ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2024
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория уравнений в частных производных

О влиянии неизолированных особенностей в младшем коэффициенте обобщенного уравнения Коши–Римана на постановку краевых задач

Расулов А.Б.*

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

*e-mail: rasulzoda55@gmail.com

Аннотация. В статье выявлен эффект влияния попарно непересекающихся и не проходящих через начало координат неизолированных сильных особенностей в младшем коэффициенте обобщенного уравнения Коши–Римана на постановку краевых задач. Условие на границе области оказалось недостаточным для решения таких задач. Поэтому рассмотрен случай, объединяющий элементы задач Римана–Гильберта на границе области и линейного сопряжения на окружностях-носителях сильных особенностей младшего коэффициента, лежащих внутри области.

Ключевые слова: обобщенное уравнение Коши–Римана, сильные особенности в младших коэффициентах, оператор Помпейу–Векуа, задача Римана–Гильберта, задача линейного сопряжения.

1 История вопроса

Классическая теорема Коши–Ковалевской гарантирует локальную аналитичность решения линейного дифференциального уравнения, представленного в нормальной форме, если его коэффициенты, правая часть и начальные данные аналитичны (в случае вещественных переменных – разлагаются в сходящиеся степенные ряды). Или, если коэффициенты и правая часть эллиптического уравнения порядка m удовлетворяют условию Гельдера с показателем $0 < \alpha < 1$, то производные порядка m любого решения этого уравнения также удовлетворяют условию Гельдера с тем же показателем.

Исследования вырождающихся эллиптических уравнений показали, что и в этом случае аналитичность коэффициентов уравнения наследуется его решением. Фундаментальная система состоит из функций, представляющих собой произведение голоморфной в окрестности точки (плоскости) вырождения функции на функцию, которая может иметь особенность на указанном множестве. Эта особенность либо степенная, при этом показатель находится по коэффициентам уравнения, либо логарифмическая, степенная и логарифмическая или экспоненциальная. Для обоснования существования решения краевой задачи для вырождающихся уравнений, как правило, используют неявные методы построения решения (например, метод барьеров). При этом затруднительно выяснить структуру решения и проследить, как аналитичность коэффициентов и правой части уравнения отражается на решении задачи (см.монографии А.В. Бицадзе [1], М.М. Смирнова [2], А.П. Солдатова [5], Н.Р. Раджабова[6], С.А. Ломова и И.С. Ломова [3] и др.).

В конечной области $0 \in D \subseteq \mathbb{C}$ рассматривается эллиптическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} + au + b\overline{u} = f, \tag{1}$$

с функциями $a(z)$, $b(z)$, $f(z)$, заданными в ограниченной области D, причем коэффициенты a, b этого уравнения могут допускать в множестве $l \in D$ степенные особенности по z. Здесь и ниже используется стандартное обозначение $2\partial_{\bar z} = \partial_x + i\partial_y$.

Обозначим $C_\lambda(\overline{D}, 0)$, $\lambda < 0$, пространство всех непрерывных в $\overline{D} \setminus \{0\}$ функций $\varphi(z)$ с точечной особенностью $z = 0$ и с поведением $O(|z|^\lambda)$ при $z \to 0$. Оно снабжается нормой $||\varphi|| = \sup_{z\in D} |z|^{-\lambda}|\varphi(z)|$, относительно которой указанное пространство является банаховым.

Классическая теория И.Н. Векуа[4] обобщенных аналитических функций охватывает случай, когда коэффициенты и правая часть уравнения (1) принадлежат пространству $L^p(D)$ с показателем(и далее везде) $p > 2$. Коэффициенты таких систем могут допускать слабые особенности с требованием их p-интегрируемости в области D. Уравнения с коэффициентами $a \in C_{-\alpha-1}$, $\alpha \geq 0$, и $b \in C_{-1}$ не удовлетворяют этому условию.

В монографии Л.Г. Михайлова [7] решение уравнения (1) с коэффициентами a, $b \in C_{-1}(\overline{D}, 0)$ находится из класса $C_{-\lambda}$, $0 < \lambda < 1$. Разрешимость интегрального уравнения, к которому сводится уравнение (1), доказывается при определенных условиях малости этих коэффициентов.

З.Д. Усмановым [8] построена теория уравнения (1) при $a = 0$, $b(z)=\bar{z}^{-1}\beta e^{ik\varphi}, k \in Z$. Однако случай, когда $b(z) = \bar{z}^{-1}(\beta_1 e^{ik\varphi} + \beta_2 e^{im\varphi})$, где $\beta_1 \neq \beta_2$, приводит к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, исследование которой представляет собой весьма нетривиальную проблему и ранее не проводилось. Также показано, что для случая $a = 0$, $b = \lambda|z|^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, существует решение уравнения (1) в виде рядов Фурье, коэффициенты которых определяются через функции Бесселя и Макдональда.

На необходимость изучения уравнений с коэффициентами, допускающими особенности не ниже первого порядка, впервые было указано И.Н. Векуа [4] и А.В. Бицадзе [1].

В последнее время исследованию уравнения (1), а также других аналогичных уравнений с сингулярными коэффициентами были посвящены работы Н.Р. Раджабова [10], A. Meziani [11], А.Б. Тунгатарова [12], М.В. Коровиной [13], С.Б. Климентова [14] и др.

Достаточно большой интерес к уравнению (1) также вызван многочисленными приложениями такого класса уравнений. Например, к уравнению (1) с сингулярной точкой сводятся задачи из теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с точками уплощения [4],[8].

В главе 5 монографии А.В. Бицадзе ([1], с. 418) показано, что уравнения Максвелла–Эйнштейна в варианте Эрнста сводятся к решению уравнения первого порядка с сингулярной линией вида

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} - \frac{u + \overline{u}}{2(z + \overline{z})} = 0.$$

Как показано в работе [9], задача исследования напряженного состояния упругого тела в виде сплошного и полого тора или пространства, имеющего тороидальную полость, сводится к исследованию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} - \frac{2m + 1}{z - \overline{z}}(u - \overline{u}) = 0,$$

где $m-$ целое число. Полученные результаты позволяют уточнить расчеты напряженнодеформированного состояния различных объектов, типа кольцевых трещин или горных выработок вокруг целиков, находящихся на большой глубине, и повысить уровень надежности и экономичности таких расчетов.

Как следует из работ, посвященных вырождающимся дифференциальным уравнениям, на решения краевых задач может иметь влияние особенность коэффициентов на множестве, содержащемся в рассматриваемой области. В работе Begehr H. и Dao-Qing Dai [15] рассмотрено обобщенное уравнение Коши–Римана

$$w_{\bar z} = \frac{Q(z)}{P(z)} w(z) + a(z)w + b(z)\overline{w}, \quad |z| < 1,$$

где $Q(z), P(z)$ — полиномы, причем $P(z)$ внутри круга $|z| \leq 1$ имеет простые корни, $a(z),\ b(z) \in L^p(D)$, $p > 2$; изучается разрешимость задачи Римана–Гильберта. Показано, что число непрерывных решений зависит не только от индекса, но и от места расположения и типа особенностей.

В работе А.П. Солдатова, А.Б. Расулова [22] для обобщенной системы Коши–Римана с сингулярной линией выявлено, что для корректной постановки краевой задачи необходимо рассматривать краевую задачу, объединяющую элементы задач Римана–Гильберта (на границе области) и линейного сопряжения (на сингулярном отрезке, содержащемся внутри области).

В статье изучен эффект влияния попарно непересекающихся и не проходящих через начало координат неизолированных особенностей в младшем коэффициенте для обобщенной системы Коши–Римана на постановку краевых задач. Оказалось, что условие задачи Римана–Гильберта на границе области недостаточно для ее корректной постановки. Поэтому ставится задача, объединяющая элементы задач Римана–Гильберта на границе области и линейного сопряжения на окружностях-носителях сингулярностей младшего коэффициента, лежащих внутри области.

2 Интегральное представление решения

Пусть область D ограничена простым ляпуновским контуром Γ, охватывающим точку $z_0 = 0$ и попарно непересекающимися окружностями γ_j с центром z_j радиуса r_j, $\ 1 \leq j \leq n$, которые лежат в области D и не проходят через точку z_0. В обозначениях $\rho_j(z) = |z - z_j| - r_j$, $\ 1 \leq j \leq n$ рассмотрим в области $D_0 = D \setminus (\gamma \cup \{0\})$ уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j(z) u_j(z)}{\rho_j^{n_j}} u + \frac{b(z)}{|z|^m} \bar u = f, \tag{2.1}$$

где вещественные числа $n_j > 1$, $0 < m < 1$ и функции $a_j(z), b(z) \in C(\overline{D})$, $j = \overline{1,n}$. Предполагается, что на каждой окружности γ_j функция $|a_j(z)|$ постоянна, более точно,

$$a_j(z) = a_j^* u_j(z), \quad u_j(z) = \frac{z - z_j}{|z - z_j|} \frac{|z - z_j| - r_j}{||z - z_j| - r_j|}, \quad z \notin \gamma_j, \tag{2.2}$$

с некоторыми $a_j^* \in \mathbb{C}$. Кроме того, разность

$$A_0(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(a_j(z) - a_j^*) u_j(z)}{\rho_j^{n_j}} \in L^p(D), \tag{2.3}$$

где показатель $p > 2$ в дальнейшем фиксирован.

Решение ищется в классе $W^{1,p}_{loc}(D_0)$, т.е. в классе функций, принадлежащих $W^{1,p}(G)$ в любой области G, которая вместе со своим замыканием содержится в D_0. Что касается правой части f, то она выбирается в классе $L^p(D)$.

В получении представления регулярного решения данного уравнения существенную роль играет интегральный оператор Помпейу–Векуа (см. монографию И.Н. Векуа [4], стр. 29)

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta)\, d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad z \neq 0, \tag{2.4}$$

с плотностью $f \in L^p(D)$, где $p > 2$. Здесь и ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади. В частности, оператор T компактен в пространствах $L^p(D)$ и $C(\overline{D})$.

Если в уравнении (2.1) функции

$$A(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j(z) u_j(z)}{\rho_j^{n_j}(z)} \in L^p(D), \ p > 2,$$

$b(z) = 0$ и $f \in L^p(D)$, то $\Omega = TA \in W^{1,p}_{loc}(D)$ является решением уравнения $\Omega_{\bar z} - A = 0$. Следовательно, для функции $V = e^{-\Omega} u$ имеем соотношение

$$V_{\bar z} = e^{-\Omega} u_{\bar z} - A\, e^{-\Omega} u = e^{-\Omega} f.$$

В результате приходим к представлению

$$u = e^{\Omega} [\phi + T(e^{-\Omega} f)]$$

с произвольной аналитической в D функцией $\phi \in C(\overline{D})$ [4].

Переходим к рассмотрению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - A(z)u = f \tag{2.5}$$

с коэффициентом $A(z)$, который согласно (2.3) записываем в виде

$$A(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^* u_j(z)}{\rho_j^{n_j}(z)} + A_0(z), \quad a_j^* \in \mathbb{C},$$

и в обозначениях

$$\omega_*(z) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j(z), \quad \omega_j = \frac{-2a_j^*}{(n_j-1)\rho_j^{n_j-1}}, \quad n_j > 1,$$

$$h(z) = (TA_0)(z) + \frac{1}{\pi i}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^*}{(n_j-1)} \int_{\partial D} \frac{1}{\rho_j^{n_j-1}} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

имеет место

Лемма 1 *Пусть функция $A_0(z) \in L^p(D)$ где $p > 2$ и $a_* \in \mathbb{C}$ Тогда функция*

$$\Omega(z) = \omega_*(z) + h(z), \quad z \in D_0, \tag{2.6}$$

удовлетворяет уравнению $\Omega_{\bar{z}} = A$.

Теорема 1 *Пусть функция $\Omega(z)$ определена формулой (2.6) и $e^{-\Omega}f \in L^p(D)$.*

Тогда общее решение уравнения (2.5) в классе $C(\overline{D}\setminus\gamma)$ дается формулой

$$u = e^{\Omega}[\phi + T(e^{-\Omega}f)], \tag{2.7}$$

где $\phi \in C(\overline{D}\setminus\gamma)$ аналитична в открытом множестве $D\setminus\{\gamma\}$.

Доказательство леммы 1 и теоремы 1 непосредственно следует из вышеизложенных свойств оператора Помпейу-Векуа T.

Из леммы 1 следует, что функция

$$e^{\Omega(z)} = (C_0 \exp(\omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_n))(z),$$

где $C_0(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и всюду отлична от нуля. Поэтому согласно теореме 1 решение $u(z)$ уравнения (2.5) ведет себя как

$$u(z) = O(1)\exp(\omega_j), \quad \text{при} \ \ \rho_j \to 0.$$

Заметим, что функция $e^{\Omega(z)}$ при $\operatorname{Re} a_j^* < 0,\ \ j = \overline{1,n}$ ($\operatorname{Re} a_j^* > 0,\ \ j = \overline{1,n}$) допускает в окружности γ_j особенность (нуль) экспоненциального порядка. При $\operatorname{Re} a_j^* > 0,\ \ j = \overline{1,n}$ эти функции очевидно ограничены. Если $\operatorname{Re} a_j^* = 0,\ \ j = \overline{1,n}$, то $A \in L^p(D)$, $p > 2$ и при $e^{-\Omega} f \in L^p(D)$ и $\phi \in C(\overline{D})$ получим $u \in C(\overline{D})$.

Уравнение (2.1) с ненулевыми коэффициентами $A(z)$ и $b(z)$ с помощью леммы 1 по отношению к $\varphi = e^{-\Omega} u \in L^p(D)$ и обозначив $f_0 = e^{-\Omega} f$ можно преобразовать в уравнение

$$\varphi_{\bar z} + bc\overline{\varphi} = f_0,$$

которое эквивалентным образом редуцируется к интегральному уравнению

$$\varphi + T(b_1\overline{\varphi}) = \phi + Tf_0, \tag{2.8}$$

где $b_1 = bc$, $c(z) = e^{-2i\operatorname{Im}\Omega(z)}$, функция $\phi \in H(\overline{D})$ аналитична в D. Для исследования уравнения (2.8) необходимо предварительно изучить действие в различных пространствах интегрального оператора вида

$$(K_0\varphi)(z) = \int_D \frac{\varphi(\zeta) d_2\zeta}{|\zeta|^m |\zeta - z|^\alpha}, \quad z \in D,$$

где положительные m, α удовлетворяют условиям

$$0 < m < 1 \le \alpha < (3 - m)/2,$$

так что $0 < 3 - m - 2\alpha < 1$.

Лемма 2 *Пусть*

$$p > 2/(3 - m - 2\alpha), \quad \mu = 3 - m - 2\alpha - 2/p.$$

Тогда оператор K_0 *ограничен* $L^p(D) \to C^\mu(\overline{D})$.

Доказательство Отметим сначала, что если $0 < \beta_0 < 1 < \beta_1 < 2 - \beta_0$, то имеет место равномерная по $z \in \mathbb{C}$ оценка

$$\int_{|\zeta|\le 1} \frac{d_2\zeta}{|\zeta + z|^{\beta_0} |\zeta|^{\beta_1}} \le C_\alpha. \tag{2.9}$$

Аналогично, при $0 < \beta_0 < 1,\ \beta_2 > 2$ интеграл

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{d_2\zeta}{|\zeta|^{\beta_0}(1 + |\zeta|^{\beta_2})} < \infty. \tag{2.10}$$

Обратимся к интегралу $\psi = K_0\varphi$ в (1.1.7). Полагая $\beta_0 = qm,\ \beta_1 = q\alpha$, на основании неравенства Гельдера можем написать

$$|\psi(z)| \le |\varphi|_{L^p} \left(\int_D \frac{d_2\zeta}{|\zeta|^{\beta_0}|\zeta - z|^{\beta_1}} \right)^{1/q},$$

так что в силу (2.9), (2.10) имеем оценку

$$|\psi(z)| \le C_0|\varphi|_{L^p}. \tag{2.11}$$

Аналогичным образом для любых точек $z_1, z_2 \in D$ справедливо неравенство

$$|\psi(z_1) - \psi(z_2)| \le \alpha R^{\alpha-1}|z_1 - z_2| \left(\int_D \frac{d_2\zeta}{|\zeta|^{mq}|\zeta - z_1|^{\alpha q}|\zeta - z_2|^{\alpha q}} \right)^{1/q} |\varphi|_{L^p},$$

где R есть диаметр области D. Здесь учтено, что $1 - t^\alpha \le \alpha(1 - t)$ при $0 < t \le 1 \le \alpha$ и, следовательно,

$$(|u_1|^\alpha - |u_2|^\alpha) \le \alpha|u_1|^{\alpha-1}(|u_1| - |u_2|) \le \alpha|u_1|^{\alpha-1}|u_1 - u_2|$$

при $|u_1| \ge |u_2|$.

Замена $\zeta - z_1 = |z_1 - z_2|\zeta'$ приводит интеграл в правой части этого неравенства к выражению

$$|z_1 - z_2|^{2-(m+2\alpha)q} \int_{D'} \frac{d_2\zeta}{|\zeta + \zeta_0|^{mq}|\zeta|^{\alpha q}|\zeta - \zeta_1|^{\alpha q}},$$

где D' есть образ d при преобразовании $\zeta \to \zeta'$ и положено $\zeta_0 = z_1/|z_1 - z_2|$, $\zeta_1 = -(z_1 - z_2)/|z_1 - z_2|$. Интеграл здесь разобьем на сумму интегралов по $D_0 = D' \cap \{|\zeta| \le 1/2\}$, $D_2 = D' \cap \{|\zeta - \zeta_1| \le 1/2\}$ и $D_1 = D' \setminus (D_0 \cup D_2)$. Интегралы по D_0 и D_2 равномерно ограничены в силу (2.9), а интеграл по D_1 обладает аналогичным свойством в силу (2.10). В результате приходим к оценке

$$|\psi(z_1) - \psi(z_2)| \le C_1|\varphi|_{L^p}|z_1 - z_2|^{1+2/q-m-2\alpha},$$

которая вместе с (2.9), (2.10) и (2.11) завершает доказательство леммы 2. [20].

Из леммы 2, следует что, при $m + \mu + 2/p < 1$ оператор $Tb_1 : L^p(D) \to C^\mu(\overline{D})$ ограничен и компактен в каждом из пространств $L^p(D)$, $C^\mu(\overline{D})$, принадлежащих классу C^μ в каждой из компонент связности множества D_0. Согласно (2.8), в представлении общего решения уравнения (2.1) важную роль играет линейный интегральный оператор $K\varphi = Tb_1\overline{\varphi}$, а также связанное с ним уравнение Фредгольма $\varphi + K\varphi = f$.

Теорема 2 *(a) Однородное уравнение $\varphi + K\varphi = 0$ в классе $C(\overline{D})$ имеет конечное число линейно независимых (над полем $\mathbb{R}$) решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in H(\overline{D})$ и существуют линейно независимые суммируемые функции $h_1, \ldots, h_n$ такие, что условия ортогональности*

$$\operatorname{Re} \int_D f(\zeta) h_j(\zeta) d_2\zeta = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{2.12}$$

являются необходимыми и достаточными для разрешимости неоднородного уравнения $\varphi + K\varphi = f$.

(b) При выполнении условий (2.12) любое решение уравнения $\varphi + K\varphi = f$ дается формулой $\varphi = f + Pf$, с оператором

$$(Pf)(z) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{[p_1(z,\zeta) f(\zeta) + p_2(z,\zeta) \overline{f(\zeta)}] d_2\zeta}{|\zeta|^m |\zeta - z|^\alpha}, \tag{2.13}$$

где $1 \leq \alpha < (3-m)/2$, который действует из пространства $C(\overline{D})$ в пространство $H(\overline{D})$.

Теорема 3 *В условиях теоремы 2 любое решение и уравнения (2.1) с правой частью $f_0 = e^{-\Omega} f \in L^p(D)$ представимо в виде*

$$u = e^\Omega \left[\phi + Tf_0 + P(\phi + Tf_0) + \sum\nolimits_1^n \xi_j \varphi_j \right] \tag{2.14}$$

с произвольными $\xi_j \in \mathbb{R}$, и функция $\phi(z) \in H(\overline{D})$ аналитическая в области D удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} \int_D (\phi + Tf_0)(\zeta) h_j(\zeta) d_2\zeta = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Доказательства теорем 2, 3 идентичны к доказательствам аналогичных теорем, приведенных в работе [21].

3 Краевая задача для уравнения (2.5)

Как следует из следующей постановки краевой задачи, попарно непересекающихся и не проходящих через начало координат неизолированных особенностей в младшем коэффициенте для обобщенной системы Коши–Римана (2.1) существенно влияет на постановку краевых задач. Оказалось, что условия краевой задачи на границе области недостаточно для ее корректной постановки. Поэтому ставится задача, объединяющая элементы задач Римана–Гильберта на границе области и линейного сопряжения на окружностях-носителях сингулярностей младшего коэффициента, лежащих внутри области.

Полученное интегральное представление (2.7) позволяет для уравнения (2.5) ставить краевую задачу:

Задача R. *Найти регулярное решение уравнения (2.5) в классе*

$$u \in C^{\mu}(\overline{D_j}), \quad j = \overline{1,n}, \quad 0 < \mu < 1 - 2/p \tag{3.1}$$

по краевым условиям

$$\begin{cases} \mathrm{Re} Gu\big|_{\Gamma} = g; & (A) \\ (e^{-\Omega}u)^{+}(t) - (e^{-\Omega}u)^{-}(t) = 0, \quad t \in \gamma_k, \quad \overline{k = 1,n}, & (B) \end{cases}$$

при следующих требованиях на ее данные:

1) коэффициент $G \in C^{\nu}(\Gamma)$ *всюду отличен от нуля по соответствующим кривым;*

2) правая часть краевых условий $g \in H(\Gamma)$*; где знаки* $+$ *и* $-$ *указывают на граничные значения со стороны* D_j^{+} *и* $D_j^{-} = \mathbb{C} \setminus \overline{D_j^{+}}$.

Как следует из условий задачи, окружности, лежащие внутри Γ, являются носителями условий сопряжения (B).

Предварительно напомним хорошо известные результаты относительно классической задачи Римана–Гильберта в монографиях Н.И. Мусхелишвили [17], Ф.Д. Гахова [18]: *найти аналитическую в области* D *функцию* $\phi(z) \in H(\overline{D})$, *которая на границе* $\Gamma = \partial D$ *удовлетворяет условию*

$$\mathrm{Re}\, G\phi\big|_{\Gamma} = g, \tag{3.2}$$

где функция $G = G_1 + iG_2 \in H(\Gamma)$ *всюду отлична от нуля,* H *— класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера с некоторым показателем* [17] (см. стр. 18, 145).

В дальнейшем, мы воспользуемся компактным изложением А.П. Солдатова [16], [5] относительно решения классической задачи Римана–Гильберта и вкратце приведем некоторые факты о разрешимости классической задачи Римана–Гильберта (3.2) в случае единичного круга $\mathbb{D}$ с границей $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. С этой целью функцию ϕ продолжим в область $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D} = \{|z| > 1\}$, полагая что она удовлетворяет условию $\phi = \phi_*$, где ϕ_* определяется с помощью инверсии $\phi_*(z) = \overline{\phi(1/\overline{z})}$. Операция $\phi \to \phi_*$ являющаяся линейной, над полем $\mathbb{R}$ инволютивна, т.е. $(\phi_*)_* = \phi$. Видно, что $\phi_*^{\pm}(t) = \overline{\phi^{\mp}}, \quad t \in \mathbb{T}$. Очевидно, задачу (3.2) с коэффициентом G можем представить в форме

$$\phi^+ - \widetilde{G}\phi^- = \widetilde{g} \tag{3.3}$$

по отношению к коэффициенту $\widetilde{G} = -\overline{G}/G$ и правой части $\widetilde{g} = 2g/G$.

Исследование последней задачи с коэффициентом $\widetilde{G} = -\overline{G}/G$ осуществляется с помощью так называемой $\widetilde{G}$-канонической функции. По определению под ней понимается функция $X(z)$, которая аналитична в каждой связной компоненте $\mathbb{D}, \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ и продолжается по непрерывности на ее замыкание $\overline{\mathbb{D}}$, $\overline{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}}$ и всюду отлична от нуля, включая ее граничные значения $X^{\pm}$, вместе с $X^{-1}(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности и удовлетворяет соотношению

$$X^+ = \widetilde{G}X^-.$$

Определим индекс Коши ([17], стр.125):

$$\varkappa = \mathrm{Ind}_{\Gamma} G = \frac{1}{2\pi} \arg G(t)\big|_{\Gamma}.$$

Лемма 3 *Пусть $\varkappa = \mathrm{Ind}_{\Gamma} G$, так что функция $\theta(t) = \arg G(t) - \varkappa \arg t \in H(\mathbb{T})$, и пусть*

$$R(z) = \begin{cases} 1, & |z| < 1, \\ z^{2\varkappa}, & |z| > 1, \end{cases} \qquad \Theta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\pi - 2\theta(t)}{t - z} dt.$$

Тогда функция

$$X(z) = R(z) e^{\Theta(z) - \Theta(0)/2}$$

является $\widetilde{G}$-канонической и обладает свойством

$$X_*(z) = X(z) z^{-2\varkappa}.$$

Теорема 4 *В условиях леммы 3 все решения задачи (3.2) в классе $H(\overline{\mathbb{D}})$ описываются формулой*

$$\phi(z) = Ig(z) + X(z)p(z), \quad p \in P^0_{-2\varkappa}, \tag{3.4}$$

$$Ig(z) \equiv \frac{X(z)}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{dt}{t - z},$$

где функция g удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q(t)dt = 0, \quad q \in P^0_{2\varkappa-2}, \tag{3.5}$$

где P^0_k — класс многочленов степени k.

Обратимся к общему случаю односвязной области D. Пусть простой контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, тогда по теореме Келлога конформное отображение $w = \omega(z)$ этой области на единичный круг $\mathbb{D}$ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$ или, что равносильно, его производная $\omega' \in H(\overline{D})$. Зафиксируем точку $z_0 \in D$ по условию $\omega(z_0) = 0$.

Теорема 5 *Пусть $\kappa = \mathrm{Ind}_\Gamma G$, так что функция $\theta(t) = \arg G(t) - \kappa \arg t \in H(\Gamma)$, и пусть $X(z) = e^{\Theta(z)-\Theta(0)/2}$, где функция $\Theta \in H(\overline{D})$ определяется как решение задачи Дирихле*

$$\operatorname{Im}\Theta^+ = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \operatorname{Re}\Theta(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \theta(t)|\omega'(t)|d_1 t. \tag{3.6}$$

Тогда все решения задачи (3.2) в классе $H(\overline{D})$ описываются формулой

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{\omega'(t)dt}{\omega(t)-\omega(z)} + X(z)p[\omega(z)], \quad p \in P^0_{-2\kappa}, \tag{3.7}$$

где функция g удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_\Gamma \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q[\omega(t)]\omega'(t)dt = 0, \quad q \in P^0_{2\kappa-2}.$$

Доказательство почти очевидно.

Переходим к исследованию задачи **R**. Из (2.7) видно, что аналитическая функция ϕ определяется по u однозначно и восстанавливается по формуле:

$$\phi = e^{-\Omega}(u - Te^{-\Omega}f). \tag{3.8}$$

В рассматриваемом случае $p > 2$ и $e^{-\Omega}f \in W^{1,p}(D)$ и пространство $W^{1,p}(D)$ вложено в гельдерово пространство H (причем $C^{\mu_0}(\overline{D}) \subseteq H(\overline{D})$ с показателем $\mu_0 = 1 - 2/p$).

Следовательно, при $\mu < \mu_0$ соответствие между решением u по формуле (2.7) уравнения (2.1) из класса (3.1) и аналитической в D функцией $\phi \in H(\overline{D})$ будет взаимно однозначным.

Решение задачи $\mathbf{R}$ в отношении областей рассмотрим в двух случаях: **(а)**, когда область $D \equiv \mathbb{D}$- единичный круг и в случае **(б)** когда область D — произвольная конечная область, ограниченная гладким замкнутым контуром Γ.

Сперва рассмотрим задачу $\mathbf{R}$ в случае единичного круга, т.е. относительно области $\mathbb{D} = \{z : |z| \leq 1\}$. Тогда окружности $\gamma_k = \{z : |z - z_k| = r_k < 1\}$, $k = \overline{1, n}$ являются носителями граничных данных согласно условиям (B).

Случай (а). Рассмотрим задачу (B). Согласно которому:

$$(e^{-\Omega})^+(t) = (e^{-\Omega})^-(t), \quad t \in \gamma_j, \ \overline{j = 1, n},$$

и по формуле обращения (3.8) для функции ϕ приходим к эквивалентной задаче:

$$\phi^+(t) = \phi^-(t), \quad t \in \gamma_j, \ , \ \overline{j = 1, n}, \tag{3.9}$$

где через $\phi^+(t)$ и $\phi^-(t)$ соответственно обозначены предельные значения функций $\phi^+(z)$ и $\phi^-(z)$ соответственно из внутренних частей областей $\mathbb{D}_k, k = \overline{1, n}$ в их внешней части и наоборот. Заметим, что при этом мы воспользовались свойствами функций $f_0 = e^{-\Omega} f \in L^p$, $p > 2$, $(Tf_0)^{\pm}(t) \in H(\overline{\mathbb{D}})$, $(Tf_0)^+(t) = (Tf_0)^-(t), \quad t \in \gamma_j, , \ j = \overline{1, n}.$

Решение задачи (3.9) представляет собой аналитическую функцию $\phi \in C(\overline{D})$, определенную во всех точках области D. Это позволяет нам переходить к изучению краевой задачи (A) и перевести ее к краевой задаче Гильберта:

$$\operatorname{Re} G_0 \phi\big|_{\mathbb{T}} = g_0, \tag{3.10}$$

с коэффициентом $G_0 = G(e^{\Omega})\big|_{\Gamma}$ и правой частью

$$g_0 = g - \operatorname{Re} \ \left[G(e^{\Omega} T f_0)\big|_{\mathbb{T}}\right]$$

и сформулировать ее решение в виде теоремы 5 в рассмотренном случае **(а)**.

Теорема 6 *При выполнении условий теоремы 1 и условий задачи* $\boldsymbol{R}$ *все решения задачи (3.10) в классе* $H(\overline{\mathbb{D}})$ *описываются формулой (2.7) где функция* $\phi(z)$ *определяется по формуле*

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{g_0(t)}{G(t) X^+(t)} \frac{dt}{t - z} + X(z) p(z), \quad p \in P^0_{-2\kappa},$$

и каноническая функция X *определяется как в лемме 3 и функция* g_0 *удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{g_0(t)}{G(t) X^+(t)} p(t) dt = 0, \quad p \in P^0_{2\kappa - 2},$$

причем $g_0 = g - \operatorname{Re} \ \left[\alpha e^{\Omega} (T f_0)\big|_{\mathbb{T}}\right]$.

Случай (б). Резюмируя результаты исследований, сформулированных для единичного круга в теоремах 5 и 6 обратимся к общему случаю односвязной области D. При этом мы сохраняем обозначения формул в выше приведенных теоремах. Пусть простой контур $\Gamma \in C^{1,\mu}$, тогда по теореме Келлога конформное отображение $w = \omega(z)$ этой области на единичный круг $\mathbb{D}$ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$. Зафиксируем точку $z_0 \in D$ по условию $\omega(z_0) = 0$. Следовательно, имеет место

Теорема 7 *При выполнении условий теоремы 1 задача* $\boldsymbol{R}$ *фредгольмова в классе*

$$\{u : \quad e^{-\Omega}u \in H(\overline{D})\}$$

и ее индекс

$$\operatorname{ind} R = 1 - 2\varkappa, \quad \varkappa = \frac{1}{2\pi} \arg G(t)\big|_{\Gamma}.$$

Более точно, в обозначениях теоремы 6 все решения задачи $\boldsymbol{R}$ *в классе* $H(\overline{D})$ *описываются формулой (2.7), где*

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_0(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{dt}{t - z} + X(z)p(z), \quad p \in P^0_{-2\kappa},$$

причем $p \in P^0_{-2\kappa}$, *а функции* q, g_0 *удовлетворяют условиям ортогональности*

$$\int_{\Gamma} \frac{g_0(t)}{G(t)X^+(t)} q[\omega(t)]\omega'(t)dt = 0, \quad q \in P^0_{2\kappa-2}.$$

4 Краевая задача для уравнения (2.1)

Теперь рассмотрим выше рассмотренную задачу **R** для общего уравнения (2.1).

Для решения этой задачи используем теорему 3 об интегральном представлении решений уравнения (2.1).

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и* $f_0 = e^{-\Omega}f \in L^p(D)$, $p > 2$. *Тогда задача* $\boldsymbol{R}$ *является фредгольмовой в классе* $\{u, e^{-\Omega}u \in H(\overline{D})\}$ *и ее индекс равен* $1 - 2\kappa$.

Другими словами, однородная задача имеет конечное число m *линейно независимых решений, неоднородная задача разрешима при выполнении некоторого числа* m' *условий ортогональности на правую часть* f *уравнения (2.1) и правой части* g *задачи* $\boldsymbol{R}_1$, *причем разность* $m - m' = 1 - 2\kappa$.

Доказательство. Подставляя представление (2.14) в задачу $\mathbf{R}$, в обозначении $f^0 = Tf_0$ для аналитической функции ϕ вместе с дополнительными условиями

$$\mathrm{Re}\int_D (\phi + f^0)(\zeta) h_j(\zeta) d_2\zeta = 0, \quad 1 \le j \le n.$$

получим краевую задачу

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, G_0(\phi + R\phi)\big|_\Gamma + \sum_1^n \xi_j \mathrm{Re}\,(G_0\varphi_j)\big|_\Gamma = g_0, \\ \ [(1+P)\phi]|_{\gamma_j}^{+} - [(1+P)\phi]|_{\gamma_j}^{-} = g_j, \ \ j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{4.1}$$

с коэффициентом $G_0 = Ge^{\Omega}\big|_\Gamma$ и правыми частями

$$g_0 = g - \mathrm{Re}\,[G_0(f^0 + Pf^0)]\big|_\Gamma, \quad g_j = [(1+P)f^0]^+ - [(1+P)f^0]^-.$$

Неизвестными в этой задаче вместе с ϕ являются и вещественные числа $\xi_j, j = \overline{1,n}$.

Из теоремы 3 следует, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ оператор P ограничен $C(\overline{D}) \to C^{\varepsilon}(\overline{D})$, функция $f^0 \in H(\overline{D})$, а функция $\phi(z) \in H(\overline{D})$ аналитична в области D. Отсюда следует, что второе условие задачи (4.1) эквивалентно $\phi^+(t) = \phi^-(t), t \in l$.

Это позволяет нам записать соотношения (4.1) в следующем операторном виде:

$$\begin{gathered} R^0\phi + P^0\phi + \textstyle\sum_1^n \xi_j\varphi_j^0 = g^0, \\ \mathrm{Re}\displaystyle\int_D \phi(\zeta)h_j(\zeta)d_2\zeta = \eta_j, \ 1 \le j \le n, \end{gathered} \tag{4.2}$$

где положено

$$R^0\phi = \mathrm{Re}\, G_0\phi\big|_\Gamma, \quad P^0\phi = \mathrm{Re}\, G_0(P\phi)\big|_\Gamma,$$

$$\varphi_j^0 = \mathrm{Re}\, G_0\varphi_j|_\Gamma, \quad g^0 = g_0, \quad \eta_j = -\mathrm{Re}\int_D f^0(\zeta)h_j(\zeta)d_2\zeta.$$

Обозначим за X банахово пространство функций ϕ, которые аналитичны в D и принадлежат $H(\overline{D})$. Пусть $Y^0 = H(\Gamma)$ означает пространство вещественных функций. Тогда, при достаточно малом показателе Гельдера μ оператор $R^0 : X \to Y^0$ ограничен, а с учетом теоремы 3 оператор $P^0 : X \to Y^0$ компактен . Как видно из теоремы 3, оператор $R^0 : X \to Y^0$ фредгольмов и его индекс равен $1 - 2\varkappa$, поэтому на основании известных свойств [5], [19, с. 122] фредгольмовых операторов это же верно и для оператора $N = (R^0 + P^0)$. С другой стороны, оператор системы (4.2) можно рассматривать как ограниченный оператор $\widetilde{N} : \ X \times \mathbb{R}^n \to Y^0 \times \mathbb{R}^n$, главная часть которого совпадает с N. Поэтому [5], [19, с. 122] оператор $\widetilde{N}$ также фредгольмов и его индекс $\operatorname{ind} \widetilde{N} = \operatorname{ind} N = 1 - 2\varkappa$. Остается заметить [17], что система (4.2) эквивалентна исходной задаче **R**.

Список литературы

[1] Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М.: Наука, 1981.

[2] Смирнов М.М. *Вырождающиеся гиперболические уравнения.* Минск: Изд-во Высшая школа, 1997.

[3] Ломов С.А., Ломов И.С. *Основы математической теории пограничного слоя.* М.: Издательство Московского университета, 2011.

[4] Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* М.: Физматгиз, 1959.

[5] Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. *СМФН.* 2017. Т. 63. № 1.

[6] Раджабов Н.Р. *Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами.* Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992.

[7] Михайлов Л. Г. *Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами.* Душанбе: Таджик НИИНТИ. 1963.

[8] Усманов З.Д. *Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой.* Душанбе: Изд-во АН Тадж ССР, 1993.

[9] Гейнц О.М., Соловьев Ю.И. Напряженное состояние упругого пространства с тороидальной полостью. *Прикладная механика и теоретическая физика.* 2004. Т. 45, №1, стр. 73-83.

[10] Раджабов Н.Р. *Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами.* Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992.

[11] Meziani A. Representation of solutions of a singular CR equation in the plane. *Complex Var. and Elliptic Eq.* 2008. Vol. 53, pp. 1111–1130.

[12] Abdymanapov S.A., Tungatarov A.B. *Some classes of elliptic systems in the plane with singular coefficients.* Almaty: Nauka, 2005.

[13] Коровина М.В. Дифференциальные уравнения с коническим вырождением в пространствах с асимптотиками. *Дифф. уравнения.* 2009. Т.45, №9, стр. 1249–1258.

[14] Климентов С.Б. Об изгибаниях модельной поверхности положительной кривизны с изолированной точкой уплощения. *Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки.* 1997. №1, стр. 15–18.

[15] Begehr H., Dao-Qing Dai. On continuous solutions of a generalized Cauchy-Riemann system with more than one singularity. *J. Differential Equations.* 2004. Vol. 196, pp. 67 - 90.

[16] Солдатов А. П. Краевая задача линейного сопряжения теории функций. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1979. Т. 43, № 1, стр. 184–202.

[17] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* М.: Наука, 1968.

[18] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* М: Наука, 1977.

[19] Пале Р. *Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе.* М.: Мир, 1970.

[20] Rasulov A.B. Representation of the General Solution of an Equation of the Cauchy–Riemann Type with a Supersingular Circle and a Singular Point. *Differential Equations.* 2017. Vol. 53. No. 6, pp. 814–822.

[21] Расулов А.Б., Бободжанова М.А., Федоров Ю.С. Представление общего решения уравнения типа Коши–Римана с сингулярной окружностью и особой точкой. *Дифференциальные уравнения и процессы управления.* 2016. № 3, стр. 1-16.

[22] Расулов А.Б., Солдатов А.П. Краевая задача для обобщенного уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами. *Дифф. уравнения.* 2016. Т. 52, № 5, стр. 637-650.

The influence of non-isolated singularities in the lowest coefficient of the generalized Cauchy–Riemann equation on the formulation of boundary value problems

Rasulov A.B.*

National Research University «MPEI»

*e-mail: rasulzoda55@gmail.com

Abstract. The article reveals the effect of the influence of pairwise non-intersecting and not passing through the origin of coordinates of non-isolated singularities in the lowest coefficient of the generalized Cauchy–Riemann equation on the formulation of boundary value problems. The condition at the boundary of the region turned out to be insufficient to solve such problems. Therefore, we considered a case that combines elements of the Riemann–Hilbert problems on the boundary of a domain and linear conjugation on the surrounding area. carriers of singularities of the lowest coefficient lying inside the region.

Keywords: generalized Cauchy–Riemann equation, singularities in lower coefficients, Pompeiu–Vecua operator, Riemann–Hilbert problem, linear conjugation problem.