

## Управление с итеративным обучением на основе наблюдаемого выхода с учетом нелинейности типа насыщения

Емельянова Ю.П.

Арзамасский политехнический институт (филиал) Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева

[emelianovajulia@gmail.com](mailto:emelianovajulia@gmail.com)

**Аннотация.** Рассматривается линейная дискретная система, функционирующая в повторяющемся режиме, задачей которой является слежение за эталонной траекторией с требуемой точностью. Параметры системы точно неизвестны и описываются аффинными моделями неопределенности. Предлагается новый метод синтеза управления с итеративным обучением на основе информации о измеряемом выходном сигнале, с учетом нелинейности типа насыщения, присущей исполнительным механизмам роботов, позволяющий обеспечить необходимую точность слежения. Постановка задачи мотивирована тенденциями развития высокоточных интеллектуальных и аддитивных производств, а также медицинских реабилитационных роботов. Приведен пример, демонстрирующий эффективность метода.

**Ключевые слова:** управление с итеративным обучением, насыщение, неопределенности, векторная функция Ляпунова.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большой интерес специалистов по управлению вызывает машинное обучение, одним из мощных движущих факторов которого явля-

ется создание интеллектуальных производств. С учетом возросшей производительности компьютеров, и развития робототехники такие производства становятся реальностью и являются основной движущей силой «четвертой промышленной революции» (Индустрия 4.0).

Развитие высокоточных интеллектуальных производств требует разработки специальных алгоритмов управления промышленными роботами. Эффективным методом повышения точности роботов, выполняющих повторяющиеся операции, является управление с итеративным обучением [1].

Управление с итеративным обучением основано на том, что тот или иной показатель качества системы, которая выполняет одну и ту же задачу многократно, может быть улучшен путем обучения на основе информации с предыдущих выполнений. Характерным примером может служить порталный робот, захватывающий и перемещающий детали по заданной траектории на конвейер. Показателем качества здесь служит точность воспроизведения желаемой траектории.

Управление с итеративным обучением отличается от других стратегий управления с обучением, таких как адаптивное управление и нейронные сети. Стратегии адаптивного управления изменяют параметры регулятора, тогда как управление с итеративным обучением изменяет только входной сигнал. Кроме того, адаптивные регуляторы обычно не используют информацию, содержащуюся в повторяющихся командных сигналах. Точно так же обучение нейронной сети включает в себя изменение параметров регулятора, а не управляющего сигнала; в этом случае модифицируются большие сети нелинейных нейронов. Эти большие сети требуют обширных обучающих данных, и бывает трудно гарантировать быструю сходимость, тогда как алгоритмы управления с итеративным обучением обычно сходятся адекватно всего за несколько итераций [1], [2] и список литературы в [1], [2].

Существующая сфера применения управления с итеративным обучением в настоящее время включает в себя множество практических промышленных систем в производстве, робототехнике и химической обработке [2] и обширный список литературы в [2]. Другая обширная область применения - медицина. Например, это медицинские роботы для реабилитации больных, перенесших инсульт [3],[4],[5] и для поддержки желудочка сердца [6]. Последние несколько лет управление с итеративным обучением эффективно используется в различных задачах слежения за транспортными потоками [7], для решения транспортных задач в железнодорожных системах слежения [8]. Последнее время наметилась тенденция эффективного использования управле-

ния с итеративным обучением в альтернативных источниках энергии [9], [10] и сельском хозяйстве [11].

Исполнительные механизмы роботов содержат типовые нелинейности (насыщение, люфт, зона нечувствительности). Эти нелинейности снижают допустимую точность, при этом эффект их влияния в современной литературе изучен недостаточно. В связи с этим актуальной является задача синтеза управления с итеративным обучением с учетом указанных нелинейностей.

Задача управления с итеративным обучением с учетом нелинейности типа насыщения изучалась в ряде работ [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20]. В указанных работах в различных вариантах делается предположение о том, что желаемая траектория, которую должен воспроизводить робот-манипулятор, является выходным сигналом некоторой эталонной нелинейной системы. Однако, в реальной практике проектирования желаемая траектория задается заранее исходя из целей производства или конкретной задачи. Это крайне важно в большинстве приложений, например, в медицинских приложениях при реабилитации после инсульта [3], [4], [5], [6]. В этом случае желаемая траектория задается лечащим врачом для непосредственного использования пациентом, и любое изменение может иметь значительные негативные последствия для здоровья пациента (повышение кровяного давления, скорости кровотока и пр.). Следовательно, существует необходимость в синтезе управления с итеративным обучением с учетом насыщения, основанной непосредственно на заданной желаемой траектории. Также в такой прикладной области как медицина, этическое одобрение при работе с пациентами, перенесшими инсульт, устанавливает строгий верхний предел применяемого сигнала, и синтез управления с учетом насыщения является одним из способов избежать нарушения этого ограничения.

Кроме того, ни в одной из этих работ не обсуждается влияние величины насыщения на точность. Показано, что эти алгоритмы обеспечивают уменьшение ошибки обучения, но нигде не отмечено как величина насыщения влияет на установившееся значение этой ошибки при неограниченном увеличении числа повторений. Автор и коллеги [21, 22, 23] впервые выделили главный эффект влияния нелинейностей на точность воспроизведения желаемой траектории при использовании управления с итеративным обучением. Эта особенность важна как в теоретическом аспекте, так и в прикладном, поскольку может оказаться, что эффект влияния нелинейности не позволит достичь требуемой точности. В данной статье, в отличие от [21, 22, 23] вектор выхода используется непосредственно без применения наблюдателя, что проще

в реализации. Кроме того, в отличие от указанных выше работ предполагается, что параметры системы точно неизвестны и описываются аффинными моделями неопределенности.

Таким образом, в данной статье автором предлагается новый метод синтеза управления с итеративным обучением на основе информации о измеряемом выходном сигнале с учетом нелинейности типа насыщения при непосредственном задании желаемой траектории (что крайне важно в большинстве приложений) и исследован эффект влияния указанной нелинейности на точность воспроизведения желаемой траектории. Предполагается, что параметры системы точно неизвестны и описываются аффинными моделями неопределенности. Для решения используется разработанный ранее автором и коллегами дивергентный метод векторных функций Ляпунова [24], который дает возможность применения эффективной техники линейных матричных неравенств [25]. Такая постановка задачи мотивирована тенденциями развития высокоточных интеллектуальных и аддитивных производств [26], [27], а также медицинских реабилитационных роботов [3].

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейную дискретную систему с неопределенными параметрами, функционирующую в повторяющемся режиме, которая на  $k$ -м повторении описывается следующей моделью в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} x_k(p+1) &= A(\delta(p))x_k(p) + B(\delta(p))\psi_k(p), \\ \psi_k(p) &= \text{sat}(u_k(p)), \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \quad p \in [0, N-1], \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_k(p) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – вектор состояния,  $u_k(p) \in \mathbb{R}^{n_u}$  – вектор управления  $y_k(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$  – вектор выходных переменных, называемый профилем повторения,  $k$  – номер повторения,  $N$  – продолжительность повторения,  $\psi_k(p) \in \mathbb{R}^{n_u}$  – функция насыщения, которая задается следующим образом:

$$\psi_k(p)_j = \text{sat}(u_k(p))_j = \begin{cases} U_j & \text{если } u_{k,j}(p) > U_j, \\ u_{k,j}(p) & \text{если } -U_j \leq u_{k,j}(p) \leq U_j, \\ -U_j & \text{если } u_{k,j}(p) < -U_j \end{cases} \quad (2)$$

для  $1 \leq j \leq n_u$ ,  $k \geq 0$ , где  $u_{k,j}(p)$  –  $j$ -я компонента  $u_k(p)$ , а  $U_j$  – положительная постоянная.

Модель неопределенности задается в виде:

$$A(\delta(p)) = A + \sum_{j=1}^l \delta_j(p)A_j, \quad B(\delta(p)) = B + \sum_{j=1}^l \delta_j(p)B_j, \quad (3)$$

где  $A$  и  $B$  – матрицы номинальной модели,  $A_j$  и  $B_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) – постоянные матрицы соответствующих размеров и  $\delta_j(p) \in [\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j]$ . Далее повсюду для компактности записи зависимость  $\delta$  от  $p$  указывать не будем.

Обозначим

$$\mathbf{D} = \{\delta = [\delta_1 \dots \delta_l]^T, \delta_j \in [\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j]\},$$

$$\mathbf{D}_v = \{\delta = [\delta_1 \dots \delta_l]^T, \delta_j \in \{\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j\}\},$$

где  $\mathbf{D}_v$  – конечное множество из  $2^l$  элементов.

Пусть  $y_{ref}(p)$ ,  $0 \leq p \leq N - 1$  – заданная эталонная траектория (желаемый профиль повторения). Тогда

$$e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p) \quad (4)$$

является ошибкой обучения на повторении  $k$ .

Задача состоит в нахождении такой последовательности управлений  $u_k(p)$ , которая, оставаясь ограниченной при всех  $k = 0, 1, \dots$ , обеспечивает достижение заданной точности воспроизведения эталонной траектории за конечное число повторений  $k^*$  и сохранение этой точности при дальнейших повторениях, т.е.

$$\|e_k(p)\| \leq e^*, \quad k \geq k^*, \quad 0 \leq p \leq N. \quad (5)$$

Поставленная задача будет решена, если указанная последовательность  $u_k(p)$  удовлетворяет условиям

$$\|e_k(p)\| \leq \kappa \rho^k + \mu, \quad \kappa > 0, \quad \mu \geq 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad (6)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k(p)\| = \|u_\infty(p)\|,$$

где  $u_\infty(p)$  – ограниченная переменная, обычно называемая обученным управлением.

Условия (6) означают, что ошибка обучения остается ограниченной для всех  $k$  и убывает не медленнее некоторой геометрической прогрессии.

**Замечание 1.** При отсутствии насыщения система (1) становится линейной и в этом случае, как показано в [24], в неравенстве (6)  $\mu = 0$  и

теоретически достижима любая точность, но при наличии нелинейности типа насыщения, как показано в [22], [23],  $\mu > 0$ , где величина  $\mu$  зависит от уровня насыщения и требуемая точность может не достигаться (неравенство  $k\rho^{k^*} + \mu \leq \epsilon^*$  не имеет решения при  $k^* > 0$ ). В разделе 5 этот факт детально анализируется на примере.

Закон управления с итеративным обучением на текущем будем формировать следующим образом

$$\psi_{k+1}(p) = \text{sat}(u_{k+1}(p)), \quad u_{k+1}(p) = \text{sat}(\psi_k(p) + \delta u_{k+1}(p)), \quad (7)$$

где  $\delta u_{k+1}(p)$  – корректирующая поправка, которая должна быть выбрана так, чтобы обеспечить условия сходимости (6).

### 3 Переход к эквивалентной 2D модели в виде повторяющегося процесса

Предположим, что для формирования управления доступен только вектор выхода и матрица  $CB$  является невырожденной. Это позволяет достаточно просто записать уравнение для ошибки обучения как функции числа повторений. Сначала запишем уравнения для приращения вектора состояния. Для этого введем в рассмотрение вспомогательную переменную

$$\eta_{k+1}(p+1) = x_{k+1}(p) - x_k(p). \quad (8)$$

В соответствии с (1) эта переменная удовлетворяют уравнению

$$\eta_{k+1}(p+1) = A(\delta)\eta_{k+1}(p) + B(\delta)\Delta\psi_{k+1}(p-1), \quad (9)$$

где  $\Delta\psi_{k+1}(p-1) = \psi_{k+1}(p-1) - \psi_k(p-1)$ . Ошибка обучения в соответствии с (1), (4), (8), (9) будет описываться уравнением

$$e_{k+1}(p) = -CA(\delta)\eta_{k+1}(p) + e_k(p) - CB(\delta)\Delta\psi_{k+1}(p-1). \quad (10)$$

Поскольку для формирования управления доступен только вектор выхода, то корректирующую поправку зададим в виде

$$\delta u_{k+1}(p) = K_1 C \eta_{k+1}(p+1) + K_2 e_k(p+1), \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9), (10) получим управляемую динамику в терминах приращения вектора состояния и ошибки обучения:

$$\begin{aligned} \eta_{k+1}(p+1) &= (A(\delta) + B(\delta)K_1C)\eta_{k+1}(p) + \\ &+ B(\delta)K_2e_k(p) + B\varphi_k(p), \\ e_{k+1}(p) &= -(CA(\delta) + CB(\delta)K_1C)\eta_{k+1}(p) + \\ &+ (I - CB(\delta)K_2)e_k(p) - CB(\delta)\varphi_k(p), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\varphi_k(p) = \Delta\psi_{k+1}(p-1) - \delta u_{k+1}(p-1)$ .

В более компактном виде уравнения замкнутой системы (12) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \eta_{k+1}(p+1) \\ e_{k+1}(p) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(\delta) + B(\delta)K_1C & B(\delta)K_2 \\ -CA(\delta) - CB(\delta)K_1C & I - CB(\delta)K_2 \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} \eta_{k+1}(p) \\ e_k(p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\delta) \\ -CB(\delta) \end{bmatrix} \varphi_k(p), \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначим  $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$ ,  $\zeta_k(p) = \begin{bmatrix} \eta_{k+1}^T(p) & e_k^T(p) \end{bmatrix}^T$ .

Из (2) следует ограничение

$$-2U_j \leq (\text{sat}(u_{k+1}(p)))_j - (\text{sat}(u_k(p)))_j \leq 2U_j, \quad j = 1, \dots, n_u. \quad (14)$$

и в соответствии с (2), (11) нетрудно видеть, что компоненты функции  $\varphi_k(p)$  удовлетворяют ограничениям

$$\begin{aligned} F_j[(\varphi_k(p))_j, (\zeta_k(p))_j] &= \left[ 1 + \frac{1}{2U_j}((\varphi_k(p))_j + (K\zeta_k(p))_j) \right] \\ &\times \left[ 1 - \frac{1}{2U_j}((\varphi_k(p))_j + (K\zeta_k(p))_j) \right] \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_u. \end{aligned} \quad (15)$$

Система (12) относится к классу нелинейных повторяющихся процессов, которые представляют собой наиболее распространенный частный случай так называемых 2D систем [1]. Дальнейшее исследование основано на анализе этой системы на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова [24].

## 4 Синтез на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова

Закон управления с итеративным обучением (7), (11) должен обеспечивать условия сходимости (6). Чтобы найти матрицы  $K_1$  и  $K_2$ , гарантирующие это свойство, воспользуемся дивергентным методом векторных функций Ляпунова для дискретных повторяющихся процессов [24].

Рассмотрим векторную функцию Ляпунова, определенную на траекториях системы (12):

$$V(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) = \begin{bmatrix} V_1(\eta_{k+1}(p)) \\ V_2(e_k(p)) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где  $V_1(\eta_{k+1}(p)) > 0$ ,  $\eta \neq 0$ ,  $V_2(e_k(p)) > 0$ ,  $e_k(p) \neq 0$ ,  $V_1(0) = 0$ ,  $V_2(0) = 0$ , и определим аналог оператора дивергенции вдоль траекторий этой системы как

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_d V(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) &= V_1(\eta_{k+1}(p+1)) - V_1(\eta_{k+1}(p)) + \\ &+ V_2(e_{k+1}(p)) - V_2(e_k(p)). \end{aligned} \quad (17)$$

**Теорема 1.** Если существуют векторная функция Ляпунова (16), положительные числа  $c_1, c_2, c_3$  и неотрицательное число  $\gamma$  такие, что

$$c_1 \|\eta_{k+1}(p)\|^2 \leq V_1(\eta_{k+1}(p)) \leq c_2 \|\eta_{k+1}(p)\|^2, \quad (18)$$

$$c_1 \|e_k(p)\|^2 \leq V_2(e_k(p)) \leq c_2 \|e_k(p)\|^2, \quad (19)$$

$$\mathcal{D}_d V(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) \leq \gamma - c_3 (\|\eta_{k+1}(p)\|^2 + \|e_k(p)\|^2), \quad (20)$$

то для системы (12) выполняются условия сходимости (6).

Доказательство совпадает с приведенным в [24] (Теорема 1).

Выберем компоненты векторной функции Ляпунова (16) в виде квадратичных форм

$$V_1(\eta) = \eta^T P_1 \eta, \quad V_2(e) = e^T P_2 e, \quad (21)$$

где  $P_1 > 0$  и  $P_2 > 0$  и вычислим дискретный аналог дивергенции этой функции в силу (13):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_d V(\eta, e) &= [(\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C})\zeta + \bar{B}(\delta)\varphi]^T \\ &P [(\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C})\zeta + \bar{B}(\delta)\varphi] - \zeta^T P \zeta, \end{aligned} \quad (22)$$



где  $P = \text{diag}[P_1 \ P_2]$ ,  $K = [K_1 \ K_2]$ ,  $\bar{A}(\delta) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -CA & I \end{bmatrix}$ ,  $\bar{B}(\delta) = \begin{bmatrix} B \\ -CB \end{bmatrix}$ ,  $\bar{C} = [C \ I]$ .

Пусть матрицы  $P$  и  $K$  удовлетворяют билинейному матричному неравенству

$$\begin{aligned} & (\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C})^T P (\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C}) - \\ & -P + Q + (K\bar{C})^T R K\bar{C} \leq 0, \quad \delta \in \mathbf{D}, \end{aligned} \tag{23}$$

где  $Q = \text{diag}[Q_1 \ Q_2] \succ 0$  и  $R \succ 0$  – весовые матрицы, которые подлежат выбору. Они аналогичны весовым матрицам в теории линейно-квадратичного регулятора, и их выбор осуществляется на основе результатов этой теории.

Следуя известным в технике линейных матричных неравенств преобразованиям [25], получим, что разрешимость неравенства (23) эквивалентна разрешимости системы линейных матричных неравенств относительно переменных  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ :

$$\begin{bmatrix} X & (\bar{A}(\delta)X + \bar{B}(\delta)Y\bar{C})^T & X & (Y\bar{C})^T \\ (\bar{A}(\delta)X + \bar{B}(\delta)Y\bar{C}) & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ Y\bar{C} & 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \delta \in \mathbf{D}_v, \tag{24}$$

$$\bar{C}X = Z\bar{C},$$

$$X = \text{diag} [X_1 \ X_2], \quad X_1 = \text{diag}[X_{11} \ X_{22}].$$

Если эти ЛМН разрешимы, то  $P = X^{-1}$  и

$$K = YZ^{-1}. \tag{25}$$

Обозначим

$$D_U = \text{diag}[1/4U_j^2], \quad T_U = D_U^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n_u \tag{26}$$

**Теорема 2.** Пусть для заданных ограничений (15) и некоторых матриц  $Q \succ 0$  и  $R \succ 0$  существует решение  $X = \text{diag}[X_1 \ X_2] \succ 0$ ,  $Y, Z$  системы (24), такое что ЛМН

$$\begin{bmatrix} -W & -(KW)^T & (\bar{A}(\delta)W + \bar{B}(\delta)KW)^T \\ -KW & -TT_U & TT_U\bar{B}(\delta)^T \\ (\bar{A}(\delta)W + \bar{B}(\delta)KW) & \bar{B}(\delta)TT_U & -W \end{bmatrix} \prec 0, \quad \delta \in \mathbf{D}_v \tag{27}$$

разрешимо относительно переменных  $W = \text{diag}[W_1 \ W_2] \succ 0$ ,  $T = \text{diag}[T_j] \succ 0$ ,  $j = 1, \dots, n_u$ , при  $K$  определяемым (25). Тогда закон управления с итеративным обучением (7), (11) обеспечивает условия сходимости (6).

*Доказательство.* Выберем компоненты векторной функции (16) в виде квадратичных форм вида (21), где  $P_1 \succ 0$  и  $P_2 \succ 0$  и образуем блочную матрицу  $P = \text{diag}[P_1 \ P_2]$ . Поскольку система (24) разрешима, определим  $K$  по формуле  $K = YZ^{-1}$ . Вычисляя дивергенцию (17) вдоль траекторий (12) получим

$$\mathcal{D}_d V(\eta, e) = [(\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C})\zeta + \bar{B}(\delta)\varphi]^T P[(\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C})\zeta + \bar{B}(\delta)\varphi] - \zeta^T P \zeta. \quad (28)$$

Поскольку  $V_1(\eta_{k+1}(p)) \succ 0$  и  $V_2(e_k(p)) \succ 0$ , то справедливы условия (18) и (19) Теоремы 1.

Для выполнения условия (20) Теоремы 1 при выполнении ограничений (15) достаточно, чтобы для всех  $\varphi$  и  $\zeta$  выполнялось неравенство

$$\mathcal{D}_d V(\eta, e) + \sum_{j=1}^{n_u} d_j F_j[(\varphi_k)_j, (\zeta_k)_j] \leq \gamma - \epsilon \|\zeta\|^2, \quad (29)$$

где  $d_j$ ,  $j = 1, \dots, n_u$  – положительные постоянные и  $\epsilon$  – достаточно малое положительное число [28]. При выполнении (29) для всех  $\varphi$  и  $\zeta$  получим, что

$$\mathcal{D}_d V(\eta, e) \leq \gamma - \epsilon \|\zeta\|^2,$$

для всех  $\varphi$  и  $\zeta$ , и следовательно, при ограничениях (15). Таким образом все условия теоремы 1 будут выполнены. Условие (29) можно переписать в виде

$$\mathcal{D}_d V(\eta, e) - \zeta^T (K\bar{C})^T D D_U K \bar{C} \zeta - 2\zeta^T (K\bar{C})^T D D_U \varphi - \varphi^T D D_U \varphi + \text{tr}(D) \leq \gamma - \epsilon \|\zeta\|^2, \quad (30)$$

где  $D = \text{diag}[d_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_u$  и  $\epsilon$  – достаточно малое положительное число.

В случае, когда  $n_u = 1$  этот подход, известный как  $S$ -процедура, гарантирует, что (29) является не только достаточным, но и необходимым условием выполнения (20) при ограничениях (15) [29].

Выбирая  $\gamma = \text{tr}(D)$  получим, что условие (20) теоремы 1 выполняется, если

$$[(\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C})\zeta + \bar{B}(\delta)\varphi]^T P[(\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C})\zeta + \bar{B}(\delta)\varphi] - \zeta^T P \zeta - 2\zeta^T (K\bar{C})^T D D_U \varphi - \varphi^T(t) D D_U \varphi < 0, \quad \delta \in \mathbf{D}, \quad (31)$$

или

$$[\zeta^T \varphi^T] \bar{M}_i [\zeta^T \varphi^T]^T \prec 0,$$

где

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} (\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C})^T P(\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C}) - P & & \\ \bar{B}(\delta)^T P(\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C}) - DD_U K\bar{C} & & \\ & (\bar{B}(\delta)^T P(\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C}) - DD_U K\bar{C})^T & \\ & & \bar{B}(\delta)^T P\bar{B}(\delta) - DD_U \end{bmatrix}, \delta \in \mathbf{D},$$

Матрица  $\bar{M}$  может быть переписана как

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} -P & -(K\bar{C})^T DD_U \\ -DD_U K\bar{C} & -DD_U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C})^T \\ \bar{B}(\delta)^T \end{bmatrix} P [(\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C}) \bar{B}(\delta)], \delta \in \mathbf{D}.$$

По лемме о дополнении Шура  $\bar{M} \prec 0$  если и только если

$$\begin{bmatrix} -P & -(K\bar{C})^T DD_U & (\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C})^T \\ -DD_U(K\bar{C}) & -DD_U & \bar{B}(\delta)^T \\ (\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C}) & \bar{B}(\delta) & -P^{-1} \end{bmatrix} \prec 0, \delta \in \mathbf{D}_v. \tag{32}$$

Обозначим  $W = P^{-1}$ ,  $T = D^{-1}$ . Умножая (32) на  $\text{diag}[P^{-1} [DD_U]^{-1} I]$  справа и слева получим, что справедливо (27). Теорема доказана.  $\square$

## 5 Пример

На рисунке 1 представлен многоосный порталный робот с конвейером. Робот состоит из трех отдельных перпендикулярных друг другу осей, установлен над цепной конвейерной системой и его задача – забрать груз с раздаточного устройства и поместить его на движущийся конвейер. Робот должен точно синхронизировать скорость и свое положение относительно конвейера, прежде чем разместить груз на конвейере. Многие промышленные процессы включают в себя действия, аналогичные тем, что совершает данный робот, например, промышленные процессы консервирования пищевых продуктов, розлив в бутылки или сборка автомобилей. Все эти приложения требуют точного

контроля отслеживания для каждого выполнения в течение ограниченного периода времени с минимальным уровнем ошибок, чтобы максимизировать производительность и минимизировать потери продукта из-за дефектов производства [1].

Рассмотрим модель вертикальной оси  $Z$ . Ось  $Z$  состоит из линейной шарико-винтовой передачи, приводимой в движение вращающимся бесщеточным двигателем постоянного тока. В [30] на основе тестов частотной характеристики была получена передаточная функция с непрерывным временем

$$G_z(s) = \frac{15.8869(s + 850.3)}{s(s^2 + 707.6s + 3.377 \cdot 10^5)}. \quad (33)$$



Рис. 1: Многоосный порталный робот

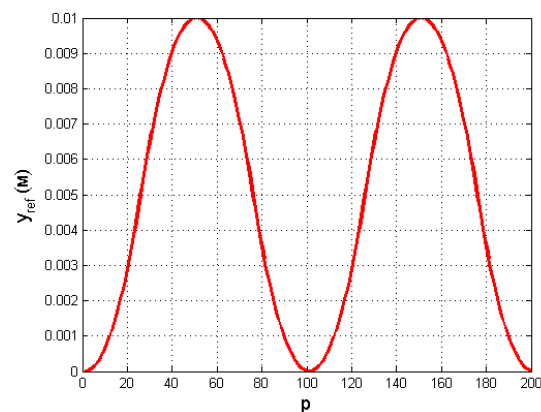


Рис. 2: Желаемая траектория движения вдоль вертикальной оси  $Z$ .

Матрицы пространства состояний дискретного времени были получены с помощью стандартных команд Matlab `ss` и `c2d` с шагом дискретизации  $T_s = 0,01$  с.

Желаемая траектория движения робота представлена на рисунке 2 и имеет продолжительность  $T = 2$  с. Целью управления является воспроизведение заданной желаемой траектории движения с точностью до 1 мм. на всем протяжении движения.

Предполагается, что параметры системы точно неизвестны. Для простоты дальнейшего анализа, чтобы сосредоточить внимание на влиянии насыщения, ограничимся неопределенностями только по матрице параметров  $B_c(\delta)$ :

$$B_c(\delta) = B_c + g(\delta)B_c, \quad g(\delta)B_c = \delta B_c, \quad \delta = [\underline{g}; \bar{g}],$$

где  $\underline{g} = -0.2$ ,  $\bar{g} = 0.2$ .

В соответствии с результатами предыдущего раздела закон управления с итеративным обучением имеет вид

$$u_k(p) = \text{sat}(u_{k-1}(p) + K_1(x_k(p) - x_{k-1}(p)) + K_2 e_{k-1}(p + 1)). \quad (34)$$

где  $K_1$  и  $K_2$  вычисляются в соответствии с условиями Теоремы 1. Решая линейные матричные неравенства (24) при

$$Q = \text{diag}[Q_1 \ Q_2], \quad Q_1 = I, \quad Q_2 = 5 \cdot 10^2, \quad R = 10^{-4},$$

получим

$$K_1 = -2188.8, \quad K_2 = 1801.2.$$

Выбор параметров  $Q$  и  $R$  осуществлялся «вручную» по принципу выбора весовых матриц в теории линейно-квадратичного регулятора. Для подобранных значений параметров  $Q$  и  $R$  неравенство (27) Теоремы 1 выполняется для всех рассматриваемых далее значений величины насыщения.

При отсутствии ограничений на управление максимальное значение управляющего сигнала составляет  $U = 1.224$ , оно соответствует нижней границе неопределенности и представлено на рисунке 3.

Величина ограничения на точность слежения за желаемой траекторией оценивается по среднеквадратической ошибке обучения.

$$\text{RMS}(e_k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \|e_k(p)\|^2} \quad (35)$$

При отсутствии ограничений на управление требуемая точность 1 мм достигается за 22 итерации для номинальной модели и при верхнем значении неопределенности и за 35 итераций при нижнем значении неопределенности. Данный случай представлен на рисунке 4.

В случае ограничения управляющего сигнала до  $U = 1$ , точность слежения не изменится для номинальной модели и на верхней границе неопределенности, но уменьшится в 14 раз на нижней границе области неопределенности. Такой разброс в точности объясняется нехваткой энергии на нижней границе неопределенности – мощности привода при номинальном значении неопределенного параметра и на верхней границе неопределенности достаточно, а на нижней границе мощность мала и точность достигается «на пределе». В связи с этим очень важно согласовывать требуемую точность с мощностью привода.

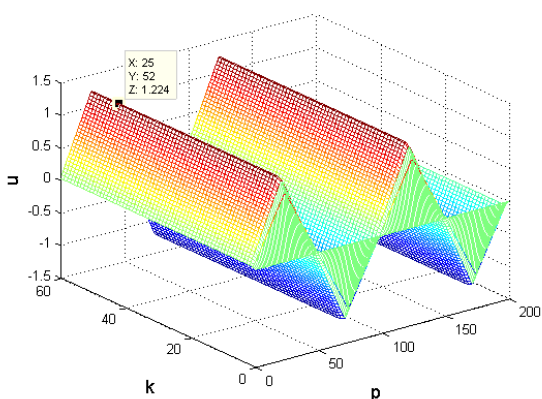


Рис. 3: Максимальное значение управляющего сигнала  $U = 1.224$  при отсутствии ограничений.

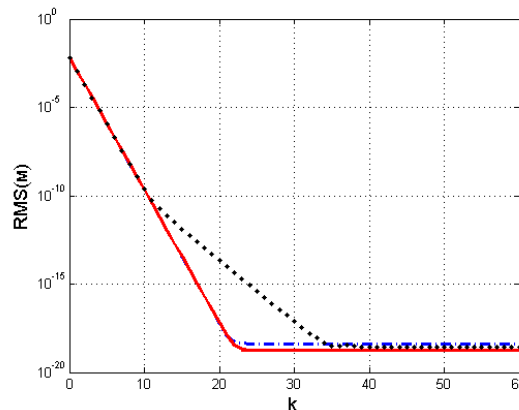


Рис. 4: Изменение среднеквадратической ошибки обучения **при отсутствии насыщения** для номинальной системы (сплошная красная линия), для системы с верхним значением неопределенного параметра (штрихпунктирная синяя линия) и для системы нижним значением неопределенного параметра (пунктирная черная линия).

Объясняется это тем, что естественная граница обученного управления для номинальной модели и верхнего значения области неопределенности лежит внутри указанной области насыщения и уровень насыщения  $U = 1$  для этих двух случаев допустим. Для нижней же границы естественная граница обученного управления (равная максимальному значению управляющего сигнала при отсутствии ограничений) составляет  $U = 1.224$  и, очевидно, мощность  $U = 1$  мала и, поэтому, точность достигается «на пределе». Данный случай представлен на рисунке 5.

В связи с этим очень важно согласовывать требуемую точность с мощностью привода. Например, как представлено на рисунке 6, если очень сильно ограничить управляющий сигнал, например до  $U = 0.5$ , требуемая точность может и не достигаться, поскольку мощности привода будет не хватать. В рассматриваемом случае предельная ошибка стабилизируется относительно некоторого значения, отличного от нуля, но требуемая точность 1 мм достигается только на верхней границе области неопределенности. Это происходит потому, что УИО корректирует входной сигнал не меняя структуры системы, поэтому достижение требуемой точности напрямую зависит от мощности входного сигнала. В случае нелиней-

ности типа насыщения на входе, мощность сигнала ограничивается, предельная ошибка при  $k \rightarrow \infty$  стабилизируется относительно некоторого значения, отличного от нуля и требуемая точность может не достигаться.

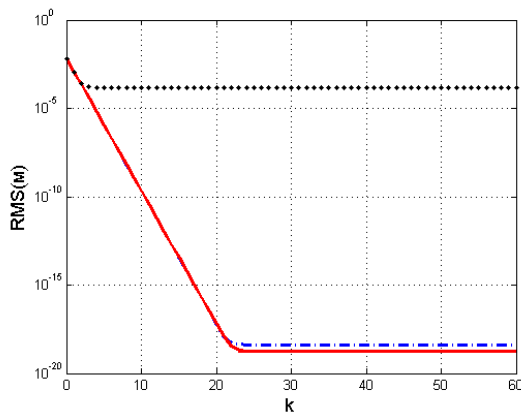


Рис. 5: Изменение среднеквадратической ошибки обучения при уровне насыщения  $U=1$  для номинальной системы (сплошная красная линия), для системы с верхним значением неопределенного параметра (штрихпунктирная синяя линия) и для системы с нижним значением неопределенного параметра (пунктирная черная линия).

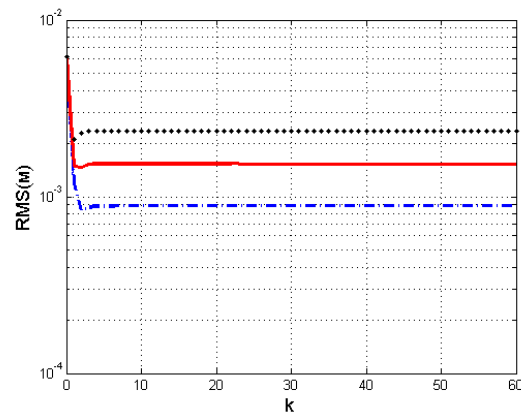


Рис. 6: Изменение среднеквадратической ошибки обучения при уровне насыщения  $U=0.5$  для номинальной системы (сплошная красная линия), для системы с верхним значением неопределенного параметра (штрихпунктирная синяя линия) и для системы с нижним значением неопределенного параметра (пунктирная черная линия).

При отсутствии насыщения обученное управление имеет естественную границу и наилучший результат будет достигнут, когда эта граница лежит внутри области насыщения. В рассматриваемом примере естественная граница обученного управления лежит внутри области насыщения при номинальном значении неопределенного параметра и на верхней границе неопределенности, поэтому точность достигается та же, что при отсутствии ограничений на управление, но на нижней границе неопределенности естественная граница обученного управления выходит за область насыщения и поэтому точность достигается «на пределе». Таким образом, в реальных производственных задачах необходимо тщательно анализировать влияние насыщения на снижение точности, которое, как показывает пример, может быть существенным, и этот анализ использовать в качестве рекомендации для выбора привода нужной мощности.

## 6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для системы, функционирующей в повторяющемся режиме и параметры которой неизвестны точно и описываются аффинными моделями неопределенности, получен новый метод синтеза управления с итеративным обучением на основе информации о измеряемом выходном сигнале с учетом нелинейности типа насыщения при непосредственном задании желаемой траектории. На примере модели реального порталного робота произведено исследование влияния величины насыщения на точность воспроизведения желаемой траектории. В отличие от линейного случая, при наличии нелинейности типа насыщения ошибка обучения сходится к некоторому постоянному установившемуся значению отличному от нуля. Очевидно, это значение может превышать требуемую точность выполнения операции роботом. Это связано с тем, что, как уже отмечалось во введении, управление с итеративным обучением не меняет параметры системы, а меняет только входной сигнал, и может оказаться так, что мощность этого сигнала недостаточна для слежения за желаемой траекторией повторения. Таким образом, при проектировании реальных систем управления с итеративным обучением крайне важно согласовывать требуемую точность выполнения операции с мощностью привода, поскольку малая величина насыщения может приводить к недопустимо большой установившейся ошибке обучения.

## 7 Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01044, <https://rscf.ru/project/23-71-01044/>

## Список литературы

- [1] Rogers E., Chu B., Freeman C., Lewin P. Iterative Learning Control Algorithms and Experimental Benchmarking. John Wiley, 2023.
- [2] Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.G. A survey of iterative learning // IEEE Control Systems Magazine. 2006. V. 26. No. 3. pp. 96-114.
- [3] Freeman C.T., Rogers E., Hughes A.-M., Burrige J.H., Meadmore K.T. Iterative Learning Control in Health Care: Electrical Stimulation



- and Robotic-Assisted Upper-Limb Stroke Rehabilitation // IEEE Control Systems. 2012. V. 32, Issue 1. pp. 18-43.
- [4] Meadmore K. L., Exell T. A., Hallewell E., Hughes A.-M., Freeman C. T., Kutlu M., Benson V., Rogers E., Burrige J. H. The application of precisely controlled functional electrical stimulation to the shoulder, elbow and wrist for upper limb stroke rehabilitation: a feasibility study, *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 11(1):105, 2014.
- [5] Sakariya S. E., Freeman C. T., and Yang K., Iterative learning control of functional electrical stimulation in the presence of voluntary user effort // *Control Engineering Practice*, vol. 96, pp. 1–11, 2020.
- [6] Ketelhut M., Stemmler S., Gesenhues J., Hein M., Abel D., Iterative learning control of ventricular assist devices with variable cycle durations, *Control Engineering Practice*, vol. 83, pp. 33-44, 2019.
- [7] Barton K., Kingston D. Systematic Surveillance for UAVs: A Feedforward Iterative Learning Control Approach // 2013 American Control Conference (ACC). 2013. pp. 5917-5922
- [8] Freeman C. T., Tan Y. Iterative Learning Control With Mixed Constraints for Point-to-Point Tracking // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2013. Vol. 21, Issue 3. pp. 604-616.
- [9] Tutty O., Blackwell M., Rogers E., Sandberg R. Iterative learning control of wind turbine smart rotors with pressure sensors // 2013 American Control Conference (ACC). 2013. pp. 967-979.
- [10] Nowicka W.N., Chu B., Tutty O.R., Rogers E. Reducing Aerodynamic Load Fluctuation in Wind Turbines using Iterative Learning Control laws Designed Using Reduced Order Models of the Flow // *American Control Conference (ACC)*. 2022. pp. 4242-4247.
- [11] Johansen S.V., Jensen M.R., Chu B., Bendtsen J.D., Mogensen J., Rogers E. Broiler FCR Optimization Using Norm Optimal Terminal Iterative Learning Control // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2021. Vol. 29, No. 2. pp. 580-592.
- [12] Sebastian G., Tan Y., Oetomo D. Convergence analysis of feedback-based iterative learning control with input saturation // *Automatica*. 2019. V. 101. pp. 44-52.

- [13] Sebastian G. , Tan Y. , Oetomo D. , Mareels I. Iterative learning control for linear time-varying systems with input and output constraints // Australian & New Zealand Control Conference (ANZCC), Melbourne, Australia, December 2018, pp. 87-92.
- [14] Zhang J., Meng D. Convergence Analysis of Saturated Iterative Learning Control Systems With Locally Lipschitz Nonlinearities // IEEE Transactions on neural networks and learning systems. 2020. V. 31, No. 10. pp. 4025-4035.
- [15] Xu J.-X., Tan Y., Lee T.-H. Iterative learning control design based on composite energy function with input saturation // Automatica, vol. 40, pp. 1371-1377, 2004.
- [16] Yu Q., Hou Z., Chi R. Adaptive iterative learning control for nonlinear uncertain systems with both state and input constraints // J. Franklin Institute, vol. 353, pp. 3920-3943, 2016.
- [17] Ljesnjanin M., Tan Y., Oetomo D., Freeman C.T. Spatial iterative learning control: Systems with input saturation // American Control Conference, Seattle, USA, May 2017, pp. 5121-5126.
- [18] Zhang R., Chi R. Iterative learning control for a class of MIMO nonlinear system with input saturation constraint // Chinese Control Conference, Dalian, China, July 2017, pp. 3543-3547.
- [19] Mishra S., Topcu U., Tomizuka M. Iterative learning control with saturation constraints // American Control Conference, St. Louis, MO, USA, June 2009, pp. 943-948.
- [20] Wei Z.-B., Quan Q., Cai K.-Y. Output feedback ILC for a class of nonminimum phase nonlinear systems with input saturation: An additive-state-decomposition based method // IEEE Trans. Autom. Control, vol. 62, no. 1, pp. 502-508, 2017.
- [21] Pakshin P., Emelianova J., Rogers E., Galkowski K. Iterative learning control for switched systems in the presence of input saturation // IFAC-PapersOnLine. 2020. Vol. 53. pp. 1444-1449.
- [22] Pakshin P., Emelianova J., Rogers E., Galkowski K. Iterative Learning Control with Input Saturation // IFAC-PapersOnLine. 2019. Vol. 52, No. 29. pp. 338-343.

- [23] Pakshin P., Mandra S., Emelianova J., Erwinski K., Galkowski K. Experimentally Validated Vector Lyapunov Function-Based Iterative Learning Control Design Under Input Saturation // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2024. Vol. 32, No. 1. pp. 189-201.
- [24] Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Galkowski K., Rogers E. Dissipativity and Stabilization of Nonlinear Repetitive Processes. Systems & Control Letters. 2016. V. 91. pp. 14-20.
- [25] Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
- [26] Qamsane Y., Balta E.C., Moyné J., Tilbury D., Barton K. Dynamic Rerouting of Cyber-Physical Production Systems in Response to Disruptions Based on SDC Framework // 2019 American Control Conference (ACC). 2019. P. 3650-3657
- [27] Afkhami Z., Hoelzle D. J., Barton K., Robust Higher-Order Spatial Iterative Learning Control for Additive Manufacturing Systems // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2023. V. 31. P. 1692-1707.
- [28] Tarbouriech S., Garcia G., Gomes da Silva Jr. J.M., Queinnec I. Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators. London: Springer-Verlag. 2011.
- [29] Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A. Kh. , Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. London: World Scientific Press. 2004.
- [30] Hladowski L., Galkowski K., Cai Z., Rogers E., Freeman C., Lewin P. Experimentally Supported 2D Systems Based Iterative Learning Control Law Design for Error Convergence and Performance // Control Eng. Pract. 2010. V. 18. pp. 339-348.

## Output Based Iterative Learning Control with Saturation

Emelianova J.P.

Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State  
Technical University

emelianovajulia@gmail.com

**Abstract.** The paper considers a linear discrete-time system operating in a repetitive mode to track a reference trajectory with a given accuracy. The system parameters are incompletely known and are described by the affine uncertainty model. A new iterative learning control design method based on information about the measured output signal is obtained; this method takes into account the saturation-type nonlinearity inherent in the actuators of robots and allows achieving the required accuracy. The problem statement is motivated by the development trends of high-precision smart and additive manufacturing as well as medical rehabilitation robots. An example illustrates the effectiveness of this method.

**Keywords:** iterative learning control, input saturation, parameter uncertainties, vector Lyapunov function.

**Acknowledgements.** The work was supported by the Russian Science Foundation under grant 23-71-01044, <https://rscf.ru/en/project/23-71-01044/>