

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2024
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172
<http://diffjournal.spbu.ru/>
e-mail: jodiff@mail.ru

Управление в нелинейных и сложных системах
Компьютерное моделирование динамических и управляемых систем
Приложение в физике, электротехнике и электронике

Синергетическое управление межорбитальным перелётом

Братищев А. В.

Донской государственный технический университет

avbratishchev@spark.mail.ru

Аннотация. Рассмотрена задача управления межорбитальным перелётом в пространственном случае с использованием первых интегралов. Предложены три вида синергетических регуляторов. Показано, что тяга с течением времени экспоненциально убывает. Спроектированы исполняемые модели регуляторов. Численно рассмотрено влияние параметра агрегированной переменной на геометрический вид переходной орбиты. Влияние выбора агрегированной переменной на величину работы и величину тяги. Влияние угла между начальной и конечной орбитами на работу по переходу с орбиты на орбиту.

Ключевые слова: гравитационное поле, межорбитальный манёвр, агрегированная переменная, синергетическое управление, тяга, работа

1. Введение

Задача управления межорбитальными перелётами имеет длинную историю и большую монографическую литературу (см., например, [1], [2]). Она начиналась с изучения двух предельных случаев управления – управления с помощью двигателей большой тяги (мощный импульс или последовательность импульсов) и с помощью двигателей малой тяги (длительное по времени ускорение не более 1 мм/сек^2). Первые шаги описаны, например, в статье Т. Эдельбаума [3]. Цель настоящей статьи – с помощью методов синергетического управления [4] рассмотреть

промежуточный случай, когда тяга представляет собой не прямоугольный импульс, а всплеск или последовательность сравнительно небольших всплесков с последующим быстрым (экспоненциальным) затуханием. В статье [5] синтезирован закон управления пространственным маневрированием спутника. Однако не является очевидным, что при выходе на конечную орбиту силы тяги исчезнет, а значит дальнейшее его движение будет свободным. В настоящей статье подход несколько иной. Исходные и проектируемые уравнения движения берутся в декартовой (экваториальной, эклиптической) системе координат. В выборе агрегированных переменных участвуют все три типа первых интегралов. Это позволяет получить более простую формулу силы тяги, отследить её поведение с течением времени и исследовать влияние угла между начальной и конечной орбитами на работу по перестройке с орбиты на орбиту.

В рассматриваемых задачах мы ограничимся рассмотрением точки с постоянной массой.

1. Уравнения, интегралы и параметры свободного движения

Напомним вид уравнений невозмущённого кеплеровского движения [3]

$$\begin{cases} x'' = -\frac{\mu x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{\mu x}{r^3} \\ y'' = -\frac{\mu y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{\mu y}{r^3} \\ z'' = -\frac{\mu z}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{\mu z}{r^3} \end{cases}, \quad (1)$$

где μ – гравитационный параметр.

Первые интегралы уравнения движения (1) составляют 3 группы.

Интегралы площадей

$$\begin{cases} c_1 = yz' - zy' \\ c_2 = zx' - xz' \\ c_3 = xy' - yx' \end{cases} \quad (2)$$

Произвольные постоянные c_1, c_2, c_3 одновременно не равны нулю и называются постоянными площадями, а $\bar{c} := \{c_1, c_2, c_3\}$ – вектором площадей. $c := \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$ – постоянная площадей. В терминах радиуса-вектора точки $\bar{r} := \{x, y, z\}$ и её вектора скорости $\bar{v} := \{x', y', z'\}$ последняя вычисляется по формуле $c^2 = r^2 v^2 - (\bar{r}, \bar{v})^2$.

Интеграл энергии $\frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2} h$. Произвольная постоянная h называется постоянной энергии.

Интегралы Лапласа

$$\begin{cases} f_1 = x(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{\mu x}{r} - (xx' + yy' + zz')x' = -\frac{\mu x}{r} + c_3 y' - c_2 z' \\ f_2 = y(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{\mu y}{r} - (xx' + yy' + zz')y' = -\frac{\mu y}{r} + c_1 z' - c_3 x' \\ f_3 = z(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{\mu z}{r} - (xx' + yy' + zz')z' = -\frac{\mu z}{r} + c_2 x' - c_1 y' \end{cases} \quad (3)$$

Постоянные f_1, f_2, f_3 называются постоянными Лапласа. Вектор $\bar{f} := \{f_1, f_2, f_3\}$ называется вектором Лапласа. $f := \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$. Ось с направлением \bar{f} , проходящая через центр силы и точку перигея орбиты, называется осью Лапласа. Орбита материальной точки всегда лежит в

фиксированной плоскости $c_1x + c_2y + c_3z = 0$, которая называется плоскостью Лапласа. Векторы площадей и Лапласа свободного движения связаны равенством $c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 = 0$.

Кеплеровская орбита задаётся пятью параметрами (элементы орбиты). Положение плоскости орбиты в пространстве и положение орбиты в этой плоскости определяют Ω – долгота восходящего узла, i – наклонение (плоскости) орбиты, ω – угловое расстояние перицентра. А размер и форму орбиты определяют соответственно $p := \frac{c^2}{\mu}$ – параметр орбиты и $e := \frac{f}{\mu}$ – эксцентриситет орбиты.

Эти элементы связаны с интегралами движения формулами

$$\begin{cases} \frac{c_1}{c} = \sin i \sin \Omega \\ \frac{c_2}{c} = -\sin i \cos \Omega \\ \frac{c_3}{c} = \cos i \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{f_1}{f} = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ \frac{f_2}{f} = \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ \frac{f_3}{f} = \sin \omega \sin i \end{cases} \quad (5)$$

Пусть Ω, ω, i – эйлеровы координаты кеплеровской орбиты, а (r, ν) – полярные координаты движущейся точки в плоскости Лапласа, когда полюс находится в центре силы (это начало координат и фокус орбиты), r – полярный радиус точки, а ν – полярный угол относительно оси Лапласа (истинная аномалия), Тогда декартовы координаты точки выражаются через полярные координаты её в плоскости Лапласа по формулам

$$\begin{cases} x = r(\cos(\nu + \omega) \cos \Omega - \sin(\nu + \omega) \sin \Omega \cos i) \\ y = r(\cos(\nu + \omega) \sin \Omega + \sin(\nu + \omega) \cos \Omega \cos i) \\ z = r \sin(\nu + \omega) \sin i \end{cases} \quad (6)$$

Из формул (4-6) несложно получить следующие равенства

$$\frac{f_1}{f}x + \frac{f_2}{f}y + \frac{f_3}{f}z = r \cos \nu, \quad \frac{c_2f_3 - c_3f_2}{cf}x + \frac{c_3f_1 - c_1f_3}{cf}y + \frac{c_1f_2 - c_2f_1}{cf}z = r \sin \nu.$$

2. Инвариантные множества и агрегированные переменные

Рассмотрим уравнение движения материальной точки в силовом поле $\bar{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$.

$$\begin{cases} x'' = f_1(x, y, z, x', y', z') \\ y'' = f_2(x, y, z, x', y', z') \\ z'' = f_3(x, y, z, x', y', z') \end{cases}, \quad (7)$$

Требуется найти аддитивное управление $\bar{U} = \{U_1, U_1, U_1\}$ (вектор тяги)

$$\begin{cases} x'' = f_1(x, y, z, x', y', z') + U_1(x, y, z, x', y', z') \\ y'' = f_2(x, y, z, x', y', z') + U_2(x, y, z, x', y', z'), \\ z'' = f_3(x, y, z, x', y', z') + U_3(x, y, z, x', y', z') \end{cases} \quad (8)$$

которое переведёт точку из произвольного наперёд заданного состояния на многообразии вида

$$\mathcal{L} := \left\{ (x, y, z, x', y', z') : \begin{cases} \Psi_1(x, y, z, x', y', z') = 0 \\ \Psi_2(x, y, z, x', y', z') = 0 \\ \Psi_3(x, y, z, x', y', z') = 0 \end{cases} \right\}. \quad (9)$$

При этом в точке схода движение и скорость непрерывны, а с течением времени тяга должна исчезать: $\lim_{t \rightarrow +\infty} U_i(x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)) = 0, i = 1, 2, 3$. Систему (8) естественно назвать аддитивным регулятором.

В некоторых задачах в качестве функций Ψ_i удаётся выбрать первые интегралы системы (7). Согласно критерию первого интеграла его производная в силу системы тождественно равняется нулю:

$$D_t \Psi_i := \frac{\partial \Psi_i}{\partial x'} f_1 + \frac{\partial \Psi_i}{\partial y'} f_2 + \frac{\partial \Psi_i}{\partial z'} f_3 + \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} x' + \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} y' + \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} z' \equiv 0. \quad (10)$$

Такой выбор позволяет спроектировать требуемый регулятор более простого вида. Именно, следуя [4], потребуем, чтобы на движениях регулятора функции Ψ_i удовлетворяли дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = -k_i \Psi_i, \quad k_i > 0. \quad (11)$$

Ψ_i называются агрегированными переменными. Решая это уравнение с начальными данными $(0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0,)$, получаем

$$\Psi_i(x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)) = \Psi_i((x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0,)) \exp\{-k_i t\} \rightarrow 0, \quad (12)$$

когда $t \rightarrow +\infty$. В этом смысле траектория регулятора (8) стягиваются к многообразию (9). Вычисляя производные Ψ_i на движениях искомого регулятора (9) в силу этого уравнения и учитывая (11), получаем такую систему для нахождения $\bar{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$

$$\left\{ \begin{aligned} D_t \Psi_1(t) &= \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} x' + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x'} (f_1 + U_1) + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} y' + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y'} (f_2 + U_2) + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} z' + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z'} (f_3 + U_3) \\ &= \frac{\partial \Psi_1}{\partial x'} U_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y'} U_2 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z'} U_3 = -k\Psi_1 \\ D_t \Psi_2(t) &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} x' + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x'} (f_1 + U_1) + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} y' + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y'} (f_2 + U_2) + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} z' + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z'} (f_3 + U_3) \\ &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial x'} U_1 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y'} U_2 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z'} U_3 = -k\Psi_2 \\ D_t \Psi_3(t) &= \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} x' + \frac{\partial \Psi_3}{\partial x'} (f_1 + U_1) + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} y' + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y'} (f_2 + U_2) + \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} z' + \frac{\partial \Psi_3}{\partial z'} (f_3 + U_3) \\ &= \frac{\partial \Psi_3}{\partial x'} U_1 + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y'} U_2 + \frac{\partial \Psi_3}{\partial z'} U_3 = -k\Psi_3 \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Потребуем, чтобы якобиан $\Delta = \frac{\partial(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)}{\partial(x', y', z')} \neq 0$ в окрестности многообразия. Это позволяет разрешить систему (13) относительно управлений

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{-1}{\Delta} \left(k_1 \Psi_1 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y'} \frac{\partial \Psi_3}{\partial z'} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial y'} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z'} \right) + \Psi_2 \left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial y'} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z'} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y'} \frac{\partial \Psi_3}{\partial z'} \right) + \right. \\ &+ \left. k_3 \Psi_3 \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial y'} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z'} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial y'} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z'} \right) \right) =: - \left(k_1 \Psi_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + k_2 \Psi_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + k_3 \Psi_3 \frac{\Delta_{31}}{\Delta} \right) \\ U_2 &= \frac{-1}{\Delta} \left(k_1 \Psi_1 \left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial x'} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z'} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x'} \frac{\partial \Psi_3}{\partial z'} \right) + k_2 \Psi_2 \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x'} \frac{\partial \Psi_3}{\partial z'} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial x'} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z'} \right) + \right. \\ &+ \left. k_3 \Psi_3 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x'} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z'} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x'} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z'} \right) \right) =: - \left(k_1 \Psi_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + k_2 \Psi_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + k_3 \Psi_3 \frac{\Delta_{32}}{\Delta} \right) \\ U_3 &= \frac{1}{\Delta} \left(k_1 \Psi_1 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x'} \frac{\partial \Psi_3}{\partial y'} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial x'} \frac{\partial \Psi_2}{\partial y'} \right) + k_2 \Psi_2 \left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial x'} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y'} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x'} \frac{\partial \Psi_3}{\partial y'} \right) + \right. \\ &+ \left. k_3 \Psi_3 \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x'} \frac{\partial \Psi_2}{\partial y'} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x'} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y'} \right) \right) =: - \left(k_1 \Psi_1 \frac{\Delta_{13}}{\Delta} + k_2 \Psi_2 \frac{\Delta_{23}}{\Delta} + k_3 \Psi_3 \frac{\Delta_{33}}{\Delta} \right) \end{aligned}$$

ВЫВОД Если все величины $\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}$ с ростом t ограничены, то в силу (12) координаты вектора тяги убывают экспоненциально с течением времени.

На разных участках переходной траектории приходится с помощью двигателя ускорять или замедлять движение. Поэтому в качестве энергетической характеристики манёвра на переходном участке l траектории примем работу тяги-торможения двигателя, которая вычисляется с помощью криволинейного интеграла $A = \int_l |(\bar{U}, d\bar{r})| = \int_0^t |(\bar{U}, d\bar{v})| dt$.

3. Проектирование синергетического регулятора

Кеплеровская орбита задаётся системой уравнений [6]

$$\begin{cases} \psi_1 = r - \frac{c^2}{\mu} + \frac{f_1}{\mu} x + \frac{f_2}{\mu} y + \frac{f_3}{\mu} z = r - p + e \left(\frac{f_1}{f} x + \frac{f_2}{f} y + \frac{f_3}{f} z \right) = r - p + e \cos v = 0 \\ \psi_2 = \frac{c_1}{c} x + \frac{c_2}{c} y + \frac{c_3}{c} z = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Второе уравнение определяет плоскость орбиты. Первое уравнение задаёт поверхность кругового эллипсоида, параболоида или гиперboloида с осью вращения $\frac{x}{f_1} = \frac{y}{f_2} = \frac{z}{f_3}$, одним из фокусов которых является начало координат. В исключительных случаях это может быть круговой конус или цилиндр.

В качестве первых двух агрегированных переменных проектируемого регулятора выберем первые интегралы вида

$$\Psi_1 := \psi'_1 + k\psi_1 = \left(\frac{x}{r} + e\frac{f_1}{f}\right)x' + \left(\frac{y}{r} + e\frac{f_2}{f}\right)y' + \left(\frac{z}{r} + e\frac{f_3}{f}\right)z' + k\psi_1.$$

$$\Psi_2 := \psi'_2 + k\psi_2 = \frac{c_1}{c}x' + \frac{c_2}{c}y' + \frac{c_3}{c}z' + k\psi_2.$$

где $k > 0$ – параметр. Они должны удовлетворять уравнениям (11) на движениях проектируемого регулятора: $\psi''_i + 2k\psi'_i + k^2\psi_i = \frac{d\Psi_i}{dt} + k\Psi_i = 0$, $i = 1, 2$. Решение уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= r - p + e\left(\frac{\bar{f}}{f}, \frac{\bar{r}}{r}\right)r = r(t) - p + e\left(\frac{f_1}{f}x(t) + \frac{f_2}{f}y(t) + \frac{f_3}{f}z(t)\right) = \\ &= \psi_1(0)e^{-kt} + (\psi'_1(0) + k\psi_1(0))te^{-kt}, \end{aligned} \quad t \geq 0 \quad (15)$$

$$\psi_2(t) = \left(\frac{\bar{c}}{c}, \frac{\bar{r}}{r}\right)r = \frac{c_1}{c}x(t) + \frac{c_2}{c}y(t) + \frac{c_3}{c}z(t) = \psi_2(0)e^{-kt} + (\psi'_2(0) + k\psi_2(0))te^{-kt}$$

где $\psi_i(0) := \psi_i(x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, \cdot)$. Потому они определяют требуемую притягивающую траекторию (8) в 3-мерном конфигурационном пространстве.

Решение уравнений (11) относительно Ψ_i имеет вид

$$\Psi_1(t) = \left(\frac{x}{r} + e\frac{f_1}{f}\right)x' + \left(\frac{y}{r} + e\frac{f_2}{f}\right)y' + \left(\frac{z}{r} + e\frac{f_3}{f}\right)z' = \left(\frac{\bar{r}}{r} + e\frac{\bar{f}}{f}, \bar{v}\right) = \Psi_1(0)e^{-kt} \quad t \geq 0. \quad (16)$$

$$\Psi_2(t) = \frac{c_1}{c}x' + \frac{c_2}{c}y' + \frac{c_3}{c}z' = \left(\frac{\bar{c}}{c}, \bar{v}\right) = \Psi_2(0)e^{-kt}$$

То есть векторы $\frac{\bar{r}}{r} + e\frac{\bar{f}}{f}, \frac{\bar{r}}{r}$ асимптотически перпендикулярны \bar{v} , а значит их векторное произведение асимптотически параллельно \bar{v} и $\left[\frac{\bar{r}}{r} + e\frac{\bar{f}}{f}, \frac{\bar{c}}{c}\right] \sim \left|\frac{\bar{r}}{r} + e\frac{\bar{f}}{f}\right| \frac{\bar{v}}{v}$.

Чтобы движение на конечной орбите было кеплеровским (свободным), необходима ещё одна агрегированная переменная, функционально независимая от двух первых. Её выбор неоднозначен и от этого зависит энергетическая характеристика регулятора. Ниже приведём три варианта такой переменной. Регулятор будем искать в виде

$$\begin{cases} x'' = -\frac{\mu x}{r^3} + U_1 \\ y'' = -\frac{\mu y}{r^3} + U_2 \\ z'' = -\frac{\mu z}{r^3} + U_3 \end{cases}, \quad (17)$$

3.1. Агрегированная переменная Ψ_3

Для кеплеровского движения первым интегралом является такая линейная комбинация интегралов площадей

$$\Psi_3 := \frac{c_1}{c}(yz' - zy') + \frac{c_2}{c}(zx' - xz') + \frac{c_3}{c}(xy' - yx') - c,$$

которую примем в качестве агрегированной переменной. По переменным Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 составим систему уравнений (13) для нахождения управлений U_i .

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{r} + e\frac{f_1}{f}\right)U_1 + \left(\frac{y}{r} + e\frac{f_2}{f}\right)U_2 + \left(\frac{z}{r} + e\frac{f_2}{f}\right)U_3 = -k\Psi_1 \\ \frac{c_1}{c}U_1 + \frac{c_2}{c}U_2 + \frac{c_3}{c}U_3 = -k\Psi_2 \\ \left(\frac{c_2}{c}z - \frac{c_3}{c}y\right)U_1 + \left(\frac{c_3}{c}x - \frac{c_1}{c}z\right)U_2 + \left(\frac{c_1}{c}y - \frac{c_2}{c}x\right)U_3 = -k\Psi_3 \end{cases}$$

Вычислим её определитель.

$$\begin{aligned} \Delta_3(t) &:= \begin{vmatrix} \frac{x}{r} + e\frac{f_1}{f} & \frac{y}{r} + e\frac{f_2}{f} & \frac{z}{r} + e\frac{f_2}{f} \\ \frac{c_1}{c} & \frac{c_2}{c} & \frac{c_3}{c} \\ \frac{c_2}{c}z - \frac{c_3}{c}y & \frac{c_3}{c}x - \frac{c_1}{c}z & \frac{c_1}{c}y - \frac{c_2}{c}x \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{c_1}{c} & \frac{c_2}{c} & \frac{c_3}{c} \\ \frac{c_2}{c}z - \frac{c_3}{c}y & \frac{c_3}{c}x - \frac{c_1}{c}z & \frac{c_1}{c}y - \frac{c_2}{c}x \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} e\frac{f_1}{f} & e\frac{f_2}{f} & e\frac{f_2}{f} \\ \frac{c_1}{c} & \frac{c_2}{c} & \frac{c_3}{c} \\ \frac{c_2}{c}z - \frac{c_3}{c}y & \frac{c_3}{c}x - \frac{c_1}{c}z & \frac{c_1}{c}y - \frac{c_2}{c}x \end{vmatrix} = \frac{-1}{r} \left(\left(\frac{c_2}{c}z - \frac{c_3}{c}y\right)^2 + \left(\frac{c_3}{c}x - \frac{c_1}{c}z\right)^2 + \left(\frac{c_1}{c}y - \frac{c_2}{c}x\right)^2 \right) \\ & + e \left(\left(\frac{\bar{c}}{c}, \bar{r}\right) \left(\frac{\bar{c}}{c}, \frac{\bar{f}}{f}\right) - \left(\frac{\bar{f}}{f}, \bar{r}\right) \right) = - \left[\frac{\bar{c}}{c}, \bar{r} \right]^2 r - e \left(\frac{\bar{f}}{f}, \bar{r} \right) r = - \left(\left[\frac{\bar{c}}{c}, \bar{r} \right]^2 + e \left(\frac{\bar{f}}{f}, \bar{r} \right) \right) r. \end{aligned}$$

Из асимптотических оценок (15) следует, что $\Delta_3(t) = - \left(\left[\frac{\bar{c}}{c}, \bar{r} \right]^2 + e \left(\frac{\bar{f}}{f}, \bar{r} \right) \right) r \rightarrow p$. То есть $\Delta_3(t)$ отделён от нуля.

Остаётся показать, что величины $\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}$ с ростом t ограничены. Выберем характерные.

$$\left| \frac{\Delta_{33}(t)}{\Delta_3(t)} \right| = \frac{1}{\Delta_3(t)} \left| \left(\frac{x}{r} + e\frac{f_1}{f}\right)\frac{c_2}{c} - \left(\frac{y}{r} + e\frac{f_2}{f}\right)\frac{c_1}{c} \right| \leq \frac{2(1+e)}{p}.$$

$$\left| \frac{\Delta_{13}(t)}{\Delta_3(t)} \right| = \frac{1}{\Delta_3(t)} \left| \left(\frac{c_3}{c}x - \frac{c_1}{c}z\right)\frac{c_1}{c} - \left(\frac{c_2}{c}z - \frac{c_3}{c}y\right)\frac{c_2}{c} \right| \leq \frac{4}{1-e}.$$

$$\left| \frac{\Delta_{23}(t)}{\Delta_3(t)} \right| = \frac{1}{\Delta_3(t)} \left| \left(\frac{x}{r} + e\frac{f_1}{f}\right)\left(\frac{c_3}{c}x - \frac{c_1}{c}z\right) - \left(\frac{y}{r} + e\frac{f_2}{f}\right)\left(\frac{c_2}{c}z - \frac{c_3}{c}y\right) \right| \leq \frac{4(1+e)}{1-e}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 В случае компланарных орбит $c_1 = c_2 = 0, z \equiv 0$ получаем $\left[\frac{\bar{c}}{c}, \bar{r}\right]^2 = r^2$. Тогда $\Delta_3 \equiv -(1 + e \cos(\varphi - \omega))r$, где $f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$, $\cos \omega := f_1/f$, $\sin \omega := f_2/f$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, и совпадает с соответствующим определителем из статьи [7].

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Мы требуем, чтобы конечная траектория была кеплеровской, то есть любое движение асимптотически подчинялось уравнению (1), и точно - на движениях из многообразия \mathcal{L} . Естественно возникает задача восстановления этого уравнения по инвариантному многообразию

$$\begin{cases} r + e \left(\frac{f_1}{f} x + \frac{f_2}{f} y + \frac{f_3}{f} z \right) = p \\ \frac{c_1}{c} x + \frac{c_2}{c} y + \frac{c_3}{c} z = 0 \\ \frac{c_1}{c} (yz' - zy') + \frac{c_2}{c} (zx' - xz') + \frac{c_3}{c} (xy' - yx') = c \end{cases}.$$

с ортогональным вектором площадей $\bar{c} := \{c_1, c_2, c_3\} \neq 0$ и вектором Лапласа $\bar{f} := \{f_1, f_2, f_3\}$. Это можно сделать, дважды продифференцировав первые два уравнения, один раз – третье, и затем разрешить полученную систему относительно вторых производных x'', y'', z'' .

3.2. Агрегированная переменная Ψ_4

Теперь третью агрегированную переменную образуем с помощью интеграла энергии

$$\Psi_4 := \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{\mu}{r} - \frac{1}{2}h,$$

и потребуем выполнение равенства $\Psi_4' + k\Psi_4 = 0$ на движениях проектируемого регулятора, откуда $v^2 = \frac{2\mu}{r} + h + 2\Psi_4(0)e^{-kt}, t \geq 0$. То есть $v(t) \geq \sqrt{h}$ с ростом t . Имеем такую систему (13) линейных алгебраических уравнений для нахождения управлений U_i

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{r} + e \frac{f_1}{f} \right) U_1 + \left(\frac{y}{r} + e \frac{f_2}{f} \right) U_2 + \left(\frac{z}{r} + e \frac{f_3}{f} \right) U_3 = -k\Psi_1 \\ \frac{c_1}{c} U_1 + \frac{c_2}{c} U_2 + \frac{c_3}{c} U_3 = -k\Psi_2 \\ x' U_1 + y' U_2 + z' U_3 = -k\Psi_4 \end{cases}$$

Вычислим определитель, используя (16).

$$\Delta_4(t) := \frac{\partial(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_4)}{\partial(x', y', z')} = \begin{vmatrix} \frac{x}{r} + e \frac{f_1}{f} & \frac{y}{r} + e \frac{f_2}{f} & \frac{z}{r} + e \frac{f_3}{f} \\ \frac{c_1}{c} & \frac{c_2}{c} & \frac{c_3}{c} \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \left(\frac{\bar{r}}{r} + e \frac{\bar{f}}{f}, \frac{\bar{c}}{c}, \bar{v} \right) \sim \sim \left| \frac{\bar{r}}{r} + e \frac{\bar{f}}{f} \right| \left(\frac{\bar{v}}{v}, \bar{v} \right) v \geq (1 - e)v.$$

То есть $\Delta_4(t)$ ограничено снизу положительным числом с ростом t .

Остаётся показать, что величины $\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}$ с ростом t ограничены. Выберем характерные.

$$\left| \frac{\Delta_{33}(t)}{\Delta_4(t)} \right| \leq \frac{1}{(1-e)v} \left| \left(\frac{x}{r} + e \frac{f_1}{f} \right) \frac{c_2}{c} - \left(\frac{y}{r} + e \frac{f_2}{f} \right) \frac{c_1}{c} \right| \leq \frac{2(1+e)}{(1-e)v}.$$

$$\left| \frac{\Delta_{13}(t)}{\Delta_4(t)} \right| \leq \frac{1}{(1-e)v} \left| y' \frac{c_1}{c} - x' \frac{c_2}{c} \right| \leq \frac{2}{(1-e)}.$$

$$\left| \frac{\Delta_{23}(t)}{\Delta_4(t)} \right| \leq \frac{1}{(1-e)v} \left| \left(\frac{x}{r} + e \frac{f_1}{f} \right) y' - \left(\frac{y}{r} + e \frac{f_2}{f} \right) x' \right| \leq \frac{2(1+e)}{(1-e)}.$$

3.3. Агрегированная переменная Ψ_5

Выберем в качестве третьей агрегированной переменной следующую функцию, являющуюся первым интегралом системы (1),

$$\Psi_5 := \sqrt{(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2} - c = \sqrt{r^2v^2 - (\bar{r}, \bar{v})^2} - c.$$

и потребуем выполнение равенства $\Psi_5' + k\Psi_5 = 0$ на движениях проектируемого регулятора, откуда $\sqrt{r^2v^2 - (\bar{r}, \bar{v})^2} = c + \Psi_5(0)e^{-kt}, t \geq 0$. Имеем такую систему уравнений (13) для нахождения управлений U_i

$$\begin{cases} \left(\mu \frac{x}{r} + f_1 \right) U_1 + \left(\mu \frac{y}{r} + f_2 \right) U_2 + \left(\mu \frac{z}{r} + f_3 \right) U_3 = -k\Psi_1 \\ \frac{c_1}{c} U_1 + \frac{c_2}{c} U_2 + \frac{c_3}{c} U_3 = -k\Psi_2 \\ \left(\frac{r^2x' - (\bar{r}, \bar{v})x}{\sqrt{r^2v^2 - (\bar{r}, \bar{v})^2}} \right) U_1 + \left(\frac{r^2y' - (\bar{r}, \bar{v})y}{\sqrt{r^2v^2 - (\bar{r}, \bar{v})^2}} \right) U_2 + \left(\frac{r^2z' - (\bar{r}, \bar{v})z}{\sqrt{r^2v^2 - (\bar{r}, \bar{v})^2}} \right) U_3 = -k\Psi_5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta_5(t) &:= \frac{1}{\sqrt{r^2v^2 - (\bar{r}, \bar{v})^2}} \begin{vmatrix} \frac{x}{r} + e \frac{f_1}{f} & \frac{y}{r} + e \frac{f_2}{f} & \frac{z}{r} + e \frac{f_3}{f} \\ \frac{c_1}{c} & \frac{c_2}{c} & \frac{c_3}{c} \\ r^2x' - (\bar{r}, \bar{v})x & r^2y' - (\bar{r}, \bar{v})y & r^2z' - (\bar{r}, \bar{v})z \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2v^2 - (\bar{r}, \bar{v})^2}} \left(\frac{\bar{r}}{r} + e \frac{\bar{f}}{f}, \frac{\bar{c}}{c}, r^2\bar{v} - (\bar{r}, \bar{v})\bar{r} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{r^2v^2 - (\bar{r}, \bar{v})^2}} \left| \frac{\bar{r}}{r} + e \frac{\bar{f}}{f} \right| \left(\frac{\bar{v}}{v}, r^2\bar{v} - (\bar{r}, \bar{v})\bar{r} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2v^2 - (\bar{r}, \bar{v})^2}} \left| \frac{\bar{r}}{r} + e \frac{\bar{f}}{f} \right| (r^2v^2 - (\bar{r}, \bar{v})^2) \frac{1}{v} = \left| \frac{\bar{r}}{r} + e \frac{\bar{f}}{f} \right| \frac{1}{v} \sqrt{r^2v^2 - (\bar{r}, \bar{v})^2}. \end{aligned}$$

То есть $\Delta_5(t)$ ограничено снизу положительным числом с ростом t .

Аналогично доказывается ограниченность величин $\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}$ с ростом t .

4. Численные эксперименты

Для каждого из трёх синергетических регуляторов были спроектированы S-модели [8] по системе уравнений (8). Начальная траектория задаётся начальными данными. Их удобнее

задавать в терминах элементов начальной орбиты и в полярной системе координат. Именно, используя (6), имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{p_0}{1 + e_0 \cos v_0} (\cos(v_0 + \omega_0) \cos \Omega_0 - \sin(v_0 + \omega_0) \sin \Omega_0 \cos i_0) \\ y_0 = \frac{p_0}{1 + e_0 \cos v_0} (\cos(v_0 + \omega_0) \sin \Omega_0 + \sin(v_0 + \omega_0) \cos \Omega_0 \cos i_0) \\ z_0 = \frac{p_0}{1 + e_0 \cos v_0} \sin(v_0 + \omega_0) \sin i_0 \\ x'_0 = \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} (e_0 \sin v_0 (\cos(v_0 + \omega_0) \cos \Omega_0 - \sin(v_0 + \omega_0) \sin \Omega_0 \cos i_0) - \\ \quad - (1 + e_0 \cos v_0) (\sin(v_0 + \omega_0) \cos \Omega_0 + \cos(v_0 + \omega_0) \sin \Omega_0 \cos i_0)) \\ y'_0 = \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} (e_0 \sin v_0 (\cos(v_0 + \omega_0) \sin \Omega_0 + \sin(v_0 + \omega_0) \cos \Omega_0 \cos i_0) - \\ \quad - (1 + e_0 \cos v_0) (\sin(v_0 + \omega_0) \cos \Omega_0 - \cos(v_0 + \omega_0) \sin \Omega_0 \cos i_0)) \\ z'_0 = \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} (e_0 \sin v_0 \sin(v_0 + \omega_0) + (1 + e_0 \cos v_0) \cos(v_0 + \omega_0)) \sin i_0 \end{array} \right.$$

На примере агрегированных переменных Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 сравним влияние параметра k на вид переходной орбиты, величину работы силы тяги-торможения двигателя и время работы. Начальную и конечную орбиты выберем компланарными круговыми с радиусами соответственно 6700 км и 10000 км. Время схода с начальной орбиты выберем $t_0=6000$ для того, чтобы изобразить полный оборот по этой орбите. Найдём вид переходной траектории и графики величины тяги и соответствующей работы силы тяги-торможения синергетического регулятора с Ψ_3 для $k=0.01$.

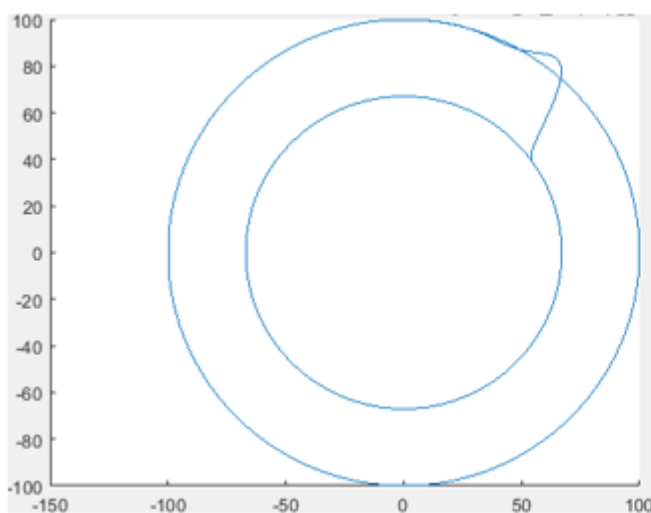


Рис.1. $k=0.01$. Время перехода $t=8500$

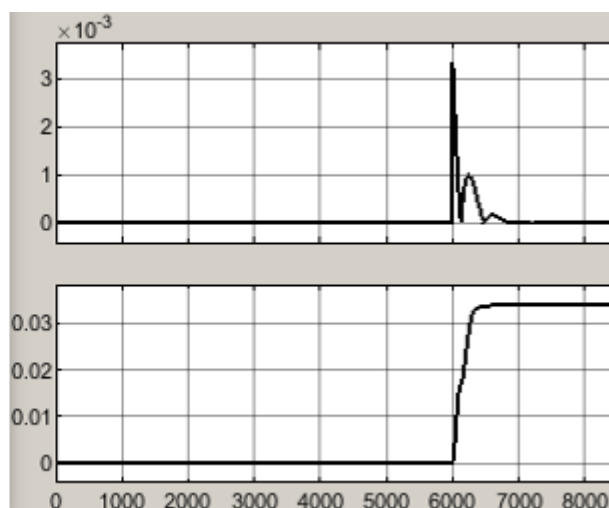


Рис.2. Графики величины тяги и работы

Время перехода на орбиту радиуса 10000 ± 0.01 км равно **8500** сек, максимальное значение величины тяги равно **340** н, а работа тяги-торможения равна **$33.5 \cdot 10^8$** дж. Аналогично найдены переходная траектория и графики величины тяги и соответствующей работы силы тяги-торможения синергетического регулятора с Ψ_3 для $k = 0.001, 0.0001$.

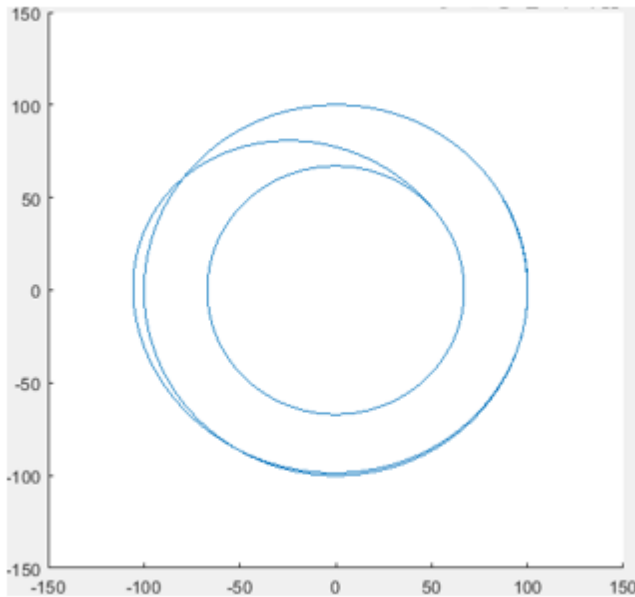


Рис.3. $k=0.001$. Время перехода $t=22\ 000$

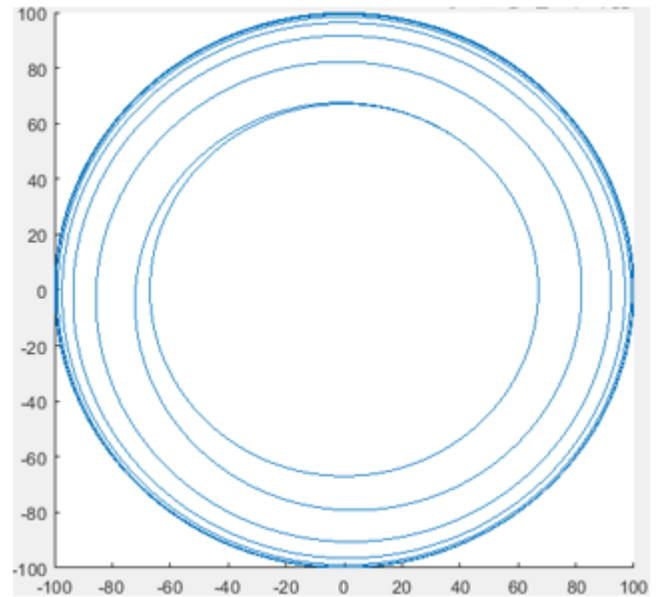


Рис.4. $k=0.0001$. Время перехода $t=80000$

При $k=0.001$ время перехода на орбиту радиуса 10000 ± 0.01 км равно 22000 сек. максимальное значение величины тяги равно 3.7 н, а работа тяги-торможения равна $1.08 \cdot 10^7$ дж.

При $k=0.0001$ время перехода на орбиту радиуса 10000 ± 0.01 км равно 80000 сек. максимальное значение величины тяги равно 0.17 н, а работа тяги-торможения равна $9.8 \cdot 10^6$ дж. Исходя из графика параметр k характеризует мощность двигателя. Чем он больше, ближе к 1, тем больше двигатель напоминает двигатель большой тяги и по величине работы тяги-торможения, и по характеру импульса. При этом происходит скачкообразный переход с начальной на конечную орбиту. Чем k ближе к нулю, тем больше он напоминает двигатель малой тяги. На переходном участке возрастает количество витков. Время работы по выходу на конечную орбиту растёт.

Рассмотрим влияние угла между начальной и конечной круговыми орбитами на работу по перестройке с орбиты на орбиту. Радиусы те же. Всюду далее $k=0.001$.

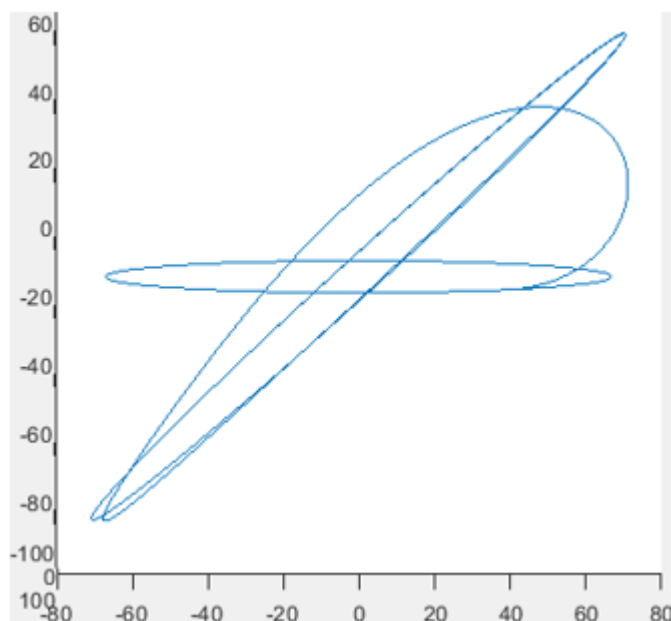


Рис.5 Угол между орбитами $i_0 = 45^\circ$.

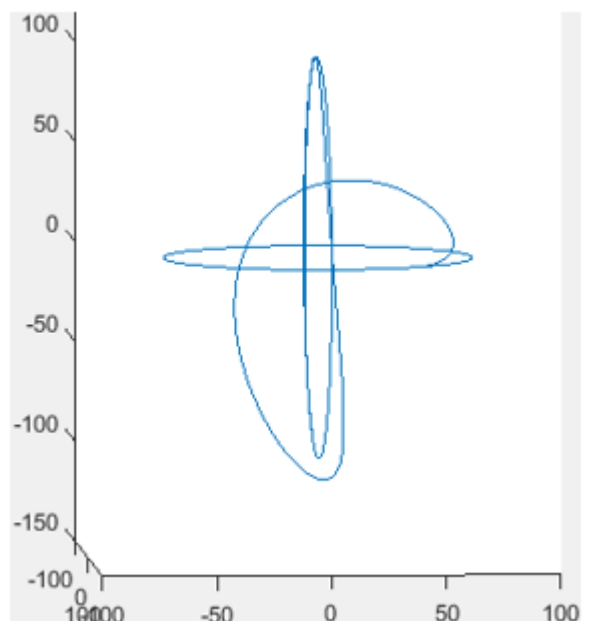


Рис.6 Угол между орбитами $i_0 = 90^\circ$.

Для значений угла между орбитами $i = 0^\circ, i = 45^\circ, i = 90^\circ$ величина работы равна соответственно $1.08 \cdot 10^7, 2.5 \cdot 10^7, 5.5 \cdot 10^7$ Дж.

Сравним работу спроектированных синергетических регуляторов по переходу с круговой орбиты с параметрами $p_0 = 6700, e_0 = 0$, на компланарную эллиптическую $p = 10000, e = 0.8$, для $k = 0.001$. Графики переходных траекторий оказались одинаковыми.

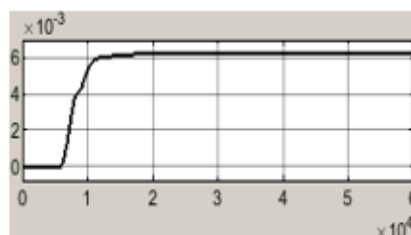
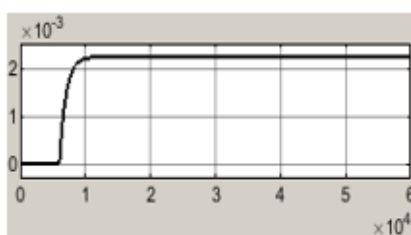
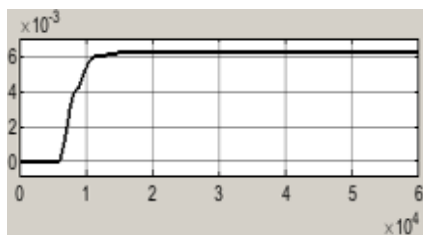


Рис. 7. График работы. Ψ_3 . Рис.8. График работы. Ψ_4 . Рис.9. График работы. Ψ_5 .

Как видим работа во втором случае $= 2.3 \cdot 10^7$ Дж и в 3 раза меньше, чем в первом и третьем.

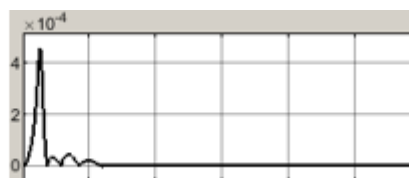
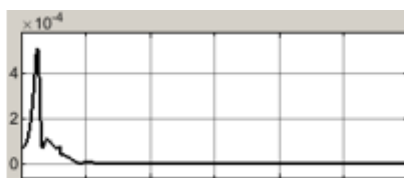
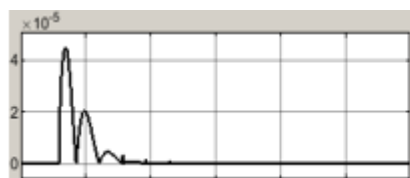


Рис.10. Величина тяги. Ψ_3 . Рис.11. Величина тяги. Ψ_4 . Рис.12. Величина тяги. Ψ_5 .

В первом случае максимальное значение величины тяги равно $4,5 \frac{м}{сек^2}$, во втором $50 \frac{м}{сек^2}$, а в третьем $46 \frac{м}{сек^2}$ (в исполняемых моделях использовалась единица измерения Гкм вместо км).

7. Заключение

- 1) С помощью взятых в качестве агрегированных переменных трёх функционально независимых первых интегралов уравнения невозмущённого кеплеровского движения построен синергетический регулятор перевода материальной точки на произвольную наперёд заданную эллиптическую кеплеровскую орбиту. Ввиду неоднозначности задачи рассмотрены три таких регулятора.
- 2) В пакете Matlab-Simulink спроектированы действующие модели этих регуляторов, на которых проводились численные эксперименты.
- 3) Проанализирована зависимость между параметром агрегированных переменных и геометрией переходного участка материальной точки, а также временем межорбитального перехода.
- 4) Введена интегральная характеристика совершаемой вектором тяги работы и исследовано влияние угла между начальной и конечной орбитами на величину работы по переходу с первой орбиты на вторую и время межорбитального перехода.
- 5) Проведён сравнительный анализ трёх синергетических регуляторов по величине работы силы тяги-торможения и по максимальному значению этой силы.

Литература

- [1] Охоцимский Д. Е. Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полёта. М.: Наука, 1990
- [2] Суханов А. А. Астродинамика. М.: ИКИ РАН, 2010

- [3] Современное состояние механики космического полёта. Серия: «Механика космического полёта». Ред. Гуревич Ю. Г. М.: Наука, 1969
- [4] Колесников А. А. Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного анализа. М.: КомКнига, 2006
- [5] Зеленина Н. А., Попов А. Н. Синергетическое управление процессами орбитального маневрирования. Сборник трудов 7-й Всероссийской научной конференции «Системный синтез и прикладная синергетика» (ССПС-2015). – Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2015 <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24866581>
- [6] Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М: Наука, 1975
- [7] Братищев А. В. Живолуп А. В. Синергетическое управление материальной точкой в гравитационном поле. Дифференциальные уравнения и процессы управления [Электронный ресурс]: электрон. журн. / СПбГУ. № 1, с.1-11, 2024. - Режим доступа: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>
- [8] Дэбни Дж., Харман Т. Simulink 4. Секреты мастерства. М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2003.

Synergetic control of interorbital flight

A. V. Bratishchev

Don State Technical University

avbratishchev@spark.mail.ru

Annotation The problem of controlling interorbital flight in the spatial case using the first integrals is considered. Three types of synergistic regulators are proposed. It is shown that the thrust decreases exponentially over time. The executable models of the regulators are designed. The influence of the parameter of the aggregated variable on the geometric shape of the transition orbit is numerically considered. The effect of the choice of an aggregated variable on the amount of work and the amount of thrust. The effect of the angle between the initial and final orbits on the work of transition from orbit to orbit.

Keywords: gravitational field, interorbital maneuver, aggregated variable, synergetic control, thrust, work