*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2025
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Дифференциально-разностные уравнения

Матрица спектральных плотностей решения двух линейных стохастических параболических дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями

И.Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
e-mail: polosk@psu.ru

Аннотация. Данная работа посвящена распространению схемы Гийюзика S. Guillouzic, предложенной для вычисления спектральной плотности решения одного линейного обыкновенного стохастического дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами и запаздыванием, на новый класс моделей – системы эволюционных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных с несколькими постоянными запаздываниями. В частности, задача исследования состояла в построении явной формы матрицы спектральных плотностей стационарного векторного случайного поля состояния системы двух линейных уравнений параболического типа с постоянными коэффициентами, тремя запаздываниями и аддитивным входом в виде вектора пространственно-временных стационарных случайных полей с известными характеристиками. Кроме демонстрации методологии и получения искомых соотношений для компонент матрицы, в работе определены достаточные условия существования этих компонент в терминах коэффициентов уравнений и запаздываний. Полученные аналитические формулы использованы для расчета линий уровня авто- и кросс-спектральных плотностей компонент поля состояния при различных значениях параметров задачи. Иллюстративный материал подготовлен в среде пакета `Wolfram Mathematica`.

Ключевые слова: линейная динамическая система, стохастическое парабо-

в форме стохастических дифференциальных уравнений, обыкновенных [1,2] и в частных производных [1,3,4] (СОДУ, СДУвЧП), решениями которых являются случайные процессы [5] и поля [6,7], дают возможность учета неточных данных и внешних и/или внутренних возмущений в математические модели.

Основными вероятностными характеристиками векторов состояния стохастических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами как с запаздыванием, так и без него являются пространственно-временны́е плотности вероятности [1] и функционалы плотности вероятности [8,9] этих векторов соответственно. К сожалению, на достигнутом уровне научных исследований для произвольных систем СОДУ и СДУвЧП, не говоря уже о СОДУ и СДУвЧП с запаздыванием, невозможно получить аналитические соотношения для указанных плотностей вероятности и функционалов плотности вероятности векторов состояния. В ряде случаев задача может быть упрощена, если ограничиться изучением стационарных режимов и вычислением стационарных характеристик, если таковые существуют. Анализ систем еще более упрощается, если рассматриваются линейные СДУ с постоянными коэффициентами и аддитивными возмущениями.

Ряд простых проблем для линейных отдельных СОДУ с одним постоянным запаздыванием был решен У. Кюхлером [10], С. Гийюзиком [11, 12] и Т.Д. Франком [13, 14]. М.С. Киннели (M.S. Kinnally) в своей диссертации [15]получил достаточные условия существования и единственности стационарных распределений для СОДУ с запаздыванием с неотрицательными связями. В работе [16] были получены общие достаточные условия существования инвариантной меры для СОДУ с запаздыванием и экспоненциальной сходимости к равновесию.

Распространение схемы С. Гийюзика [17] построения спектральной плотности решения линейного СОДУ с одним постоянным запаздыванием и постоянными коэффициентами на новые классы отдельных уравнений и систем линейных СОДУ с запаздыванием осуществлено в ряде наших работ [18, 19].

Известен ряд публикаций, посвященный разным аспектам стационарных состояний решений детерминированных ДУвЧП с запаздыванием. Отметим две из них: в работе [20] рассматриваются вопросы существования, устойчивости и наличия глобальных аттракторов периодических во времени решений для системы параболических уравнений в ограниченной области, в [21] – условия устойчивости одиночной локализованной структуры в детерминированной трехкомпонентной реакционно-диффузионной системе.

Важным классом стохастических систем с запаздыванием являются линейные стохастические эволюционные дифференциальные уравнений в частных производных[1] с запаздыванием. Из-за особой сложности анализа таких уравнений особый интерес представляют те редкие модели, форма которых позволяет получить точные вероятностные характеристики соответствующих векторных случайных полей состояния.

В рамках данного направления отметим следующие работы: в [22] получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости решения нейтрального СДУвЧП, в [23] – условия устойчивости для стохастической двумерной системы уравнений Навье–Стокса, в [24] рассматриваются существование и единственность стационарных решений СДУвЧП с запаздыванием и аддитивным шумом.

В настоящей работе произведено обобщение результатов наших предыдущих работ [25, 26] для отдельных уравнений и более простых форм систем, которые переносятся на систему двух СДУвЧП с тремя запаздываниями параболического типа с постоянными коэффициентами. Иллюстративный материал готовился в среде пакета `Wolfram Mathematica` [27].

2 Постановка задачи

Рассмотрим систему СДУвЧП с запаздываниями следующего вида:

$$\frac{\partial U_\ell(x,t)}{\partial t} + \alpha_{\ell 1}\, U_\ell(x,t) + \alpha_{\ell 2}\, U_\ell(x,t_{\tau_1}) + \alpha_{\ell 3}\, U_{3-\ell}(x,t) + \\ + \alpha_{\ell 4}\, U_{3-\ell}(x,t_{\tau_2}) = \beta_{\ell 1}\,\frac{\partial^2 U_\ell(x,t)}{\partial x^2} + \beta_{\ell 2}\,\frac{\partial^2 U_\ell(x,t_{\tau_3})}{\partial x^2} + \gamma_\ell\, \Xi_\ell(x,t), \quad (1)$$

где t – время ($t \geqslant 0$), $t_{\tau_j} = t - \tau_j$; $\tau_j > 0$ – постоянные запаздывания ($j = 1$, 2, 3); $x \in \mathbb{R}$ – пространственный аргумент; $U_\ell(x,t)$ – случайные поля второго порядка с неизвестными характеристиками; $\Xi_\ell(x,t)$ – стационарные поля с известными пространственно-временными автоковариационными функциями $\mathcal{C}_{\Xi_\ell \Xi_\ell}(x,t)$ и соответствующими спектральными плотностями $\mathcal{S}_{\Xi_\ell \Xi_\ell}(\omega_1,\omega_2)$, для которых верны двумерные формулы Винера–Хинчина [6, p. 94]

$$\mathcal{S}_{\Xi_k \Xi_\ell}(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}(\omega_1 x + \omega_2 t)}\, \mathcal{C}_{\Xi_k \Xi_\ell}(x,t)\, dx\, dt,$$

[1]Заметим, что нередко СДУвЧП – это детерминированные ДУвЧП, к которым "добавлены" случайные пространственно-временные возмущения.

$$\mathcal{C}_{\Xi_k \Xi_\ell}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\boldsymbol{i}(\omega_1 x+\omega_2 t)}\, \mathcal{S}_{\Xi_k \Xi_\ell}(\omega_1,\omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2;$$

$\alpha_{\ell 1} > 0$, $\alpha_{\ell 2}$, $\alpha_{\ell 3}$, $\alpha_{\ell 4}$, $\beta_{\ell 1} > 0$, $\beta_{\ell 2}$, γ_ℓ – константы; k, $\ell = 1,\ 2$; $\boldsymbol{i}$ – мнимая единица; t и x – общие обозначения для произвольных временны́х и пространственных переменных с индексами и без.

Целью исследования является построение спектральных плотностей компонент векторного случайного поля $\boldsymbol{U}(x,t) = \{U_1(x,t), U_2(x,t)\}$, определяющего состояние рассматриваемой системы и являющегося решением системы уравнений (1).

3 Построение соотношений

3.1 Уравнения для ковариационных функций в стационарном режиме

Чтобы получить уравнения для полей математического ожидания $m_{U_\ell}(x,t)$, усредним уравнение (1) по пространству элементарных исходов:

$$\frac{\partial m_{U_\ell}(x,t)}{\partial t} + \alpha_{\ell 1}\, m_{U_\ell}(x,t) + \alpha_{\ell 2}\, m_{U_\ell}(x,t_{\tau_1}) + \alpha_{\ell 3}\, m_{U_{3-\ell}}(x,t) +$$
$$+ \alpha_{\ell 4}\, m_{U_{3-\ell}}(x,t_{\tau_2}) = \beta_{\ell 1}\, \frac{\partial^2 m_{U_\ell}(x,t)}{\partial x^2} + \beta_{\ell 2}\, \frac{\partial^2 m_{U_\ell}(x,t_{\tau_3})}{\partial x^2} + \gamma_\ell\, m_{\Xi_\ell}(x,t).$$

Вычтем последнее уравнение из уравнения (1), введем обозначения $U^\circ_\ell(x,t) = U_\ell(x,t) - m_{U_\ell}(x,t)$, $\Xi^\circ_\ell(x,t) = \Xi_\ell(x,t) - m_{\Xi_\ell}(x,t)$ и запишем результат так:

$$\frac{\partial U^\circ_\ell(x,t)}{\partial t} + \alpha_{\ell 1}\, U^\circ_\ell(x,t) + \alpha_{\ell 2}\, U^\circ_\ell(x,t_{\tau_1}) + \alpha_{\ell 3}\, U_{3-\ell}(x,t) +$$
$$+ \alpha_{\ell 4}\, U^\circ_{3-\ell}(x,t_{\tau_2}) = \beta_{\ell 1}\, \frac{\partial^2 U^\circ_\ell(x,t)}{\partial x^2} + \beta_{\ell 2}\, \frac{\partial^2 U^\circ_\ell(x,t_{\tau_3})}{\partial x^2} + \gamma_\ell\, \Xi^\circ_\ell(x,t).$$

Отсюда получим уравнения для моментов времени t_1 и t_2:

$$\frac{\partial U^\circ_\ell(x_k,t_k)}{\partial t_k} + \alpha_{\ell 1}\, U^\circ_\ell(x_k,t_k) + \alpha_{\ell 2}\, U^\circ_\ell(x_k,t_{k\tau_1}) + \alpha_{\ell 3}\, U_{3-\ell}(x_k,t_k) +$$
$$+ \alpha_{\ell 4}\, U^\circ_{3-\ell}(x_k,t_{k\tau_2}) = \beta_{\ell 1}\, \frac{\partial^2 U^\circ_\ell(x_k,t_k)}{\partial x_k^2} + \beta_{\ell 2}\, \frac{\partial^2 U^\circ_\ell(x_k,t_{k\tau_3})}{\partial x_k^2} + \qquad (2)$$

$$+\gamma_\ell\,\Xi_\ell^\circ(x_k,t_k),\qquad \ell,k=1,2.$$

После этого умножим первое и второе ($k=1$) из уравнений (2) на $U_1^\circ(x_2,t_2)$ и $U_2^\circ(x_2,t_2)$, а третье и четвертое ($k=2$) – на $\Xi_1^\circ(x_1,t_1)$ и $\Xi_2^\circ(x_1,t_1)$. А затем усредним получившиеся соотношения. В результате получим:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathcal{C}_{U_\ell U_j}(x_1,t_1;x_2,t_2)}{\partial t_1}+\alpha_{\ell 1}\,\mathcal{C}_{U_\ell U_j}(x_1,t_1;x_2,t_2)+\alpha_{\ell 2}\,\mathcal{C}_{U_\ell U_j}(x_1,t_{1\tau_1};x_2,t_2)+\\
+\alpha_{\ell 3}\,\mathcal{C}_{U_{3-\ell}U_j}(x_1,t_1;x_2,t_2)+\alpha_{\ell 4}\,\mathcal{C}_{U_{3-\ell}U_j}(x_1,t_{1\tau_2};x_2,t_2)=\\
=\beta_{\ell 1}\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_\ell U_j}(x_1,t_1;x_2,t_2)}{\partial x_1^2}+\beta_{\ell 2}\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_\ell U_j}(x_1,t_{1\tau_3};x_2,t_2)}{\partial x_1^2}+\\
+\gamma_\ell\,\mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x_1,t_1;x_2,t_2),
\end{gathered}\tag{3}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x_1,t_1;x_2,t_2)}{\partial t_2}+\alpha_{j 1}\,\mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x_1,t_1;x_2,t_2)+\alpha_{j 2}\,\mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x_1,t_1;x_2,t_{2\tau_1})+\\
+\alpha_{j 3}\,\mathcal{C}_{\Xi_\ell U_{3-j}}(x_1,t_1;x_2,t_2)+\alpha_{j 4}\,\mathcal{C}_{\Xi_\ell U_{3-j}}(x_1,t_1;x_2,t_{2\tau_2})=\\
=\beta_{j 1}\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x_1,t_1;x_2,t_2)}{\partial x_2^2}+\beta_{j 2}\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x_1,t_1;x_2,t_{2\tau_3})}{\partial x_2^2}+\\
+\gamma_j\,\mathcal{C}_{\Xi_\ell \Xi_j}(x_1,t_1;x_2,t_2),
\end{gathered}\tag{4}$$

$$\ell=1,2,\qquad j=1,2.$$

Пусть после завершения переходного режима система находится в стационарном состоянии, а случайные поля $U_1(x,t)$, $U_2(x,t)$, $\Xi_1(x,t)$ и $\Xi_2(x,t)$ можно считать стационарными и стационарно связанными в широком смысле по времени и пространству. Тогда уравнения (3), (4) примут следующую форму:

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial \mathcal{C}_{U_\ell U_j}(x,t)}{\partial t}+\alpha_{\ell 1}\,\mathcal{C}_{U_\ell U_j}(x,t)+\alpha_{\ell 2}\,\mathcal{C}_{U_\ell U_j}(x,t+\tau_1)+\\
+\alpha_{\ell 3}\,\mathcal{C}_{U_{3-\ell}U_j}(x,t)+\alpha_{\ell 4}\,\mathcal{C}_{U_{3-\ell}U_j}(x,t+\tau_2)=\\
=\beta_{\ell 1}\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_\ell U_j}(x,t)}{\partial x^2}+\beta_{\ell 2}\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_\ell U_j}(x,t+\tau_3)}{\partial x^2}+\gamma_\ell\,\mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x,t),
\end{gathered}\tag{5}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x,t)}{\partial t}+\alpha_{j 1}\,\mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x,t)+\alpha_{j 2}\,\mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x,t-\tau_1)+\\
+\alpha_{j 3}\,\mathcal{C}_{\Xi_\ell U_{3-j}}(x,t)+\alpha_{j 4}\,\mathcal{C}_{\Xi_\ell U_{3-j}}(x,t-\tau_2)=\\
=\beta_{j 1}\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x,t)}{\partial x^2}+\beta_{j 2}\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x,t-\tau_3)}{\partial x^2}+\gamma_j\,\mathcal{C}_{\Xi_\ell \Xi_j}(x,t),
\end{gathered}\tag{6}$$

$$\ell=1,2,\qquad j=1,2.$$

3.2 Уравнения для спектральных плотностей

Пусть $Y(x,t)$ и $Z(x,t)$ – некоторые стационарные и стационарно связанные случайные поля с известными ковариационными функциями и спектральными плотностями. Тогда для $r \in \mathbb{N}$ верны следующие соотношения:

$$\mathcal{S}_{YZ}(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}(\omega_1 x+\omega_2 t)}\, \mathcal{C}_{YZ}(x,t)\, dx\, dt, \tag{7}$$

$$e^{\pm \boldsymbol{i}\omega_2\tau}\, \mathcal{S}_{YZ}(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}(\omega_1 x+\omega_2 t)}\, \mathcal{C}_{YZ}(x,t\pm\tau)\, dx\, dt, \tag{8}$$

$$(\boldsymbol{i}\,\omega_1)^r\, \mathcal{S}_{YZ}(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}(\omega_1 x+\omega_2 t)}\, \frac{\partial^r C_{YZ}(x,t)}{\partial x^r}\, dx\, dt, \tag{9}$$

$$(\boldsymbol{i}\,\omega_2)^r\, \mathcal{S}_{YZ}(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}(\omega_1 x+\omega_2 t)}\, \frac{\partial^r C_{YZ}(x,t)}{\partial t^r}\, dx\, dt, \tag{10}$$

а также $\mathcal{S}_{YZ}(\omega) = \overline{\mathcal{S}}_{ZY}(\omega)$, $\mathcal{S}_{YZ}(\omega) = \mathcal{S}_{ZY}(-\omega)$ [28, 29], где черта сверху означает комплексное сопряжение.

На основании соотношений (7)–(10) в уравнениях (5), (6) перейдем к спектральным плотностям. Тогда получим:

$$\begin{gathered}
-\boldsymbol{i}\,\omega_2\, \mathcal{S}_{U_\ell U_j}(\omega_1,\omega_2) + \alpha_{\ell 1}\, \mathcal{S}_{U_\ell U_j}(\omega_1,\omega_2) + \alpha_{\ell 2}\, e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau_1}\, \mathcal{S}_{U_\ell U_j}(\omega_1,\omega_2) + \\
+\alpha_{\ell 3}\, \mathcal{S}_{U_{3-\ell} U_j}(\omega_1,\omega_2) + \alpha_{\ell 4}\, e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau_2}\, \mathcal{S}_{U_{3-\ell} U_j}(\omega_1,\omega_2) = \beta_{\ell 1}\, (\boldsymbol{i}\,\omega_1)^2\, \mathcal{S}_{U_\ell U_j}(\omega_1,\omega_2) + \\
+\beta_{\ell 2}\, (\boldsymbol{i}\,\omega_1)^2\, e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau_3}\, \mathcal{S}_{U_\ell U_j}(\omega_1,\omega_2) + \gamma_\ell\, \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1,\omega_2), \\
\boldsymbol{i}\,\omega_2\, \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1,\omega_2) + \alpha_{j1}\, \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1,\omega_2) + \alpha_{j2}\, e^{-\boldsymbol{i}\omega_2\tau_1}\, \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1,\omega_2) + \\
+\alpha_{j3}\, \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_{3-j}}(\omega_1,\omega_2) + \alpha_{j4}\, e^{-\boldsymbol{i}\omega_2\tau_2}\, \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_{3-j}}(\omega_1,\omega_2) = \beta_{j1}\, (\boldsymbol{i}\,\omega_1)^2\, \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1,\omega_2) + \\
+\beta_{j2}\, (\boldsymbol{i}\,\omega_1)^2\, e^{-\boldsymbol{i}\omega_2\tau_3}\, \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1,\omega_2) + \gamma_j\, \mathcal{S}_{\Xi_\ell \Xi_j}(\omega_1,\omega_2), \\
\ell = 1,2, \qquad j = 1,2,
\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}
\big(\beta_{\ell 1}\, \omega_1^2 + \beta_{\ell 2}\, \omega_1^2\, e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau_3} + \alpha_{\ell 1} + \alpha_{\ell 2}\, e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau_1} - \boldsymbol{i}\,\omega_2\big)\, \mathcal{S}_{U_\ell U_j}(\omega_1,\omega_2) + \\
\big(\alpha_{\ell 3} + \alpha_{\ell 4}\, e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau_2}\big)\, \mathcal{S}_{U_{3-\ell} U_j}(\omega_1,\omega_2) = \gamma_\ell\, \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1,\omega_2),
\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}
\big(\beta_{j1}\, \omega_1^2 + \beta_{j2}\, \omega_1^2\, e^{-\boldsymbol{i}\omega_2\tau_3} + \alpha_{j1} + \alpha_{j2}\, e^{-\boldsymbol{i}\omega_2\tau_1} + \boldsymbol{i}\,\omega_2\big)\, \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1,\omega_2) + \\
+\big(\alpha_{j3} + \alpha_{j4}\, e^{-\boldsymbol{i}\omega_2\tau_2}\big)\, \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_{3-j}}(\omega_1,\omega_2) = \gamma_j\, \mathcal{S}_{\Xi_\ell \Xi_j}(\omega_1,\omega_2).
\end{gathered} \tag{12}$$

3.3 Формальные соотношения для спектральных плотностей

Введем следующие обозначения:

$$
\begin{gathered}
h_\ell = \beta_{\ell 1}\,\omega_1^2 + \beta_{\ell 2}\,\omega_1^2\,e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau_3} + \alpha_{\ell 1} + \alpha_{\ell 2}\,e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau_1} - \boldsymbol{i}\,\omega_2 \equiv h_{\ell 1} + h_{\ell 2}\,\boldsymbol{i},\\
h_{\ell+2} = \alpha_{\ell 3} + \alpha_{\ell 4}\,e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau_2} \equiv h_{\ell+2,1} + h_{\ell+2,2}\,\boldsymbol{i}, \qquad \ell = 1, 2
\end{gathered}
$$

(явные соотношения для h_{ij}, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, $j = 1,\ 2$, приведены в приложении). Учитывая эти обозначения, систему линейных алгебраических уравнений (11), (12) для неизвестных спектральных плотностей можно записать так:

$$
\begin{aligned}
h_\ell\,\mathcal{S}_{U_\ell U_1}(\omega_1,\omega_2) + h_{\ell+2}\,\mathcal{S}_{U_{3-\ell}U_1}(\omega_1,\omega_2) &= \gamma_\ell\,\mathcal{S}_{\Xi_\ell U_1}(\omega_1,\omega_2),\\
h_\ell\,\mathcal{S}_{U_\ell U_2}(\omega_1,\omega_2) + h_{\ell+2}\,\mathcal{S}_{U_{3-\ell}U_2}(\omega_1,\omega_2) &= \gamma_\ell\,\mathcal{S}_{\Xi_\ell U_2}(\omega_1,\omega_2),\\
\overline{h}_\ell\,\mathcal{S}_{\Xi_1 U_\ell}(\omega_1,\omega_2) + \overline{h}_{\ell+2}\,\mathcal{S}_{\Xi_1 U_{3-\ell}}(\omega_1,\omega_2) &= \gamma_\ell\,\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_\ell}(\omega_1,\omega_2),\\
\overline{h}_\ell\,\mathcal{S}_{\Xi_2 U_\ell}(\omega_1,\omega_2) + \overline{h}_{\ell+2}\,\mathcal{S}_{\Xi_2 U_{3-\ell}}(\omega_1,\omega_2) &= \gamma_\ell\,\mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_\ell}(\omega_1,\omega_2).
\end{aligned}
$$

Несложно увидеть, что эта система распадается на четыре группы по паре уравнений. Найдем решения независимых третьей и четвертой групп:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\Xi_1 U_1}(\omega_1,\omega_2) &= \frac{\gamma_1\,\overline{h}_2\,\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) - \gamma_2\,\overline{h}_3\,\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)}{\overline{h}_1\,\overline{h}_2 - \overline{h}_3\,\overline{h}_4},\\
\mathcal{S}_{\Xi_1 U_2}(\omega_1,\omega_2) &= -\frac{\gamma_1\,\overline{h}_4\,\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) - \gamma_2\,\overline{h}_1\,\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)}{\overline{h}_1\,\overline{h}_2 - \overline{h}_3\,\overline{h}_4},\\
\mathcal{S}_{\Xi_2 U_1}(\omega_1,\omega_2) &= \frac{\gamma_1\,\overline{h}_2\,\mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) - \gamma_2\,\overline{h}_3\,\mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)}{\overline{h}_1\,\overline{h}_2 - \overline{h}_3\,\overline{h}_4},\\
\mathcal{S}_{\Xi_2 U_2}(\omega_1,\omega_2) &= -\frac{\gamma_1\,\overline{h}_4\,\mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) - \gamma_2\,\overline{h}_1\,\mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)}{\overline{h}_1\,\overline{h}_2 - \overline{h}_3\,\overline{h}_4}.
\end{aligned}
$$

Подставляя эти функции в правые части уравнений первой и второй групп, находим:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_1,\omega_2) &= \frac{\gamma_1\,h_2\,\mathcal{S}_{\Xi_1 U_1}(\omega_1,\omega_2) - \gamma_2\,h_3\,\mathcal{S}_{\Xi_2 U_1}(\omega_1,\omega_2)}{h_1\,h_2 - h_3\,h_4} = \frac{H_1}{H_0},\\
\mathcal{S}_{U_1 U_2}(\omega_1,\omega_2) &= \frac{\gamma_1\,h_2\,\mathcal{S}_{\Xi_1 U_2}(\omega_1,\omega_2) - \gamma_2\,h_3\,\mathcal{S}_{\Xi_2 U_2}(\omega_1,\omega_2)}{h_1\,h_2 - h_3\,h_4} = \frac{H_2}{H_0},\\
\mathcal{S}_{U_2 U_1}(\omega_1,\omega_2) &= -\frac{\gamma_1\,h_4\,\mathcal{S}_{\Xi_1 U_1}(\omega_1,\omega_2) - \gamma_2\,h_1\,\mathcal{S}_{\Xi_2 U_1}(\omega_1,\omega_2)}{h_1\,h_2 - h_3\,h_4} = \frac{H_3}{H_0},\\
\mathcal{S}_{U_2 U_2}(\omega_1,\omega_2) &= -\frac{\gamma_1\,h_4\,\mathcal{S}_{\Xi_1 U_2}(\omega_1,\omega_2) - \gamma_2\,h_1\,\mathcal{S}_{\Xi_2 U_2}(\omega_1,\omega_2)}{h_1\,h_2 - h_3\,h_4} = \frac{H_4}{H_0},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где

$$H_0 = (h_1\, h_2 - h_3\, h_4)(\overline{h}_1\, \overline{h}_2 - \overline{h}_3\, \overline{h}_4) = \tag{14}$$

$$= \big(h_{12}\, h_{21} + h_{11}\, h_{22} - h_{32}\, h_{41} - h_{31}\, h_{42}\big)^2 + \tag{15}$$

$$+ \big(h_{11}\, h_{21} - h_{12}\, h_{22} - h_{31}\, h_{41} + h_{32}\, h_{42}\big)^2 \equiv H_{01}^2 + H_{02}^2; \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
H_1 &= \gamma_1^2\, h_2\, \overline{h}_2\, \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) - \gamma_1\, \gamma_2\, h_2\, \overline{h}_3\, \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2) - \\
&\quad - \gamma_1\, \gamma_2\, h_3\, \overline{h}_2\, \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) + \gamma_2^2\, h_3\, \overline{h}_3\, \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_2}(\omega_1,\omega_2); \\
H_2 &= -\gamma_1^2\, h_4\, \overline{h}_2\, \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) + \gamma_1\, \gamma_2\, h_4\, \overline{h}_3\, \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2) + \\
&\quad + \gamma_1\, \gamma_2\, h_1\, \overline{h}_2\, \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) - \gamma_2^2\, h_1\, \overline{h}_3\, \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_2}(\omega_1,\omega_2); \\
H_3 &= -\gamma_1^2\, h_2\, \overline{h}_4\, \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) - \gamma_1\, \gamma_2\, h_2\, \overline{h}_1\, \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2) - \\
&\quad - \gamma_1\, \gamma_2\, h_3\, \overline{h}_4\, \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) + \gamma_2^2\, h_3\, \overline{h}_1\, \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_2}(\omega_1,\omega_2); \\
H_4 &= \gamma_1^2\, h_4\, \overline{h}_4\, \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) - \gamma_1\, \gamma_2\, h_4\, \overline{h}_1\, \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2) - \\
&\quad - \gamma_1\, \gamma_2\, h_1\, \overline{h}_4\, \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) + \gamma_2^2\, h_1\, \overline{h}_1\, \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_2}(\omega_1,\omega_2).
\end{aligned} \tag{17}$$

4 Анализ полученных соотношений

Вследствие того, что соотношения для функций $\mathcal{S}_{U_kU_\ell(\omega_1,\omega_2)}$, k, $\ell = 1{,}2$, были получены в результате формальных выкладок, необходимо показать, что области определения этих функций не пусты, и они имеют основные свойства спектральных плотностей [28, 29].

4.1 Структура знаменателя H_0

Исследуем знаменатель H_0 дробей в правых частях равенств (13), нули которого образуют множество точек, где $\mathcal{S}_{U_kU_\ell(\omega_1,\omega_2)}$, k, $\ell = 1{,}2$, не существуют.

Прежде всего заметим, что из представления (16) следует, что H_0 – вещественная функция, а также то, что обратиться в нуль функция H_0 переменных ω_1, ω_2 и множества параметров уравнений (1) может тогда и только тогда, когда выражения H_{01} и H_{02} при одних и тех же значениях переменных и параметров примут одно и то же нулевое значение. Проанализируем структуру этих функций. Несложно увидеть, что они являются квадратными квазиполиномами относительно ω_1^2 и ω_2, причем коэффициенты этих квазиполиномов – линейные функции синусов и косинусов различных периодов с отличающимися коэффициентами, зависящими от параметров задачи. Можно предполагать, что при таких характеристиках единственными возможными множествами точек на плоскости $O\Omega_1\Omega_2$, в которых H_{01} и H_{02} могут обращаться в ноль, являются прямые $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$ и параллельные последней вследствие наличия тригонометрических функций.

Для получения соотношений, обеспечивающих отличие знаменателя H_0 от нуля, будем использовать условие обращения квазиполиномов в нуль, которым является наличие у них действительных корней, а также учитывать, что по постановке задачи $\alpha_{\ell 1} > 0$, $\beta_{\ell 1} > 0$, $\ell = 1,\, 2$.

Рассмотрим H_{01} и H_{02} как квадратные квазиполиномы ω_1^2 и ω_2 (см. Приложение). На прямой $\omega_2 = 0$ эти функции примут следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&H_{01}(\omega_1, 0) = \big[(\alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{21} + \alpha_{22}) - (\alpha_{13} + \alpha_{14})(\alpha_{23} + \alpha_{24})\big] + \\
&\quad + \big[(\alpha_{11} + \alpha_{12})(\beta_{21} + \beta_{22}) + (\alpha_{21} + \alpha_{22})(\beta_{11} + \beta_{12})\big]\, \omega_1^2 + \\
&\quad + (\beta_{11} + \beta_{22})(\beta_{21} + \beta_{22})\, \omega_1^4 \equiv H_{010} + H_{011}\, \omega_1^2 + H_{012}\, \omega_1^4; \\
&H_{02}(\omega_1, 0) = 0.
\end{aligned}
$$

Вследствие того, что $H_{02}(\omega_1, 0) \equiv 0$, здесь условия отсутствия действительных корней у уравнения $H_{01}(\omega_1, 0) = 0$ и соответственно у H_0 могут быть получены из критерия Рауса–Гурвица: если коэффициенты биквадратного уравнения положительны, то оба решения соответствующего квадратного уравнения относительно $z = \omega_1^2$ отрицательны, а следовательно, соответствующие ω_1 – комплексные числа. Для этого достаточно выполнения следующих неравенств:

$$
\begin{gathered}
\alpha_{11} > |\alpha_{12}|, \quad \alpha_{21} > |\alpha_{22}|, \quad \beta_{11} > |\beta_{12}|, \quad \beta_{21} > |\beta_{22}|, \\
(\alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{21} + \alpha_{22}) > (\alpha_{13} + \alpha_{14})(\alpha_{23} + \alpha_{24}).
\end{gathered}
\tag{18}
$$

На прямой $\omega_1 = 0$ функции H_{01} и H_{02} примут следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&H_{01}(0, \omega_2) = \big[\alpha_{11}\, \alpha_{21} - \alpha_{13}\, \alpha_{23} + (\alpha_{11}\, \alpha_{22} + \alpha_{12}\, \alpha_{21})\, \cos(\tau_1\, \omega_2) + \\
&\quad + \alpha_{12}\, \alpha_{22}\, \cos(2\, \tau_1\, \omega_2) - \alpha_{14}\, \alpha_{24}\, \cos(2\, \tau_2\, \omega_2) - (\alpha_{13}\, \alpha_{24} + \\
&\quad + \alpha_{14}\, \alpha_{23})\, \cos(\tau_2\, \omega_2)\big] + (\alpha_{12} + \alpha_{22})\, \sin(\tau_1\, \omega_2)\, \omega_2 - \omega_2^2; \\
&H_{02}(0, \omega_2) = \big[(\alpha_{11}\, \alpha_{22} + \alpha_{12}\, \alpha_{21})\, \sin(\tau_1\, \omega_2) + \alpha_{12}\, \alpha_{22}\, \sin(2\, \tau_1\, \omega_2) - \\
&\quad - (\alpha_{13}\, \alpha_{24} + \alpha_{14}\, \alpha_{23})\, \sin(\tau_2\, \omega_2) - \alpha_{14}\, \alpha_{24}\, \sin(2\, \tau_2\, \omega_2)\big] - \\
&\quad - \big[\alpha_{11} + \alpha_{21} + (\alpha_{12} + \alpha_{22})\, \cos(\tau_1\, \omega_2)\big]\, \omega_2.
\end{aligned}
$$

Пусть $\omega_2 = 0$. Тогда в точке $(0, 0)$ будем иметь:

$$
H_{01}(0, 0) = (\alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{21} + \alpha_{22}) - (\alpha_{13} + \alpha_{14})(\alpha_{23} + \alpha_{24});
$$

$$H_{02}(0,0) = 0,$$

а следовательно, при условии (18) функция H_0 будет отличной от нуля.

Рассмотрим общий случай. Но проверить, обращаются ли одновременно H_{01} и H_{02} в нуль при их сложной структуре затруднительно. Поэтому анализ можно построить на следующем соображении: если эти функции ни при каких значениях аргументов и параметров не равны друг другу, то они не могут обратиться в нуль одновременно. Для использования этого соображения формально приравняем ненулевые коэффициенты при линейно независимых термах $(\omega_1^2)^k\,\omega_2^\ell$, k, $\ell = 0,\ 1,\ 2$, в H_{01} и H_{02}, а после приравнивания соберем все слагаемые в левых частях получившихся равенств, что приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned}
&(\omega_1^2)^0\,\omega_2^0:\ \alpha_{11}\,\alpha_{21} - \alpha_{13}\,\alpha_{23} + (\alpha_{11}\,\alpha_{22} + \alpha_{12}\,\alpha_{21})\,\big[\cos(\tau_1\,\omega_2) - \sin(\tau_1\,\omega_2)\big] +\\
&\quad + \alpha_{12}\,\alpha_{22}\,\big[\cos(2\,\tau_1\,\omega_2) - \sin(2\,\tau_1\,\omega_2)\big] +\\
&\quad + (\alpha_{13}\,\alpha_{24} + \alpha_{14}\,\alpha_{23})\,\big[\sin(\tau_2\,\omega_2) - \cos(\tau_2\,\omega_2)\big] +\\
&\quad + \alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\big[\sin(2\,\tau_2\,\omega_2) - \cos(2\,\tau_2\,\omega_2)\big] = 0;\\
&(\omega_1^2)^0\,\omega_2^1:\ \alpha_{11} + \alpha_{21} + (\alpha_{12} + \alpha_{22})\,\big[\sin(\tau_1\,\omega_2) + \cos(\tau_1\,\omega_2)\big] = 0;\\
&(\omega_1^2)^1\,\omega_2^0:\ \alpha_{11}\,\beta_{21} + \alpha_{21}\,\beta_{11} + (\alpha_{12}\,\beta_{21} + \alpha_{22}\,\beta_{11})\,\big[\cos(\tau_1\,\omega_2) - \sin(\tau_1\,\omega_2)\big] +\\
&\quad + (\alpha_{11}\,\beta_{22} + \alpha_{21}\,\beta_{12})\,\big[\cos(\tau_3\,\omega_2) - \sin(\tau_3\,\omega_2)\big] +\\
&\quad + (\alpha_{12}\,\beta_{22} + \alpha_{22}\,\beta_{12})\,\big[\cos(\tau_1\,\omega_2 + \tau_3\,\omega_2) - \sin(\tau_1\,\omega_2 + \tau_3\,\omega_2)\big] = 0;\\
&(\omega_1^2)^1\,\omega_2^1:\ \beta_{11} + \beta_{21} + (\beta_{12} + \beta_{22})\,\big[\sin(\tau_3\,\omega_2) + \cos(\tau_3\,\omega_2)\big] = 0;\\
&(\omega_1^2)^2\,\omega_2^0:\ \beta_{11}\,\beta_{21} + (\beta_{11}\,\beta_{22} + \beta_{12}\,\beta_{21})\,\big[\cos(\tau_3\,\omega_2) - \sin(\tau_3\,\omega_2)\big] +\\
&+ \beta_{12}\,\beta_{22}\,\big[\cos(2\,\tau_3\,\omega_2) - \sin(2\,\tau_3\,\omega_2)\big] = 0
\end{aligned}$$

(заметим, что коэффициенты при $(\omega_1^2)^0\,\omega_2^2$ безусловно не могут быть одинаковыми). Несложно установить, что эти равенства никогда не будут выполняться, если:

$$\begin{aligned}
&(\omega_1^2)^0\,\omega_2^0:\ \alpha_{11}\,\alpha_{21} > |\alpha_{12}\,\alpha_{22}| + |\alpha_{13}\,\alpha_{23}| + |\alpha_{14}\,\alpha_{24}| +\\
&\quad + |\alpha_{11}\,\alpha_{22} + \alpha_{12}\,\alpha_{21}| + |\alpha_{13}\,\alpha_{24} + \alpha_{14}\,\alpha_{23}|;\\
&(\omega_1^2)^0\,\omega_2^1:\ \alpha_{11} > |\alpha_{12}|, \quad \alpha_{21} > |\alpha_{22}|;\\
&(\omega_1^2)^1\,\omega_2^0:\ \alpha_{11}\,\beta_{21} + \alpha_{21}\,\beta_{11} > |\alpha_{12}\,\beta_{21} + \alpha_{22}\,\beta_{11}| +\\
&\quad + |\alpha_{11}\,\beta_{22} + \alpha_{21}\,\beta_{12}| + |\alpha_{12}\,\beta_{22} + \alpha_{22}\,\beta_{12}|;\\
&(\omega_1^2)^1\,\omega_2^1:\ \beta_{11} > |\beta_{12}|, \quad \beta_{21} > |\beta_{22}|;\\
&(\omega_1^2)^2\,\omega_2^0:\ \beta_{11}\,\beta_{21} > |\beta_{11}\,\beta_{22} + \beta_{12}\,\beta_{21})| + |\beta_{12}\,\beta_{22}|,
\end{aligned}$$

т. е. при полученных условиях функция H_0 в нуль не обращается, и соответствующие функции (13) существуют при любых ω_1 и ω_2. В частности, если запаздывания отсутствуют, то все неравенства будут истинны.

4.2 Анализ функций $\mathcal{S}_{U_1U_1}(\omega_1,\omega_2)$ и $\mathcal{S}_{U_2U_2}(\omega_1,\omega_2)$

Докажем, что $\mathcal{S}_{U_1U_1}(\omega_1,\omega_2)$ – вещественная функция. Действительно, $\mathcal{S}_{U_1U_1} = H_1/H_0$, причем из вещественности $H_0(\omega_1,\omega_2)$, $\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1}(\omega_1,\omega_2)$ и $\mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)$ следует то, что

$$H_0(\omega_1,\omega_2) = \overline{H}_0(\omega_1,\omega_2), \quad \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) = \overline{\mathcal{S}}_{\Xi_2\Xi_2}(\omega_1,\omega_2),$$
$$\mathcal{S}_{U_2U_2}(\omega_1,\omega_2) = \overline{\mathcal{S}}_{U_2U_2}(\omega_1,\omega_2).$$

Далее,

$$\begin{gathered}H_1(\omega_1,\omega_2) = \gamma_1^2\, h_2\, \overline{h}_2\, \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) - \gamma_1\,\gamma_2\, h_2\, \overline{h}_3\, \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2) - \\ -\gamma_1\,\gamma_2\, h_3\, \overline{h}_2\, \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) + \gamma_2^2\, h_3\, \overline{h}_3\, \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_2}(\omega_1,\omega_2) = \\ = \gamma_1^2\, \overline{h_2\, \overline{h}_2\, \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1}(\omega_1,\omega_2)} - \gamma_1\,\gamma_2\, \overline{\overline{h}_2\, h_3\, \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_1}(\omega_1,\omega_2)} - \\ -\gamma_1\,\gamma_2\, \overline{h_2\, \overline{h}_3\, \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)} + \gamma_2^2\, \overline{h_3\, \overline{h}_3\, \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)} = \overline{H}_1(\omega_1,\omega_2).\end{gathered}$$

Отсюда заключаем, что $\mathcal{S}_{U_1U_1}(\omega_1,\omega_2) = \overline{\mathcal{S}}_{U_1U_1}(\omega_1,\omega_2)$, а следовательно, $\mathcal{S}_{U_1U_1}(\omega_1,\omega_2)$ – вещественная функция.

Кроме того, из свойств ковариационных функций [28, 29] и несобственных интегралов с бесконечными пределами [30,31], зависящих от параметров, можно установить, что функция $\mathcal{S}_{U_1U_1}(\omega_1,\omega_2)$ неотрицательна.

Далее, из представления функций $H_{01}(\omega_1,\omega_2)$ и $H_{02}(\omega_1,\omega_2)$ (см. приложение) приходим к выводу, что

$$H_{01}(\omega_1,\omega_2) = H_{01}(-\omega_1,\omega_2) = H_{01}(\omega_1,-\omega_2) = H_{01}(-\omega_1,-\omega_2),$$
$$H_{02}(\omega_1,\omega_2) = H_{02}(-\omega_1,\omega_2) = H_{02}(\omega_1,-\omega_2) = H_{02}(-\omega_1,-\omega_2),$$

а следовательно, $H_0(\omega_1,\omega_2)$ четна по аргументам ω_1 и ω_2.

Теперь выясним наличие четности у функции $H_1(\omega_1,\omega_2)$:

$$\begin{gathered}H_1 = \gamma_1^2\,(h_{21}^2 + h_{22}^2)\,\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) + \gamma_2^2\,(h_{31}^2 + h_{32}^2)\,\mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_2}(\omega_1,\omega_2) + \\ +2\,\gamma_1\,\gamma_2\,[\![(h_{21}\,h_{31} - h_{22}\,h_{32})\,\mathrm{Re}\left[\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)\right] + \\ +(h_{21}\,h_{32} - h_{22}\,h_{31})\,\mathrm{Im}\left[\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)\right]]\!],\end{gathered}$$

С учетом того, что h_{i1} – четные по аргументам ω_1 и ω_2 функции, h_{i1} – четные по ω_1 и нечетные по ω_2, $i = 1, 2, 3, 4$ (см. приложение), а $\mathrm{Re}\left[\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)\right]$ и $\mathrm{Im}\left[\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)\right]$ – четная и нечетная по ω_1 и ω_2 функции соответственно, заключаем, что H_1 – четная по обоим аргументам, а следовательно, и функция $\mathcal{S}_{U_1U_1}$ четная по ω_1 и ω_2.

Доказательство вещественности, неотрицательности и четности функции $\mathcal{S}_{U_2U_2}(\omega_1,\omega_2) = H_4/H_0$ аналогично.

4.3 Анализ функций $\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1,\omega_2)$ и $\mathcal{S}_{U_2U_1}(\omega_1,\omega_2)$

Докажем, что для этих комплекснозначных функций выполняется основное соотношение взаимных спектральных плотностей [29, p. 83]. Действительно,

$$\begin{gathered}
H_2 = -\gamma_1^2\, h_4\,\overline{h}_2\,\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) + \gamma_1\,\gamma_2\,h_4\,\overline{h}_3\,\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)+\\
+\gamma_1\,\gamma_2\,h_1\,\overline{h}_2\,\mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_1}(\omega_1,\omega_2) - \gamma_2^2\,h_1\,\overline{h}_3\,\mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_2}(\omega_1,\omega_2);\\
= -\gamma_1^2\,h_2\,\overline{\overline{h}_4\,\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1}(\omega_1,\omega_2)} - \gamma_1\,\gamma_2\,\overline{h_2\,\overline{h}_1\,\mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_1}(\omega_1,\omega_2)}-\\
-\gamma_1\,\gamma_2\,h_3\,\overline{\overline{h}_4\,\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)} + \gamma_2^2\,\overline{h_3\,\overline{h}_1\,\mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)} = \overline{H_3},
\end{gathered}$$

а следовательно, с учетом вещественности H_0 и равенств $\mathcal{S}_{U_1U_2} = H_2/H_0$, $\mathcal{S}_{U_2U_1} = H_3/H_0$ получаем, что

$$\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1,\omega_2) = \overline{\mathcal{S}}_{U_2U_1}(\omega_1,\omega_2).$$

Выделим действительную и мнимую части функции $\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1,\omega_2)$:

$$\begin{gathered}
\mathrm{Re}\left[\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1,\omega_2)\right] =\\
= -\gamma_1\,\gamma_2\,\big[\!\big[(h_{11}\,h_{21} + h_{12}\,h_{22} + h_{31}\,h_{41} + h_{32}\,h_{42})\;\mathrm{Re}\left[\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)\right]+\\
+(h_{12}\,h_{21} - h_{11}\,h_{22} + h_{32}\,h_{41} - h_{31}\,h_{42})\;\mathrm{Im}\left[\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)\right]\big]\!\big]+\\
+\gamma_1^2\,(h_{21}\,h_{41} + h_{22}\,h_{42})\,\mathcal{S}_{U_1U_1}(\omega_1,\omega_2) + \gamma_2^2\,(h_{11}\,h_{31} + h_{12}\,h_{32})\mathcal{S}_{U_2U_2}(\omega_1,\omega_2);\\
\mathrm{Im}\left[\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1,\omega_2)\right] =\\
= \gamma_1\,\gamma_2\,\big[\!\big[(h_{11}\,h_{22} - h_{12}\,h_{21} + h_{32}\,h_{41} - h_{31}\,h_{42})\;\mathrm{Re}\left[\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)\right]+\\
+(h_{12}\,h_{22} + h_{11}\,h_{21} - h_{31}\,h_{41} - h_{32}\,h_{42})\;\mathrm{Im}\left[\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)\right]\big]\!\big]+\\
+\gamma_1^2\,(h_{21}\,h_{42} - h_{22}\,h_{41})\,\mathcal{S}_{U_1U_1}(\omega_1,\omega_2) + \gamma_2^2\,(h_{12}\,h_{31} - h_{11}\,h_{32})\,\mathcal{S}_{U_2U_2}(\omega_1,\omega_2).
\end{gathered}$$

С учетом того, что функция $\mathrm{Re}\left[\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)\right]$ четна по обоим аргументам, а $\mathrm{Im}\left[\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1,\omega_2)\right]$ четна по первому аргументу и нечетна по второму, то анализ составляющих термов показывает, что действительная и мнимая части функции $\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1,\omega_2)$ имеют такие же характеристики четности и нечетности, что и $\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1, \omega_2)$. Аналогичные выводы можно сделать и про функцию $\mathcal{S}_{U_2U_1}(\omega_1, \omega_2)$.

5 Пример

Продемонстрируем форму функций $\mathcal{S}_{U_1U_1}(\omega_1, \omega_2)$ (I), $\mathrm{Re}\left[\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1, \omega_2)\right]$ (II), $\mathrm{Im}\left[\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1, \omega_2)\right]$ (III), $\mathcal{S}_{U_2U_2}(\omega_1, \omega_2)$ (IV) для некоторых значений параметров.

5.1. Первая группа графиков относится к ситуации, когда запаздывания отсутствуют, т.е.

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0, \qquad \alpha_{12} = \alpha_{14} = \alpha_{22} = \alpha_{24} = \beta_{12} = \beta_{22} = 0.$$

Остальные параметры визуализации имели следующие значения:

$$\begin{gathered} \alpha_{11} = 2, \quad \alpha_{13} = 1, \quad \alpha_{21} = 3/2, \quad \alpha_{23} = -1/2, \\ \beta_{11} = 1/50, \quad \beta_{21} = 1/100, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 1/2. \end{gathered}$$

Для расчетов применялись спектральные плотности полей вида:

$$\begin{gathered} \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1} = \frac{1}{1 + \omega_1^2 + 2\,\omega_2^2}, \qquad \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_2} = \frac{1}{1 + 2\,\omega_1^2 + \omega_2^2} \\ \mathrm{Re}\left[\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}\right] = \frac{1}{2 + 2\,\omega_1^4 + 2\,\omega_2^4}, \qquad \mathrm{Im}\left[\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}\right] = \frac{\omega_2}{2 + 2\,\omega_1^4 + 2\,\omega_2^4}. \end{gathered}$$

На рис. 1 – 4 изображены соответствующие линии уровня в данном случае (на рис. 3 высота $h_{-\ell}$ линии с номером $-\ell$ равна $-h_\ell$, $\ell = \overline{1, 9}$).

5.2. Теперь пусть запаздывания присутствуют. Выберем следующие значения:

$$\begin{gathered} \tau_1 = 1, \quad \tau_2 = 2, \quad \tau_3 = 4, \qquad \beta_{12} = 1/100, \quad \beta_{22} = 1/200, \\ \alpha_{12} = 1/2, \quad \alpha_{14} = -1/2, \quad \alpha_{22} = 1, \quad \alpha_{24} = 1/4. \end{gathered}$$

Остальные расчетные параметры те же, что и в подразделе **5.1**. На рис. 5 – 8 представлены линии уровня функций I – IV, соответствующие выбранным значениям параметров (на рис. 7 высота $h_{-\ell}$ линии с номером $-\ell$ равна $-h_\ell$, $\ell = \overline{1, 12}$).

По графикам видно, что появление запаздываний привело к существенным изменениям в формах функций I – IV.

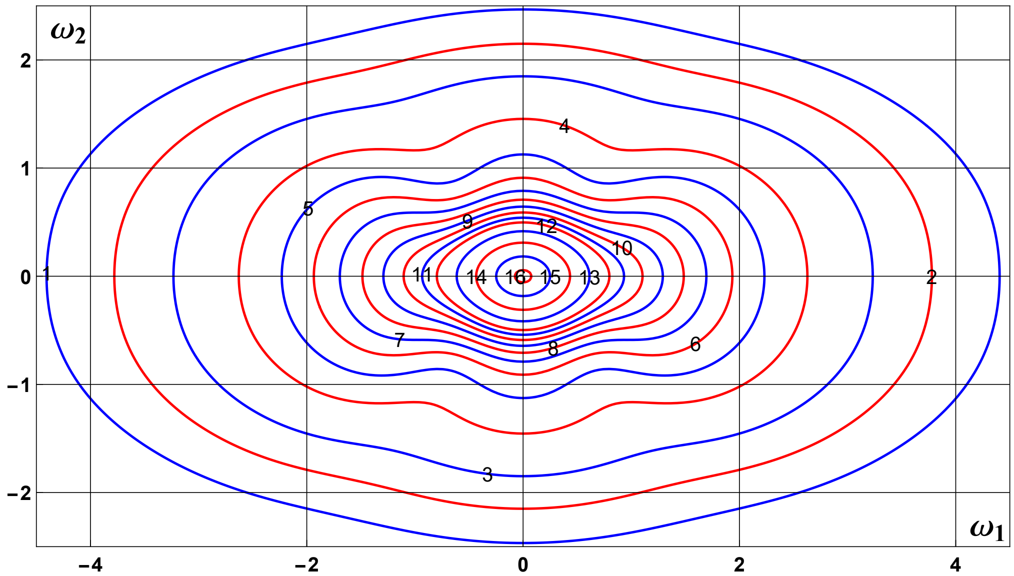

Рис. 1: Линии уровня функции I: 1 – 0.007, 2 – 0.01, 3 – 0.014, 4 – 0.021, 5 – 0.028, 6 – 0.035, 7 – 0.042, 8 – 0.049, 9 – 0.056, 10 – 0.063, 11 – 0.07, 12 – 0.077, 13 – 0.091, 14 – 0.11, 15 – 0.13, 16 – 0.1415

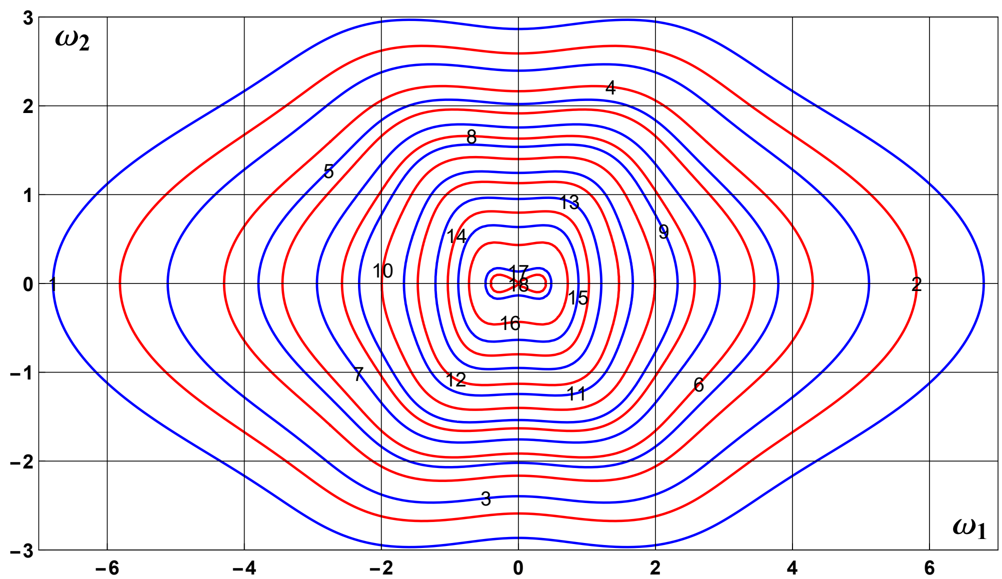

Рис. 2: Линии уровня функции II: 1 – 0.00035, 2 – 0.0006, 3 – 0.0009, 4 – 0.0015, 5 – 0.0021, 6 – 0.0027, 7 – 0.004, 8 – 0.0055, 9 – 0.007, 10 – 0.01, 11 – 0.015, 12 – 0.02, 13 – 0.03, 14 – 0.04, 15 – 0.05, 16 – 0.06, 17 – 0.07, 18 – 0.0714

Приложение

Соотношения для h_{ij}, $i = 1{,}2$, $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$:

$$h_{11} = \alpha_{11} + \alpha_{12}\,\cos(\tau_1\,\omega_2) + \beta_{11}\,\omega_1^2 + \beta_{12}\,\omega_1^2\,\cos(\tau_3\,\omega_2),$$
$$h_{12} = \alpha_{12}\,\sin(\tau_1\,\omega_2) + \beta_{12}\,\omega_1^2\,\sin(\tau_3\,\omega_2) - \omega_2,$$
$$h_{21} = \alpha_{21} + \alpha_{22}\,\cos(\tau_1\,\omega_2) + \beta_{21}\,\omega_1^2 + \beta_{22}\,\omega_1^2\,\cos(\tau_3\,\omega_2),$$

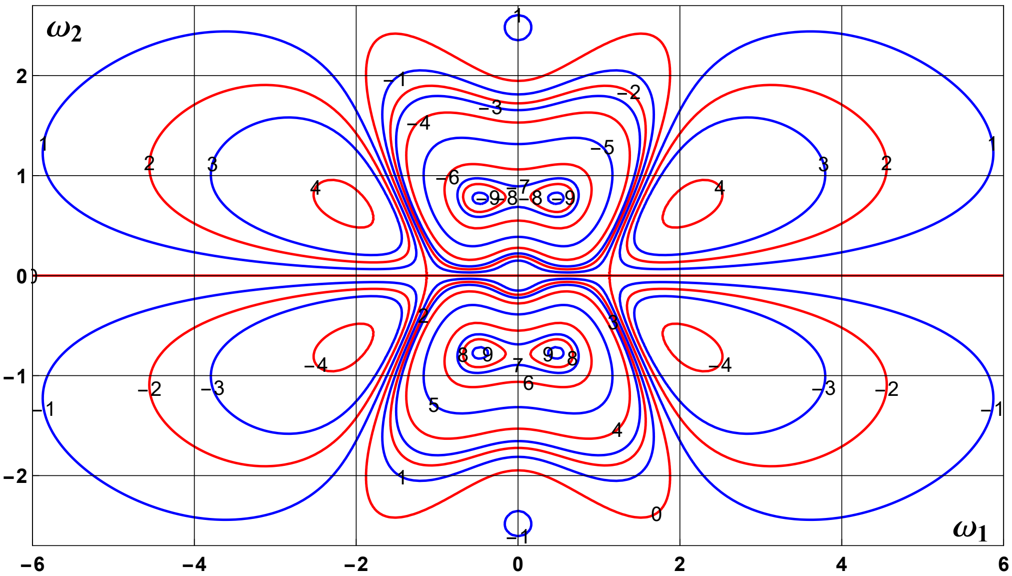

Рис. 3: Линии уровня функции III: 0 – 0.00, 1 – 0.0004, 2 – 0.0008, 3 – 0.0012, 4 – 0.0022, 5 – 0.005, 6 – 0.01, 7 – 0.013, 8 – 0.014, 9 – 0.015

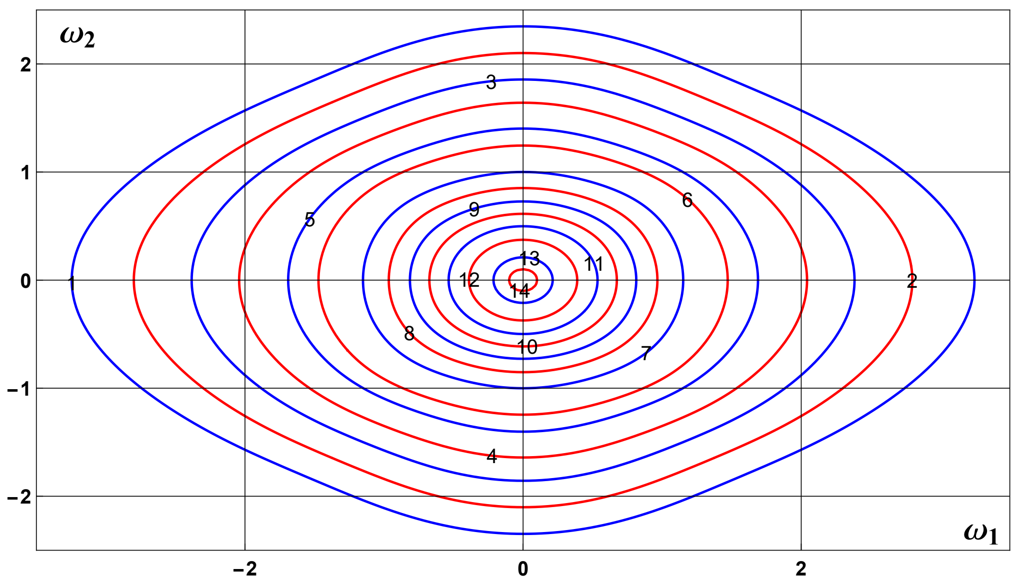

Рис. 4: Линии уровня функции IV: 1 – 0.005, 2 – 0.007, 3 – 0.01, 4 – 0.014, 5 – 0.021, 6 – 0.028, 7 – 0.045, 8 – 0.06, 9 – 0.075, 10 – 0.09, 11 – 0.105, 12 – 0.12, 13 – 0.135, 14 – 0.141

$$
\begin{aligned}
h_{22} &= \alpha_{22}\,\sin(\tau_1\,\omega_2) + \beta_{22}\,\omega_1^2\,\sin(\tau_3\,\omega_2) - \omega_2,\\
h_{31} &= \alpha_{13} + \alpha_{14}\,\cos(\tau_2\,\omega_2),\\
h_{32} &= \alpha_{14}\,\sin(\tau_2\,\omega_2),\\
h_{41} &= \alpha_{23} + \alpha_{24}\,\cos(\tau_2\,\omega_2),\\
h_{42} &= \alpha_{24}\,\sin(\tau_2\,\omega_2).
\end{aligned}
$$

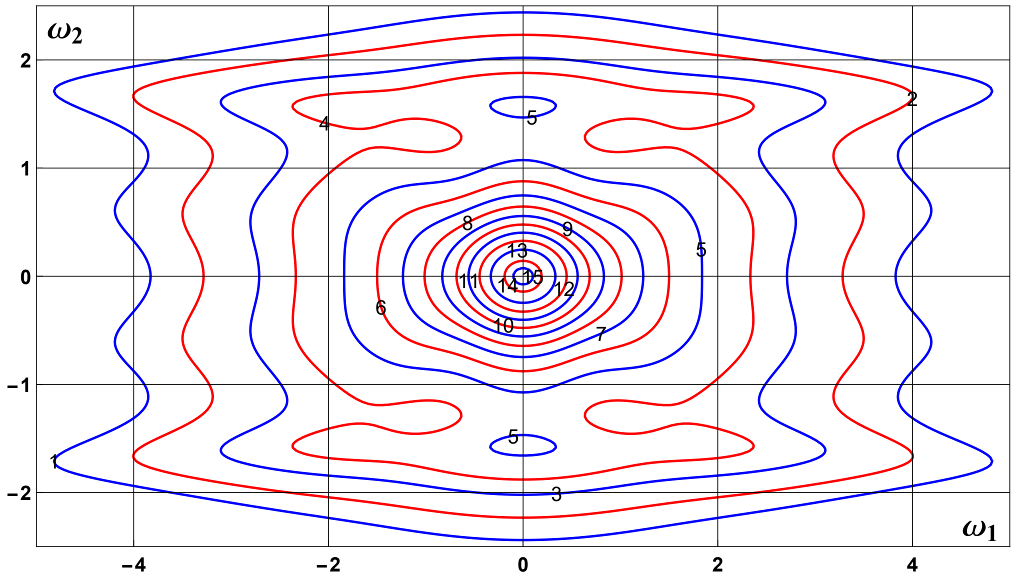

Рис. 5: Линии уровня функции I: 1 – 0.007, 2 – 0.01, 3 – 0.015, 4 – 0.02, 5 – 0.03, 6 – 0.04, 7 – 0.05, 8 – 0.06, 9 – 0.07, 10 – 0.08, 11 – 0.09, 12 – 0.10, 13 – 0.11, 14 – 0.12, 15 – 0.124

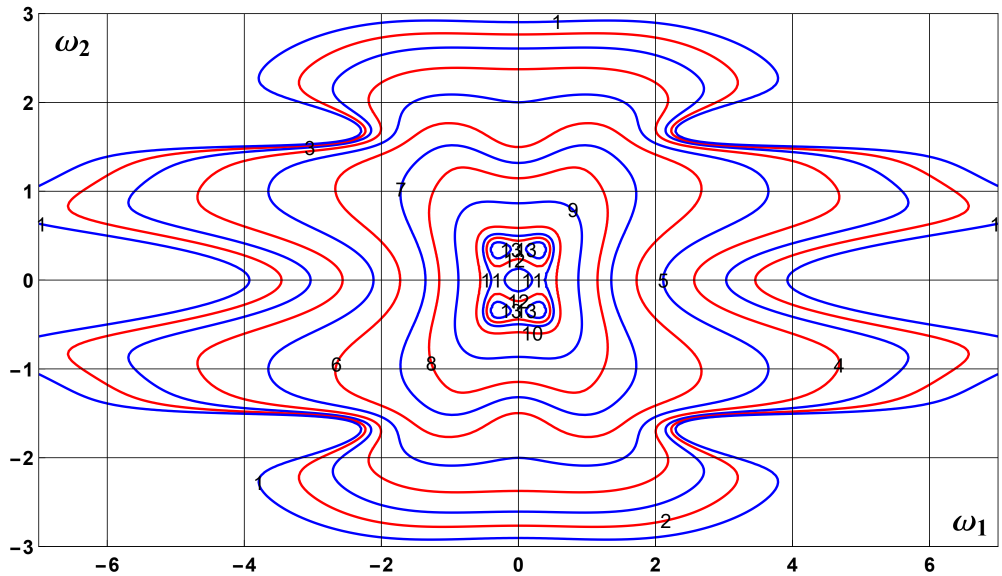

Рис. 6: Линии уровня функции II: 1 – 0.0004, 2 – 0.0006, 3 – 0.0009, 4 – 0.0015, 5 – 0.0027, 6 – 0.005, 7 – 0.01, 8 – 0.015, 9 – 0.025, 10 – 0.035, 11 – 0.0375, 12 – 0.0380

Форма функций H_{01} и H_{02} как квадратных квазиполиномов ω_1^2 и ω_2:

$$
\begin{aligned}
H_{01} = {} & [\![\, \big[\alpha_{11}\,\alpha_{21} - \alpha_{13}\,\alpha_{23} + (\alpha_{11}\,\alpha_{22} + \alpha_{12}\,\alpha_{21})\,\cos(\tau_1\,\omega_2) + \\
& + \alpha_{12}\,\alpha_{22}\,\cos(2\,\tau_1\,\omega_2) - \alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\cos(2\,\tau_2\,\omega_2) - (\alpha_{13}\,\alpha_{24} + \alpha_{14}\,\alpha_{23})\,\cos(\tau_2\,\omega_2)\big] + \\
& + (\alpha_{12} + \alpha_{22})\,\sin(\tau_1\,\omega_2)\,\omega_2 - \omega_2^2]\!] + \\
& + [\![\, \big[\alpha_{11}\,\beta_{21} + \alpha_{21}\,\beta_{11} + (\alpha_{12}\,\beta_{22} + \alpha_{22}\,\beta_{12})\,\cos(\tau_1\,\omega_2 + \tau_3\,\omega_2) + \\
& + (\alpha_{11}\,\beta_{22} + \alpha_{21}\,\beta_{12})\,\cos(\tau_3\,\omega_2) + (\alpha_{12}\,\beta_{21} + \alpha_{22}\,\beta_{11})\,\cos(\tau_1\,\omega_2)\big] + \\
& + (\beta_{12} + \beta_{22})\,\sin(\tau_3\,\omega_2)\,\omega_2 \,]\!]\,\omega_1^2 +
\end{aligned}
$$

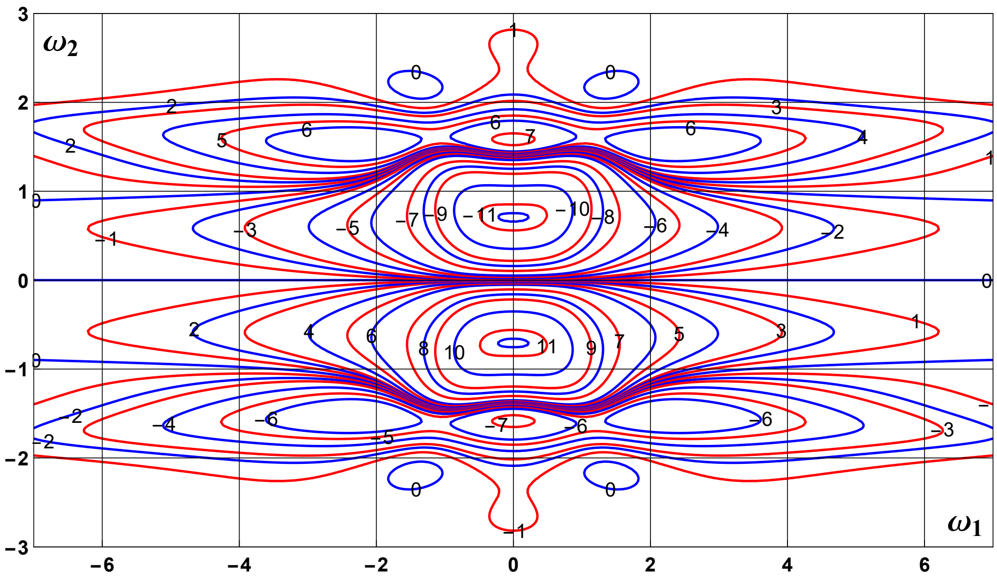

Рис. 7: Линии уровня функции III: 0 – 0.0, 1 – 0.0004, 2 – 0.0008, 3 – 0.0012, 4 – 0.0022, 5 – 0.0035, 6 – 0.005, 7 – 0.01, 8 – 0.015, 9 – 0.020, 10 – 0.030, 11 – 0.040, 12 – 0.042

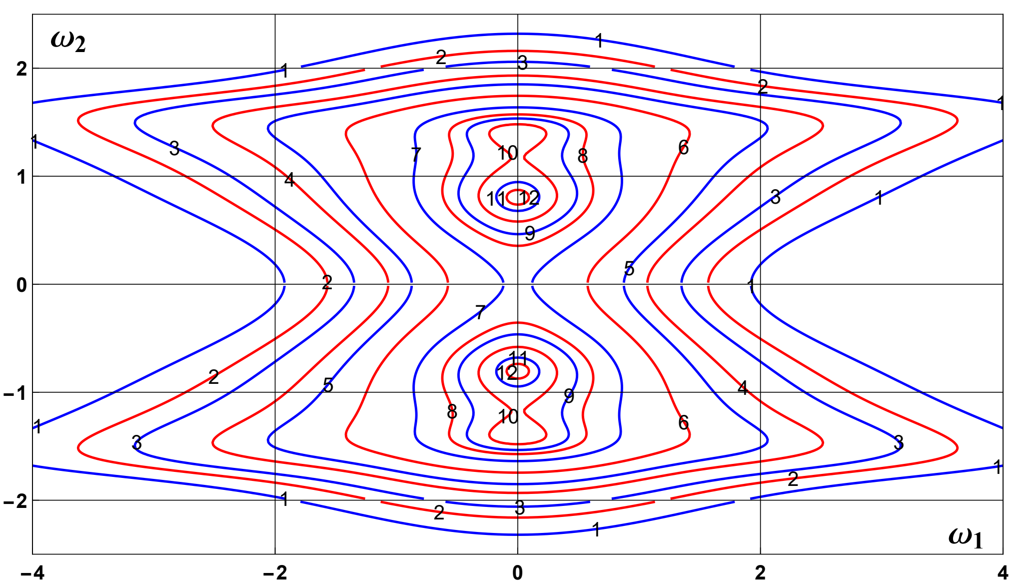

Рис. 8: Линии уровня функции IV: 1 – 0.005, 2 – 0.0075, 3 – 0.010, 4 – 0.015, 5 – 0.020, 6 – 0.030, 7 – 0.045, 8 – 0.055, 9 – 0.060, 10 – 0.065, 11 – 0.068, 12 – 0.069

$$
\begin{aligned}
&+ [\![\beta_{11}\,\beta_{21} + (\beta_{11}\,\beta_{22} + \beta_{12}\,\beta_{21})\,\cos(\tau_3\,\omega_2) + \beta_{12}\,\beta_{22}\,\cos(2\,\tau_3\,\omega_2)]\!]\,\omega_1^4;\\
H_{02} = {}& [\![\big[(\alpha_{11}\,\alpha_{22} + \alpha_{12}\,\alpha_{21})\,\sin(\tau_1\,\omega_2) + \alpha_{12}\,\alpha_{22}\,\sin(2\,\tau_1\,\omega_2) -\\
&- (\alpha_{13}\,\alpha_{24} + \alpha_{14}\,\alpha_{23})\,\sin(\tau_2\,\omega_2) - \alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\sin(2\,\tau_2\,\omega_2)\big] -\\
&- \big[\alpha_{11} + \alpha_{21} + (\alpha_{12} + \alpha_{22})\,\cos(\tau_1\,\omega_2)\big]\,\omega_2]\!] +\\
&+ [\![\big[(\alpha_{12}\,\beta_{21} + \alpha_{22}\,\beta_{11})\,\sin(\tau_1\,\omega_2) + (\alpha_{11}\,\beta_{22} + \alpha_{21}\,\beta_{12})\,\sin(\tau_3\,\omega_2) +\\
&+ (\alpha_{12}\,\beta_{22} + \alpha_{22}\,\beta_{12})\,\sin(\tau_1\,\omega_2 + \tau_3\,\omega_2)\big] -\\
&- \big[\beta_{11} + \beta_{21} + (\beta_{12} + \beta_{22})\,\cos(\tau_3\,\omega_2)\big]\,\omega_2]\!]\,\omega_1^2 +
\end{aligned}
$$

$$+ [\![\, (\beta_{11}\, \beta_{22} + \beta_{12}\, \beta_{21}) \, \sin(\tau_3\, \omega_2) + \beta_{12}\, \beta_{22} \, \sin(2\, \tau_3\, \omega_2)]\!]\, \omega_1^4.$$

Список литературы

[1] *Henderson D., Plaschko P.* Stochastic differential equations in science and engineering. Singapore: World Scientific, 2006. – 216 p.

[2] *Mao X.* Stochastic differential equations and applications. – 2nd ed. – Cambridge (UK): Woodhead Publishing, 2011. – 440 p.

[3] *Chow P.-L.* Stochastic partial differential equations. – Boca Raton (FL): Chapman & Hall/CRC, 2015. – 326 p.

[4] *Govindan T.E.* Yosida approximations of stochastic differential equations in infinite dimensions and applications. – Cham (Switzerland): Springer, 2016. – 426 p.

[5] *Borodin A.N.* Stochastic processes. – Cham (Switzerland): Birkhäuser, 2017. – 640 p.

[6] *VanMarcke E.* Random fields: Analysis and synthesis. – Cambridge: MIT Press, 1983. – 382 p.

[7] *Mandrekar V.S., Gawarecki L.* Stochastic analysis for Gaussian random processes and fields: with applications. – New York: Taylor & Francis Group, 2015. – 201 p.

[8] *Шмелев А.Б.* Основы марковской теории нелинейной обработки случайных полей. – М.: Изд-во МФТИ, 1998. – 208 с.

[9] *Haken H.* Synergetics: Introduction and advanced topics. – Berlin: Springer, 2004. – 779 p.

[10] *Küchler U., Mensch B.* Langevin's stochastic differential equation extended by a time delayed term // Stochastics and Stochastic Reports. – 1992. – Vol. 40, № 1–2. – P. 23–42.

[11] *Guillouzic S., L'Heureux I., Longtin A.* Small delay approximation of stochastic differential delay equations // Physical Review E. – 1999. – Vol. E59, № 4. – P. 3970–3982.

[12] *Guillouzic S., L'Heureux I., Longtin A.* Rate processes in a stochastically driven delayed overdamped // Physical Review E. – 2000. – Vol. E61, № 5. – P. 4906–4914.

[13] *Frank T.D., Beek P.J.* Stationary solutions of linear stochastic delay differential equations: Applications to biological systems // Physical Review E. – 2001. – Vol. E64, № 2. – Article ID 021917. – P. 1–12.

[14] *Frank T.D.* Stationary distributions of stochastic processes described by a linear neutral delay differential equation // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2005. – Vol. 38, № 28. – P. L485–L490.

[15] *Kinnally M.S.* Stationary distributions for stochastic delay differential equations with non-negativity constraints. – Dissertation for the PhD degree. – San Diego: University of California, 2009. – 116 p.

[16] *Butkovsky O., Scheutzow M.* Invariant measures for stochastic functional differential equations // Electronic Journal of Probability. – 2017. – Vol. 22, № 98. – P. 1–23.

[17] *Guillouzic S.* Fokker–Planck approach to stochastic delay differential equations. – Thesis for the degree of PhD. – University of Ottawa, 2000. – 100 p.

[18] *Полосков И.Е.* О применении схемы Гийюзика для расчета матрицы спектральных плотностей вектора состояния линейной стохастической системы с многими запаздываниями // Вестник Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – Вып. 1 (28). – С. 39–44.

[19] *Полосков И.Е.* Стационарные характеристики решений систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с кратными запаздываниями и случайными возмущениями // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. – Пермь, 2019. – Вып. 29. – С.84–102.

[20] *Pao C.V.* Stability and attractivity of periodic solutions of parabolic systems with time delays // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2005. – Vol. 304, № 2. – P. 423–450.

[21] *Gurevich Sv.V.* Dynamics of localized structures in reaction-diffusion systems induced by delayed feedback // Physical Review E. – 2013. – Vol. E87, № 5. – Article ID 052922. – P. 1–9.

[22] *Chen H.* Integral inequality and exponential stability for neutral stochastic partial differential equations with delays // Journal of Inequalities and Applications (Hindawi). – 2009. – Vol. 2009. – Article ID 297478. – P. 1–15.

[23] *Caraballo T., Shaikhet L.* Stability of delay evolution equations with stochastic perturbations // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2014. – Vol. 13, № 5. – P. 2095–2113.

[24] *Liu K.* Stationary solutions of neutral stochastic partial differential equations with delays in the highest-order derivatives // Discrete and Continuous Dynamical Systems – B. – 2018. – Vol. 23, № 9. – P. 3915–3934.

[25] *Полосков И.Е.* Построение спектральной плотности решения линейного стохастического диф-ференциального уравнения в частных производных с постоянными запаздываниями // Вестник Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – Вып. 1 (40). – С. 36–45.

[26] *Полосков И.Е.* Спектральные характеристики системы двух линейных стохастических дифференциальных уравнений гиперболического типа // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. – Пермь, 2020. – Вып. 52. – С. 69–86.

[27] *Wolfram St.* An elementary introduction to the Wolfram Language. – Champaign (IL): Wolfram Media, 2017. – 324 p.

[28] *Panchev S.* Random functions and turbulence. – Oxford: Pergamon Press, 1971. – 444 p.

[29] *Primak S., Kontorovich V., Lyandres V.* Stochastic methods and their applications to communications: Stochastic differential equations approach. – Chichester: John Wiley & Sons, 2004. – 496 p.

[30] *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. – 5-е изд. – В 3-х т. Т. 2. – М.: Дрофа, 2004. – 720 с.

[31] *Кастрица О.А., Мазаник С.А., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф.* Математический анализ. Ряды и несобственные интегралы: учеб. пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 2015. – 389 с.

Matrix of spectral densities for the solution of two linear stochastic parabolic differential equations with several delays

I. E. Poloskov

Perm State University,
e-mail: polosk@psu.ru

Abstract. The paper is devoted to obtaining relations for the components of the matrix of auto and cross power spectral density functions for the solution of a system of couple linear stochastic parabolic differential equations with constant coefficients and three delays in the steady state. The problem posed is solved on the basis of a generalization of the S. Guillouzic scheme proposed for the analysis of alone linear stochastic ordinary differential equations with constant delays and coefficients. Then we verify the formally constructed matrix components for existence conditions and the presence of standard properties of power spectral densities. In the final part of the paper, an example based on the relations obtained demonstrates a significant difference between the power spectral density functions of systems with and without delay.

Keywords: covariance function, delay, parabolic equation, power spectral density function, stochastic partial differential equation.