*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*
*И*
*ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ*
*N. 2, 2024*
*Электронный журнал,*
*рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010*
*ISSN 1817-2172*

*http://diffjournal.spbu.ru/*
*e-mail: jodiff@mail.ru*

*Интегро-дифференциальные системы*

# СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ С ЯДРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Бободжанов А.А.*, Бободжанова М.А.**,Сафонов В.Ф.***
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
bobojanova@mpei.ru *
bobojanovaMA@mpei.ru **
Singsaf@yandex.ru ***

**Аннотация.** В статье рассматривается система двух сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ), первое из которых является однородным уравнением, а второе — неоднородным, с интегральным оператором, ядро которого содержит фундаментальное решение первой ИДУ. Классический случай, когда ядро зависит от быстро меняющейся скалярной экспоненты, посвящено большое количество работ (см. библиографию в конце статьи). Случай зависимости ядра от фундаментальных решений дифференциальных систем подробно изучен в монографии авторов А.А. Бободжанова и В.Ф. Сафонова «Сингулярно возмущенные интегральные и интегродифференциальные уравнения с быстро меняющимися ядрами и уравнения с дигональным вырождением ядра», опубликованной в Спутник+ в 2017 году. Как показано в данной работе, сложность построения регуляризованной (в смысле Ломова) асимптотики ИДУ обусловлена сложной структурой асимптотических решений фундаментальных решений однородных дифференциальных уравнений. Проблема построения асимптотики фундаментального решения однородного ИДУ и ее влияния через ядро на регуляризованную асимптотику неоднородного ИДУ до сих пор не исследована. В настоящей работе восполняется этот пробел. Сначала строится регуляризованная асимптотика фундаментального решения однородного ИДУ, а затем разрабатывается алгоритм построения асимптотического решения неоднородного ИДУ. Показано, что (в отличие от асимптотики с ядром, зависящим от фундаментального решения однородного дифференциального уравнения) асимптотика решения неоднородного ИДУ будет содержать помимо быстро меняющихся членов еще и медленно меняющиеся компоненты, индуцированные асимптотикой фундаментального решения.

**Ключевые слова:** сингулярно возмущенные интегро-дифферен–
циальные уравнения, регуляризация,асимптотика фундаментальных решений.

# 1 Введение

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему

$$\begin{aligned}&\varepsilon\frac{dV(t,s,\varepsilon)}{dt}=a\left(t\right)V\left(t,s,\varepsilon\right)+\int_s^t K_0\left(t,x\right)V\left(x,s,\varepsilon\right)dx,\\&v\left(s,s,\varepsilon\right)=1,\ 0\leq s\leq t\leq 1,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon\frac{dy(t,\varepsilon)}{dt}=b\left(t\right)y\left(t,\varepsilon\right)+\int_0^t V\left(t,s,\varepsilon\right)K\left(t,s\right)y\left(s,\varepsilon\right)ds+h\left(t\right),\\&y\left(0,\varepsilon\right)=y^0,\ 0\leq t\leq 1\end{aligned}\tag{2}$$

состоящую из двух интегро-дифференциальных уравнений, первое из которых описывает фундаментальное решение однородного ИДУ, а второе — неоднородное, с ядром, зависящим от фундаментального решения первого ИДУ (здесь единица в неравенстве для $s$ и $t$ взята ради простоты; можно было бы взять $0\leq s\leq t\leq T$, где $T$ – любое фиксированное положительное число). Роль быстро убывающей экспоненты $\exp\left(\frac{1}{s}\int_s^t\mu\left(\theta\right)d\theta\right)$, которая входила в ядро интегро-дифференциальных систем ранее рассмотренных работ [2,3,6,8], в задаче (2) играет фундаментальное решение $v\left(t,s,\varepsilon\right)$ интегро-дифференциального уравнения (1). Задача (1)–(2) является обобщением сингулярно возмущенной системы уравнений

$$\begin{aligned}&\varepsilon\frac{dZ(t,s,\varepsilon)}{dt}=B\left(t\right)Z\left(t,s,\varepsilon\right),\ Z\left(s,s,\varepsilon\right)=I,\ 0\leq s\leq t\leq 1,\\&\varepsilon\frac{dy(t,\varepsilon)}{dt}=A\left(t\right)y\left(t,\varepsilon\right)+\int_0^t K\left(t,s\right)Z\left(t,s,\varepsilon\right)y\left(s,\varepsilon\right)ds+h\left(t\right),\\&y\left(0,\varepsilon\right)=y^0,\ 0\leq t\leq 1,\end{aligned}$$

рассмотренной в [9], в которой первая система является дифференциальной, а не интегро-дифференциальной. Как будет показано ниже, наличие интегрального слагаемого в первом уравнении (1) приводит к тому, что в решении уравнения (2), кроме медленных составляющих, индуцирумых неоднородностью $h(t)$, будут появляться и медленные составляющие, индуцируемые ядром $K_0(t,s)$ первого уравнения, что сильно усложняет построение регуляризованного асимптотического решения задачи (2).

## 2 Регуляризация задачи (1)

Задачу (1) будем рассматривать при следующих условиях:

1) функция $a\left(t\right)\in C^{\infty}\left[0,1\right]$, ядро $K_0\left(t,s\right)\in C^{\infty}\left(0\leq s\leq t\leq 1\right)$;

2) $\operatorname{Re}a\left(t\right)\leq 0,\ a\left(t\right)\neq 0\ \forall t\in\left[0,1\right]$.

Следуя методу регуляризации С.А. Ломова [2,7], введем дополнительную переменную

$$\eta=\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t a\left(\theta\right)d\theta\equiv\frac{\varphi\left(t,s\right)}{\varepsilon} \tag{3}$$

и вместо задачи (1) рассмотрим «расширенную» задачу

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial\tilde{V}(t,s,\eta,\varepsilon)}{\partial t}+a\left(t\right)\frac{\partial\tilde{V}(t,s,\eta,\varepsilon)}{\partial\eta}=a(t)\tilde{V}\left(t,s,\eta,\varepsilon\right)+\\+\int_s^t K_0\left(t,x\right)\tilde{V}\left(x,s,\frac{\varphi(x,s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)dx,\ \tilde{V}\left(s,s,0,\varepsilon\right)=1\end{gathered} \tag{4}$$

для функции $\tilde{V}\left(t,s,\eta,\varepsilon\right)$ такой, что функция $V\left(t,s,\varepsilon\right)=\tilde{V}\left(t,s,\frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)$ является точным решением задачи (1). Однако задачу (4) нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не произведена регуляризация интегрального оператора

$$\begin{gathered}J\tilde{V}\left(t,s,\eta,\varepsilon\right)\equiv J\left(\tilde{V}\left(t,s,\eta,\varepsilon\right)|_{t=x,\eta=\frac{\varphi(x,s)}{\varepsilon}}\right)=\\=\int_s^t K_0\left(t,x\right)\tilde{V}\left(x,s,\frac{\varphi(x,s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)dx.\end{gathered} \tag{5}$$

Как было показано в [1], для его регуляризации надо ввести пространство $M_\varepsilon$, инвариантное относительно интегрального оператора $J$ (см. [1], стр. 62). Делается это так. Введем сначала так называемое пространство «безрезонансных решений»:

$$\begin{gathered}U=\{v\left(t,s,\eta\right):\ v\left(t,s,\eta\right)=v_1\left(t,s\right)e^{\eta}+v_0\left(t,s\right),\\ v_0\left(t,s\right),v_1\left(t,s\right)\in C^{\infty}\left(0\leq s\leq t\leq 1,\mathbb{C}\right)\}.\end{gathered} \tag{6}$$

В качестве $M_\varepsilon$ возьмем класс $U|_{\eta=\frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon}}$. Надо показать, что образ

$$Jv\left(t,s,\eta\right)\equiv J\left(v\left(t,s,\eta\right)|_{t=x,\eta=\varphi(x,s)/\varepsilon}\right)=\int_s^t K_0\left(t,x\right)v\left(x,\frac{\varphi\left(x,s\right)}{\varepsilon}\right)ds, \tag{7}$$

представляется рядом вида

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(z^{(k)}(t,s)e^{\eta}+z_0^{(k)}(t,s)\right)|_{\eta=\frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon}},$$

асимптотически сходящимся к $Jv$ при $\varepsilon\to+0$ (равномерно по $(t,s)\in\{0\le s\le t\le 1\}$).

Подставляя элемент $v\left(t,s,\eta\right)=v_1\left(t,s\right)e^{\eta}+v_0\left(t,s\right)$ пространства (6) в (7), будем иметь

$$Jv\left(t,s,\eta\right)=\int_s^t K_0\left(t,x\right)v_0\left(x,s\right)dx+\int_s^t K_0\left(t,x\right)v_1\left(x,s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}dx \qquad (8)$$

Стоящий здесь второй интеграл разложим в асимптотический ряд. Применяя операцию интегрирования по частям, будем иметь

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_s^t K_0\left(t,x\right)v_1\left(x,s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}dx=\varepsilon\int_s^t\frac{K_0(t,x)}{a(x)}v_1\left(x,s\right)d_xe^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}=\\&=\varepsilon\left[\frac{K_0(t,x)}{a(x)}v_1\left(x,s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}\Big|_{x=s}^{x=t}\right]-\varepsilon\int_s^t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K_0(t,x)}{a(x)}v_1\left(x,s\right)\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}dx=\\&=\varepsilon\left[\frac{K_0(t,t)}{a(t)}v_1\left(t,s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t a(\theta)d\theta}-\frac{K_0(t,s)}{a(s)}v_1\left(s,s\right)\right]-\\&-\varepsilon\int_s^t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K_0(t,x)}{a(x)}v_1\left(x,s\right)\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}dx.\end{aligned}$$

Продолжая этот процесс далее, получим ряд

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_s^t K_0\left(t,x\right)v_1\left(x,s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}dx=\\&=\textstyle\sum_{m=0}^{\infty}\left(-1\right)^m\varepsilon^{m+1}[\left(I^m\left(K_0\left(t,x\right)v_1\left(x,s\right)\right)\right)_{x=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}-\\&-\left(I^m\left(K_0\left(t,x\right)v_1\left(x,s\right)\right)\right)_{x=s}],\end{aligned} \qquad (9)$$

где введены операторы:

$$I^0=\frac{1}{a\left(x\right)},\ I^1=\frac{1}{a\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial x}I^0, I^m=\frac{1}{a\left(x\right)}\frac{\partial}{\partial x}I^{m-1},\ m\ge 2.$$

Нетрудно показать (см., например, [10], стр. 291–293 ), что ряд, стоящий в правой части равенства (9), сходится асимптотически при $\varepsilon\to+0$ к интегралу

$$\int_s^t K_0\left(t,x\right)v_1\left(x,s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^x a(\theta)d\theta}dx$$

(равномерно по $(t,s)\in\{0\le s\le t\le 1\}$). Тем самым, показано, что класс $M_\varepsilon=U|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}$ асимптотически инвариантен относительно оператора $J$.

Класс $M_\varepsilon$, инвариантный относительно оператора $J$, позволяют произвести регуляризацию этого оператора, используя его образ на элементе класса $M_\varepsilon$. Делается это так. Введем операторы

$$\begin{array}{l} R_0\left(v\left(t,s,\eta\right)\right)=\int_s^t K_0\left(t,x\right)v_0\left(x,s\right)dx, \\ R_{m+1}\left(v\left(t,s,\eta\right)\right)=\left(-1\right)^m\left[\left(I^m\left(K_0\left(t,x\right)v_1\left(x,s\right)\right)\right)_{x=t}e^\eta- \right. \\ \left. -\left(I^m\left(K_0\left(t,x\right)v_1\left(x,s\right)\right)\right)_{x=s}\right],\ m\geq 0. \end{array} \tag{10}$$

Эти операторы называют *операторами порядка (по $\varepsilon$)*; они являются коэффициентами при соответствующей степени $\varepsilon^{m+1}$ в $Jv\left(t,\tau,\eta\right)$. Используя $R_m$, оператор $Jv\left(t,\tau,\eta\right)$ можно записать короче:

$$Jv\left(t,s,\eta\right)=\left(R_0 v\left(t,s,\eta\right)+\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}R_{m+1}v\left(t,s,\eta\right)\right)_{\eta=\frac{\varphi(t,s))}{\varepsilon}}.$$

Пусть теперь $\tilde{v}(t,s,\eta,\varepsilon)$ — произвольная непрерывная по

$$(t,s,\eta)\in\{0\leq s\leq t\leq 1\}\times\ \Pi\ \ (\Pi=\{\eta:\mathrm{Re}\,\eta\leq 0\})$$

функция, имеющая асимптотическое разложение

$$\tilde{v}(t,s,\eta,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(t,s,\eta),\quad v_k(t,s,\eta)\in U, \tag{11}$$

сходящееся при $\varepsilon\to+0$ (равномерно по $(t,s,\eta)\in\{0\leq s\leq t\leq 1\}\times\Pi$). Тогда образ $J\tilde{v}(t,s,\eta,\varepsilon)$ разлагается в асимптотический ряд

$$J\tilde{v}(t,s,\eta,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k Jv_k(t,s,\eta)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{k=0}^{r}R_{r-k}v_k(t,s,\eta)|_{\eta=\frac{\varphi(t,s))}{\varepsilon}}. \tag{12}$$

Равенство (12) является основанием для введения следующего понятия.

**Определение 1** *Формальным расширением оператора $J$ назовем оператор $\tilde{J}$, действующий на каждую функцию $\tilde{v}(t,s,\eta,\varepsilon)\in C(\{0\leq s\leq t\leq 1\}\times\ \Pi)$ $(\varepsilon\to+0)$ вида (6) по закону*

$$\tilde{J}\tilde{v}(t,s,\eta,\varepsilon)\equiv\tilde{J}(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(t,s,\eta))\overset{def}{=}\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{k=0}^{r}R_{r-k}v_k(t,s,\eta). \tag{13}$$

Из (12) следует асимптотическое равенство

$$(\tilde{J}\tilde{v}(t,\tau,\varepsilon)|_{\eta=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}=J\tilde{v}(t,\eta,\varepsilon)_{\eta=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}(\varepsilon\to+0),$$

которое показывает, что введенный нами оператор $\tilde{J}$ действительно является расширением оператора $J$. Хотя оператор $\tilde{J}$ определен формально, его полезность очевидна, так как на практике обычно строят $N$-е приближение асимптотического решения (11), в котором будут участвовать лишь $N$-е частичные суммы ряда (11), имеющие не формальный, а истинный смысл. Теперь можно записать задачу, полностью регуляризованную по отношению к исходной задаче (2):

$$\begin{gathered}\varepsilon\tfrac{\partial\tilde{V}(t,s,\eta,\varepsilon)}{\partial t}+a\left(t\right)\tfrac{\partial\tilde{V}(t,s,\eta,\varepsilon)}{\partial\eta}=a(t)\tilde{V}\left(t,s,\eta,\varepsilon\right)+\\+\tilde{J}\tilde{V}\left(t,s,\eta,\varepsilon\right),\;\tilde{V}\left(s,s,0,\varepsilon\right)=1,\end{gathered}\tag{14}$$

где $\tilde{J}\tilde{V}\left(t,s,\eta,\varepsilon\right)$ имеет вид (13).

## 3 Разрешимость итерационных задач

Определяя решение этой задачи (14) в виде ряда (11), получим следующие итерационные задачи:

$$\mathbf{L}\,v_0(t,s,\eta)\equiv a(t)\frac{\partial v_0}{\partial\eta}-a(t)v_0-R_0v_0=0,v_0(s,s,0)=1;\tag{$15_0$}$$

$$\mathbf{L}\,v_1(t,s,\eta)=-\frac{\partial v_0}{\partial t}+R_1v_0,v_1(s,s,0)=0;\tag{$15_1$}$$

$$\mathbf{L}\,v_2(t,s,\eta)=-\frac{\partial v_1}{\partial t}+R_1v_1+R_2v_0,v_2(s,s,0)=0;\tag{$15_2$}$$

$$\cdots$$

$$\begin{gathered}\mathbf{L}\,v_k(t,s,\eta)=-\tfrac{\partial v_{k-1}}{\partial t}+R_1v_{k-1}+R_2v_{k-2}+\ldots+R_kv_0,\\v_k(s,s,0)=0,k\geq2.\end{gathered}\tag{$15_k$}$$

Перейдем к исследованию их разрешимости в пространстве $U$. Каждую из задач $(15_k)$ можно предствить в виде

$$\mathbf{L}\,v(t,s,\eta)\equiv a(t)\frac{\partial v}{\partial\eta}-a(t)v-R_0v=H(t,s,\eta),y_0(s,s,0)=b,\tag{16}$$

где $H\left(t,s,\eta\right)=H_1\left(t,s\right)e^{\eta}+H_0\left(t,s\right)\in U$ — известная правая часть задачи (16), а $R_0$ – оператор, действующий на каждую функцию (6) пространства $U$ по закону:

$$R_0\left(v_1\left(t,s\right)e^{\eta}+v_0\left(t,s\right)\right)\overset{\Delta}{=}\int_s^t K_0\left(t,x\right)v_0\left(x,s\right)dx.$$

В пространстве $U$ введем скалярное (при каждом $(t,s)\in\{0\le s\le t\le 1\}$ ) произведение

$$\begin{aligned}&\langle v,w\rangle\equiv\langle v_1(t,s)\,e^{\eta}+y_0(t,s)\,,w_1(t,s)\,e^{\eta}+w_0(t,s)\rangle\stackrel{\Delta}{=}\\&\stackrel{\Delta}{=}v_1(t,s)\cdot\bar{w}_1(t,s)+v_0(t,s)\cdot\bar{w}_0(t,s)\,.\end{aligned}$$

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1** *Пусть выполнены условия 1), 2) и правая часть* $H(t,s,\eta)=$ $=H_1(t,s)\,e^{\eta}+H_0(t,s)$ *уравнения (16) принадлежит пространству* $U$. *Тогда для разрешимости уравнения (16) в пространстве* $U$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\langle H(t,s,\eta)\,,\,e^{\eta}\rangle\equiv 0\;\Leftrightarrow H_1(t,s)\equiv 0\;(\forall\,(t,s)\in\{0\le s\le t\le 1\})\,. \tag{17}$$

Доказательство.Подставим элемент (6) пространства $U$ в уравнение (16); получим равенство

$$\begin{aligned}&a(t)\,v_1(t,s)\,e^{\eta}-a(t)\,v_1(t,s)\,e^{\eta}-a(t)\,v_0(t,s)-\\&-\textstyle\int_s^t K_0(t,x)\,v_0(x,s)\,dx=H_1(t,s)\,e^{\eta}+H_0(t,s)\,.\end{aligned}$$

Приравнивая здесь отдельно свободные члены и коэффициенты при экспоненте, получим уравнения

$$0\cdot v_1(t,s)=H_1(t,s)\,,\;-a(t)\,v_0(t,s)-\int_s^t K_0(t,x)\,v_0(x,s)\,dx=H_0(t,s)\,. \tag{18}$$

Второе уравнение (18) является интегральным уравнением типа Вольтерра; оно однозначно разрешимо в пространстве $C^{\infty}(0\le s\le t\le 1,\mathbb{C})$ . Для разрешимости первого уравнения (18) в этом пространстве необходимо и достаточно, чтобы $H_1(t,s)\equiv 0$, т. е. чтобы выполнялось условие (17). Теорема доказана.

**Замечание 1.** При выполнении условий 1) и 2), а также условия 17 уравнение (16) имеет следующее решение в пространстве $U$ :

$$v(t,s,\eta)=\alpha(t,s)\,e^{\eta}+v_0(t,s)\,, \tag{19}$$

где $\alpha(t,s)\in C^{\infty}(0\le s\le t\le 1,\mathbb{C})$ — произвольная функция, $v_0(t,s)$ — решение интегрального уравнения (18).

Не будем формулировать теорему об однозначной разрешимости общей итерационной задачи (16). Заметим, что применение теоремы 1 к двум последовательным итерационным задачам $(15_k)$ и $(15_{k+1})$ приводит к однозначному вычислению решения итерационной задачи $(15_k)$ в пространстве $U$. Покажем это на примере задач $(15_0)$, $(15_1)$ и $(15_2)$.

Решение уравнения $(15_0)$ имеет вид суммы (19). Поскольку в $(15_0)$ отсутствует неоднородность $H(t,s,\eta)$, то интегральное уравнение (18) будет однородным и поэтому $v_0\,(t,s)\equiv 0$, а само решение (19) принимает вид $v_0\,(t,s,\eta)=\alpha\,(t,s)\,e^{\eta}$. Подчиняя его начальному условию $v_0(s,s,0)=1$, найдем, что $\alpha\,(s,s)=1$. Таким образом, решение задачи $(15_0)$ будет записано в виде $v_0\,(t,s,\eta)=\alpha\,(t,s)\,e^{\eta}$, где функция $\alpha\,(t,s)$ найдена лишь в точке $(t,s)=(s,s)$. Для окончательного ее вычисления перейдем к уравнению $(15_1)$:

$$\begin{array}{l}\mathbf{L}\,v_1(t,s,\eta)=-\frac{\partial v_0}{\partial t}+R_1v_0, v_1(s,s,0)=0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\mathbf{L}\,v_1(t,s,\eta)=-\frac{\partial\alpha(t,s)}{\partial t}e^{\eta}+\left[\frac{K_0(t,t)}{a(t)}\alpha\,(t,s)\,e^{\eta}-\frac{K_0(t,s)}{a(s)}\right].\end{array}\tag{20}$$

По теореме 1 это уравнение разрешимо в пространстве $U$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $-\frac{\partial\alpha(t,s)}{\partial t}+\frac{K_0(t,t)}{a(t)}\alpha\,(t,s)\equiv 0$. Присоединяя к нему начальное условие $\alpha\,(s,s)=1$, найдем однозначно функцию $\alpha\,(t,s)= =\exp\left\{\int_s^t\frac{K_0(x,x)}{a(x)}dx\right\}$ , а значит однозначно построим решение $v_0\,(t,s,\eta)= =\alpha\,(t,s)\,e^{\eta}$ задачи $(15_0)$ в пространстве $U$. При этом задача $(15_1)$ будет уже неоднородной:

$$\begin{array}{l}\mathbf{L}\,v_1(t,s,\eta)=-\frac{\partial\alpha(t,s)}{\partial t}e^{\eta}+\left[\frac{K_0(t,t)}{a(t)}\alpha\,(t,s)\,e^{\eta}-\frac{K_0(t,s)}{a(s)}\right]\equiv\\ \equiv-\frac{K_0(t,s)}{a(s)},\ v_1(s,s,0)=0.\end{array}$$

Поскольку в правой части этого уравнения отсутствует коэффициент при экспоненте $e^{\eta}$, то условие (17) выполнено и мы можем вычислить решение этого уравнения (см. формулу (19)):

$$v_1(t,s,\eta)=\alpha_1\,(t,s)\,e^{\eta}+v_0\,(t,s)\,,\tag{21}$$

где $\alpha_1\,(t,s)\in C^{\infty}\,(0\le s\le t\le 1,\mathbb{C})$ — произвольная функция, $v_0\,(t,s)$ решение интегрального уравнения типа Вольтерра:

$$\begin{array}{l}-a\,(t)\,v_0\,(t,s)-\int_s^t K_0\,(t,x)\,v_0\,(x,s)\,dx=-\frac{K_0(t,s)}{a(s)}\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow v_0\,(t,s)=\int_s^t\frac{K_0(t,x)}{-a(t)}v_0\,(x,s)\,dx+\frac{K_0(t,s)}{a(t)a(s)}.\end{array}\tag{22}$$

Оно существует, единственно и принадлежит классу $C^{\infty}\,(0\le s\le t\le 1,\mathbb{C})$. Подчиняя (21) начальному условию $v_1(s,s,0)=0$, получим уравнение

$$\alpha_1\,(s,s)+\frac{K_0\,(s,s)}{a^2\,(s)}=0\Leftrightarrow\alpha_1\,(s,s)=-\frac{K_0\,(s,s)}{a^2\,(s)}.\tag{23}$$

Для окончательного вычисления функции (21) надо перейти к следующей задаче $(15_2)$:

$$\mathbf{L}\,v_2(t,s,\eta)=-\frac{\partial v_1}{\partial t}+R_1v_1+R_2v_0, v_2(s,s,0)=0.$$

Учитывая вид операторов $R_1$ и $R_2$:

$$R_1\left(v_1(t,s)e^{\eta}+v_0(t,s)\right)=\tfrac{K_0(t,t)}{a(t)}v_1\left(t,t\right)e^{\eta}-\tfrac{K_0(t,s)}{a(s)}v_1\left(s,s\right)$$
$$R_2\left(v_1(t,s)e^{\eta}+v_0(t,s)\right)=-\left(I^1\left(K_0\left(t,x\right)v_1(x,s)\right)\right)_{x=t}e^{\eta}+$$
$$+\left(I^1\left(K_0\left(t,x\right)v_1(x,s)\right)\right)_{x=s},$$

выделим в правой части уравнения $(15_2)$ коэффициент при экспоненте $e^{\eta}$. Он будет таким:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\alpha_1\left(t,s\right)+\frac{K_0\left(t,t\right)}{a\left(t\right)}\alpha_1\left(t,s\right)-\left(I^1\left(K_0\left(t,x\right)\alpha(x,s)\right)\right)_{x=t}=0, \qquad (23_1)$$

где $\alpha\left(t,s\right)=\exp\left\{\int_s^t\frac{K_0(x,x)}{a(x)}dx\right\}$ — известная функция. Присодиняя к этому уравнению начальное условие (23), найдем однозначно функцию $\alpha_1\left(t,s\right)$ и значит, построим однозначно решение (21) задачи $(15_1)$. Аналогично вычисляются решения в пространстве $U$ следующих итерационных задач $(15_k)$ при $k\geq 2$.

# 4 Асимптотическая сходимость формальных решений уравнения (1) к точному

Применяя теорему 1 к итерационным задачам $(15_k)$, вычислим однозначно их решения $v_k(t,s,\eta)$ в пространстве $U$. Обозначим $N-$ ую частичную сумму ряда (11) через $S_N(t,s,\eta,\varepsilon)$ а через $v_{\varepsilon N}(t,s)=S_N(t,s,\frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon},\varepsilon)$ — сужение этой суммы на регуляризирующей перменной (3) (т.е. при $\eta=\frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon}$). Нетрудно доказать следующее утверждение (см. [1], с. 143).

**Лемма 1** *Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда функция $v_{\varepsilon N}(t,s)$ является формальным асимптотическим решением задачи (1) порядка $N$, т.е. она удовлетворяет задаче*

$$\begin{array}{l}\varepsilon\frac{dv_{\varepsilon N}}{dt}=a(t)v_{\varepsilon N}+\int_s^t K_0\left(t,x\right)v_{\varepsilon N}\left(x,s\right)dx+\varepsilon^{N+1}F_N(t,s,\varepsilon),\\ v_{\varepsilon N}\left(s,s,0\right)=1,\ (s,t)\in\left\{0\leq s\leq t\leq 1\right\},\end{array} \qquad (24_0)$$

*где $||F_N(t,s,\varepsilon)||_{C(0\leq s\leq t\leq 1)}\leq\bar{F}(\bar{F}>0-$ постоянная, не зависящая от $\varepsilon$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0],\varepsilon_0-$ достаточно мало).*

Для оценки разности $V\left(t,s,\varepsilon\right)-v_{\varepsilon N}\left(t,s\right)$ между точным и приближенным решением задачи (1) надо рассмотрть интегро-дифференциальную задачу

$$\varepsilon\frac{dz}{dt}=a(t)z+\int_s^t K_0\left(t,x\right)z\left(x,s,\varepsilon\right)dx+H(t,s,\varepsilon),\ z(s,s,\varepsilon)=0, \qquad (24)$$

где $H(t,s,\varepsilon) \in C\,(0 \le s \le t \le 1, \mathbb{C})$– известная функция. Эта задача при каждом $\varepsilon > 0$ имеет единственное решение $z = z\,(t,s,\varepsilon) \in C^1\,(0 \le s \le t \le 1, \mathbb{C})$ и надо оценить норму решения через правую часть $H\,(t,s,\varepsilon)$ . Введем еще одну неизвестную функцию

$$u(t,s,\varepsilon) = \int_s^t K_0\,(t,x)\,z\,(x,s,\varepsilon)\,dx.$$

Дифференцируя ее по $t$, получим интегро-дифференциальную задачу:

$$\begin{aligned} &\tfrac{du(t,s,\varepsilon)}{dt} = K_0\,(t,t)\,z\,(t,s,\varepsilon) + \int_s^t \tfrac{\partial K_0(t,x)}{\partial t} z\,(x,s,\varepsilon)\,dx, \\ &u\,(s,s,\varepsilon) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

В итоге для вектор-функции $\omega = \{z,u\}$ получим интегро-дифференциальную систему

$$\begin{aligned} &\varepsilon \tfrac{d\omega(t,s,\varepsilon)}{dt} = \begin{pmatrix} a(t) & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \omega(t,s,\varepsilon) + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ K_0\,(t,t)\,z\,(t,s,\varepsilon) \end{pmatrix} + \\ &+\varepsilon \int_s^t \begin{pmatrix} 0 \\ \tfrac{\partial K_0(t,x)}{\partial t} z\,(x,s,\varepsilon)\,dx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H\,(t,s,\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}, \omega\,(s,s,\varepsilon) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Обозначим через $Y\,(t,x,\varepsilon)$ матрицу Коши дифференциальной задачи

$$\varepsilon \frac{dY(t,x,\varepsilon)}{dt} = \begin{pmatrix} a(t) & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y(t,x,\varepsilon),\ Y(x,x,\varepsilon) = I, 0 \le s \le t \le 1.$$

Матрица $A\,(t) = \begin{pmatrix} a(t) & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ является матрицей простой структуры со спектром $\{a\,(t)\,, 0\}$ . Так как спектр $\{a\,(t)\,, 0\}$ матрицы $A\,(t)$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \le 0$, то матрица $Y\,(t,x,\varepsilon)$ равномерно ограничена (см., например, [10], стр. 119–120), т. е.

$$\|Y\,(t,x,\varepsilon)\| \le c_0 = \text{const}\ \ (\forall\,(t,x,\varepsilon) \in \{0 \le s \le t \le 1\} \times \{\varepsilon > 0\})\,.$$

Обратим с помощью этой матрицы систему (26); получим интегральную систему

$$\begin{aligned} &\omega(t,s,\varepsilon) = \\ &= \int_s^t Y\,(t,x,\varepsilon) \left( \begin{pmatrix} 0 \\ K_0\,(x,x)\,z\,(x,s,\varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tfrac{\partial K_0(x,\xi)}{\partial t} z\,(\xi,s,\varepsilon)\,d\xi \end{pmatrix} \right) dx = \\ &+\tfrac{1}{\varepsilon} \int_s^t Y\,(t,x,\varepsilon) \begin{pmatrix} H\,(x,s,\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} dx. \end{aligned}$$

Переходя здесь к нормам, получим интегральное неравенство относительно нормы $\|\omega(t,s,\varepsilon)\|$. Учитывая равномерную ограниченность матрицы $Y(t,x,\varepsilon)$, а также непрерывность функций $K_0(t,s)$ и $\frac{\partial K_0(x,\xi)}{\partial t}$ (а значит, их ограниченность) и применяя неравенство Гронуолла-Беллмана, получим при достаточно малых $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ оценку

$$\|\omega(t,s,\varepsilon)\|_{C(\{0\le s\le t\le 1\})} \le \frac{1}{\varepsilon}\left\|\begin{pmatrix} H(x,s,\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_{C(\{0\le s\le t\le 1\})},$$

из которой вытекает оценка

$$\|z(t,s,\varepsilon)\|_{C(\{0\le s\le t\le 1\})} \le \frac{c_1}{\varepsilon}\|H(x,s,\varepsilon)\|_{C(\{0\le s\le t\le 1\})}. \qquad (27)$$

Доказано следующее утверждение.

**Лемма 2** *Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда решение $z(t,s,\varepsilon)$ задачи (25) существует, единственно при достаточно малых $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и удовлетворяет оценке (27), где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от $\varepsilon$ при достаточно малых $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.*

Применим эту лемму для доказательства следующего утверждения.

**Теорема 2** *Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда задача (1) однозначно разрешима в классе $C^1([0,1],\mathbb{C})$ и для ее решения $V(t,s,\varepsilon)$ справедлива оценка*

$$||V(t,s,\varepsilon) - v_{\varepsilon N}(t,s)||_{C(0\le s\le t\le 1)} \le c_N\varepsilon^{N+1}, N = 0,1,2,...,$$

*где постоянная $c_N > 0$ не зависит от $\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0](\varepsilon_0 > 0$ — достаточно мало).*

Доказательство. Задача (1) однозначно разрешима, так как она приводится к задаче (24) заменой $V - 1 = z$. Для разности $\Delta_N(t,s,\varepsilon) = V(t,s,\varepsilon) - v_{\varepsilon N}(t,s)$ получаем задачу

$$\varepsilon\frac{\Delta_N(t,s,\varepsilon)}{dt} = a(t)\Delta_N(t,s,\varepsilon) + \int_s^t K(t,x)\Delta_N(x,s,\varepsilon)dx-$$
$$-\varepsilon^{N+1}F_N(t,s,\varepsilon), \Delta_N(s,s,\varepsilon) = 0.$$

Она имеет вид задачи (24) с неоднородностью $H(t,s,\varepsilon) \equiv -\varepsilon^{N+1}F_N(t,s,\varepsilon)$. По лемме 2 справедлива оценка

$$||\Delta_N(t,s,\varepsilon)||_{C(0\le s\le t\le 1)} \equiv ||V(t,s,\varepsilon) - v_{\varepsilon N}(t,s)||_{C(0\le s\le t\le 1)} \le$$
$$\le \frac{c_2}{\varepsilon}\varepsilon^{N+1}||F_N(t,s,\varepsilon)||_{C(0\le s\le t\le 1)} \le \bar{c}_0\bar{F}_N\varepsilon^N \equiv \bar{c}_{N-1}\varepsilon^N,$$

а значит для $\Delta_{N+1}(t,s,\varepsilon) = V(t,s,\varepsilon) - v_{\varepsilon,N+1}(t,s)$ будет иметь место оценка

$$||\Delta_{N+1}(t,s,\varepsilon)||_{C(0\le s\le t\le 1)} \equiv$$

$$\equiv ||(V(t,s,\varepsilon) - v_{\varepsilon N}(t,s)) - \varepsilon^{N+1} v_{N+1}(t,s,\frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon})||_{C(0\le s\le t\le 1)} \le \bar{c}_N \varepsilon^{N+1}.$$

Отсюда получаем, что

$$\bar{c}_N \varepsilon^{N+1} \ge ||V(t,s,\varepsilon) - v_{\varepsilon N}(t,s)||_{C(0\le s\le t\le 1)} - \varepsilon^{N+1} ||v_{N+1}(t,s,\frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon})||_{C(0\le s\le t\le 1)},$$

или

$$||V(t,s,\varepsilon) - v_{\varepsilon N}(t,s)||_{C(0\le s\le t\le 1)} \le c_N \varepsilon^{N+1},$$

где $c_N = \bar{c}_N + \bar{v}_N > 0, ||v_{N+1}(t,s,\frac{\varphi(t,s)}{\varepsilon})||_{C(0\le s\le t\le 1)} \le \bar{v}_N$, причем постоянная $c_N$ не зависит от $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ — достаточно мало. Теорема доказана.

## 5 Построение регуляризованного асимптотического решения задачи (2)

Рассмотрим теперь задачу (2). Подставим в нее асимптотическое решение

$$v(t,s,\eta,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left( v_1^{(k)}(t,s)\, e^{\eta} + v_0^{(k)}(t,s) \right) \tag{28}$$

задачи (1). Получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered} \varepsilon \tfrac{dy}{dt} = b(t)\, y + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int_0^t \left( v_1^{(k)}(t,s)\, e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t a(\theta)} d\theta + v_0^{(k)}(t,s) \right) \times \\ \times K(t,s)\, y(s,\varepsilon)\, ds + h(t)\,, y(0,\varepsilon) = y^0. \end{gathered} \tag{29}$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} K(t,s)\, v_1^{(k)}(t,s) \equiv K_{1,k}(t,s)\,, \\ K(t,s)\, v_0^{(k)}(t,s) \equiv K_{0,k}(t,s)\,,\ k = 0,1,2,\ldots . \end{gathered}$$

Тогда задача (29) перепишется в виде

$$\begin{gathered} \varepsilon \tfrac{dy}{dt} = b(t)\, y + \\ + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t a(\theta) d\theta} K_{1,k}(t,s)\, y(s,\varepsilon)\, ds + \\ + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int_0^t K_{0,k}(t,s)\, y(s,\varepsilon)\, ds + h(t)\,, y(0,\varepsilon) = y^0. \end{gathered} \tag{30}$$

Получена интегро-дифференциальная система с быстро и медленно изменяющимися ядрами интегрального оператора. Эта система более общая, чем система, рассмотренная в [6], так как в ней ядра являются асимптотическими рядами по $\varepsilon$ (тогда как в [6] в ядре стоит только одно слагаемое $k(t,s)$). Задачу (30) будем рассматривать при условиях 1)–2). Кроме того, будем предполагать, что выполнены требования:

3) функции $b(t) \in C^{\infty}([0,1])$ и $h(t) \in C^{\infty}([0,1])$;

4) $a(t) \neq b(t), a(t), b(t) \neq 0, \ \operatorname{Re} a(t), \operatorname{Re} b(t) \leq 0 \, \forall t \in [0,1]$.

Обозначим $a(t) \equiv \lambda_2(t), \ \ b(t) \equiv \lambda_1(t)$ и введем регуляризирующие переменные

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_j(x)\,dx \equiv \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon},\ j = 1,2.$$

Для расширения $\widetilde{y} = \widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ решения уравнения (30) получим следующую задачу:

$$\begin{array}{l} \varepsilon\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau_j} - \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k J_k \widetilde{y}\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = h(t), \\ \tilde{y}(0,\varepsilon) = y^0, \end{array} \qquad (31)$$

где обозначено:

$$\begin{array}{l} J_k\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon) = J_{1,k}\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon) + J_{0,k}\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon), \\ J_{1,k}\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon) = \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_2(\theta)d\theta} K_{1,k}(t,s)\,\tilde{y}\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) ds, \\ J_{0,k}\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon) = \int_0^t K_{0,k}(t,s)\,\tilde{y}\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) ds,\ \ k \geq 0, \end{array}$$

или, более подробно,

$$\begin{array}{l} \varepsilon\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau_j} - \\ -\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t a(\theta)d\theta} K_{1,k}(t,s)\,\tilde{y}\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) ds - \\ -\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \int_0^t K_{0,k}(t,s)\,\tilde{y}\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) ds = h(t), \\ \tilde{y}(0, 0\varepsilon) = y^0. \end{array} \qquad (31a)$$

Однако здесь не произведена регуляризация интегральных операторов $J_{1,k}\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ и $J_{0,k}\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$. Для регуляризации этих операторов введем пространство $\hat{M}_{\varepsilon}$, асимптотически инвариантное относительно оператора $J_{i,k}\widetilde{y}(s,\tau,\varepsilon)$ $(k = 0,1)$(см. [1; гл. 2,§ 6]).

**Определение 2** *Будем говорить, что вектор-функция*

$$w(t,\tau) = \{w_1, ..., w_n\}$$

*принадлежит пространству $Y$, если она представима в виде суммы*

$$w(t,\tau)=w_0\left(t\right)+w_1\left(t\right)e^{\tau_1}+w_2\left(t\right)e^{\tau_2},w_j\left(t\right)\in C^\infty\left([0,1]\right), \\ j=0,1,2. \tag{32}$$

Заметим, что здесь $\tau_2=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a\left(x\right)dx=\frac{\varphi(t,0)}{\varepsilon}$. Подставим вместо $\tilde{y}$ эту функцию в каждый интегральный оператор, входящий в $J_{i,k}\widetilde{y}\left(s,\tau,\varepsilon\right)$. Будем иметь

$$J_{1,k}w(t,\tau)\equiv \\ \equiv\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_2(x)dx}K_{1,k}\left(t,s\right)\left(w_0\left(s\right)+w_1\left(s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_1(x)dx}+w_2\left(s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_2(x)dx}\right)ds= \\ =\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_2(x)dx}K_{1,k}\left(t,s\right)w_0\left(s\right)ds+e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_2(x)dx}\int_0^t K_{1,k}\left(t,s\right)w_2\left(s\right)ds+$$

$$+\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_2(x)dx}K_{1,k}\left(t,s\right)w_1\left(s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_1(x)dx}ds=$$

$$=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_2(x)dx}\int_0^t K_{1,k}\left(t,s\right)w_2\left(s\right)ds+\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_2(x)dx}K_{1,k}\left(t,s\right)w_0\left(s\right)ds+ \\ +e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_2(x)dx}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_2(x)dx}K_{1,k}\left(t,s\right)w_1\left(s\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_1(x)dx}ds$$

Применяя операцию интегрирования по частям, получим

$$\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_2(x)dx}K_{1,k}\left(t,s\right)w_0\left(s\right)ds= \\ =-\varepsilon\int_0^t\frac{K_{1,k}(t,s)w_0(s)}{\lambda_2(s)}de^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_2(x)dx}= \\ =\varepsilon\left[\frac{K_{1,k}(t,0)w_0(0)}{\lambda_2(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_2(x)dx}-\frac{K_{1,k}(t,t)w_0(t)}{\lambda_2(t)}\right]+$$

$$+\varepsilon\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_2(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\frac{K_{1,k}(t,s)w_0(s)}{\lambda_2(s)}ds= \\ =\varepsilon\left[\frac{K_{1,k}(t,0)w_0(0)}{\lambda_2(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_2(x)dx}-\frac{K_{1,k}(t,t)w_0(t)}{\lambda_2(t)}\right]+$$

$$+\varepsilon^2[\left(\frac{1}{\lambda_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}\frac{K_{1,k}(t,s)w_0(s)}{\lambda_2(s)}\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_2(x)dx}- \\ -\left(\frac{1}{\lambda_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}\frac{K_{1,k}(t,s)w_0(s)}{\lambda_2(s)}\right)_{s=t}]+ \\ +\varepsilon^2\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_2(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\lambda_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}\frac{K_{1,k}(t,s)w_0(s)}{\lambda_2(s)}\right)ds=$$

$$=\sum_{m=0}^\infty\varepsilon^{m+1}[\left(I_2^m\left(K_{1,k}\left(t,s\right)w_0\left(s\right)\right)\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_2(x)dx}- \\ -\left(I_2^m\left(K_{1,k}\left(t,s\right)w_0\left(s\right)\right)\right)_{s=t}]$$

где введены операторы:

$$I_2^0=\frac{1}{\lambda_2(s)},I_2^1=\frac{1}{\lambda_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_1^0, \\ I_2^m=\frac{1}{\lambda_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_2^{m-1},m\geq 2. \tag{33}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
&e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_2(x)dx} K_{1,k}(t,s)\,w_1(s)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_1(x)dx}ds = \\
&= e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\int_0^t K_{1,k}(t,s)\,w_1(s)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\lambda_1(x)-\lambda_2(x))dx}ds = \\
&= \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\int_0^t \frac{K_{1,k}(t,s)w_1(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)} de^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\lambda_1(x)-\lambda_2(x))dx} = \\
&= \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\left[\frac{K_{1,k}(t,t)w_1(t)}{\lambda_1(t)-\lambda_2(t)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (\lambda_1(x)-\lambda_2(x))dx} - \frac{K_{1,k}(t,0)w_1(0)}{\lambda_1(0)-\lambda_2(0)}\right] -
\end{aligned} .$$

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\lambda_1(x)-\lambda_2(x))dx}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{K_{1,k}(t,s)w_1(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)}\right)ds = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}(-1)^m\left[\left(I_{1,2}^m\left(K_{1,k}(t,s)\,w_1(s)\right)_{s=t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_1(x)dx}\right)_{s=t} -\right.
\end{aligned}$$

$$\left.-\left(I_{1,2}^m\left(K_{1,k}(t,s)\,w_1(s)\right)_{s=0} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\right)\right],$$

где введены операторы:

$$\begin{aligned}
&I_{1,2}^0 = \frac{1}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)},\, I_{1,2}^1 = \frac{1}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_{1,2}^0, \\
&I_{1,2}^{\nu} = \frac{1}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_{1,2}^{\nu-1},\, \nu \geq 2.
\end{aligned} \tag{34}$$

Таким образом, для произвольной вектор-функции (32) будем иметь

$$\begin{aligned}
&J_{1,k}w(t,\tau) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\int_0^t K_{1,k}(t,s)\,w_2(s)\,ds + \\
&+\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}(-1)^m\left[\left(I_2^m\left(K_{1,k}(t,s)\,w_0(s)\right)\right)_{s=0} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx} - \right.\\
&\left.-\left(I_2^m\left(K_{1,k}(t,s)\,w_0(s)\right)\right)_{s=t}\right] + \\
&+\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}(-1)^m\left[\left(I_{1,2}^m\left(K_{1,k}(t,s)\,w_1(s)\right)_{s=t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_1(x)dx}\right)_{s=t} - \right.\\
&\left.-\left(I_{1,2}^m\left(K_{1,k}(t,s)\,w_1(s)\right)_{s=0} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_2(x)dx}\right)\right].
\end{aligned} \tag{35}$$

Произведем теперь регуляризацию интеграла с медленно изменяющимся ядром:

$$\begin{aligned}
&J_{0,k}\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon) = \int_0^t K_{0,k}(t,s)\,\tilde{y}\left(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds = \\
&= \int_0^t K_{0,k}(t,s)\left(w_0(s) + \sum_{j=1}^2 w_j(s)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_j(x)dx}\right)ds = \\
&= \int_0^t K_{0,k}(t,s)\,w_0(s)\,ds + \\
&+ \int_0^t K_{0,k}(t,s)\left(\sum_{j=1}^2 w_j(s)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_j(x)dx}\right)ds.
\end{aligned}$$

Вновь используя операцию интегрирования по частям, придем к следующему ряду:

$$\begin{aligned}&\int_0^t K_{0,k}(t,s)\,w_0(s)\,ds+\\&+\int_0^t K_{0,k}(t,s)\left(\sum_{j=1}^2 w_j(s)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_j(x)dx}\right)ds=\\&=\int_0^t K_{0,k}(t,s)\,w_0(s)\,ds+\\&=\sum_{j=1}^2\sum_{m=0}^\infty(-1)^m\varepsilon^{m+1}[\left(I_j^m\left(K_{0,k}(t,s)\,w_j(s)\right)\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(x)dx}-\\&-\left(I_j^m\left(K_{0,k}(t,s)\,w_j(s)\right)\right)_{s=0}],\end{aligned}\tag{36}$$

где введены операторы:

$$\begin{aligned}&I_j^0=\frac{1}{\lambda_j(s)},\ I_j^1=\frac{1}{\lambda_j(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_{0,j}^0,\\&I_j^m=\frac{1}{\lambda_j(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_j^{m-1},\ j=1,2,\ m\geq 2.\end{aligned}\tag{37}$$

Нетрудно показать, что ряды, стоящие в правых частях равенств (35) и (36), асимптотически сходятся при $\varepsilon\to+0$ к соотвествующим интегралам (равномерно по $t\in[0,1]$). Обозначая через $R_{m,k}:Y\to Y$операторы порядка (по $\varepsilon$), действующие на каждую функцию (32) по закону

$$\begin{aligned}&R_{0,k}w(t,\tau)=e^{\tau_2}\int_0^t K_{1,k}(t,s)\,w_2(s)\,ds+\\&+\int_0^t K_{0,k}(t,s)\,w_0(s)\,ds;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&R_{m+1,k}w(t,\tau)=[\left(I_2^m\left(K_{1,k}(t,s)\,w_0(s)\right)\right)_{s=0}e^{\tau_2}-\\&-\left(I_2^m\left(K_{1,k}(t,s)\,w_0(s)\right)\right)_{s=t}]+\\&+(-1)^m\,[\left(I_{1,2}^m\left(K_{1,k}(t,s)\,w_1(s)\right)_{s=t}e^{\tau_1}\right)-\\&-\left(I_{1,2}^m\left(K_{1,k}(t,s)\,w_1(s)\right)_{s=0}e^{\tau_2}\right)]+\\&+\sum_{j=1}^2(-1)^m\,[\left(I_j^m\left(K_{0,k}(t,s)\,w_j(s)\right)\right)_{s=t}e^{\tau_j}\\&-\left(I_j^m\left(K_{0,k}(t,s)\,w_j(s)\right)\right)_{s=0}],\end{aligned}\tag{38}$$

где операторы $I_2^m,\ I_{1,2}^m$ и $I_j^m$ вычисляются по формулам (33),(34) и (37) соответственно. Тогда образ $J_kw(t,\tau)$ можно записать кратко в форме

$$J_kw(t,\tau)\equiv J_{1,k}w(t,\tau)+J_{0,k}w(t,\tau)=\sum_{m=0}^\infty\varepsilon^mR_{m,k}w(t,\tau)\,.$$

Пусть теперь некоторая вектор-функция $\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$, непрерывная по $(t,\tau)\in$ $\in[0,T]\times\Pi\,(\Pi=\{\operatorname{Re}\tau_j\leq 0, j=1,2\})$, представляется в виде ряда

$$\begin{aligned}&\widetilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{l=0}^\infty\varepsilon^l y_l(t,\tau)\,,\\&y_l(t,\tau)=w_0^{(l)}(t)+\sum_{j=1}^2 w_j^{(l)}(t)\,e^{\tau_j}\in Y,\end{aligned}\tag{39}$$

сходящегося асимптотически при $\varepsilon \to +0$ (равномерно по$(t,\tau) \in [0,1] \times \Pi$). Подставляя ее в интегральные операторы системы (31), будем иметь

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k J_k \tilde{y}\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = \\ \equiv \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{k+l} J_k y_l\left(t,\tau\right) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} R_{0k} y_l\left(t,\tau\right) + \\ + \sum\limits_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r \sum\limits_{k+l+m=r} R_{m,k} y_l\left(t,\tau\right) = \\ = \sum\limits_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum\limits_{k+l+m=r} R_{m,k} y_l\left(t,\tau\right), \end{array}.$$

где $\tau = \psi\left(t\right)/\varepsilon$.

**Определение 3** *Оператор* $\widetilde{J}\widetilde{y} = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{k+l+m=r} R_{m,k} y_l\left(t,\tau\right)$ *будем называть формальным расширением интегрального оператора*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k J_k \tilde{y}\left(s, \frac{\psi\left(s\right)}{\varepsilon}, \varepsilon\right).$$

Теперь можно записать задачу, полностью регуляризованную по отношению по отношению к (30):

$$\varepsilon \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j\left(t\right) \frac{\partial \widetilde{y}_0}{\partial \tau_j} - \lambda_1\left(t\right) \widetilde{y} - \widetilde{J}\widetilde{y} = h\left(t\right), \quad \widetilde{y}\left(0,0,\varepsilon\right) = y^0. \tag{40}$$

Подставляя ряд (39) в (40) и производя приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях $\varepsilon$, получим следующие итерационные задачи:

$$Fy_0 \equiv \sum_{j=1}^{2} \lambda_j\left(t\right) \frac{\partial y_0}{\partial \tau_j} - \lambda_1\left(t\right) y_0 - R_{0,0} y_0 = h\left(t\right), y_0\left(0,0\right) = y^0; \tag{$41_0$}$$

$$Fy_1 = -\frac{\partial y_0}{\partial t} + (R_{1,0} + R_{0,1}) y_0, y_1\left(0,0\right) = 0; \tag{$41_1$}$$

$$\dots$$

$$Fy_r = -\frac{\partial y_{r-1}}{\partial t} + \sum_{k+l+m=r} R_{m,k} y_l\left(t,\tau\right), y_r\left(0,0\right) = 0, \tag{$41_r$}$$

Каждую пару итерационных задач $(41_r), (41_{r+1})$ можно записать в виде

$$Fy \equiv \sum_{j=1}^{2} \lambda_j\left(t\right) \frac{\partial y}{\partial \tau_j} - \lambda_1\left(t\right) y - R_{0,0} y = f\left(t,\tau\right), y\left(0,0\right) = y_*, \tag{42}$$

$$Fv = -\frac{\partial y}{\partial t} + (R_{1,0} + R_{0,1})y + g\,(t,\tau)\,, \tag{43}$$

где $f\,(t,\tau) = f_0\,(t) + \sum_{j=1}^{2} f_j\,(t)\,e^{\tau_j}$, $g\,(t,\tau) = g_0\,(t) + \sum_{j=1}^{2} g_j\,(t)\,e^{\tau_j}$– известные функции класса $Y$. Здесь так же, как и в п.1, нетрудно доказать следующий результат.

**Теорема 3** *Пусть выполнены условия 1)–4) и функция $f\,(t,\tau) \in Y$.Тогда для разрешимости системы (42) в пространстве $Y$необходимо и достаточно, чтобы*

$$\langle f\,(t,\tau) \mid e^{\tau_1} \rangle \equiv 0 \Leftrightarrow f_1\,(t) \equiv 0\,\forall t \in [0,1]\,. \tag{44}$$

*При выполнении условий (44) и при дополнительном требовании*

$$\left\langle -\frac{\partial y}{\partial t} + (R_{1,0} + R_{0,1})y + g\,(t,\tau) \,\middle|\, e^{\tau_1} \right\rangle \equiv 0 \tag{45}$$

*задача (42) однозначно разрешима в пространстве $Y$.*

Здесь через $\langle * \mid * \rangle$ обозначено скалярное (при каждом $t \in [0,1]$) произведение в $Y$ :

$$\langle f\,(t,\tau) \mid g\,(t,\tau) \rangle \stackrel{\Delta}{\equiv} \sum_{j=0}^{2} f_j\,(t)\,\bar{g}\,(t)\,.$$

Обращаем внимание на то, что в (44) и (45) в умножении участвуют только функция $e^{\tau_1}$, так как функции типа $q_2\,(t)\,e^{\tau_2}$ не входят в ядро оператора $Fy \equiv \equiv \sum_{j=1}^{2} \lambda_j\,(t)\,\frac{\partial y}{\partial \tau_j} - \lambda_1\,(t)\,y$.

И, наконец, обозначая через $y_{\varepsilon N}\,(t) = \sum_{r=1}^{N} \varepsilon^r y_r \left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)$сужение $N$-й частичной суммы ряда (39) при $\tau = \psi\,(t)\,/\varepsilon \equiv (\psi_1\,(t)\,/\varepsilon,\ \psi_2\,(t)\,/\varepsilon)$ , докажем ( так же, как и в [10], стр. 303–308) оценку

$$\|y\,(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon N}\,(t)\|_{C[0,T]} \le M_N \varepsilon^{N+1}, \quad M = 0,1,2,...,$$

где постоянная $M_N > 0$не зависит от $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]\,(\varepsilon_0 > 0-$достаточно мало).

# 6 Построение главного члена асимптотики. Пример

Развитый нами алгоритм позволяет получать асимптотику решения исходной задачи любого порядка (по $\varepsilon$). Однако вычисление высших приближений связано с громоздкими выкладками. На практике обычно ограничиваются главным членом асимптотики, структура которого повторяет структуру точного решения задачи (2). В этом случае достаточно рассмотреть задачу[1]

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{dy}{dt}=\lambda_1\left(t\right)y+\\ +\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_2(\theta)d\theta}K\left(t,s\right)\left(v_1^{(0)}\left(t,s\right)+\varepsilon v_1^{(1)}\left(t,s\right)\right)y\left(s,\varepsilon\right)ds+\\ +\int_0^t K\left(t,s\right)\left(v_0^{(0)}\left(t,s\right)+\varepsilon v_0^{(1)}\left(t,s\right)\right)y\left(s,\varepsilon\right)ds+h\left(t\right),y(0,\varepsilon)=y^0.\end{gathered}\tag{46}$$

Здесь в уравнении (30) удерживается только асимптотика первого порядка фундаментального решения $V(t,s,\varepsilon)$:

$$\begin{gathered}v_{\varepsilon 1}\left(t,s\right)\equiv\left(v_1^{(0)}\left(t,s\right)+\varepsilon v_1^{(1)}\left(t,s\right)\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t\lambda_2 d\theta}+\left(v_0^{(0)}\left(t,s\right)+\varepsilon v_0^{(1)}\left(t,s\right)\right)=\\ =\left(\alpha\left(t,s\right)+\varepsilon v_1^{(1)}\left(t,s\right)\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t\lambda_2 d\theta}+\varepsilon v_0^{(1)}\left(t,s\right),\end{gathered}$$

где $\alpha\left(t,s\right)$ — функция $(20_0)$, $\alpha_1\left(t,s\right)$ — решение задачи $(23)-(23_1)$, $v_0 = = v_0^{(1)}\left(t,s\right)$ — решение интегрального уравнения (22). Надо решить две первые итерационные задачи:

$$Fy_0\equiv\sum_{j=1}^2\lambda_j\left(t\right)\frac{\partial y_0}{\partial\tau_j}-\lambda_1\left(t\right)y_0-R_{0,0}y_0=h\left(t\right),\ y_0\left(0,0\right)=y^0;\tag{$47_0$}$$

$$Fy_1=-\frac{\partial y_0}{\partial t}+(R_{1,0}+R_{0,1})y_0,y_1\left(0,0\right)=0,\tag{$47_1$}$$

где

$$\begin{gathered}R_{0,0}y_0\left(t,\tau\right)\equiv R_{0,0}\left(y_0^{(0)}\left(t\right)+\textstyle\sum_{j=1}^2 y_j^{(0)}\left(t\right)e^{\tau_j}\right)=\\ =e^{\tau_2}\textstyle\int_0^t K_{1,0}\left(t,s\right)y_2^{(0)}\left(s\right)ds+\int_0^t K_{0,0}\left(t,s\right)y_0^{(0)}\left(s\right)ds;\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}&R_{1,0}y_0\left(t,\tau\right)=[\left(I_2^0\left(K_{1,0}\left(t,s\right)y_0^{(0)}\left(s\right)\right)\right)_{s=0}e^{\tau_2}-\\ &-\left(I_2^0\left(K_{1,0}\left(t,s\right)y_0^{(0)}\left(s\right)\right)\right)_{s=t}]+\\ &+[\left(I_{1,2}^0\left(K_{1,0}\left(t,s\right)y_1^{(0)}\left(s\right)\right)_{s=t}e^{\tau_1}\right)-\\ &-\left(I_{1,2}^0\left(K_{1,0}\left(t,s\right)y_1^{(0)}\left(s\right)\right)_{s=0}e^{\tau_2}\right)]+\\ &+\textstyle\sum_{j=1}^2[\left(I_j^0\left(K_{0,0}\left(t,s\right)y_j^{(0)}\left(s\right)\right)\right)_{s=t}e^{\tau_j}\\ &-\left(I_j^0\left(K_{0,0}\left(t,s\right)y_j^{(0)}\left(s\right)\right)\right)_{s=0}],\end{aligned}$$

[1]Напомним, что $\lambda_1\left(t\right)=b\left(t\right)$, $\lambda_2\left(t\right)=a\left(t\right)$.

$$R_{0,1}y_0\left(t,\tau\right)=e^{\tau_2}\int\limits_0^t K_{1,1}\left(t,s\right)y_2^{(0)}\left(s\right)ds+\int\limits_0^t K_{0,1}\left(t,s\right)y_0^{(0)}\left(s\right)ds.$$

Применяя разработанный алгоритм, построим главный член асимптотики решения задачи (2):

$$y_{0\varepsilon}\left(t\right)=y_0^{(0)}\left(t\right)+\beta_1^{(0)}\left(t\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_o^t\lambda_1(\theta)d\theta}+y_2^{(0)}\left(t\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_o^t\lambda_2(\theta)d\theta},\tag{48}$$

где $y_2^{(0)}\left(t\right)$ — известная функция, вычисляемая в процессе решения задачи $(47_0)$, $y_0^{(0)}\left(t\right)=-\frac{h(t)}{\lambda_1(t)}$, а функция $\beta_1^{(0)}\left(t\right)$ вычисляется из условия разрешимости уравнения $(47_1)$ в пространстве[2] $Y$ :

$$\left\langle-\frac{\partial y_0}{\partial t}+(R_{1,0}+R_{0,1})y_0\;\;|e^{\tau_1}\right\rangle\equiv0\Leftrightarrow\left\langle-\frac{\partial y_0}{\partial t}+R_{1,0}y_0\;\;|e^{\tau_1}\right\rangle\equiv0,$$

$$y_0\equiv y_0\left(t,\tau\right)=y_0^{(0)}\left(t\right)+\beta_1^{(0)}\left(t\right)e^{\tau_1}+y_2^{(0)}\left(t\right)e^{\tau_2}.\tag{$48_0$}$$

Из (48) видно, что влияние интегрального оператора на структуру главного члена асимптотики решения задачи (2) осуществляется через операторы $K_{1,0}\left(t,t\right)=K\left(t,t\right)v_1^{(0)}\left(t,t\right)$, $K_{0,0}\left(t,t\right)=K\left(t,t\right)v_0^{(0)}\left(t,t\right)$, входящих в $R_{1,0}y_0(t,\tau)$ (т. е. в конечном счете через диагональное ядро $K(t,t)$). Если $K(t,t)\equiv0$, то уравнение (1) не оказывает никакого влияния на структуру главного члена асимптотики решения задачи (2), т. е в первом приближении интегродифференциальная система (2) ведет себя так же, как и дифференциальная система $\varepsilon\dot{y}=\lambda_1\left(t\right)y+h\left(t\right),y\left(0,\varepsilon\right)=y^0$ (влияние интегрального члена проявится при построении высших приближений). Отметим также, что функция $y_0^{(0)}\left(t\right)$ является решением вырожденного $(\varepsilon=0)$ уравнения по отношению к исходному (46).

**Пример.** Рассмотрим задачу (1)–(2), в которой ядро $K_0\left(t,s\right)=t-s$. Тогда

$$\begin{aligned}&v_1^{(0)}\left(t,s\right)=\alpha\left(t,s\right)\equiv1,\;K_{1,0}\left(t,s\right)=K\left(t,s\right),\\&K_{0,0}\left(t,s\right)=K\left(t,s\right)v_0^{(0)}\left(t,s\right)\equiv0,\;R_{0,0}y\left(t,\tau\right)=\\&=e^{\tau_2}\textstyle\int_0^t K\left(t,s\right)R_{0,0}y\left(t,\tau\right)y_2^{(0)}\left(s\right)ds,\;R_{1,0}y\left(t,\tau\right)=\\&=\left(I_{12}\left(K\left(t,s\right)y_1^{(0)}\left(s\right)\right)\right)_{s=t}e^{\tau_1}+p\left(t,\tau_2\right),\end{aligned}$$

[2] Учесть, что $R_{0,1}y_0\left(t,\tau\right)$ не содержит экспоненту $e^{\tau_1}$.

где функция $p(t,\tau_2)$ не зависит от $e^{\tau_1}$. В этом случае итерационные задачи $(47_0)$ и $(47_1)$ запишутся в виде

$$\begin{aligned}&Fy_0 \equiv \sum_{j=1}^{2} \lambda_j(t) \frac{\partial y_0}{\partial \tau_j} - \lambda_1(t) y_0 - \\ &-e^{\tau_2} \int_0^t K(t,s) y_2^{(0)}(s)\, ds = h(t),\ y_0(0,0) = y^0,\end{aligned} \tag{49}$$

$$Fy_1 = \left( I_{12} \left( K(t,s) y_1^{(0)}(s) \right) \right)_{s=t} e^{\tau_1} + p(t,\tau_2). \tag{50}$$

Определяя решение задачи (49) в виде $(48_0)$, получим уравнения

$$\begin{aligned}&-\lambda_1(t) y_0^{(0)}(t) = h(t),\ 0 \cdot y_1^{(0)}(t) = 0, \\ &(\lambda_2(t) - \lambda_1(t)) y_2^{(0)}(t) = \int_0^t K(t,s) y_2^{(0)}(s)\, ds,\end{aligned}$$

решая которые найдем коэффициенты функции $(48_0)$ и запишем решение уравнения (49) в виде

$$y_0(t,\tau) = -\frac{h(t)}{\lambda_1(t)} + \beta_1^{(0)}(t) e^{\tau_1}, \tag{51}$$

где $\beta_1^{(0)}(t) \in C^\infty([0,1],\mathbb{C})$– произвольная функция. Подчиняя (51) начальному условию $y_0(0,0) = y^0$, найдем, что $\beta_1^{(0)}(0) = y^0 + \frac{h(0)}{\lambda_1(0)}$. Для окончательного вычисления функции $\beta_1^{(0)}(t)$ перейдем к задаче (50) Для ее разрешимости в пространстве $Y$необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}&\left\langle -\frac{\partial y_0}{\partial t} + R_{1,0} y_0 \ \ | e^{\tau_1} \right\rangle \equiv 0 \Leftrightarrow < -\dot{\beta}_1^{(0)}(t) e^{\tau_1} + \left( \frac{h(t)}{\lambda_1(t)} \right)^{\cdot} + \\ &+ \left( I_{1,2} \left( K(t,s) \left( \beta_1^{(0)}(s) \right) \right) \right)_{s=t} e^{\tau_1} + p(t,\tau_2) \ \ | e^{\tau_1} > \equiv 0.\end{aligned}$$

Производя здесь скалярное умножение, получим дифференциальное уравнение

$$-\dot{\beta}_1^{(0)}(t) + \frac{K(t,t)}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)} \beta_1^{(0)}(t) = 0.$$

Присоединяя к нему начальное условие $\beta_1^{(0)}(0) = y^0 + \frac{h(0)}{\lambda_1(0)}$, найдем окончательно функцию

$$\beta_1^{(0)}(t) = \left( y^0 + \frac{h(0)}{\lambda_1(0)} \right) \exp\left\{ \int_0^t \frac{K(x,x)}{\lambda_1(x) - \lambda_2(x)} dx \right\}.$$

Значит, главный член асимптотики решения задачи (49)–(50) будет иметь вид

$$y_{\varepsilon 0}(t) = -\frac{h(t)}{\lambda_1(t)} + \left( y^0 + \frac{h(0)}{\lambda_1(0)} \right) \exp\left\{ \int_0^t \frac{K(x,x)}{\lambda_1(x) - \lambda_2(x)} dx \right\} \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_2(\theta) d\theta}.$$

# 7 Благодарности

Работа частично поддержана грантом Российского научного фонда (проект №23-21-00496).

## Список литературы

[1] С.А. Ломов, *Введение в общую теорию сингуляярных воззмущений*, Москва, Наука, 1981

[2] A.A. Bobodzhanov, V.F. Safonov, Volterra integral equations with rapidly varying kernels and their asymptotic integration, Math. Sb., **192:8** (2001), 53–78, Sb. Math., **192:8** (2001), 1139–1164

[3] V.F. Safonov, B.T. Kalimbetov, Regularization method for systems with unstable spectral the value of the kernel of the integral operator, Differen. Uravn., **31:4** (1995), Differen. Equ., **31:4** (1995), 647–656

[4] S. A. Lomov, Single-valued solvability of some matrix partial differential equations, Matem. zametki(1977),525–530, **21:4** (1977), Math. Notes, **21:4** (1977), 293–296

[5] М.И. Иманалиев,*Колебания и устойчивости решений сингулярно возмущенныых интегро-дифффеpенциальных систем*, Фрунзе: «Илим», 1974

[6] A. A. Bobodzhanov, V. F. Safonov, Singularly perturbed nonlinear integro-differential systems with rapidly changing kernel, Matem. zametki, **72:5** (2002), 654–664, Math. Notes, **72:5** (2002), 605–614

[7] С.А. Ломов, И.С. Ломов, *Основы математической теории пограничного слоя*, Издательство Московского университета, Москва, 2011

[8] V.F. Safonov, O.D., Tuychiyev, Regularization of singularly perturbed integral equations with rapidly varying kernels and their asymptotics, Differen. Uravnen., **33:9** (1997), 1199–1210; Differen. Equ., **33:9** (1997), 1203-1215

[9] A.A. Bobodzhanov, V.F. Safonov, Asymptotic solutions of an integro-differential system with rapidly changing kernels of a special type, Bulletin of the MEI., **№6**(2011), 47–56

[10] V.F. Safonov, A.A. Bobodzhanov, *Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации: учебное пособие*,Издательский дом МЭИ, Москва, 2012

# SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS WITH KERNES DEPENDING ON FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Bobodzhanov A.A., Bobodzhanova M.A., Safonov V.F.
National Research University «Moscow Power Engineering Institute»,
bobojanova@mpei.ru *
bobojanovaMA@mpei.ru **
Singsaf@yandex.ru ***

**Abstract.** The paper considers a system of two singularly perturbed integro-differential equations (IDEs), the first of which is a homogeneous equation,and the second is an inhomogeneous one, with an integral operator whose kernel contains the fundamental solution of the first IDE. The classical case, when the kernel depends on a rapidly changing scalar exponential, is the subject of a large number of papers (see bibliography at the end of the article). The case of the dependence of the kernel on the fundamental solutions of differential systems was studied in detail in the monograph by A.A. Bobodzhanov and V.F. Safonov "Singularly perturbed integral and integro-differential equations with rapidly changing kernels and equations with digonal degeneration of the kernel", published by Sputnik+ in 2017. As shown in this paper, the difficulty of constructing a regularized (in the sense of Lomov) asymptotics of IDEs is due to the complex structure of asymptotic solutions of fundamental solutions of homogeneous differential equations. The problem of constructing the asymptotics of the fundamental solution of a homogeneous IDE and its influence through the kernel on the regularized asymptotics of a nonhomogeneous IDE has not been studied so far. In the present work, this gap is filled. It first constructs a regularized asymptotics of the fundamental solution of a homogeneous IDE, and then develops an algorithm for constructing an asymptotic solution of a nonhomogeneous IDE. It is shown that (in contrast to the asymptotics with a kernel depending on the fundamental solution of a homogeneous differential equation), the asymptotics of the solution of an inhomogeneous IDE will contain, in addition to rapidly changing terms, also slowly changing components induced by the asymptotics of the fundamental solution.

**Keywords:** singularly perturbed, integro-differential equations, regularization,fundamental solution asymptotics.

**Acknowledgement**

The work was partially supported by Russian Science foundation (project №23-21-00496).