ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2024
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Адаптивное и робастное управление

Разработка адаптивного робастного регулятора на основе представления квазилинейной модели в виде тензорного произведения

Шабашов А.А., Поздяев В.В., Плотников А.А.

АО «Арзамасское научно-производственное предприятие «ТЕМП-АВИА»
Арзамасский политехнический институт (филиал) Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева

aa.shabashov@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача синтеза адаптивного робастного регулятора с использованием тензорного представления квазилинейной модели с изменяющимися параметрами. Такого вида аппроксимации нелинейных динамических систем могут быть сведены к выпуклым политопным формам в заданной области параметров. В результате к ним применимы методы выпуклого программирования, в том числе постановка задачи в терминах линейных матричных неравенств. В качестве методики для синтеза робастных регуляторов используется теория H_∞-оптимального управления. Результатом синтеза является тензорная модель, описывающая семейство робастных регуляторов, обеспечивающих устойчивость и управляемость объекта во всей области варьируемых параметров.

Ключевые слова: линейные матричные неравенства, квазилинейная модель с изменяющимися параметрами, тензорное произведение, робастные регуляторы, адаптивные регуляторы.

1 Введение

Основные тенденции развития современных беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) заключаются в расширении высотно-скоростных диапазонов применения и повышении маневренных характеристик при обеспечении требуемых качеств регулирования. Задача синтеза системы управления для объектов с подобными свойствами достаточно трудоёмка ввиду наличия компромиссных решений в плане аэродинамической компоновки, несовершенства силовых/исполнительных устройств и т.д. В результате классические методы не всегда позволяют производить качественный синтез контура стабилизации с требуемыми характеристиками.

Одним из подходов к синтезу адаптивных регуляторов, способных обеспечивать устойчивость и управляемость объекта в таком случае, является использование политопной формы на основе представления, полученного в результате разложения по сингулярным значениям высшего порядка (Higher-Order Singular Value Decomposition – HOSVD), квазилинейной модели с изменяющимися параметрами (quasi-Linear Parameter Varying – qLPV). Вершины такого политопа представляют собой набор стационарных матриц систем, тензорное произведение (Tensor Product – TP) которого с весовыми функциями способно восстановить исходную систему. Синтез на таком множестве позволяет обеспечить устойчивость не только в вершинах, но и во всем диапазоне варьируемых параметров. Специальные весовые функции при таком подходе образуются в результате трансформации ортонормированных столбцов сингулярных матриц, полученных на этапе применения HOSVD, в выпуклую оболочку, состоящую из множества стационарных вершин (ядра тензора) [1, 2].

Благодаря свойствам выпуклости, к такой модели применимы методы выпуклого программирования. В частности, постановка задачи в терминах аппарата линейных матричных неравенств (ЛМН) позволяет четко сформировать требуемые ограничения на переходные и частотные характеристики, например, с помощью теории H_∞-оптимального управления. Другим очевидным преимуществом класса TP-моделей является возможность манипулирования выпуклой оболочкой системы, позволяющая управлять не только качеством, но и разрешимостью всей задачи (не меняя требуемые ограничения) [1, 2, 3].

2 H_∞-оптимальное управление

В разделе приводится обобщение известных результатов синтеза регуляторов для стационарных систем с непрерывным и дискретным временем на основе теории H_∞-оптимального управления в терминах ЛМН.

2.1 Постановка задачи H_∞-оптимального управления

Рассмотрим следующую стационарную систему в виде общей схемы управления (General control configuration) с непрерывным или дискретным временем, отображающую внешние входы w и управляющие входы u на управляемые выходы z и измеряемые выходы y [4]:

$$\begin{aligned} z &= P_{11}(p)u + P_{12}(p)w \\ y &= P_{21}(p)u + P_{22}(p)w \end{aligned} \tag{1}$$

с законом управления на основе динамической обратной связи по выходу:

$$u = K(p)y,$$

где p обозначает переменную преобразования Лапласа в контексте непрерывного времени и переменную Z-преобразования в контексте дискретного времени.

Передаточная функция замкнутого контура от входа u к выходу z имеет вид:

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}.$$

Классическая задача синтеза H_∞-оптимального управления состоит в том, чтобы найти стабилизирующий регулятор K, который минимизирует H_∞-норму передаточной функции замкнутой системы $F_l(P, K)$, численно равную максимуму максимального сингулярного числа:

$$\min_K \|F_l(P, K)\|_\infty = \min_K \sup_{\bar{\sigma}} \bar{\sigma}(F_l(P, K)). \tag{2}$$

На практике обычно нет необходимости получать оптимальный регулятор, и чисто вычислительно (и теоретически) проще сконструировать субоптимальный (т.е. близкий к оптимальному в смысле нормы H_∞) [4]. В таком случае, пусть $\gamma_{\min}$ – минимальное значение $\|F_l(P, K)\|_\infty$ для всех стабилизирующих регуляторов. Тогда (2) сводится к нахождению такого стабилизирующего регулятора K при $\gamma > \gamma_{\min}$, что:

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma. \tag{3}$$

В настоящее время существует несколько методик решения поставленной задачи. Одно из них основывается на совместном решении двух алгебраических уравнений Риккати с Q-параметризацией, другое на применении итерационного алгоритма Дойла и т.д. [4, 5]. Подход, используемый в настоящей работе основывается на применении леммы о вещественной ограниченности (Bounded real lemma) [5, 6], позволяющей перейти от формулировки задачи γ-субоптимального H_∞-управления к постановке в терминах ЛМН, в результате решения которых может быть найдено множество субоптимальных регуляторов, включая регуляторы пониженного порядка [7, 8].

Для дальнейших рассуждений предположим, что (1) получена из следующей формы в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} px &= Ax + B_1u + B_2w, \\ z &= C_1x + D_{11}u + D_{12}w, \\ y &= C_2x + D_{21}u + D_{22}w, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{pmatrix} P_{11}(p) & P_{12}(p) \\ P_{21}(p) & P_{22}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (pI - A)^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Предварительно обозначим, что (A, B_2) – стабилизируема, (A, C_2) – наблюдаема, $D_{22} = 0$.

Так же получим передаточную функцию регулятора

$$K(p) = D_K + C_K(pI - A_K)^{-1}B_K \tag{4}$$

из

$$\begin{aligned} px_K &= A_Kx_K + B_Ky, \\ u &= C_Kx_K + D_Ky, \end{aligned}$$

где $A_K \in \mathbb{R}^{k_1 \times k_1}$.

Тогда передаточную функцию замкнутой системы с учётом (4) можно представить:

$$F_l(P, K)\,(p) = D_{cl} + C_{cl}(pI - A_{cl})^{-1}B_{cl}, \tag{5}$$

где

$$A_{cl} = \begin{pmatrix} A + B_2D_KC_2 & B_2C_K \\ B_KC_2 & A_K \end{pmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{pmatrix} B_1 + B_2D_KD_{21} \\ B_KD_{21} \end{pmatrix},$$

$$C_{cl} = \begin{pmatrix} C_1 + D_{12}D_KC_2 & D_{12}C_K \end{pmatrix}, \quad D_{cl} = D_{11} + D_{12}D_KD_{21}.$$

Также обозначим параметры регулятора следующей матрицей:

$$\Theta := \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k_1+m)\times(k_1+m)},$$

и введём следующие обозначения [5]:

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{k_1\times k_1} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ I_{k_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & I_{k_1} \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & D_{12} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\tilde{D}_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_{21} \end{pmatrix}.$$

Тогда с учётом (6) матрицы, описывающие замкнутую систему (5), примут вид:

$$A_{cl} = \left(A_0 + \tilde{B}\Theta\tilde{C}\right), \quad B_{cl} = \left(B_0 + \tilde{B}\Theta\tilde{D}_{21}\right),$$
$$C_{cl} = \left(C_0 + \tilde{D}_{12}\Theta\tilde{C}\right), \quad D_{cl} = D_{11} + \tilde{D}_{12}\Theta\tilde{D}_{21}.$$

Далее приведем постановку задач синтеза H_∞-оптимального регулятора для непрерывной и дискретной стационарных систем в терминах ЛМН [5, 7].

2.1.1 Синтез H_∞-оптимального управления в непрерывном времени

Для непрерывной стационарной системы задача по построению γ-субоптимального H_∞-регулятора разрешима тогда и только тогда, когда существуют симметричные матрицы $\hat{R}$, $\hat{S}$, удовлетворяющие следующей системе ЛМН:

$$\begin{pmatrix} N_r & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} A\hat{R} + \hat{R}A^{\mathrm{T}} & \hat{R}C_1^{\mathrm{T}} & B_1 \\ C_1\hat{R} & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^{\mathrm{T}} & D_{11}^{\mathrm{T}} & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_r & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \prec 0, \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} N_s & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}\hat{S} + \hat{S}A & \hat{S}B_1 & C_1^{\mathrm{T}} \\ B_1^{\mathrm{T}}\hat{S} & -\gamma I & D_{11}^{\mathrm{T}} \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_s & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \prec 0, \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{R} & I \\ I & \hat{S} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \tag{9}$$

где N_r и N_s – базисы левого нуль-пространства $\left(B_2^{\mathrm{T}}, D_{12}^{\mathrm{T}}\right)$ и правого нуль-пространства (C_2, D_{21}), соответственно.

Для численной устойчивости решения системы ЛМН матрицы N_r и N_s должны быть ортогональными. Такие базисы легко вычисляются путем разложения по сингулярным значениям матриц $(B_2, D_{12})^{\mathrm{T}}$ и (C_2, D_{21}).

Кроме того, существуют γ-субоптимальные регуляторы порядка $k_1 < m$ тогда и только тогда, когда (7)–(9) выполняются для некоторых $\hat{R}$, $\hat{S}$, которые дополнительно удовлетворяют следующему условию:

$$\operatorname{rank}(I - \hat{R}\hat{S}) \leq k_1. \tag{10}$$

Отметим, что семейство решений (7)–(9) не зависит от конкретного выбора базисов N_r и N_s.

2.1.2 Синтез H_∞-оптимального управления в дискретном времени

Для дискретной стационарной системы задача по построению γ-субоптимального H_∞-регулятора разрешима тогда и только тогда, когда существуют симметричные матрицы $\hat{R}$ и $\hat{S}$, удовлетворяющие следующей системе ЛМН:

$$\begin{pmatrix} N_r & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} A\hat{R}A^{\mathrm{T}} - \hat{R} & A\hat{R}C_1^{\mathrm{T}} & B_1 \\ C_1\hat{R}A^{\mathrm{T}} & -\gamma I + C_1\hat{R}C_1^{\mathrm{T}} & D_{11} \\ B_1^{\mathrm{T}} & D_{11}^{\mathrm{T}} & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_r & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \prec 0, \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix} N_s & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}\hat{S}A - \hat{S} & A^{\mathrm{T}}\hat{S}B_1 & C_1^{\mathrm{T}} \\ B_1^{\mathrm{T}}\hat{S}A & -\gamma I + B_1^{\mathrm{T}}\hat{S}B_1 & D_{11}^{\mathrm{T}} \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_s & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \prec 0, \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{R} & I \\ I & \hat{S} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \tag{13}$$

где N_r и N_s определяются аналогично постановке задачи в непрерывном времени.

Кроме того, существуют γ-субоптимальные регуляторы порядка $k_1 < m$ тогда и только тогда, когда (11)–(13) выполняются для некоторых $\hat{R}$, $\hat{S}$, которые дополнительно удовлетворяют условию (10).

2.2 Процедура построения регулятора

Для восстановления матрицы системы регулятора Θ на основе решения $\hat{R}$ и $\hat{S}$, требуется найти положительно определённую матрицу X_{cl} в результате решения линейного уравнения

$$\begin{bmatrix} \hat{S} & I \\ \hat{N}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = X_{cl} \begin{bmatrix} I & \hat{R} \\ 0 & \hat{M}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где $\hat{M}, \hat{N}$ – полноранговые по столбцам матрицы, которые могут быть найдены на основе соотношения:

$$\hat{M}\hat{N}^{\mathrm{T}} = I - \hat{R}\hat{S}. \tag{15}$$

Уравнение (15) всегда разрешимо, если $\hat{S} \succcurlyeq 0$ и $\hat{M}$ имеет полный ранг по столбцам [6]. Также заметим, что минимальный порядок регулятора зависит от размерностей матрицы X_{cl} или, что эквивалентно, ранга $I - \hat{R}\hat{S}$.

Далее представлены частные этапы построения регулятора для систем непрерывного и дискретного времени.

2.2.1 Построение регулятора для непрерывной системы

При разрешимости ЛМН (7)–(9) и найденном $X_{cl} \succcurlyeq 0$, параметры регулятора можно восстановить, разрешив следующее ЛМН относительно Θ:

$$\begin{pmatrix} A_{cl}^{\mathrm{T}}X_{cl} + X_{cl}A_{cl} & X_{cl}B_{cl} & C_{cl}^{\mathrm{T}} \\ B_{cl}^{\mathrm{T}}X_{cl} & -\gamma I & D_{cl}^{\mathrm{T}} \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{pmatrix} = \Psi_{X_{cl}} + \Phi^{\mathrm{T}}\Theta^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_{X_{cl}} + \mathrm{P}_{X_{cl}}^{\mathrm{T}}\Theta\Phi \prec 0 \tag{16}$$

где

$$\Phi := \begin{pmatrix} \tilde{C} & \tilde{D}_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{P}_{X_{cl}} := \begin{pmatrix} \tilde{B}^{\mathrm{T}}X_{cl} & 0 & \tilde{D}_{12}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$
$$\Psi_{X_{cl}} := \begin{pmatrix} A_0^{\mathrm{T}}X_{cl} + X_{cl}A_0 & X_{cl}B_0 & C_0^{\mathrm{T}} \\ B_0^{\mathrm{T}}X_{cl} & -\gamma I & D_{11}^{\mathrm{T}} \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Построение регулятора для дискретной системы

Аналогично задаче для непрерывной системы, при разрешимости ЛМН (11)–(13) и найденном $X_{cl} \succcurlyeq 0$, параметры регулятора можно восстановить, разрешив следующее ЛМН относительно Θ:

$$\begin{pmatrix} -X_{cl}^{-1} & A_{cl} & B_{cl} & 0 \\ A_{cl}^{\mathrm{T}} & -X_{cl} & 0 & C_{cl}^{\mathrm{T}} \\ B_{cl} & 0 & -\gamma I & D_{cl}^{\mathrm{T}} \\ 0 & C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{pmatrix} = \Psi_{X_{cl}} + \Phi^{\mathrm{T}}\Theta^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_{X_{cl}} + \mathrm{P}_{X_{cl}}^{\mathrm{T}}\Theta\Phi \prec 0 \qquad (17)$$

где

$$\Phi := \begin{pmatrix} 0 & \tilde{C} & \tilde{D}_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{P}_{X_{cl}} := \begin{pmatrix} \tilde{B}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \tilde{D}_{12}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

$$\Psi_{X_{cl}} := \begin{pmatrix} -X_{cl}^{-1} & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^{\mathrm{T}} & -X_{cl} & 0 & C_0^{\mathrm{T}} \\ B_0^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma I & D_{11}^{\mathrm{T}} \\ 0 & C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix}.$$

Таким образом в случае синтеза на основе рассмотренных методик для стационарных систем непрерывного или дискретного времени может быть получен регулятор в форме динамической обратной связи по выходу $K(p)$ субоптимальный по H_∞-норме, т.е. удовлетворяющий неравенству (3).

3 TP-представление qLPV модели

Нелинейная динамическая система может быть представлена в пространстве состояний с помощью qLPV модели

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) &= C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \end{aligned} \qquad (18)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор состояния, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ – вектор измерений, $u(t) \in \mathbb{R}^k$ – вектор управления, $\theta(t) = [\ \theta_1(t)\ \ \theta_2(t)\ \ \ldots\ \ \theta_N(t)\ ] \in \Omega = [\ \theta_1^{\min}\ \ \theta_1^{\max}\ ] \times [\ \theta_2^{\min}\ \ \theta_2^{\max}\ ] \times \ldots \times [\ \theta_N^{\min}\ \ \theta_N^{\max}\ ] \subset \mathbb{R}^N$ – вектор варьируемых параметров (в данном случае зависящий в т.ч. от состояния), Ω – замкнутый гиперкуб, $\theta_n^{\min}, \theta_n^{\max}$ – диапазоны изменения варьируемых параметров, N – количество варьируемых параметров.

Матрица системы $S(\theta(t))$ такой модели является функцией переменных вектора состояния $x(t)$ и имеет следующий вид:

$$S(\theta(t)) = \begin{pmatrix} A(\theta(t)) & B(\theta(t)) \\ C(\theta(t)) & D(\theta(t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+k)\times(m+l)}. \qquad (19)$$

Сформируем т.н. TP-представление модели [1]. Матрица (19) как функция от $\theta(t)$ может быть аппроксимирована параметризованной линейной комбинацией стационарных систем

$$S_r = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+k)\times(m+l)}, \quad r = 1, \ldots, R,$$

тогда (19) имеет вид:

$$S(\theta(t)) \approx \sum_{r=1}^{R} w_r(\theta(t)) S_r, \tag{20}$$

где $w_r : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ – весовые функции, обладающие свойствами

$$w_r(\theta(t)) \in [\ 0 \quad 1\ ], \quad \sum_{r=1}^{R} w_r(\theta(t)) = 1. \tag{21}$$

Весовые функции $w_r(\theta(t))$ имеют вид

$$w_r(\theta(t)) = \prod_{n=1}^{N} w_{n,i_n}(\theta_n(t)),$$

т.е.

$$\begin{array}{c} w_1(\theta(t)) = w_{1,1}(\theta_1(t)) \times \ldots \times w_{N,1}(\theta_N(t)) \\ w_2(\theta(t)) = w_{1,1}(\theta_1(t)) \times \ldots \times w_{N,2}(\theta_N(t)) \\ \vdots \\ w_R(\theta(t)) = w_{1,I_1}(\theta_1(t)) \times \ldots \times w_{N,I_N}(\theta_N(t)) \end{array} \tag{22}$$

где $R = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_N$ – количество вершин политопной модели, I_n – верхние границы индексов весовых функций, используемых в n-ой размерности вектора варьируемых параметров $\theta(t)$, $w_{n,i_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – i_n-я скалярная весовая функция, определённая для n-ой размерности гиперкуба Ω, $i_n = 1, 2, \ldots, I_N$.

Далее будем считать нумерации $r = 1, \ldots, R$ и $(i_1, i_2, \ldots, i_N) = (1, 1, \ldots, 1), \ldots, (I_1, I_2, \ldots, I_N)$ эквивалентными в соответствии с упорядочением, представленным (22).

Используя вышесказанное, формулу (20) также можно записать в следующем виде:

$$S(\theta(t)) \approx \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \cdots \sum_{i_N=1}^{I_N} \prod_{n=1}^{N} w_{n,i_n}(\theta_n(t)) S_{i_1,i_2,\ldots,i_N} = \mathcal{S} \mathop{\boxtimes}_{n=1}^{N} W_n(\theta_n),$$

где $\sum_{i_1=1}^{I_1}\sum_{i_2=1}^{I_2}\cdots\sum_{i_N=1}^{I_N}$ замена $\sum_{r=1}^{R}$, $S_{i_1,i_2,\ldots,i_N} = S_r$, $W_n \in \mathbb{R}^{I_n}$ – вектор весовых функций, состоящий из $w_{n,i_n}(\theta_n(t))$, $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{I_1\times I_2\times\ldots\times I_N\times(m+k)\times(m+l)}$ – набор стационарных моделей $S_{i_1,i_2,\ldots,i_N} \in \mathbb{R}^{(m+k)\times(m+l)}$ – ядро тензора, $\boxtimes$ – знак тензорного произведения.

Форма (20) является политопным представлением матрицы (19). Тогда (18) можно записать как:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \approx \mathcal{S} \mathop{\boxtimes}_{n=1}^{N} W_n(\theta_n) \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}. \tag{23}$$

В результате политопная модель (23) представляет собой аппроксимацию исходной qLPV модели (типичный уровень погрешности см. в разд. 5, табл. 2). TP-модель по сравнению с (18) имеет ряд преимуществ. Во-первых, фиксированная структура, которая подразумевает собой ограниченное количество исследуемых стационарных систем (вершин политопа). Во-вторых, выпуклые свойства (21) позволяют применить к (23) аппарат ЛМН для решения задач управления. Таким образом, в ходе разработки политопной модели достигается компромисс между сложностью и точностью с сохранением поведения исходной qLPV модели, достаточного для адекватности получаемых результатов в ходе проведения синтеза регуляторов.

Для получения TP-представления qLPV модели на первом шаге необходимо провести сэмплирование функции (19) по всем компонентам вектора варьируемых параметров θ. Далее, с целью редукции полученного тензора, зачастую используют алгоритм HOSVD и его вариации Reduced HOSVD (RHOSVD) и Compact HOSVD (CHOSVD) [1]. В ходе применения HOSVD вычисляются вершины TP-модели $S_{i_1,i_2,\ldots,i_N}$ и матрицы, состоящие из сингулярных векторов, представляющих собой множества сэмплов весовых функций (сингулярные матрицы). Значения весовых функций $w_{n,i_n}(\theta_n(t))$ для произвольных значений аргументов на практике получаются интерполяцией. Точность представления qLPV модели при таком подходе зависит главным образом от размера сетки сэмплирования и желаемого уровня редукции исходного тензора (размера редуцированной сетки). Альтернативными методами получения политопной модели в форме (23) может быть аппроксимация с помощью нечётких систем, нейронных сетей и т.д. [9].

Необходимые свойства (21) выпуклой оболочки формируются в результате специальной линейной трансформации сингулярных матриц, полученных на этапе применения HOSVD. Отдельным вопросом является исследование влияния выпуклых свойств TP-модели на разрешимость задачи синтеза.

Так, для конструирования регулятора наиболее предпочтительными являются более плотные выпуклые оболочки, например, типа CNO или NO, а для построения наблюдателей – разреженные, например, типа RNO. Исследование влияния типов выпуклых форм TP-моделей рассматривается в работах [3, 10, 11, 12, 13].

4 Методика синтеза адаптивного робастного регулятора

Объединим результаты разд. 2 и разд. 3 в виде методики синтеза адаптивного робастного регулятора. Применив рассмотренную теорию H_∞-оптимального управления, мы получим множество регуляторов для вершин политопной модели в итоге общего решения выпуклой оптимизационной задачи, тем самым обеспечивая робастные свойства. Адаптивность регулятора достигается использованием аппарата тензорной алгебры в виде объединения множества регуляторов в тензор и его соответствующего произведения с весовыми функциями.

4.1 Постановка задачи H_∞-оптимального управления для TP-представления qLPV системы

Пусть задана qLPV система в следующем виде:

$$\begin{aligned} px &= A(\theta)x + B_1(\theta)w + B_2(\theta)u, \\ z &= C_1(\theta)x + D_{11}(\theta)w + D_{12}(\theta)u, \\ y &= C_2(\theta)x + D_{21}(\theta)w + D_{22}(\theta)u. \end{aligned} \tag{24}$$

Тогда задача по построению γ-субоптимального H_∞-управления с динамической обратной связью по выходу

$$\begin{pmatrix} px_K \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_K \\ y \end{pmatrix} \tag{25}$$

сводится к нахождению такого стабилизирующего регулятора $K(\theta)$, что при $\gamma > \gamma_{\min}$:

$$\|F_l(P(\theta), K(\theta))\|_\infty < \gamma.$$

Для решения поставленной задачи с помощью методов, приведенных в п. 4.2, необходимо выполнение следующих условий:

- матрицы $B_2(\theta) = B_2,\ C_2(\theta) = C_2,\ D_{12}(\theta) = D_{12},\ D_{21}(\theta) = D_{21}$ (т.е. не зависят от параметров);
- пары $(A(\theta), B_2)$ должны быть стабилизируемы и пары $(A(\theta), C_2)$ должны быть наблюдаемы для $\forall\theta \in \Omega$;
- $D_{22}(\theta) = 0$.

Запишем соответствующие матрицы систем для (24) и (25):

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & B_1(\theta) & B_2 \\ C_1(\theta) & D_{11}(\theta) & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+k)\times(m+l)}, \tag{26}$$

$$\Theta(\theta) = \begin{pmatrix} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k_1+m)\times(k_1+m)}. \tag{27}$$

Используя результаты, приведенные в разделе 3, получим TP-представление матрицы системы (26). Тогда (24) может быть представлена следующей политопной TP-моделью:

$$\begin{pmatrix} px \\ z \\ y \end{pmatrix} = S(\theta) \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix} \approx \mathcal{S} \mathop{\boxtimes}_{n=1}^{N} W_n(\theta_n) \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{R} (w_i(\theta) S_i) \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix},$$

а соответствующий ей регулятор будем искать в виде:

$$\begin{pmatrix} px_K \\ u \end{pmatrix} = \Theta(\theta) \begin{pmatrix} x_K \\ y \end{pmatrix} \approx \hat{\Theta} \mathop{\boxtimes}_{n=1}^{N} W_n(\theta_n) \begin{pmatrix} x_K \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{R} (w_i(\theta)\Theta_i) \begin{pmatrix} x_K \\ y \end{pmatrix},$$

где $\hat{\Theta}$ – ядро тензора, представляющее собой набор линейных стационарных матриц систем регулятора,

$$S_i = \begin{pmatrix} A_i & B_{1i} & B_2 \\ C_{1i} & D_{11i} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_i = \begin{pmatrix} A_{Ki} & B_{Ki} \\ C_{Ki} & D_{Ki} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, R.$$

Традиционный подход к работе с TP-представлениями систем, рассматриваемый в работах [1, 2], подразумевает подстановку выражений вида $A = \sum_{r=1}^{R} w_r(\theta(t))A_r$, $P = \sum_{r=1}^{R} w_r(\theta(t))P_r$ и т.п. в базовое ЛМН, раскрытие скобок и консервативную трансформацию получившегося выражения в систему ЛМН, имеющих структуру, идентичную исходному, но записанных относительно матриц A_r, P_r и т.д. Новая система ЛМН гарантирует асимптотическую устойчивость замкнутого контура при изменении варьируемых параметров. К сожалению, применение таких методик сопряжено со значительным увеличением количества ЛМН, что может ухудшить качество получаемого результата и сходимость метода их решения. Устранение подобных недостатков может быть произведено с помощью манипуляций свойствами выпуклой оболочки путём её реконструкции или комбинированием с другой TP-моделью [10]. Однако для изначально плохо разрешимых задач синтеза подобные техники не всегда могут обеспечить положительные результаты — например, для перегрузочных контуров стабилизации БПЛА, характеризующихся малыми областями устойчивости.

При рассмотрении плотных выпуклых оболочек типа CNO или NO, эффективность применения которых для задач синтеза регуляторов отмечена в работах [1, 2], можно предположить, что данные оболочки достаточно хорошо описывают реальную область изменения параметров системы. Тогда в качестве альтернативной методики могут быть применимы техники робастного синтеза для qLPV систем, предложенные в работах [5, 6, 7]. В терминах исходного метода это эквивалентно отбрасыванию новых ЛМН с участием «перекрестных произведений» вида $A_1^{\mathrm{T}}P_2 + P_2A_1$ и т.п., связывающих элементы разных вершин TP-представления. Аналогичный эффект имел бы место, если веса $w_i(\theta)$ являлись бы набором взаимно ортогональных индикаторных функций, и $\forall i, j \neq i : w_i(\theta)w_j(\theta) = 0$. Следует отметить, что такая интерпретация уменьшает строгость метода, и полученные на её основе решения нуждаются в дополнительной валидации.

4.2 Масштабирование H_∞-оптимального управления на политопный случай

Согласно результатам, приведенным в работе [6], для непрерывной политопной модели задача по построению γ-субоптимального H_∞ TP-регулятора разрешима тогда и только тогда, когда существуют симметричные матрицы $\hat{R}$,

$\hat{S}$, удовлетворяющие следующей системе из $2R+1$ ЛМН:

$$\begin{pmatrix} N_r & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} A_i\hat{R}+\hat{R}A_i^{\mathrm{T}} & \hat{R}C_{1i}^{\mathrm{T}} & B_{1i} \\ C_{1i}\hat{R} & -\gamma I & D_{11i} \\ B_{1i}^{\mathrm{T}} & D_{11i}^{\mathrm{T}} & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_r & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \prec 0, \tag{28}$$

$$\begin{pmatrix} N_s & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} A_i^{\mathrm{T}}\hat{S}+\hat{S}A_i & \hat{S}B_{1i} & C_{1i}^{\mathrm{T}} \\ B_{1i}^{\mathrm{T}}\hat{S} & -\gamma I & D_{11i}^{\mathrm{T}} \\ C_{1i} & D_{11i} & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_s & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \prec 0, \tag{29}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{R} & I \\ I & \hat{S} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \tag{30}$$

где $i=1,\dots,R$.

Аналогично, для дискретной политопной модели необходимо найти симметричные матрицы $\hat{R}$, $\hat{S}$, удовлетворяющие следующей системе из $2R+1$ ЛМН:

$$\begin{pmatrix} N_r & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} A_i\hat{R}A_i^{\mathrm{T}}-\hat{R} & A_i\hat{R}C_{1i}^{\mathrm{T}} & B_{1i} \\ C_{1i}\hat{R}A_i^{\mathrm{T}} & -\gamma I+C_{1i}\hat{R}C_{1i}^{\mathrm{T}} & D_{11i} \\ B_{1i}^{\mathrm{T}} & D_{11i}^{\mathrm{T}} & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_r & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \prec 0, \tag{31}$$

$$\begin{pmatrix} N_s & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} A_i^{\mathrm{T}}\hat{S}A_i-\hat{S} & A_i^{\mathrm{T}}\hat{S}B_{1i} & C_{1i}^{\mathrm{T}} \\ B_{1i}^{\mathrm{T}}\hat{S}A_i & -\gamma I+B_{1i}^{\mathrm{T}}\hat{S}B_{1i} & D_{11i}^{\mathrm{T}} \\ C_{1i} & D_{11i} & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_s & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \prec 0, \tag{32}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{R} & I \\ I & \hat{S} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \tag{33}$$

где $i=1,\dots,R$.

N_r и N_s так же являются базисами левого нуль-пространства $\left(B_2^{\mathrm{T}}, D_{12}^{\mathrm{T}}\right)$ и правого нуль-пространства (C_2, D_{21}) соответственно.

Кроме того, существуют γ-субоптимальные регуляторы порядка $k_1 < m$ тогда и только тогда, когда $\hat{R}$, $\hat{S}$ дополнительно удовлетворяют условию (10).

Если системы ЛМН (28)–(30) или (31)–(33) разрешимы относительно пар $\hat{R}$, $\hat{S}$, то задача синтеза H_∞-субоптимального управления политопной TP-моделью разрешима. Тогда на каждой вершине можно изолированно построить регулятор на основе уравнений (14), (15) и (16) или (17), удовлетворяющий заданным требованиям.

4.3 Анализ асимптотической устойчивости

Упомянутое в конце п. 4.1 отбрасывание части неравенств ввиду предположения об их выпуклых свойствах позволило существенно сократить размер формальной задачи синтеза ТР-регулятора, что в целом положительно влияет на её разрешимость и снижает вычислительную нагрузку. Однако результатом также является потеря гарантий на асимптотическую устойчивость замкнутого контура с полученным ТР-регулятором, что в общем случае недопустимо и порождает необходимость в дополнительной проверке устойчивости.

Используя (24) и (25), с учетом $B_2(\theta) = B_2,\ C_2(\theta) = C_2$, запишем дифференциальные уравнения замкнутой системы «объект управления – регулятор» в форме пространства состояний

$$px_{cl} = A_{cl}(\theta)x_{cl}, \tag{34}$$

где

$$x_{cl} = \begin{pmatrix} x \\ x_K \end{pmatrix},\ A_{cl}(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) + B_2 D_K(\theta) C_2 & B_2 C_K(\theta) \\ B_K(\theta) C_2 & A_K(\theta) \end{pmatrix} = A_0(\theta) + \tilde{B}\Theta(\theta)\tilde{C},$$
$$A_0(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & 0 \\ 0 & 0_{k_1\times k_1} \end{pmatrix},\ \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ I_{k_1} & 0 \end{pmatrix},\ \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & I_{k_1} \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Достаточным условием асимптотической устойчивости системы (34) является существование функции Ляпунова в виде квадратичной формы [14]:

$$V(x_{cl}) = x_{cl}^T P x_{cl}, \tag{35}$$

обладающей следующими свойствами:

- $V(x_{cl}) \geq 0$ для $\forall x_{cl}$, причём $V(x_{cl}) = 0$, только при $x_{cl} = 0$;
- $pV(x_{cl}(t)) < 0$,

где $P = P^{\mathrm{T}} \succ 0$, x_{cl} – ненулевое решение замкнутой системы.

Тогда, следуя методике синтеза ТР-регуляторов из работ [1, 2], существование функции Ляпунова (35) может быть гарантировано разрешимостью следующей системы ЛМН:

$$M_r \prec 0, \quad P \succ 0, \tag{36}$$

где $M_r = {A^r_{cl}}^{\mathrm{T}} P + P A^r_{cl}$ – для непрерывной системы, $M_r = {A^r_{cl}}^{\mathrm{T}} P A^r_{cl} - P$ – для дискретной системы, $A^r_{cl} = \begin{pmatrix} A^r + B_2 D^r_K C_2 & B_2 C^r_K \\ B^r_K C_2 & A^r_K \end{pmatrix}$ – матрица замкнутой системы из вершины r, $r = 1, \ldots, R$.

В случае разрешимости (36) разработанный регулятор на основе (28)–(30) и (31)–(33) обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутого контура.

5 Численное моделирование

Нелинейная изолированная модель бокового движения БПЛА может иметь следующий вид [15, 16]:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \omega_y + c_z \frac{\rho(H) V_a(H) M}{2m} S, \\ \dot{\omega}_y &= m_y \frac{\rho(H) V_a^2(H) M^2}{2 J_y} S b_a, \\ \dot{\psi} &= \omega_y, \\ \Psi &= \psi - \beta, \\ n_z &= c_z \frac{\rho(H) V_a^2(H) M^2}{2 m g(H)} S, \end{aligned} \tag{37}$$

где Ψ, ψ, β – углы пути, рыскания и скольжения [рад], ω_y – угловая скорость рыскания [рад/с], c_z, m_y – аэродинамические коэффициенты силы и момента, J_y – момент инерции, относительно оси Oy [кг $\cdot$ м^2], n_z – боковая перегрузка [g], $\rho(H)$ – плотность воздуха [кг/м^3], $V_a(H)$ – скорость звука [м/с], $g(H)$ – ускорение свободного падения [м/с^2], H – высота [м], M – число Маха, m – масса [кг], S – характерная площадь [м^2], b_a – характерный размер [м].

Модель привода для рассматриваемого объекта имеет вид:

$$T_{\text{н}} \dot{\delta}_{\text{н}} + \delta_{\text{н}} = \delta_{\text{н}}^{\text{зад}}, \tag{38}$$

где $\delta_{\text{н}}$ – угол отклонения руля направления [рад], $\delta_{\text{н}}^{\text{зад}}$ – управляющий сигнал в боковом канале [рад], $T_{\text{н}}$ – постоянная времени привода [с].

Представив аэродинамические коэффициенты в виде

$$\begin{aligned} c_z(M, \beta, \delta_{\text{н}}) &= c_{z\beta}(M, \beta, \delta_{\text{н}}) \cdot \beta + c_{z\delta_{\text{н}}}(M, \beta, \delta_{\text{н}}) \cdot \delta_{\text{н}} + c_{z0}(M), \\ m_y(M, \beta, \delta_{\text{н}}) &= m_{y\beta}(M, \beta, \delta_{\text{н}}) \cdot \beta + m_{y\delta_{\text{н}}}(M, \beta, \delta_{\text{н}}) \cdot \delta_{\text{н}} + m_{y0}(M), \end{aligned}$$

и пренебрегая их статическими составляющими $c_{z0}(M)$ и $m_{y0}(M)$, запишем модель (37) с учётом уравнения динамики привода (38) в следующей qLPV форме:

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\ \omega_y\\ \delta_{\text{н}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_4(\theta) & 1 & b_5(\theta)\\ b_2(\theta) & 0 & b_3(\theta)\\ 0 & 0 & -T_{\text{н}}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ \omega_y\\ \delta_{\text{н}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ T_{\text{н}}^{-1}\end{bmatrix}\delta_{\text{н}}^{\text{зад}},\\ \begin{bmatrix}n_z\\ \omega_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1(\theta) & 0 & d_3(\theta)\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ \omega_y\\ \delta_{\text{н}}\end{bmatrix},\end{gathered} \tag{39}$$

где $\theta=\begin{bmatrix}H & M & \beta & \delta_{\text{н}}\end{bmatrix}$ – вектор варьируемых параметров,

$$b_2(H,M,\beta,\delta_{\text{н}})=m_{y\beta}(M,\beta,\delta_{\text{н}})\frac{\rho(H)V_a^2(H)M^2Sb_a}{2J_y},$$

$$b_3(H,M,\beta,\delta_{\text{н}})=m_{y\delta_{\text{н}}}(M,\beta,\delta_{\text{н}})\frac{\rho(H)V_a^2(H)M^2Sb_a}{2J_y},$$

$$b_4(H,M,\beta,\delta_{\text{н}})=c_{z\beta}(M,\beta,\delta_{\text{н}})\frac{\rho(H)V_a(H)MS}{2m},$$

$$b_5(H,M,\beta,\delta_{\text{н}})=c_{z\delta_{\text{н}}}(M,\beta,\delta_{\text{н}})\frac{\rho(H)V_a(H)MS}{2m},$$

$$d_1(H,M,\beta,\delta_{\text{н}})=c_{z\beta}(M,\beta,\delta_{\text{н}})\frac{\rho(H)V_a^2(H)M^2S}{2mg(H)},$$

$$d_3(H,M,\beta,\delta_{\text{н}})=c_{z\delta_{\text{н}}}(M,\beta,\delta_{\text{н}})\frac{\rho(H)V_a^2(H)M^2S}{2mg(H)}.$$

Получим TP-представление qLPV модели (39), точность которого будем оценивать по следующим критериям:

$$E_{\max}=\max_{i=1,\dots,n_s}\left\|\left(S_{lpv}(\theta^i)-S_{tp}(\theta^i)\right)S_{lpv}^{-1}(\theta^i)\right\|_{\max}\cdot 100\%,$$

$$E_{\text{mean}}=\frac{1}{n_s}\sum_{i=1}^{n_s}\left\|\left(S_{lpv}(\theta^i)-S_{tp}(\theta^i)\right)S_{lpv}^{-1}(\theta^i)\right\|_{\max}\cdot 100\%,$$

где n_s – размер случайной выборки, θ^i – i-е случайное сочетание вектора варьируемых параметров, $S_{lpv}(\theta^i), S_{tp}(\theta^i)$ – матрицы системы $S(\theta)$ для qLPV модели и её TP-представления.

Диапазоны варьируемых параметров представлены таблицей 1. Точность полученного TP-представления для системы (39) сведена в таблицу 2. Весовые функции, полученные в результате разложения по варьируемым параметрам представлены на рисунке 1.

Таблица 1: Диапазоны изменяемых параметров в боковом канале

Параметр	Наименование	Диапазон	Размерность сетки	Единицы измерения
H	Высота	[0 8000]	9	м
M	Число Маха	[0,2 0,6]	5	–
β	Угол скольжения	[-7 7]	25	град
$\delta_{\text{н}}$	Угол отклонения руля направления	[-12 12]	25	град

Таблица 2: Точность аппроксимации для бокового канала

Ошибка	Значение, %
Максимальная ($E_{\max}$)	1,94
Средняя (E_{mean})	0,43

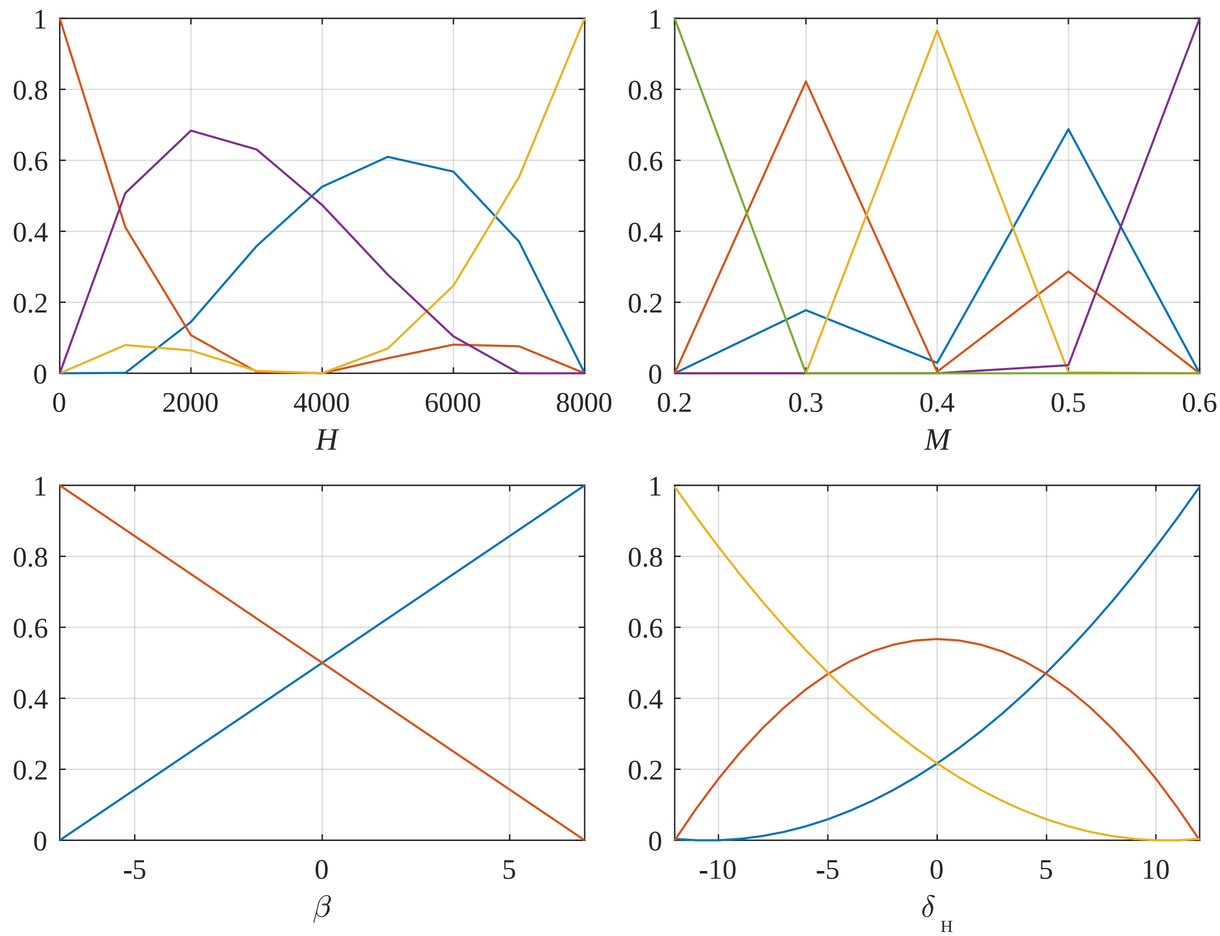


Рис. 1: Весовые функции от варьируемых параметров

Матрицы системы, образующие вершины политопа, полученного TP-разложением в редуцированной сетке размера $4 \times 5 \times 2 \times 3$ вектора варьируемых параметров, частично представлены следующим набором непрерывных систем:

$$S_{1111} = \begin{bmatrix} -0{,}2612 & 1 & -0{,}1198 & 0 \\ -13{,}4894 & 0 & -69{,}4779 & 0 \\ 0 & 0 & -66{,}6667 & 66{,}6667 \\ -0{,}0794 & 0 & -0{,}0369 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, S_{4523} = \begin{bmatrix} -0{,}2326 & 1 & -0{,}1204 & 0 \\ -6{,}2961 & 0 & -27{,}8468 & 0 \\ 0 & 0 & -66{,}6667 & 66{,}6667 \\ -0{,}0277 & 0 & -0{,}0144 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее перейдём в дискретную область с частотой дискретизации 200 Гц.

Поскольку матрица выхода системы (39) зависит от параметров, введём в качестве пост-фильтра [6] следующее дискретное звено W_{pof}:

$$W_{pof} = \frac{0{,}6321}{z - 0{,}3679}.$$

Формирующие фильтры [6], задающие ограничения в частотной области в дискретном времени, имеют вид:

$$W_1 = \begin{bmatrix} \frac{0{,}014z - 0{,}00597}{z - 0{,}999} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W_3 = \frac{10{,}006z - 10{,}006}{z - 0{,}00062}.$$

Тогда матрицы системы в форме (24) представляются следующим набором:

$$S^{\mathrm{d}}_{1111} = \begin{bmatrix} 0{,}9992 & 0 & -4{,}998 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}005 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9927 & 4{,}9817 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0067 & 0 & -0{,}0001 & 0 & -0{,}0024 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}0067 & 0 & 0{,}0010 & -0{,}0115 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9985 & 0{,}0050 & -0{,}0977 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0674 & 0{,}9998 & -23{,}156 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7165 & 0 & 0 & 0{,}00043 \\ 1{,}6057 & 0 & -14{,}0143 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}014 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}6072 & 1095{,}9821 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$S^{\mathrm{d}}_{4523} = \begin{bmatrix} 0{,}9992 & 0 & -4{,}998 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}005 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9927 & 4{,}9817 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0067 & 0 & 0 & 0{,}001 & -0{,}001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}0067 & 0 & 0{,}001 & -0{,}0046 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9988 & 0{,}005 & -0{,}0633 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0315 & 0{,}9999 & -9{,}2813 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7165 & 0 & 0 & 0{,}0043 \\ 1{,}6057 & 0 & -14{,}0143 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}014 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}6072 & 1095{,}9821 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проведем синтез для дискретной модели на основе техники, рассмотренной в п. 4.2. Матрицы системы регулятора частично представлены следующим набором:

$$\hat{\Theta}^{\mathrm{d}}_{1111} = \begin{bmatrix} 0{,}8385 & -0{,}0313 & -0{,}7724 & -0{,}2452 & -0{,}0117 & 0{,}0112 & 0{,}0007 \\ -0{,}0047 & 0{,}9957 & -0{,}6605 & -0{,}0835 & 0{,}0017 & 0{,}0034 & 0{,}0007 \\ 0{,}0138 & 0{,}0120 & 0{,}7272 & 0{,}0542 & 0{,}0061 & -0{,}0002 & -0{,}0007 \\ -0{,}0936 & -0{,}0172 & -0{,}4286 & 0{,}8678 & -0{,}0054 & -0{,}0030 & 0{,}0005 \\ 0{,}0048 & 0{,}0025 & -0{,}2908 & -0{,}0235 & 0{,}9943 & -0{,}0046 & 0{,}0003 \\ 11{,}0747 & -3{,}3292 & 97{,}9672 & -19{,}5042 & -1{,}8052 & 0{,}1977 & -0{,}0997 \end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\hat{\Theta}^{\mathrm{d}}_{4523} = \begin{bmatrix} 0{,}8473 & 0{,}0004 & -0{,}8554 & -0{,}0223 & 0{,}0018 & 0{,}0109 & 0{,}0008 \\ 0{,}0312 & 1{,}0046 & -0{,}4908 & -0{,}0154 & 0{,}0053 & 0{,}0037 & 0{,}0005 \\ 0{,}0237 & 0{,}0084 & 0{,}7982 & 0{,}0325 & 0{,}0046 & -0{,}0001 & -0{,}0008 \\ -0{,}0910 & 0{,}0002 & -0{,}4873 & 0{,}9905 & 0{,}0021 & -0{,}0032 & 0{,}0006 \\ 0{,}0291 & 0{,}0037 & -0{,}1564 & -0{,}0105 & 0{,}9947 & -0{,}0044 & 0{,}0002 \\ 6{,}0802 & -7{,}4102 & 86{,}7443 & -49{,}2906 & -3{,}535 & 0{,}1933 & -0{,}0923 \end{bmatrix}.$$

Устойчивость замкнутого контура с полученными регуляторами подтверждается расположением внутри единичной окружности корней характеристического полинома замкнутой системы (см. рисунок 2a).

Следуя методике синтеза, приведённой в разд. 4, проведем проверку на асимптотическую устойчивость замкнутой системы с разработанным TP-регулятором. В результате была получена положительно определённая матрица P:

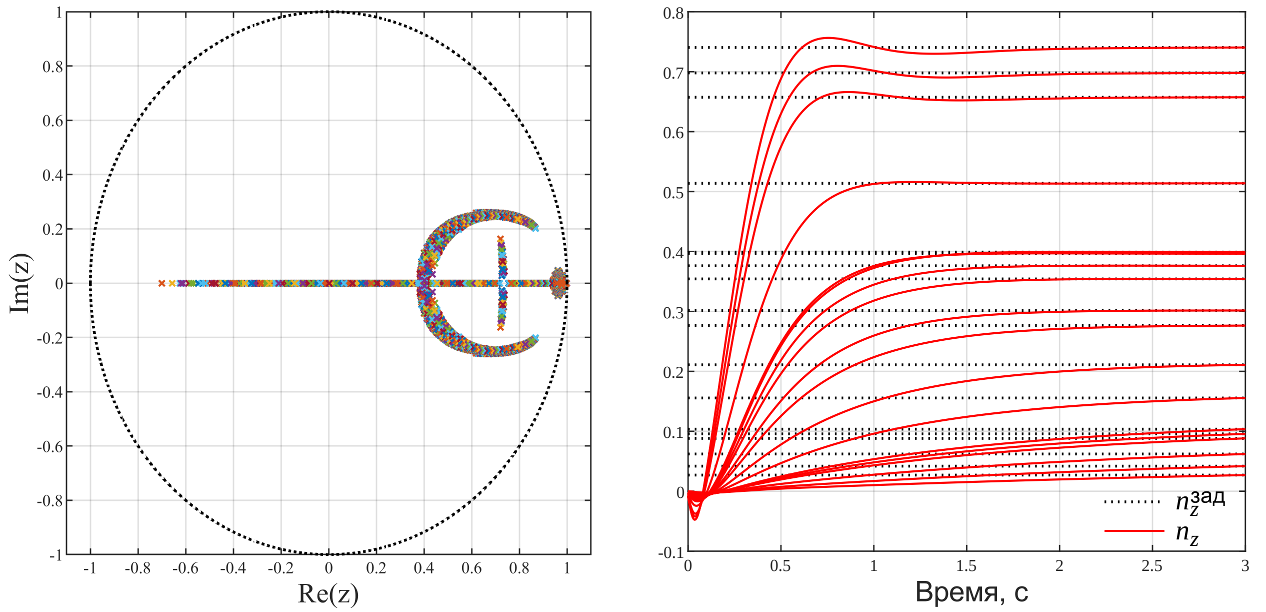
$$\mathrm{eig}P = [2,826 \cdot 10^{-3}\ 1,051 \cdot 10^{-4}\ 4,109 \cdot 10^{-9}\ 1,002 \cdot 10^{-10}\ 2,053 \cdot 10^{-6}$$
$$2,013 \cdot 10^{-7}\ 4,512 \cdot 10^{-8}\ 1,643 \cdot 10^{-6}\ 1,822 \cdot 10^{-6}\ 1,875 \cdot 10^{-8}] > 0,$$

что подтверждает асимптотическую устойчивость управления во всем диапазоне изменения варьируемых параметров.

Переходная характеристика объекта, описываемого системой (37)–(38), на различных режимах с полученным TP-регулятором представлена на рисунке 2b. Результаты траекторного моделирования представлены на рисунках 3–5. Их анализ подтверждает качественную отработку заданного сигнала по перегрузке и устойчивость переходных процессов как в характерных фиксированных режимах применения БПЛА, так и при широком изменении варьируемых параметров при траекторной отработке.

6 Заключение

В работе была получена методика синтеза адаптивного робастного регулятора в непрерывном и дискретном времени на основе TP-представления



(a) Расположение корней характеристического полинома на сетке $9 \times 5 \times 25 \times 25$ (дискретная система)

(b) Переходная характеристика во всем диапазоне изменения высоты и числа Маха

Рис. 2: Характеристики замкнутой системы

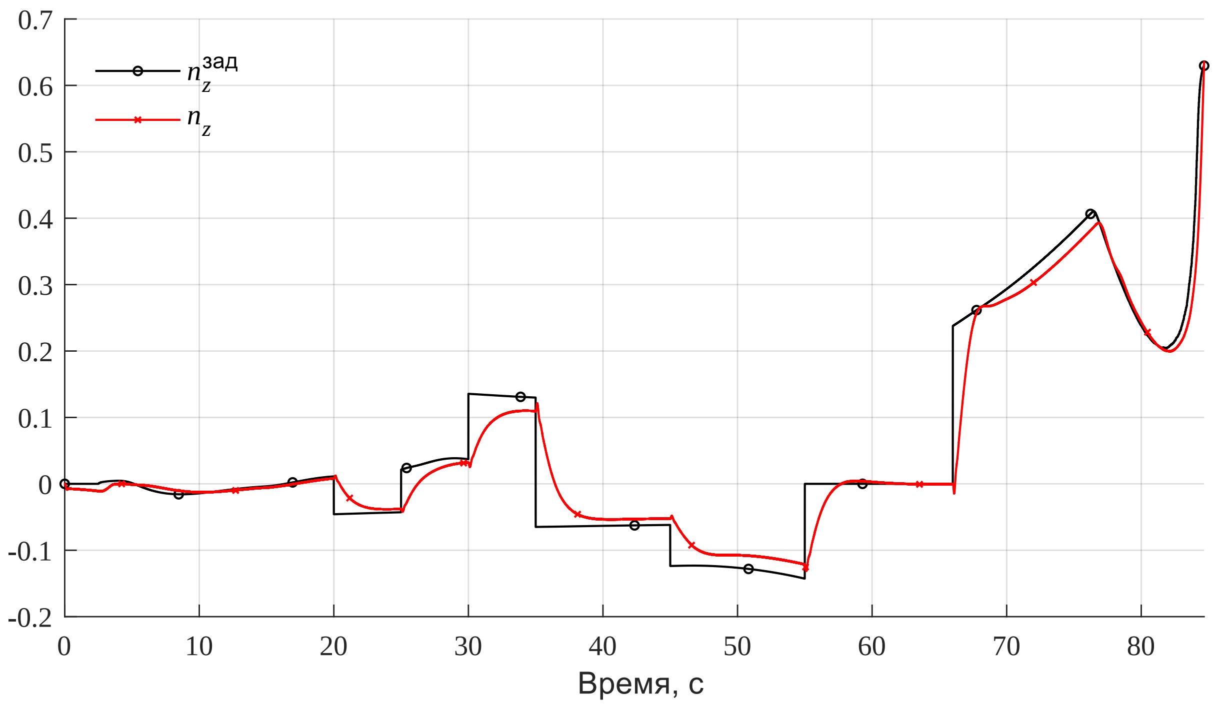


Рис. 3: Отработка заданного сигнала по перегрузке в боковом канале с ТР-регулятором на траектории

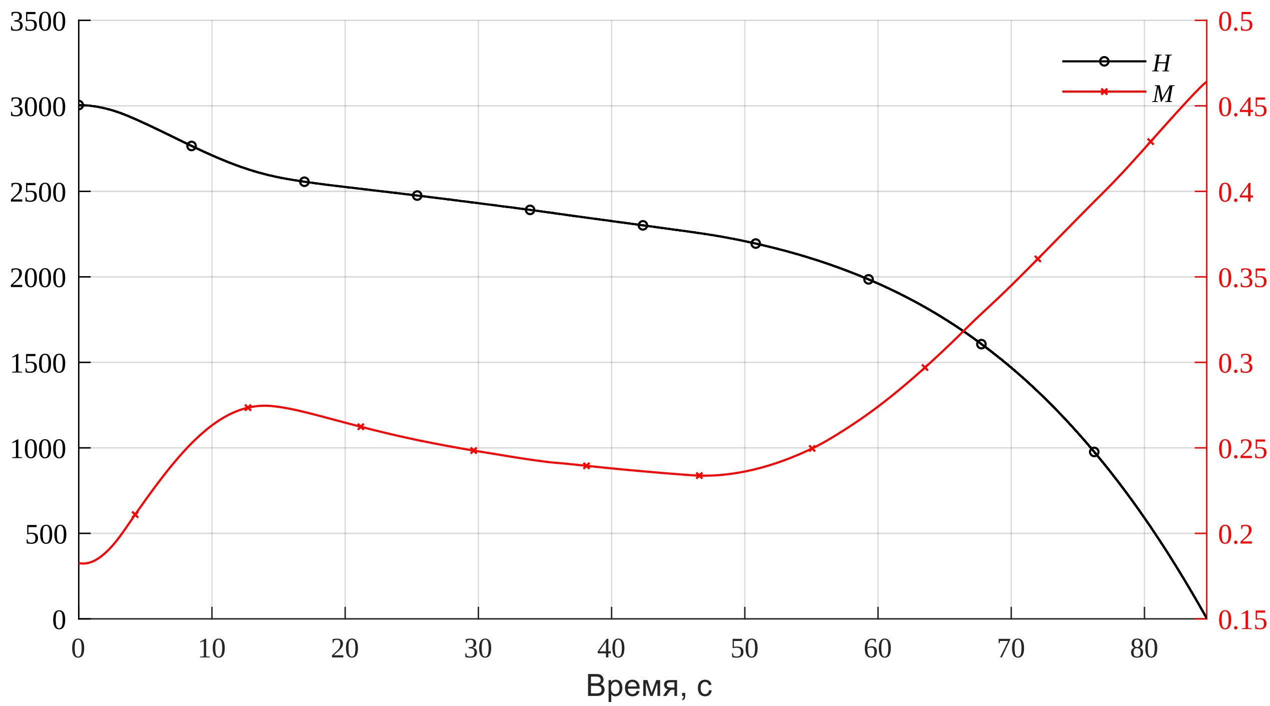


Рис. 4: Изменение высоты и числа Маха при траекторной отработке

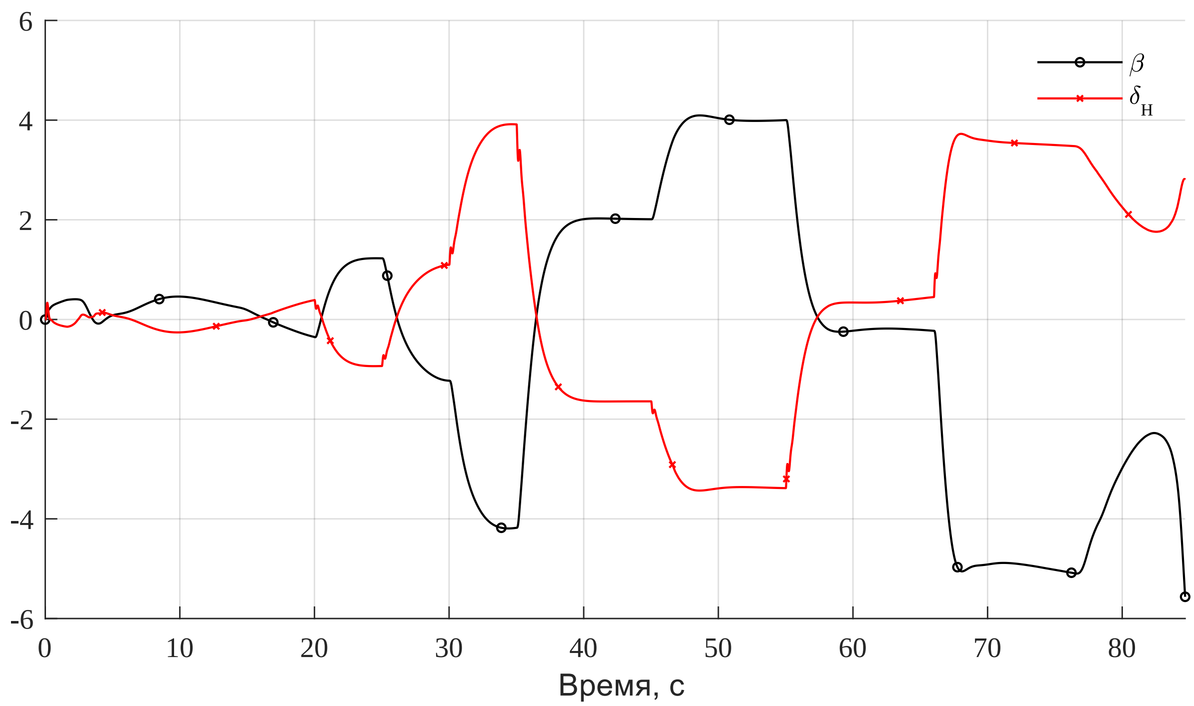


Рис. 5: Изменение угла скольжения и управляющего сигнала в боковом канале при траекторной отработке

qLPV модели нелинейного объекта управления с решением задачи в терминах ЛМН. Анализ результатов численного моделирования бокового движения гипотетического БПЛА подтвердил эффективность применения ТР-регулятора. Обеспечиваются устойчивость и необходимое качество переходных процессов как в характерных фиксированных режимах полета, так и при траекторной отработке за счёт адаптации регулятора к варьируемым параметрам. Недостатком рассмотренной методики является отсутствие гарантий на асимптотическую устойчивость замкнутой системы с полученным регулятором на этапе решения задачи синтеза. В таком случае требуется дополнительная проверка замкнутого контура, что также отражается в разработанной методике. Поэтому планируется продолжение исследований в части синтеза управления, обеспечивающего заданное качество функционирования замкнутой системы, в рамках общепринятой теории синтеза ТР-регуляторов – с учётом всевозможного движения по выпуклой оболочке (использование ЛМН с «перекрестными произведениями»), что гарантирует асимптотическую устойчивость.

Список литературы

[1] Baranyi P., Yam Y., Varlaki P. Tensor Product Model Transformation in Polytopic Model-based Control. CRC Press, Florida, 2013.

[2] Baranyi P. TP Model Transformation Based Control Design Frameworks. Springer International Publishing Switzerland, 2016.

[3] Baranyi P. Convex hull generation methods for polytopic representations of LPV models // 7th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics, 2009, doi:10.1109/sami.2009.4956611.

[4] Skogestad S., Postlethwaite I. Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[5] Gahinet P., Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control // International Journal of Robust and Nonlinear Control, 4(4), 421–448, 1994, doi:10.1002/rnc.4590040403.

[6] Apkarian P., Gahinet P., Becker G. Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example // Automatica, Volume 31, Issue 9, Pages 1251-1261, 1995, doi:10.1016/0005-1098(95)00038-X.

[7] Chumalee S., Whidborne J. LPV Autopilot Design of a Jindivik UAV // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2009, doi:10.2514/6.2009-5753.

[8] Dullerud G.E., Paganini F. A Course in Robust Control Theory. Texts in Applied Mathematics. Springer Science + Business Media, Inc., 2000, doi:10.1007/978-1-4757-3290-0.

[9] Tanaka K., Wang H.O. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach. John Wiley & Sons, Inc., 2001, doi:10.1002/0471224596.

[10] Szollosi A., Baranyi P. Influence of the Tensor Product Model Representation Of QLPV Models on The Feasibility of Linear Matrix Inequality // Asian Journal of Control, 18(4), 1328–1342, 2015, doi:10.1002/asjc.1238.

[11] Baranyi P. TP model transformation as a way to LMI-based controller design // IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 51, no. 2, pp. 387-400, April 2004, doi: 10.1109/TIE.2003.822037.

[12] Szeidl L., Baranyi P., Petres Z., Varlaki P. Numerical Reconstruction of the HOSVD Based Canonical Form of Polytopic Dynamic Models // 3rd International Symposium on Computational Intelligence and Intelligent Informatics, 2007, doi:10.1109/isciii.2007.367372.

[13] Apkarian P., Gahinet P. A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers // IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, no. 5, pp. 853-864, May 1995, doi: 10.1109/9.384219.

[14] Емельянова Ю.П., Пакшин П.В. Матричные уравнения и неравенства в задачах теории управления: учеб. пособие. Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева. – Нижний Новгород, 2020.

[15] Ефремов А.В., Захарченко В.Ф., Овчаренко В.Н. Динамика полета: Учебник для студентов высших учебных заведений. М.: Машиностроение, 2011.

[16] Топчеев Ю. И., Потемкин В. Г., Иваненко В. Г. Системы стабилизации. М.: Машиностроение, 1974.

Design of an adaptive robust controller based on the representation of a quasi-linear model in the form of a tensor product

Shabashov A.A., Pozdyaev V.V., Plotnikov A.A.

JSC «Arzamas Research and Production Enterprise «TEMP-AVIA»
Arzamas Polytechnic Institute (branch) of the Nizhny Novgorod State Technical University n. a. R.E. Alekseev

aa.shabashov@mail.ru

Abstract. The problem of synthesizing an adaptive robust controller using a tensor representation of a quasi-linear parameter-varying model is considered. This type of approximation of nonlinear dynamical systems can be reduced to convex polytopic forms in over a given parameter range. As a result, convex programming methods are applicable to them, including formulation of the problem in terms of linear matrix inequalities. The theory of H_∞ -optimal control is used as a technique for the synthesis of robust controllers. The result of the synthesis is a tensor model that describes a family of robust controllers that ensure stability and controllability of the object for the entire range of varied parameters.

Key words: linear matrix inequalities, quasi-linear parameter-varying model, tensor product, robust controllers, adaptive controllers.