ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 3, 2024
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных
дифференциальных уравнений

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью инвариантов дискретных преобразований

Хакимова З.Н., Атоян А.А.

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург

vka@mil.ru

Аннотация. Исследуются обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го и 3-го порядков с мультипликативными правыми частями 2-го и 3-го порядков. Рассмотрен метод понижения порядка уравнений и получения точных решений дифференциальных уравнений с помощью преобразований, которые являются инвариантами образующих циклических дискретных групп преобразований, замкнутых в рассматриваемых классах дифференциальных уравнений.
Метод дискретных инвариантов является альтернативой методу «размножения» интегрируемых случаев в исследуемом классе дифференциальных уравнений по построенной дискретной группе преобразований, действующих в данном классе уравнений.
Приведены примеры, иллюстрирующие метод дискретных инвариантов.
Ключевые слова: Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), класс обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера (ОУЭФ), дискретная группа преобразований, дискретно-групповой анализ (ДГА), точное решение дифференциального уравнения, инвариант дискретного преобразования, конкомитант.

1. Введение

Одной из главных задач теории дифференциальных уравнений является задача нахождения точных решений уравнений. Важнейшую роль в решении этой задачи сыграло открытие В.Ф. Зайцевым дискретных групп преобразований для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [1, 2].

В. Ф. Зайцев разработал дискретно-групповой анализ (ДГА) ОДУ [1-3], основой которого является поиск дискретных преобразований, замкнутых в исследуемом классе дифференциальных уравнений, далее построение дискретной группы преобразований и её графа. Важным следствием ДГА ОДУ является получение точных решений уравнений рассматриваемого класса. Для нахождения решений уравнений в процессе ДГА ОДУ используются 2 основных метода.

Первый метод, высоко алгоритмизированный, – это метод «размножения» интегрируемых случаев в исследуемом классе уравнений по построенной группе дискретных преобразований, замкнутых в данном классе уравнений. Метод «размножения» базируется на том факте, что решения уравнений связаны теми же преобразованиями, что и сами уравнения. С помощью метода «размножения» получены точные решения сотен и тысяч ОДУ, принадлежащих многим классам уравнений [3-5], тогда как в известном справочнике Камке [6] их содержится на один-два порядка меньше.

Данная статья посвящена второму методу нахождения точных решений ОДУ, альтернативному к первому, – с помощью дискретных инвариантов. Этот метод разработан значительно меньше ([2, 3, 7-10]). Для иллюстрации этого метода рассмотрены ОДУ 2-го и 3-го порядков с мультипликативными правыми частями, содержащими экспоненциальные, степенные функции, а также произвольные функции в качестве обобщения.

В изучаемых классах ОДУ найдены дискретно-инвариантные уравнения, являющиеся инвариантами некоторых образующих дискретных групп преобразований. Затем найдены преобразования-инварианты данных дискретных преобразований, с помощью которых понижается порядок исходных ОДУ и находятся точные решения некоторых спецификаций исследуемых дифференциальных уравнений.

2. Поиск уравнения – точного инварианта дискретного преобразования в классе ОУЭФ

Рассмотрим класс ОДУ 2-го порядка со степенной правой частью, называемый классом обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера (ОУЭФ) [1, 2]:

$$y''_{xx} = Ax^k y^l (y'_x)^m. \tag{1}$$

Будем обозначать его вектором параметров $(k, l, m|A)$.

Класс уравнений (1) имеет много приложений, особенно в механике [3]. Класс уравнений (1) достаточно хорошо изучен, проведён его подробный ДГА [1-5].

В частности, известно точечное преобразование, являющееся образующей циклической дискретной группы 2-го порядка:

$$\mathbf{r}: x \rightleftarrows y,\ (k, l, m|A) \xrightarrow{r} (l,, k, 3-m|-A),\ \boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{E}. \tag{2}$$

Найдём точный $\boldsymbol{r}$-инвариант (с точностью до коэффициента), приравняв соответствующие параметры исходного и преобразованного уравнений в (2). В результате получим уравнение – точный инвариант $\boldsymbol{r}$-преобразования (2):

$$y''_{xx} = A(xy)^k (y'_x)^{\frac{3}{2}} \tag{3}$$

или

$$\left(k, k, \tfrac{3}{2}|A\right).$$

3. Нахождение конкомитанта. Понижение порядка $\boldsymbol{r}$-инвариантного уравнения

Запишем уравнение (3) в виде

$$a\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^{\frac{3}{2}}} = aA(xy)^k. \tag{4}$$

Сделаем следующую замену:

$$\begin{cases} \theta = xy \\ \dot{V}_\theta = a\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Так как $\dot{V}_\theta = \frac{V'_x}{\theta'_x}$, то

$$V'_x = \theta'_x \dot{V}_\theta = \frac{a(xy'_x + y)y''_{xx}}{(y'_x)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5}$$

Проинтегрировав (5), находим

$$V = 2a\frac{xy'_x - y}{(y'_x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Пусть $a = \frac{1}{2}$, тогда получаем преобразование

$$\begin{cases} \theta = xy \\ V = \frac{xy' - y}{(y'_x)^{\frac{1}{2}}}, \end{cases} \tag{6}$$

называемое конкомитантом – согласованным инвариантом данного дискретного преобразования $(\boldsymbol{r})$ [3].

Функция θ в (6) является точным инвариантом преобразования $\boldsymbol{r}$, а функция V – с точностью до знака.

С помощью конкомитанта (6) понижается порядок исходного уравнения (3), оно приводится к легко разрешимому уравнению 1-го порядка с разделяющимися переменными:

$$\dot{V}_\theta = \frac{A}{2}\theta^k, \tag{7}$$

общее решение которого при $k \neq -1$:

$$V = \frac{A}{2(k+1)}(\theta^{k+1} + C_2). \tag{8}$$

4. Обращение конкомитанта. Нахождение общего решения инвариантного уравнения

Одному из авторов данной статьи удалось найти преобразование, обратное конкомитанту (6):

$$x = \frac{\theta}{C_1\varphi},\ y = C_1\varphi,\ \varphi(\theta, V) = \frac{V^2+4\theta \pm V\sqrt{V^2+4\theta}}{2\theta}. \tag{9}$$

Для этого, в частности, пришлось решить систему уравнений

$$xy'_x - V(y'_x)^{\frac{1}{2}} - y = 0,\ x = \frac{\theta}{y}.$$

Теперь общее решение инвариантного уравнения (3) в параметрическом виде (θ-параметр) легко находится: надо подставить решение (8) уравнения (7) в (9).

Замечание 1. В справочниках [3-5] решение уравнения (3) выражено через функцию f, для нахождения которой необходимо решить непростое функциональное уравнение (оно не решено в [3-5]). Тогда как в данной статье после обращения конкомитанта (6) общее решение уравнения (3) приводится в явном виде (9), (8).

5. Нахождение r-инварианта в более общем классе уравнений степенного вида и его решение

Расширим класс ОУЭФ (1), добавив один сомножитель в правую часть:

$$y''_{xx} = Ax^k y^l (y'_x)^m (xy'_x - y)^n, \tag{10}$$

учитывая тот факт, что скобка $(xy'_x - y)$ содержится в функции V конкомитанта (6). Обозначим его вектором $(k, l, m, n|A)$.

Класс уравнений (10) начал впервые исследоваться в [9-11]. Оказалось, что преобразование $\boldsymbol{r}$ (2) замкнуто и в этом классе уравнений (10):

$$\mathbf{r}\colon x \rightleftarrows y,\ (k, l, m, n|A) \xrightarrow{r} (l, k, 3-m-n, n|(-1)^{1-n}A). \tag{11}$$

Приравняв соответствующие показатели степеней в (11), найдем $\boldsymbol{r}$-инвариант в классе уравнений (10) с точностью до коэффициента:

$$\left(k, k, \frac{3-n}{2}, n|A\right),$$

который можно записать в виде:

$$\frac{y''_{xx}}{2(y'_x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{A}{2}(xy)^k \left(\frac{xy'_x - y}{(y'_x)^{\frac{1}{2}}}\right)^n. \tag{12}$$

С помощью уже найденного конкомитанта (6) аналогично понижается порядок уравнения (12), и оно приводится так же, как и (3), к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\dot{V}_\theta = \frac{A}{2}\theta^k V^n, \tag{13}$$

общее решение которого при $k \neq -1, n \neq 1$:

$$V = a(\theta^{k+1} + C_2)^{\frac{1}{1-n}}, a = \left(\frac{A(1-n)}{2(k+1)}\right)^{\frac{1}{1-n}}. \tag{14}$$

Подставив (14) в (9), получаем общее решение уравнения (12).

К $\boldsymbol{r}$-инварианту (12) можно применить также замечание 1 (п. 4), которое было сформулировано для $\boldsymbol{r}$-инварианта (3).

6. Решение r-инвариантного уравнения с произвольными функциями

Заменим в (12) степенные функции на произвольные:

$$\frac{y''_{xx}}{2(y'_x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{A}{2} f(xy) g\left(\frac{xy'_x - y}{(y'_x)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

или

$$y''_{xx} = A f(xy) g\left(\frac{xy'_x - y}{(y'_x)^{\frac{1}{2}}}\right)(y'_x)^{\frac{3}{2}}. \tag{15}$$

Понижением порядка с помощью конкомитанта (6) $\boldsymbol{r}$-инвариант (15) приводится к уравнению 1-го порядка с произвольными функциями:

$$\dot{V}_\theta = \frac{A}{2} f(\theta) g(V),$$

общее решение которого в явном виде:

$$V = G^{-1}\big(F(\theta)\big), F(\theta) = \frac{A}{2}\int f(\theta)d\theta + C_2, G(\zeta) = \int \frac{d\zeta}{g(\zeta)}. \tag{16}$$

Подстановка функции V (16) в обращение конкомитанта (9) даёт общее решение уравнения (15).

Замечание 2. Показатель «-1» в (16) означает обратную функцию.

7. Получение r-инвариантного дифференциального уравнения 3-го порядка. Теорема о сохранении свойства дискретной инвариантности при дифференцировании

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 1. (О производных дискретного инвариантного преобразования)

Если функции $\theta = \theta(x, y, y_x', \dots)$ и $V = V(x, y, y_x', \dots)$ являются инвариантами некоторого дискретного преобразования $\boldsymbol{z}$, то все производные $\dot V(\theta)$, $\ddot V(\theta)$,…, $\overset{(n)}{V}(\theta)$,… также являются инвариантами этого же преобразования $\boldsymbol{z}$.

Эта теорема проверяется, в частности, для конкомитанта (6): функции θ и V в (6) являются $\boldsymbol{r}$-инвариантами (с точностью до знака). Легко видеть, что и $\dot V_\theta = \frac{y_{xx}''}{2(y_x')^{\frac{3}{2}}}$ также является $\boldsymbol{r}$-инвариантом (также с точностью до знака).

Из теоремы 1 следует, что и вторая производная $\ddot V_{\theta\theta} = \frac{y_{xxx}''' y_x' - \frac{3}{2}(y_{xx}'')^2}{(xy_x'+y)(y_x')^{\frac{5}{2}}}$ также должна быть $\boldsymbol{r}$-инвариантом – и это легко проверяется.

Таким образом, можно записать аналогично $\boldsymbol{r}$-инвариантное уравнение 3-го порядка с произвольными функциями

$$\frac{y_{xxx}''' y_x' - \frac{3}{2}(y_{xx}'')^2}{(xy_x'+y)(y_x')^{\frac{5}{2}}} = Af(xy)g\left(\frac{xy_x'-y}{(y_x')^{\frac{1}{2}}}\right)h\left(\frac{y_{xx}''}{2(y_x')^{\frac{3}{2}}}\right)$$

или

$$y_{xxx}''' = \frac{3}{2}(y_x')^{-1}(y_{xx}'')^2 + Af(xy)g\left(\frac{xy_x'-y}{(y_x')^{\frac{1}{2}}}\right)h\left(\frac{y_{xx}''}{2(y_x')^{\frac{3}{2}}}\right)(xy_x'+y)(y_x')^{\frac{3}{2}}, \tag{17}$$

которое с помощью конкомитанта (6) приводится к уравнению 2-го порядка с мультипликативной правой частью:

$$\ddot V_{\theta\theta} = Af(\theta)g(V)h(\dot V_\theta). \tag{18}$$

Дискретные симметрии и разрешимые спецификации уравнения (18) впервые начали изучаться В. Ф. Зайцевым (см., например, [3]), а далее их исследование было продолжено в работах [12-16].

8. Получение точных решений для спецификаций r-инвариантного уравнения 3-го порядка. Примеры

Пример 1. В мультипликативном уравнении 2-го порядка (18) положим:

$$f(\theta) = e^\theta,\ g(V) = V^l,\ h(\dot V_\theta) = (\dot V_\theta)^m,$$

тогда уравнение (18) будет иметь вид:

$$\ddot V_{\theta\theta} = Ae^\theta V^l (\dot V_\theta)^m. \tag{19}$$

В частном случае $l = -\frac{1}{2}, m = \frac{3}{2}$ для уравнения (19):

$$\ddot V_{\theta\theta} = Ae^\theta V^{-\frac{1}{2}}(\dot V_\theta)^{\frac{3}{2}}$$

общее решение в параметрическом виде [5] (τ – параметр):

$$\theta = \tau^2 - ln(A\psi), V = C_2\left(2\tau\psi - e^{\tau^2}\right)^2, \psi = \int e^{\tau^2} d\tau + C_2. \tag{20}$$

Подставив функции $\theta(\tau)$ и $V(\tau)$ из (20) в обращение конкомитанта (9) (учитывая, что $d\theta = \theta_\tau' d\tau$), получим общее решение в параметрическом виде уравнения 3-го порядка – частного случая уравнения (17):

$$y_{xxx}''' = \frac{3}{2}(y_x')^{-1}(y_{xx}'')^2 + \frac{A}{2\sqrt{2}} e^{xy}(y_x')^{-\frac{1}{2}}(y_{xx}'')^{\frac{3}{2}}(xy_x' + y), \tag{21}$$

содержащего в правой части экспоненциальную и степенные функции.

Пример 2. Пусть в уравнении (18) функции f, g и h имеют степенной вид:

$$f(\theta) = \theta^k, g(V) = V^l, h(\dot{V}_\theta) = (\dot{V}_\theta)^m. \tag{22}$$

Тогда уравнение (18) превращается в ОУЭФ:

$$\ddot{V}_{\theta\theta} = A\theta^k V^l (\dot{V}_\theta). \tag{23}$$

При этом исходное уравнение (17) для степенной функции (21) приобретает вид:

$$y_{xxx}''' = \frac{3}{2}(y_x')^{-1}(y_{xx}'')^2 + 2^{-m}A(xy)^k (y_x')^{\frac{3-l-3m}{2}}(xy_x' - y)^l (y_{xx}'')^m (xy_x' + y). \tag{24}$$

В настоящее время известно 117 разрешимых случаев в классе ОУЭФ (23) [3, 17, 5]. Каждый из них порождает соответствующее разрешимое уравнение 3-го порядка в классе уравнений (24).

Например, при $k = -\frac{1}{2}, l = 1, m = \frac{5}{2}$:

$$\ddot{V}_{\theta\theta} = A\theta^{-\frac{1}{2}} V \dot{V}^{\frac{5}{2}} \tag{25}$$

уравнение (25) имеет общее решение в полиномах [5] (τ – параметр):

$$\begin{gathered} \theta = aC_1^{16}P_4^2, V = bC_1P_2P_3^{-\frac{1}{2}}, \\ P_2 = \pm(\tau^2 - 1), P_3 = \tau^3 - 3\tau + C_2, P_4 = \pm(\tau^4 - 6\tau^2 + 4C_2\tau - 3), \\ A = \mp 15a^{\frac{1}{2}}b^{-2}\left(\frac{b}{16a}\right)^{\frac{2}{5}}. \end{gathered} \tag{26}$$

В рассматриваемом частном случае уравнение (24) имеет вид:

$$y_{xxx}''' = \frac{3}{2}(y_x')^{-1}(y_{xx}'') + 2^{-\frac{8}{5}}A(xy)^{-\frac{1}{2}}(y_x')^{-\frac{7}{5}}(y_{xx}'')^{\frac{8}{5}}(x^2(y_x')^2 - y^2). \tag{27}$$

Композиция преобразования (9) и решения (26) уравнения (25) является общим решением уравнения 3-го порядка (27).

9. Анализ методов, результаты и перспективы

Во введении указано 2 основных метода получения точных решений ОДУ: метод «размножения» и метод дискретных инвариантов. На самом деле методов больше. Скажем несколько слов о каждом методе.

1. Метод «размножения» – самый разработанный, алгоритмизированный и плодотворный метод. Но его главный недостаток: из исходного разрешимого уравнения с помощью дискретной группы находятся решения остальных уравнений орбиты исходного уравнения, а само исходное уравнение, если его решение не известно, не решается.
2. Редукция к разрешимым уравнениям, опубликованным в справочниках. Этот метод не алгоритмизирован и, как правило, не даёт прогноза, в отличие от 1-го метода.
3. Метод дискретных инвариантов – рассматривается в данной статье. Пока мало разработанный.
4. Метод Софуса Ли – в основном используется для нахождения решений уравнений в частных производных, а для ОДУ, как правило, мало что даёт.
5. Метод многоугольников [18] – представляет интерес, требует дальнейшей разработки и попыток применения к различным подклассам класса ОДУ.

В данной статье проиллюстрировано применение метода дискретных инвариантов для получения точных решений ОДУ 2-го и 3-го порядков на примере мультипликативных уравнений, содержащих экспоненциальные, степенные, а также произвольные функции. В качестве дискретного преобразования во всех примерах взято преобразование годографа $\boldsymbol{r}$, которое заменяет искомую функцию y независимой переменной x и наоборот: $x \rightleftarrows y$. Преобразование $\boldsymbol{r}$ замкнуто во всех классах ОДУ, исследуемых в статье; $\boldsymbol{r}$-инвариантами являются рассмотренные уравнения, а также все элементы преобразования-конкомитанта, понижающего порядок исходного ОДУ.

Для иллюстрации метода можно было бы в качестве дискретного преобразования выбрать и другое, отличное от $\boldsymbol{r}$, преобразование [8, 9].

К результатам проведенного исследования можно отнести тот факт, что авторам удалось вычислить преобразование (9), обратное конкомитанту (6), поэтому удалось записать решения $\boldsymbol{r}$-инвариантных уравнений (3), (12), (15), (17), (21), (24), (27) в удобном виде. В справочниках [3-5] приведено решение уравнения (3), зависящее от функции, удовлетворяющей некоторому функциональному уравнению, решение которого неизвестно.

Далее, удачно, что авторами статьи были получены и рассмотрены $\boldsymbol{r}$-инвариантные ОДУ 3-го порядка; дифференциальные уравнения 3-го порядка вообще исследовались математиками меньше, чем уравнения 2-го порядка. С помощью конкомитанта удалось привести $\boldsymbol{r}$-инвариантное дифференциальное уравнение 3-го порядка к ОДУ 2-го порядка мультипликативного вида с функциональным произволом (18) (которое изучалось в [3], а также в более поздних работах [12-16] 2023-2024 годов), в частности, к степенному ОДУ 2-го порядка – к хорошо изученному ОУЭФ (1) [3].

Мультипликативное ОДУ (18) допускает дискретную группу преобразований 36-го порядка [15], так что в процессе дальнейших исследований можно для $\boldsymbol{r}$-инвариантного ОДУ 3-го порядка (17) построить индуцированную дискретную группу.

Авторам удалось найти конкомитант (6) с помощью вычисления интеграла, правда, непростого. В более ранних работах этот конкомитант (6) был найден кустарным способом.

В заключение, несколько слов о теореме, приведённой в п. 7 – теореме о сохранении свойства дискретной инвариантности при дифференцировании. Эта теорема много лет назад была сформулирована и доказана одним из авторов данной статьи; ранее она нигде не была опубликована.

Список литературы:

[1] Зайцев В. Ф. Дискретно-групповые методы теории дифференциальных уравнений // Деп. ВИНИТИ № 5739-82. – 1982. – 130 с.

[2] Зайцев В. Ф., Кормилицина Т. В. Дискретно-групповые методы теории дифференциальных уравнений, ч. 2 // Деп. ВИНИТИ № 3720-85. – 1985. – 152 с.

[3] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 464 с.

[4] Polyanin A. D., Zaytsev V. F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. 2nd Edition. – CRC Press. Boca Raton – London, 2003.

[5] Polyanin A. D., Zaytsev V. F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. – CRC Press. Boca Raton – London, 2018.

[6] Kamke E. Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. – B. G. Teubner, Leipzig, 1977. – 246 p.

[7] Зайцев В. Ф., Хакимова З. Н. О дискретно-групповом анализе уравнения $y''_{xx} = A_1 x^{n_1} y^{m_1} {y'_x}^{l_1} + A_2 x^{n_2} y^{m_2} {y'_x}^{l_2}$ // Деп. ВИНИТИ № 9030-В86. – 1986. – 31 с.

[8] Аржанникова И. Ю., Зайцев В. Ф., Малых А. А., Попов В. В. и др. Современный групповой анализ: методы и приложения. Дискретно-групповой анализ. – Л.: Препринт ЛИИА АН СССР, № 107. – 1989. – 58 с.

[9] Хакимова З. Н. Интегрирование дискретных инвариантов в классе полиномиальных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского, 2014 – С. 8-16.

[10] Зайцев О. В. О дискретных симметриях и новых разрешимых случаях в классе полиномиальных дифференциальных уравнений // Наука XXI века: новый подход: материалы IX молодежной международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. – СПб.: науч.-изд. центр «Открытие», 2014. – С. 8-16.

[11] Хакимова З. Н., Зайцев О.В. Классификация новых разрешимых случаев в классе полиномиальных дифференциальных уравнений // Актуальные вопросы современной науки, №3. – СПб., 2014. – С. 3-11.

[12] Хакимова З. Н., Грешневиков К. В. О дискретных симметриях уравнения свободных незатухающих колебаний маятника // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2023». – СПб.: РГПУ, 2023. – С. 254-258.

[13] Хакимова З. Н., Вавилов Д. С., Грешневиков К. В. О группах диэдра для уравнения колебаний маятника // Сборник трудов Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж, 2023. – С. 130–134.

[14] Хакимова З. Н. Дискретные симметрии мультипликативного класса обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2024». – СПб.: РГПУ, 2024. – С. 243-246.

[15] Хакимова З. Н., Тимофеева Л. Н., Атоян А. А. О дискретной группе 36-го порядка для мультипликативного класса дифференциальных уравнений 2-го порядка // Международный научно-исследовательский журнал. – 2024. – № 2 (140).

[16] Хакимова З. Н. Симметрии и точные решения мультипликативного класса дифференциальных уравнений с экспоненциальными функциями // Международный научно-исследовательский журнал. – 2024. – № 6 (144).

[17] Хакимова З. Н. Выбор класса дифференциальных уравнений для нахождения новых разрешимых случаев // Некоторые актуальные проблемы современной математики и

математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2017». – СПб.: РГПУ, 2017. – С. 112-117.

[18] Демина М. В., Кудряшов Н. А. Специальные полиномы и рациональные решения иерархии второго уравнения Пенлеве // Теоретическая и Математическая Физика, 2007. – Т. 153, вып. 1. – С. 58-67.

Integration of differential equations by using invariants of discrete transformation

Khakimova Z.N., Atojan A.A.

Mozhaisky Military Space Academy, Saint-Petersburg

vka@mil.ru

Abstract. Ordinary differential equations of the 2nd and 3rd orders with multiplicative right-hand sides of the 2nd and 3rd orders are studied. A method is considered for reducing the order of equations and obtaining exact solutions of differential equations using transformations that are invariants of generators of cyclic transformations discrete groups closed in the classes of differential equations under consideration.

The method of discrete invariants is an alternative to the method of “multiplication” of integrable cases in the class of differential equations under study by using the constructed discrete group of transformations acting in this class of equations.

Examples are given to illustrate the method of discrete invariants.

Keywords: Ordinary differential equation (ODE), class of generalized Emden-Fowler equations (GEFE), discrete group of transformations, discrete group analysis (DGA), exact solution of differential equation, discrete transformation invariant, concomitant.