$

а также более общему классу дробно-полиномиальных уравнений

$$y''_{xx} = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i x^{k_i} y^{l_i} \left(y'_x\right)^{m_i} \left(xy'_x - y\right)^{n_i}}{\sum_{i=4}^{6} A_i x^{k_i} y^{l_i} \left(y'_x\right)^{m_i} \left(xy'_x - y\right)^{n_i}}. \qquad (3)$$

В статье будет рассматриваться также дробно-полиномиальный класс уравнений

$$y''_{xx} = \left[\sum_{i=1}^{3} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}\right]^{-1}, \qquad (4)$$

являющийся, так же как и (2), подклассом класса уравнений (3).

Классы уравнений (1)-(4) будем обозначать, соответственно:

$$\sum_{i=1}^{3}(k_i, l_i, m_i, n_i|A_i), \tag{5}$$

$$[\sum_{i=1}^{3}(k_i, l_i, m_i, n_i|A_i)]^{-1}, \tag{6}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{3}(k_i,l_i,m_i,n_i|A_i)}{\sum_{i=4}^{6}(k_i,l_i,m_i,n_i|A_i)}. \tag{7}$$

Для 2-го уравнения Пенлеве (1) с 3-мя слагаемыми в правой части ($p \neq 0$) была построена псевдогруппа преобразований 36-го порядка [4], граф которой изображён на рис. 1, где

$\boldsymbol{r}$: $\quad x = u, y = t,$

$$\sum_{i=1}^{3}(k_i, l_i, m_i, n_i|A_i) \xrightarrow{\boldsymbol{r}} \sum_{i=1}^{3}(l_i, k_i, -m_i - n_i + 3, n_i|(-1)^{n_i-1}A_i), \tag{5}$$

$$[\sum_{i=1}^{3}(k_i, l_i, m_i, n_i|A_i)]^{-1} \xrightarrow{\boldsymbol{r}} [\sum_{i=1}^{3}(l_i, k_i, -m_i - n_i + 3, n_i|(-1)^{n_i-1}A_i)]^{-1}; \tag{6}$$

$\boldsymbol{h}$: $\quad x = \frac{1}{\dot{u}_t}, \quad y = -\frac{t\dot{u}_t - u}{\dot{u}_t}, \quad y_x' = u,$

$$\sum_{i=1}^{3}(k_i, l_i, m_i, n_i|A_i) \xrightarrow{\boldsymbol{h}} [\sum_{i=1}^{3}(n_i, m_i, -k_i - l_i - 3, l_i|(-1)^{l_i-1}A_i)]^{-1}, \tag{7}$$

$$[\sum_{i=1}^{3}(k_i, l_i, m_i, n_i|A_i)]^{-1} \xrightarrow{\boldsymbol{h}} \sum_{i=1}^{3}(n_i, m_i, -k_i - l_i - 3, l_i|(-1)^{l_i-1}A_i). \tag{8}$$

$\boldsymbol{g_1}$: $\quad x = u^{\frac{1}{k_1+1}}, y = (\dot{u}_t)^{-\frac{1}{l}}, y_x' = \frac{A_1}{k_1+1} \cdot t + \sum_{i=2}^{3} \frac{A_i}{k_i+1} \cdot u^{\frac{k_i+1}{k_1+1}},$

$$(k_1, l, 0,0|A_1) + \sum_{i=2}^{3}(k_i, 0,0,0|A_i) \xrightarrow{\boldsymbol{g_1}} \left(1, -\frac{k_1}{k_1+1}, \frac{2l+1}{l}, 0| -\frac{l}{(k_1+1)^2} \cdot A_1\right) + \tag{9}$$

$$+ \sum_{i=2}^{3}\left(0, \frac{k_i - k_1 + 1}{k_1+1}, \frac{2l+1}{l}, 0| -\frac{l}{(k_1+1)(k_i+1)} \cdot A_i\right);$$

$\boldsymbol{g_1^{-1}}$: $\quad x = \frac{l_1+1}{(2-m)A_1} \cdot \dot{u}_t - \sum_{i=2}^{3} \frac{A_i}{A_1} t^{\frac{l_i - l_1}{l_1+1}}, y = t^{\frac{1}{l_1+1}}, y_x' = u^{\frac{1}{2-m}},$

$$(1, l_1, m, 0|A_1) + \sum_{i=2}^{3}(0, l_i, m, 0|A_i) \xrightarrow{\boldsymbol{g_1}^{-1}} \left(-\frac{l_1}{l_1+1}, \frac{1}{m-2}, 0,0| \frac{2-m}{(l_1+1)^2} \cdot A_1\right) + \tag{10}$$

$$\xrightarrow{\boldsymbol{g_1}^{-1}} + \sum_{i=2}^{3}\left(\frac{l_i - 2l_1 - 1}{l_1+1}, 0,0,0| \frac{(l_i - l_1)(2-m)}{(l_1+1)^2} \cdot A_i\right).$$

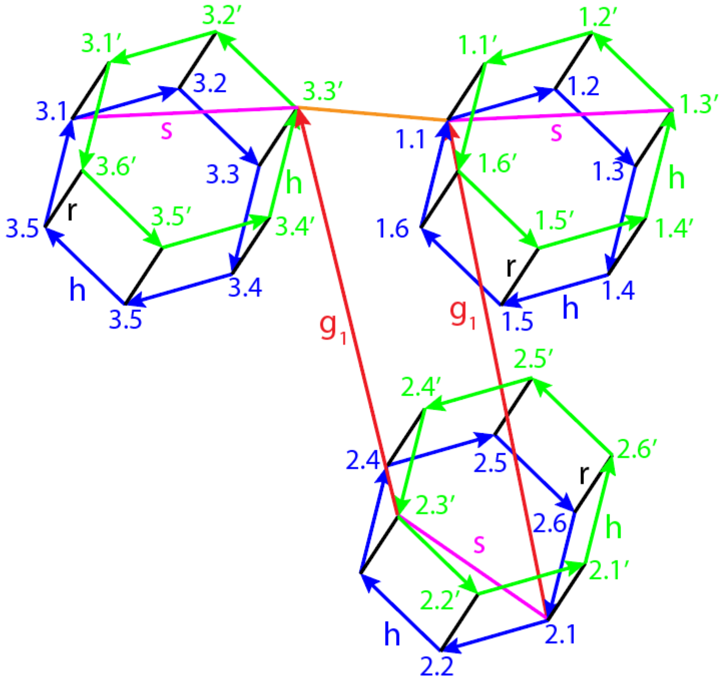

Рис. 1. Граф псевдогруппы преобразований 36-го порядка для 2-го уравнения Пенлеве с тремя слагаемыми в правой части (2-е уравнение Пенлеве обозначено вершиной 1.1)

Преобразования r и h являются образующими группы преобразований диэдра 12-го порядка

$$D_6 = \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}^2, \boldsymbol{h}^3, \boldsymbol{h}^4, \boldsymbol{h}^5, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{hr}, \boldsymbol{h}^2\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}^3\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}^4\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}^5\boldsymbol{r}\}, \tag{11}$$

имеющей код

$$\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{h}^6 = (\boldsymbol{rh})^2 = \boldsymbol{E}\,.$$

В таблицу 1 помещены уравнения, соответствующие вершинам графа 36-го порядка на рис. 1.

Таб. 1. Уравнения-вершины графа псевдогруппы преобразований 36-го порядка для 2-го уравнения Пенлеве с 3-мя слагаемыми в правой части

1.1	$(1,1,0,0\|1) + (0,3,0,0\|2) +$ $+(0,0,0,0\|p)$	1.1’	$(1,1,3,0\|-1) + (3,0,3,0\|-2) +$ $+(0,0,3,0\|-p)$
1.2	$\begin{bmatrix}(0,0,-5,1\|1) + (0,0,-6,3\|2) + \\ +(0,0,-3,0\|-p)\end{bmatrix}^{-1}$	1.2’	$\begin{bmatrix}(0,0,1,1\|1) + (0,0,0,3\|2) + \\ +(0,0,0,0\|p)\end{bmatrix}^{-1}$
1.3	$(1,-5,3,0\|-1) + (3,-6,3,0\|-2) +$ $+(0,-3,3,0\|p)$	1.3’	$(-5,1,0,0\|1) + (-6,3,0,0\|2) +$ $+(-3,0,0,0\|-p)$
1.4	$\begin{bmatrix}(0,3,1,-5\|-1) + (0,3,0,-6\|2) + \\ +(0,3,0,-3\|p)\end{bmatrix}^{-1}$	1.4’	$\begin{bmatrix}(3,0,1,-5\|-1) + (3,0,3,-6\|-2) + \\ +(3,0,0,-3\|p)\end{bmatrix}^{-1}$
1.5	$(-5,1,0,3\|-1) + (-6,0,0,3\|2) +$ $+(-3,0,0,3\|p)$	1.5’	$(1,-5,3,0\|-1) + (3,-6,3,0\|2) +$ $+(0,-3,3,0\|a)$
1.6	$\begin{bmatrix}(3,0,1,1\|-1) + (3,0,3,0\|-2) + \\ +(3,0,0,0\|-p)\end{bmatrix}^{-1}$	1.6’	$\begin{bmatrix}(0,3,-5,1\|-1) + (0,3,-6,0\|2) + \\ +(0,3,-3,0\|p)\end{bmatrix}^{-1}$
2.1	$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,0\middle\|\frac{1}{2}\right) + (0,0,0,0\|2) +$ $+\left(-\frac{3}{2},0,0,0\middle\|-\frac{p}{2}\right)$	2.1’	$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},3,0\middle\|-\frac{1}{2}\right) + (0,3,0,0\|-2) +$ $+\left(0,-\frac{3}{2},3,0\middle\|\frac{p}{2}\right)$

2.2	$\left[\begin{array}{l}\left(0,0,-2,-\frac{1}{2}\mid i\frac{1}{2}\right)+(0,0,-3,0\mid -2)+\\ +\left(0,0,-\frac{3}{2},0\mid \frac{p}{2}\right)\end{array}\right]^{-}$	2.2’	$\left[\begin{array}{l}\left(0,0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\mid \frac{1}{2}\right)+(0,0,0,0\mid 2)+\\ +\left(0,0,-\frac{3}{2},0\mid -\frac{p}{2}\right)\end{array}\right]^{-1}$
2.3	$\left(-\frac{1}{2},-2,3,0\mid -i\frac{1}{2}\right)+(0,-3,3,0\mid 2)+$ $+\left(0,-\frac{3}{2},3,0\mid -\frac{p}{2}\right)$	2.3’	$\left(-2,-\frac{1}{2},0,0\mid i\frac{1}{2}\right)+(-3,0,0,0\mid -2)+$ $+\left(-\frac{3}{2},0,0,0\mid \frac{p}{2}\right)$
2.4	$\left[\begin{array}{l}\left(0,3,-\frac{1}{2},-2\mid -i\frac{1}{2}\right)+(0,3,0,-3\mid 2)+\\ +\left(0,3,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\mid i\frac{p}{2}\right)\end{array}\right]^{-}$	2.4’	$\left[\begin{array}{l}\left(3,0,-\frac{1}{2},-2\mid -i\frac{1}{2}\right)+(3,0,0,-3\mid 2)+\\ +\left(3,0,0,-\frac{3}{2}\mid -i\frac{p}{2}\right)\end{array}\right]^{-1}$
2.5	$\left(-2,-\frac{1}{2},0,3\mid -i\frac{1}{2}\right)+(-3,0,0,3\mid 2)+$ $+\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0,3\mid -i\frac{p}{2}\right)$	2.5’	$\left(-\frac{1}{2},-2,3,0\mid -i\frac{1}{2}\right)+(0,-3,3,0\mid 2)+$ $+\left(0,-\frac{3}{2},3,0\mid -\frac{p}{2}\right)$
2.6	$\left[\begin{array}{l}\left(3,0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\mid -\frac{1}{2}\right)+(3,0,0,0\mid -2)+\\ +\left(3,0,0,-\frac{3}{2}\mid \frac{p}{2}\right)\end{array}\right]^{-}$	2.6’	$\left[\begin{array}{l}\left(0,3,-2,-\frac{1}{2}\mid -i\frac{1}{2}\right)+(0,3,-3,0\mid 2)+\\ +\left(0,3,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\mid -i\frac{p}{2}\right)\end{array}\right]^{-1}$
3.1	$\left(-2,-2,0,0\mid i\frac{1}{4}\right)+\left(-3,0,0,0\mid \frac{1}{2}\right)+$ $+\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0,0\mid -i\frac{p}{2}\right)$	3.1’	$\left(-2,-2,3,0\mid -i\frac{1}{4}\right)+\left(0,-3,3,0\mid -\frac{1}{2}\right)+$ $+\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},3,0\mid i\frac{p}{2}\right)$
3.2	$\left[\begin{array}{l}\left(0,0,1,-2\mid -i\frac{1}{4}\right)+\\ +\left(0,0,0,0\mid -\frac{1}{2}\right)+\\ +\left(0,0,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\mid -\frac{p}{2}\right)\end{array}\right]^{-1}$	3.2’	$\left[\begin{array}{l}\left(0,0,-2,-2\mid i\frac{1}{4}\right)+\\ +\left(0,0,-3,0\mid \frac{1}{2}\right)+\\ +\left(0,0,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\mid -i\frac{p}{2}\right)\end{array}\right]^{-1}$
3.3	$\left(-2,1,3,-2\mid i\frac{1}{4}\right)+\left(0,0,3,0\mid \frac{1}{2}\right)+$ $+\left(-\frac{3}{2},0,3,0\mid \frac{p}{2}\right)$	3.3’	$\left(1,-2,0,0\mid -i\frac{1}{4}\right)+\left(0,0,0,0\mid -\frac{1}{2}\right)+$ $+\left(0,-\frac{3}{2},0,0\mid -\frac{p}{2}\right)$
3.4	$\left[\begin{array}{l}\left(0,3,-2,1\mid i\frac{1}{4}\right)+\left(0,3,-3,0\mid -\frac{1}{2}\right)+\\ +\left(0,3,-\frac{3}{2},0\mid \frac{p}{2}\right)\end{array}\right]^{-1}$	3.4’	$\left[\begin{array}{l}\left(3,0,-2,1\mid i\frac{1}{4}\right)+\left(3,0,0,0\mid \frac{1}{2}\right)+\\ +\left(3,0,-\frac{3}{2},0\mid \frac{p}{2}\right)\end{array}\right]^{-1}$
3.5	$\left(1,-2,0,3\mid i\frac{1}{4}\right)+\left(0,-3,0,3\mid -\frac{1}{2}\right)+$ $+\left(0,-\frac{3}{2},0,3\mid \frac{p}{2}\right)$	3.5’	$\left(-2,1,3,0\mid i\frac{1}{4}\right)+\left(0,0,3,0\mid -\frac{1}{2}\right)+$ $+\left(-\frac{3}{2},0,3,0\mid \frac{p}{2}\right)$
3.6	$\left[\begin{array}{l}\left(3,0,-2,-2\mid -i\frac{1}{4}\right)+\\ +\left(3,0,0,-3\mid -\frac{1}{2}\right)+\\ +\left(3,0,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\mid i\frac{p}{2}\right)\end{array}\right]^{-1}$	3.6’	$\left[\begin{array}{l}\left(0,3,1,-2\mid i\frac{1}{4}\right)+\\ +\left(0,3,0,-3\mid -\frac{1}{2}\right)+\\ +\left(0,3,0,-\frac{3}{2}\mid \frac{p}{2}\right)\end{array}\right]^{-1}$

3. Псевдогруппа преобразований 60-го порядка

Для 2-го уравнения Пенлеве с двумя слагаемыми в правой части ($p = 0$)

$$y''_{xx} = xy + 2y^3 \qquad (12)$$

была построена псевдогруппа 60-го порядка [5], граф которой представлен на рис. 2.

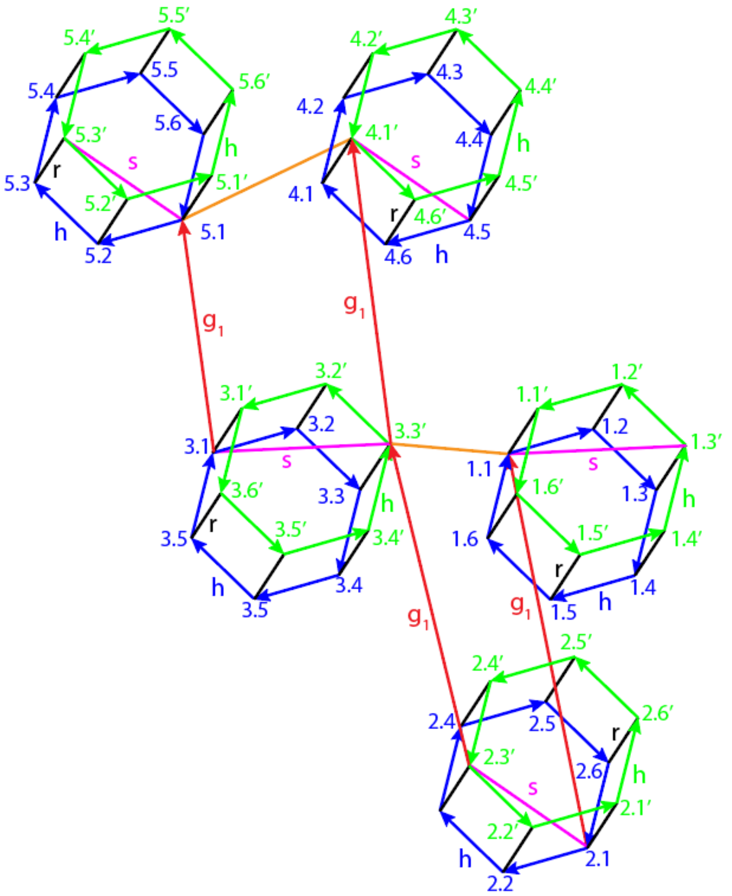

Рис. 2. Граф псевдогруппы 60-го порядка для 2-го уравнения Пенлеве с двумя слагаемыми в правой части (вершина 1.1 обозначает 2-е уравнение Пенлеве)

4. Степенное преобразование

Будем искать степенное преобразование, сохраняющее полиномиальность уравнений, в виде:

$$x = t^{\alpha},\ y = u^{\beta}. \tag{13}$$

Можно видеть [6], что класс полиномиальных уравнений (2) инвариантен относительно преобразования (13) при $\beta = \alpha$ (назовём это преобразование α-преобразованием):

$$\sum_{i=1}^{3}(k_i, l_i, m_i, n_i|A_i) \xrightarrow{\boldsymbol{\alpha}} \sum_{i=1}^{3}\big((k_i - m_i + 2)\alpha + m_i - 2,\ (l_i + m_i + n_i - 1)\alpha - m_i - n_i + 1,\ m_i, n_i|\alpha A_i\big) + (-1, -1,\ 1,\ 1|1-\alpha)\ ,$$
$$\boldsymbol{\alpha}\colon x = t^{\alpha},\ y = u^{\alpha},\ y_x' = \left(\frac{u}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot \dot{u}_t,\ xy_x' - y = u^{\alpha-1} \cdot (t\dot{u}_t - u). \tag{14}$$

Приятным фактом является то обстоятельство, что уравнения преобразованного класса в (14) содержат произвольный параметр α, так же как и само степенное преобразование (13) при $\beta = \alpha$.

5. Группа диэдра, индуцированная степенным преобразованием

Если применить ко 2-му уравнению Пенлеве (1) с тремя слагаемыми в правой части степенное α-преобразование, то получается уравнение полиномиального вида с 4-мя слагаемыми в правой части, согласно (14).

Индуцированные уравнения помещены в таблицу 2.

Таб. 2. Уравнения, индуцированные применением ко 2-му уравнению Пенлеве группы D_6

1.1*	$\begin{array}{c}(3\alpha-2,1,0,0\vert\alpha)+\\+(2\alpha-2,2\alpha+1,0,0\vert 2\alpha)+\\+(2\alpha-1,-\alpha+1,0,0\vert p\alpha)+\\+(-1,-1,1,1\vert 1-\alpha)\end{array}$	1.1’*	$\begin{array}{c}(1,3\alpha-2,3,0\vert-\alpha)+\\+(2\alpha+1,2\alpha-2,3,0\vert-2\alpha)+\\+(-\alpha+1,2\alpha-2,3,0\vert-p\alpha)+\\+(-1,-1,1,1\vert 1-\alpha)\end{array}$
1.2*	$\left[\begin{array}{c}(0,0,-3\alpha-2,1\vert\alpha)+\\+(0,0,-4\alpha-2,2\alpha+1\vert(-1)^{2\alpha}2\alpha)+\\+(0,0,-\alpha-2,-\alpha+1\vert(-1)^{-\alpha}p\alpha)+\\+(1,1,-1,-1\vert 1-\alpha)\end{array}\right]^{-1}$	1.2’*	$\left[\begin{array}{c}(0,0,3\alpha-2,1\vert\alpha)+\\+(0,0,2\alpha-2,2\alpha+1\vert 2\alpha)+\\+(0,0,2\alpha-2,-\alpha+1\vert p\alpha)+\\+(1,1,-1,-1\vert 1-\alpha)\end{array}\right]^{-1}$
1.3*	$\begin{array}{c}(1,-3\alpha-2,3,0\vert-\alpha)+\\+(2\alpha+1,-4\alpha-2,3,0\vert(-1)^{2\alpha+1}2\alpha)+\\+(-\alpha+1,-\alpha-2,3,0\vert(-1)^{-\alpha+1}p\alpha)+\\+(1,1,-1,-1\vert 1-\alpha)\end{array}$	1.3’*	$\begin{array}{c}(-3\alpha-2,1,0,0\vert\alpha)+\\+(-4\alpha-2,2\alpha+1,0,0\vert(-1)^{2\alpha}2\alpha)+\\+(-\alpha-2,-\alpha+1,0,0\vert(-1)^{-\alpha}p\alpha)+\\+(1,1,-1,-1\vert 1-\alpha)\end{array}$
1.4*	$\left[\begin{array}{c}(0,3,3\alpha-2,-3\alpha-2\vert(-1)^{-3\alpha}\alpha)+\\+(0,3,2\alpha-2,-4\alpha-2\vert(-1)^{-2\alpha}2\alpha)+\\+(0,3,2\alpha-2,-\alpha-2\vert(-1)^{-2\alpha}p\alpha)+\\+(1,1,-1,-1\vert 1-\alpha)\end{array}\right]^{-1}$	1.4’*	$\left[\begin{array}{c}(3,0,1,-3\alpha-2\vert-\alpha)+\\+(3,0,2\alpha+1,-4\alpha-2\vert(-1)^{2\alpha+1}2\alpha)+\\+(3,0,-\alpha+1,-\alpha-2\vert(-1)^{-\alpha+1}p\alpha)+\\+(1,1,-1,-1\vert 1-\alpha)\end{array}\right]^{-1}$
1.5*	$\begin{array}{c}(-3\alpha-2,3\alpha-2,0,3\vert(-1)^{-3\alpha}\alpha)+\\+(-4\alpha-2,2\alpha-2,0,3\vert(-1)^{-2\alpha}2\alpha)+\\+(-\alpha-2,2\alpha-2,0,3\vert(-1)^{-2\alpha}p\alpha)+\\+(1,1,-1,-1\vert 1-\alpha)\end{array}$	1.5’*	$\begin{array}{c}(3\alpha-2,-3\alpha-2,0,3\vert(-1)^{-3\alpha}\alpha)+\\+(2\alpha-2,-4\alpha-2,0,3\vert(-1)^{-2\alpha}2\alpha)+\\+(2\alpha-2,-\alpha-2,0,3\vert(-1)^{-2\alpha}p\alpha)+\\+(1,1,-1,-1\vert 1-\alpha)\end{array}$
1.6*	$\left[\begin{array}{c}(3,0,1,3\alpha-2\vert-\alpha)+\\+(3,0,2\alpha+1,2\alpha-2\vert-2\alpha)+\\+(3,0,-\alpha+1,2\alpha-2\vert-p\alpha)+\\+(1,1,-1,-1\vert 1-\alpha)\end{array}\right]^{-1}$	1.6’*	$\left[\begin{array}{c}(0,3,-3\alpha-2,3\alpha-2\vert(-1)^{-3\alpha}\alpha)+\\+(0,3,-4\alpha-2,\vert(-1)^{-2\alpha}2\alpha)+\\+(0,3,-\alpha-2,2\alpha-2\vert(-1)^{-2\alpha}p\alpha)+\\+(1,1,-1,-1\vert 1-\alpha)\end{array}\right]^{-1}$

Таким образом, каждая группа диэдра D_6 12-го порядка на рис. 1 и рис. 2 индуцирует с помощью степенного α-преобразования группу диэдра также 12-го порядка. Все преобразованные уравнения содержат произвольный параметр α, аналогично уравнениям таблицы 2.

6. Решение уравнений орбиты 2-го уравнения Пенлеве через 2-й трансцендент Пенлеве

Общим решением 2-го уравнения Пенлеве (1) является однозначная функция x. В окрестности подвижного полюса x_0 оно представимо в виде ряда [3]:

$$y=\frac{m}{x-x_0}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\ a_1=-\frac{1}{6}mx_0,$$
$$a_2=-\frac{1}{4}(m+p),\ a_3=C,\ a_4=\frac{1}{72}x_0(m+3p), \tag{15}$$
$$a_5=\frac{1}{3024}[(27+81p^2-2x_0^3)m+108p-216Cx_0],$$

где x_0 и C – произвольные постоянные, $m=\pm1$, коэффициенты a_n $(n\geq 6)$ однозначно определяются через x_0 и C. Это общее решение называют вторым трансцендентом Пенлеве [3].

Обозначим через $P(x,C_1,C_2,p)$ указанный выше ряд, где $C_1=x_0$, $C_2=C$. Решение 2-го уравнения Пенлеве $y=P(x,C_1,C_2,p)$ можно записать в параметрическом виде

$$x = \tau,\ \ y = P(\tau, C_1, C_2, p). \tag{16}$$

По графам можно определить, с помощью какого преобразования (композиции преобразований $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{g_1}$) данное уравнение связано с исходным уравнением (1). Решения уравнений связаны этим же преобразованием.

Но можно воспользоваться более экономичным способом нахождения решений уравнений. Достаточно вычислить решения «ключевых» уравнений-вершин в каждом подграфе группы диэдра D_6, а решения остальных 11-ти уравнений-вершин связаны с «ключевым» решением преобразованиями группы D_6 (11).

Решения «ключевых» уравнений 1.1, 2.1, 3.1 орбиты 2-го уравнения Пенлеве с тремя слагаемыми приведены в таблице 3.

Таб. 3. Решения «ключевых» уравнений орбиты 2-го уравнения Пенлеве при произвольном p

1.1	$x = \tau,\ y = P,\ y_x' = \dot{P},\ xy_x' - y = \tau\dot{P} - P,$
2.1	$x = P^2,\ y = \dot{P}^2,\ y_x' = A_1\tau + A_2P^2 + A_3P^{-1},$ $xy_x' - y = A_1\tau P^2 + A_2P^4 + A_3P - \dot{P}^2$
3.1	$x = (-1)^{-\frac{1}{2}}A_1\varepsilon_1^{-1},\ y = (-1)^{\frac{1}{2}}A_1P^2\varepsilon_1^{-1},$ $y_x' = -\frac{1}{A_1}P^{-1}\dot{P}\varepsilon_1 - P^2,\ xy_x' - y = (-1)^{\frac{1}{2}}P^{-1}\dot{P}$

В таблице 3: $A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = p, P = P(\tau, C_1, C_2, p), \dot{P} = P_\tau', \varepsilon_1 = 2A_1\tau P^2 + A_2P^4 + 4A_3P - 2\dot{P}^2$.

Обозначим решение «ключевого» уравнения $i.1$:

$$x = K,\ \ y = L,\ \ y_x' = M,\ \ xy_x' - y = N. \tag{17}$$

Тогда решения уравнений $i.2 - i.6'$ выражаются через K, L, M, N из (17); они представлены в таблице 4.

Таб. 4. Решения уравнений $i.2 - i.6'$ через решение «ключевого» уравнения $i.1$ $(i = 1,2,3)$ из орбиты 2-го уравнения Пенлеве

i.1	$x = K, y = L, y_x' = M, xy_x' - y = N$	i.1’	$x = L, y = K, y_x' = \frac{1}{M}, xy_x' - y = -\frac{N}{M}$
i.2	$x = N, y = M, y_x' = \frac{1}{K}, xy_x' - y = -\frac{L}{K}$	i.2’	$x = M, y = N, y_x' = K, xy_x' - y = L$
i.3	$x = -\frac{L}{K}, y = \frac{1}{K}, y_x' = \frac{1}{N}, xy_x' - y = -\frac{M}{N}$	i.3’	$x = \frac{1}{K}, y = -\frac{L}{K}, y_x' = N, xy_x' - y = M$
i.4	$x = -\frac{M}{N}, y = \frac{1}{N}, y_x' = -\frac{K}{L}, xy_x' - y = \frac{1}{L}$	i.4’	$x = \frac{1}{N}, y = -\frac{M}{N}, y_x' = -\frac{L}{K}, xy_x' - y = \frac{1}{K}$
i.5	$x = \frac{1}{L}, y = -\frac{K}{L}, y_x' = -\frac{N}{M}, xy_x' - y = \frac{1}{M}$	i.5’	$x = -\frac{K}{L}, y = \frac{1}{L}, y_x' = -\frac{M}{N}, xy_x' - y = \frac{1}{N}$
i.6	$x = \frac{1}{M}, y = -\frac{N}{M}, y_x' = L, xy_x' - y = K$	i.6’	$x = -\frac{N}{M}, y = \frac{1}{M}, y_x' = \frac{1}{L}, xy_x' - y = -\frac{K}{L}$

7. Решение уравнений орбиты 2-го уравнения Пенлеве в полиномах

А.И. Яблонский и А.П. Воробьев показали, что второе уравнение Пенлеве (1) имеет рациональные решения только при целых значениях параметра p [7,8]. Причем, при каждом $p \in Z$ рациональное решение – единственно.

В справочнике [3] приведены рекуррентные формулы относительно p, позволяющие находить рациональные решения для последующих p через предыдущие.

В качестве примера рассмотрим случай $p = 2$. Решения в полиномах соответствующих уравнений таблицы 1 помещены в таблицу 5.

Таб. 5. Решения в полиномах уравнений орбиты 2-го уравнения Пенлеве при $p = 2$

1.1	$x=\tau,\ y=-\frac{2P_2}{\tau P_1},\ y'_x=\frac{2P_3}{\tau^2P_1^2},\ xy'_x-y=\frac{4P_4}{\tau P_1^2}$	1.1’	$x=-\frac{2P_2}{\tau P_1},\ y=\tau,\ y'_x=\frac{\tau^2P_1^2}{2P_3},\ xy'_x-y=-\frac{\tau P_4}{P_3}$
1.2	$x=\frac{4P_4}{\tau P_1^2},\ y=\frac{2P_3}{\tau^2P_1^2},\ y'_x=\frac{1}{\tau},\ xy'_x-y=\frac{2P_2}{\tau^2P_1}$	1.2’	$x=\frac{2P_3}{\tau^2P_1^2},\ y=\tau,\ y'_x=\frac{\tau^2P_1^2}{2P_3},\ xy'_x-y=-\frac{\tau P_4}{P_3}$
1.3	$x=\frac{2P_2}{\tau^2P_1},\ y=\frac{1}{\tau},\ y'_x=\frac{\tau P_1^2}{4P_4},\ xy'_x-y=-\frac{P_3}{2\tau P_4}$	1.3’	$x=\frac{1}{\tau},\ y=\frac{2P_2}{\tau^2P_1},\ y'_x=\frac{4P_4}{\tau P_1^2},\ xy'_x-y=\frac{2P_3}{\tau^2P_1^2}$
1.4	$x=-\frac{P_3}{2\tau P_4},\ y=\frac{\tau P_1^2}{4P_4},\ y'_x=-\frac{2\tau P_4}{P_3},\ xy'_x-y=\frac{\tau^2P_1^2}{2P_3}$	1.4’	$x=\frac{\tau P_1^2}{4P_4},\ y=-\frac{P_3}{\tau P_4},\ y'_x=\frac{2P_2}{\tau^2P_1},\ xy'_x-y=\frac{1}{\tau}$
1.5	$x=-\frac{\tau P_1}{2P_2},\ y=\frac{\tau^2P_1}{2P_2},\ y'_x=-\frac{2\tau P_4}{P_3},\ xy'_x-y=\frac{\tau^2P_1^2}{2P_3}$	1.5’	$x=\frac{\tau^2P_1}{2P_2},\ y=-\frac{\tau P_1}{2P_2},\ y'_x=-\frac{P_3}{2\tau P_4},\ xy'_x-y=\frac{\tau P_1^2}{4P_4}$
1.6	$x=\frac{\tau^2P_1^2}{2P_3},\ y=-\frac{2\tau P_4}{P_3},\ y'_x=-\frac{2P_2}{\tau P_1},\ xy'_x-y=\tau$	1.6’	$x=-\frac{2\tau P_4}{P_3},\ y=\frac{\tau P_1^2}{2P_3},\ y'_x=-\frac{\tau P_1}{2P_2},\ xy'_x-y=\frac{\tau^2P_1}{2P_2}$
2.1	$x=\frac{4P_2^2}{\tau^2P_1^2},\ y=\frac{4P_4^2}{\tau^4P_1^4},\ y'_x=\frac{2P_5}{\tau^2P_1^2P_2},\ xy'_x-y=\frac{4P_6}{\tau^4P_1^4}$	2.1’	$x=\frac{4P_4^2}{\tau^4P_1^4},\ y=\frac{4P_2^2}{\tau^2P_1^2},\ y'_x=\frac{\tau^2P_1^2P_2}{2P_5},\ xy'_x-y=-\frac{2P_2P_6}{\tau^2P_1^2P_5}$
2.2	$x=\frac{4P_6}{\tau^4P_1^4},\ y=\frac{2P_5}{\tau^2P_1^2P_2},\ y'_x=\frac{\tau^2P_1^2}{4P_2^2},\ xy'_x-y=\frac{P_4^2}{\tau^2P_1^2P_2^2}$	2.2’	$x=\frac{2P_5}{\tau^2P_1^2P_2},\ y=\frac{4P_6}{\tau^4P_1^4},\ y'_x=\frac{4P_2^2}{\tau^2P_1^2},\ xy'_x-y=\frac{4P_4^2}{\tau^4P_1^4}$
2.3	$x=-\frac{P_4^2}{\tau^2P_1^2P_2^2},\ y=\frac{\tau^2P_1^2}{4P_2^2},\ y'_x=\frac{\tau^4P_1^4}{4P_6},\ xy'_x-y=-\frac{\tau^2P_1^2P_5}{2P_2P_6}$	2.3’	$x=\frac{\tau^2P_1^2}{4P_2^2},\ y=-\frac{P_4^2}{\tau^2P_1^2P_5},\ y'_x=\frac{4P_6}{\tau^4P_1^4},\ xy'_x-y=\frac{2P_5}{\tau^2P_1^2P_2}$
2.4	$x=-\frac{\tau^2P_1^2P_5}{2P_2P_6},\ y=\frac{\tau^4P_1^4}{4P_6},\ y'_x=-\frac{2P_2P_6}{\tau^2P_1^2P_5},\ xy'_x-y=\frac{\tau^2P_1^2P_2}{2P_5}$	2.4’	$x=\frac{\tau^4P_1^4}{4P_6},\ y=-\frac{\tau^2P_1^2P_5}{2P_2P_6},\ y'_x=-\frac{P_4^2}{\tau^2P_1^2P_5},\ xy'_x-y=\frac{\tau^2P_1^2}{4P_2^2}$
2.5	$x=\frac{\tau^4P_1^4}{4P_4^2},\ y=-\frac{\tau^2P_1^2P_5}{P_4^2},\ y'_x=-\frac{2P_2P_6}{\tau^2P_1^2P_5},\ xy'_x-y=\frac{\tau^2P_1^2P_2}{2P_5}$	2.5’	$x=-\frac{\tau^2P_1^2P_5}{P_4^2},\ y=\frac{\tau^4P_1^4}{4P_4^2},\ y'_x=-\frac{\tau^2P_1^2P_5}{2P_2P_6},\ xy'_x-y=\frac{\tau^4P_1^4}{4P_6}$
2.6	$x=\frac{\tau^2P_1^2P_2}{2P_5},\ y=-\frac{2P_2P_6}{\tau^2P_1^2P_5},\ y'_x=\frac{4P_4^2}{\tau^4P_1^4},\ xy'_x-y=\frac{4P_2^2}{\tau^2P_1^2}$	2.6’	$x=-\frac{2P_2P_6}{\tau^2P_1^2P_5},\ y=\frac{\tau^2P_1^2P_2}{2P_5},\ y'_x=\frac{\tau^4P_1^4}{4P_4^2},\ xy'_x-y=-\frac{\tau^2P_1^2P_2^2}{P_4^2}$
3.1	$x=-\frac{i}{\varepsilon},\ y=\frac{4iP_2^2}{\tau^2P_1^2\varepsilon},\ y'_x=$	3.1’	$x=\frac{4iP_2^2}{\tau^2P_1^2\varepsilon},\ y=-\frac{i}{\varepsilon},\ y'_x=-\frac{\tau^2P_1^2P_2}{\tau P_1P_3\varepsilon+4P_2^3},$

	$-\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3}{\tau^2 P_1^2 P_2}, xy_x' - y = \frac{iP_3}{\tau P_1 P_2}$		$xy_x' - y = \frac{i\tau P_1 P_3}{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3}$
3.2	$x = \frac{iP_3}{\tau P_1 P_2}, y = -\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3}{\tau^2 P_1^2 P_2},$ $y_x' = \varepsilon i, xy_x' - y = \frac{4P_2^2}{\tau^2 P_1^2}$	3.2’	$x = -\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3}{\tau^2 P_1^2 P_2}, y = \frac{iP_3}{\tau P_1 P_2}, y_x' = -\frac{i}{\varepsilon},$ $xy_x' - y = \frac{4iP_2^2}{\tau^2 P_1^2 \varepsilon}$
3.3	$x = \frac{4P_2^2}{\tau^2 P_1^2}, y = \varepsilon i, y_x' = -\frac{i\tau P_1 P_2}{P_3},$ $xy_x' - y = -i\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3}{\tau P_1 P_3}$	3.3’	$x = \varepsilon i, y = \frac{4P_2^2}{\tau^2 P_1^2}, y_x' = \frac{iP_3}{\tau P_1 P_2},$ $xy_x' - y = -\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3}{\tau^2 P_1^2 P_2}$
3.4	$x = -i\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3}{\tau P_1 P_3}, y = -\frac{i\tau P_1 P_2}{P_3},$ $y_x' = \frac{i\tau P_1 P_3}{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3}, xy_x' - y =$ $-\frac{\tau^2 P_1^2 P_2}{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3}$	3.4’	$x = -\frac{i\tau P_1 P_2}{P_3}, y = -i\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3}{\tau P_1 P_3},$ $y_x' = \frac{4P_2^2}{\tau^2 P_1^2}, xy_x' - y = -\varepsilon i$
3.5	$x = -i\frac{\tau^2 P_1^2 \varepsilon}{4P_2^2}, y = \frac{\varepsilon^2 P_1^2}{4P_2^2}, y_x' =$ $\frac{i\tau P_1 P_3}{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3}, xy_x' - y =$ $-\frac{\tau^2 P_1^2 P_2}{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3}$	3.5’	$x = \frac{\tau^2 P_1^2}{4P_2^2}, y = -i\frac{\tau^2 P_1^2 \varepsilon}{4P_2^2}, y_x' = -i\frac{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3}{\tau P_1 P_3},$ $xy_x' - y = -\frac{i\tau P_1 P_2}{P_3}$
3.6	$x = -\frac{\tau^2 P_1^2 P_2}{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3}, y = \frac{i\tau P_1 P_3}{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3},$ $y_x' = \frac{4iP_2^2}{\tau^2 P_1^2 \varepsilon}, xy_x' - y = -\frac{i}{\varepsilon}$	3.6’	$x = \frac{i\tau P_1 P_3}{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3}, y = -\frac{\tau^2 P_1^2 P_2}{\tau P_1 P_3 \varepsilon+4P_2^3},$ $y_x' = -i\frac{\tau^2 P_1^2 \varepsilon}{4P_2^2}, xy_x' - y = \frac{\tau^2 P_1^2}{4P_2^2}$

В таблице 5: $P_1 = \tau^3 + 4$, $P_2 = \tau^3 - 2$, $P_3 = \tau^6 - 16\tau^3 - 8$, $P_4 = \tau^6 - 7\tau^3 - 8$, $P_5 = \tau^9 - 48\tau^6 - 32$, $P_6 = \tau^{12} - 68\tau^9 - 48\tau^6 - 320\tau^3 + 64$, $\varepsilon = 2\tau P^2 + 2P^4 + 4pP - 2\dot{P}^2$.

8. Решение уравнений расширенной орбиты 2-го уравнения Пенлеве. Пример

Рассмотрим 2-е уравнение Пенлеве с тремя слагаемыми при $p = 2$ (в таблице 1 и на рис. 1 оно соответствует вершине 1.1):

$$y_{xx}'' = xy + 2y^3 + 2. \tag{18}$$

Согласно таблице 5, его решение в полиномах в параметрическом виде имеет вид:

$$x = \tau, y = -\frac{2P_2}{\tau P_1} = -\frac{2(\tau^3-2)}{\tau(\tau^3+4)}. \tag{19}$$

Если применить к уравнению (18) степенное преобразование (13) при $\beta = \alpha$:

$$x \to x^\alpha,\ y \to y^\alpha, \tag{20}$$

то получим уравнение 1.1* из таблицы 2:

$$y_{xx}'' = \alpha x^{3\alpha-2}y + 2\alpha x^{2\alpha-2}y^{2\alpha+1} + 2\alpha x^{2\alpha-1}y^{-\alpha+1} + (1-\alpha)x^{-1}y^{-1}y_x'(xy_x' - y). \tag{21}$$

Поскольку степенное преобразование (20) связывает уравнения (18) и (21), то оно же связывает и их решения.

Уравнение (21) сводится ко 2-му уравнению Пенлеве с помощью преобразования, обратного к (20):

$$x \to x^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad y \to y^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{22}$$

Следовательно, соответствующее решение уравнения (21) является композицией преобразования (22) и решения (19):

$$x = \tau^{\frac{1}{\alpha}},\ y = \left[-\frac{2(\tau^3-2)}{\tau(\tau^3+1)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Например, при $\alpha = 2$ уравнение (21) имеет следующий вид:

$$y''_{xx} = 2x^4y + 4x^2y^5 + 4x^3y^{-1} - x^{-1}y^{-1}y'_x(xy'_x - y) =$$
$$= 2x^4y + 4x^2y^5 + 4x^3y^{-1} - y^{-1}(y'_x)^2 + x^{-1}y'_x,$$

а его решение, соответственно:

$$x = \sqrt{\tau},\ y = \sqrt{2}i\sqrt{\frac{\tau^3-2}{\tau(\tau^3+4)}}.$$

Аналогично можно получить решения уравнений 1.2*-1.6'* таблицы 2, а также остальных уравнений, соответствующих вершинам графа индуцированной группы.

9. Решение уравнений расширенной орбиты 2-го уравнения Пенлеве с произвольными коэффициентами

С помощью операции масштабирования переменных можно получить решения всех рассмотренных уравнений, но с произвольными коэффициентами A_1, A_2, A_3, аналогично тому, как это было указано в теоремах 1 и 2 для 1-го уравнения Пенлеве [9].

Список литературы:

[1] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 464с.

[2] Kamke E. Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. – B. G. Teubner, Leipzig, 1977. – 246 p.

[3] Polyanin A. D., Zaytsev V. F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. – CRC Press. Boca Raton – London, 2018.

[4] Хакимова З. Н. Дискретная псевдогруппа второго уравнения Пенлеве и решения дифференциальных уравнений через второй трансцендент Пенлеве / З.Н. Хакимова // Перспективы науки. – Тамбов. – 2021. – № 5 (140). – С. 70-81.

[5] Хакимова З. Н., Тимофеева Л.Н., Зайцев О. В. Решения в полиномах дробно-полиномиальных дифференциальных уравнений, порожденных вторым уравнением Пенлеве [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и процессы

управления. – 2021. – N 3(7). – C. 141-152. – URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.3/article.1.9.html

[6] Хакимова З. Н. Расширение группы диэдра для 4-го уравнения Пенлеве с помощью степенного преобразования // Перспективы науки. – Тамбов: ТМБпринт. – 2021. – № 11 (146). – С. 45-53.

[7] Яблонский А. И. О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве // Вести Акад. Наук БССР, Серия Физико-технических наук. – 1959. – Т. 3. С. 30-35.

[8] Воробьев А. П. О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве // Дифференциальные уравнения. – 1965. – Т. 1. – С. 79-81.

[9] Хакимова З. Н., Зайцев О. В. Дробно-полиномиальные дифференциальные уравнения: дискретные группы и решения через трансцендент 1-го уравнения Пенлеве [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2021. – N 1(4). – C. 62-92. – URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.1/article.1.4.html

Applying a power transformation to the orbit of the 2nd Painlevé equation and solving differential equations with polynomial right-hand sides via the 2nd Painlevé transcendent and in polynomials

Khakimova Z.N., Timofeeva L.N., Atojan A.A.

Mozhaisky Military Space Academy, Saint-Petersburg

vka@mil.ru

Abstract. The 2nd Painlevé equation is considered as a representative of the second-order class of ordinary differential equations (ODEs) with polynomial right-hand sides, as well as of the more general second-order class of equations with fractional polynomial right-hand sides. The second Painlevé equation with three terms on the right side has an orbit in the class of fractional polynomial equations with respect to the pseudogroup of the 36th order, and in the absence of the 3rd term – the 60th order.

This paper presents a power transformation with an arbitrary parameter that preserves the polynomial or fractional polynomial form of the equations. This power-law transformation is applied to the orbital equations of the 2nd Painlevé equation with three and two terms on the right-hand sides of the equations. Pseudogroups of transformations induced by the above-mentioned pseudogroups of the 36th and 60th orders are constructed. All equations with one-constant arbitrariness corresponding to the vertices of the graphs of induced pseudogroups are found. General solutions of all found equations are obtained through the 2nd Painlevé transcendental or in polynomials. A theorem is presented that allows, using the scaling operation, to find general solutions to all the above equations with arbitrary coefficients.

Keywords: Ordinary differential equation (ODE) of the 2nd order, polynomial and fractional-polynomial differential equations, discrete transformation group, dihedral group, pseudogroup of transformations, 2nd Painlevé equation, 2nd Painlevé transcendent.