ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2025
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Интегро-дифференциальные системы

О существовании и единственности положительного решения периодической краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка

Абдурагимов Г.Э.
ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»
gusen_e@mail.ru

Аннотация: Рассматривается краевая задача с периодическими граничными условиями на отрезке $[0, 2\pi]$ для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка. С помощью теоремы Го-Красносельского о неподвижной точке получены достаточные условия существования положительного решения исследуемой задачи. Доказательство единственности этого решения установлено только в суперлинейном случае.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, функция Грина, конус, неподвижная точка оператора.

1 Введение

В последние годы нелинейные периодические краевые задачи широко изучаются многими авторами, отметим среди последних публикаций [1, 2, 3, 4, 5]. В [6, 7] с помощью теоремы Красносельского о неподвижной точке установлено существование и кратность положительных решений периодических краевых задач соответственно

$$
\begin{aligned}
&-u'' + \rho^2 u = f(t, u), \qquad 0 < t < 2\pi, \quad \rho > 0,\\
&u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi)
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&u'' + \rho^2 u = f(t,u), \qquad 0 < t < 2\pi, \quad 0 < \rho < \frac{1}{2},\\
&u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi).
\end{aligned}
$$

В [8] Греф и другие рассмотрели периодическую краевую задачу второго порядка

$$
\begin{aligned}
&u'' - \rho^2 u + \lambda g(t) f(u) = 0, \qquad 0 < t < 2\pi,\\
&u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi),
\end{aligned}
$$

где $\rho > 0$ — константа, λ -— положительный параметр, $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ непрерывна, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ непрерывна и $f(u) > 0$ при $u > 0$. С помощью теоремы Красносельского о неподвижной точке при различных сочетаниях суперлинейности и сублинейности функции f получены результаты о множественности и несуществовании положительных решений исследуемой задачи.

Яо в [9] с применением теоремы Красносельского о неподвижной точке доказал существование положительного решения периодической краевой задачи

$$
\begin{aligned}
&u'' = f(t,u), \qquad 0 < t < 2\pi,\\
&u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi),
\end{aligned}
$$

где нелинейный член f является функцией Каратеодори.

В настоящей статье предпринята попытка обобщить полученные ранее результаты когда нелинейный член уравнения f содержит линейный оператор T. Кроме того, предполагается, что $f(\cdot, 0) \equiv 0$. Наличие оператора T вкупе с последним условием превносит существенные в топологическом смысле сложности в применении классической схемы доказательства наличия единственной неподвижной точки соответствующего нелинейного оператора, которые собственно удалось преодолеть в данной работе. В свою очередь это позволяет расширить горизонт краевых задач с периодическими граничными условиями, имеющих единственное положительное решение. Например, в качестве оператора T можно взять интегральный оператор, оператор суперпозиции, тождественный оператор и т.д.

2 Основные результаты

С целью сокращения выкладок обозначим через C — пространство $C[0, 2\pi]$, через L_p $(1 < p < \infty)$ — пространство $L_p(0, 2\pi)$ и через W^2 — пространство функций, определенных на $[0,2\pi]$, с абсолютно непрерывной производной и суммируемой второй производной на указанном отрезке.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t)+\rho^2x(t)=f\left(t,(Tx)(t)\right), \qquad 0<t<2\pi, \tag{2.1}$$
$$x(0)=x(2\pi), \tag{2.2}$$
$$x'(0)=x'(2\pi), \tag{2.3}$$

где $0<\rho<\frac{1}{2}$, $\quad T\colon C\to L_p\ (1<p<\infty)$ — линейный непрерывный оператор, переводящий неотрицательные функции из C в неотрицательные функции пространства L_p, функция $f(t,u)$ неотрицательна на $[0,2\pi]\times[0,\infty)$, удовлетворяет условию Каратеодори [10, с. 340] и $f(\cdot,0)\equiv 0$.

Определение 1 *Под положительным решением задачи* (2.1)–(2.3) *будем подразумевать функцию $x\in W^2$ положительную в интервале* $(0,2\pi)$, *удовлетворяющую почти всюду на указанном интервале уравнению* (2.1) *и граничным условиям* (2.2), (2.3).

Рассмотрим эквивалентное задаче (2.1)–(2.3) интегральное уравнение

$$x(t)=\int_0^{2\pi}G(t,s)f\left(s,(Tx)(s)\right)\,ds, \qquad 0\le t\le 2\pi, \tag{2.4}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $Lx\equiv x''+\rho^2x$ с краевыми условиями (2.2), (2.3):

$$G(t,s)=\frac{1}{2\rho\sin\pi\rho}\begin{cases}\cos\rho(\pi-t+s), & \text{если } 0\le s\le t,\\ \cos\rho(\pi+t-s), & \text{если } t\le s\le 2\pi.\end{cases}$$

Несложно видеть, что имеют место свойства:

1. $G(t,s)>0, \qquad t,s\in[0,2\pi]$;
2. $\min_{0\le t\le 2\pi}G(t,s)=G(s,s)=\frac{1}{2\rho}\operatorname{ctg}\pi\rho, \quad s\in[0,2\pi]$;
3. $\max_{t,s\in[0,2\pi]}G(t,s)=\dfrac{1}{2\rho\sin\pi\rho}$.

Предположим, что при почти всех $t\in[0,2\pi]$ выполнено условие

$$f(t,u)\le bu^{p/q}, \quad p\ne q, \tag{2.5}$$

где $b > 0$, $p, q \in (1, \infty)$, обеспечивающее действие оператора Немыцкого $N \colon L_p \to L_q$, определяемого соотношением $(Nu)(t) = f(t, u(t))$ для каждого $u \in L_p$.

Определим оператор A равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s) f\left(s, (Tx)\left(s\right)\right) \, ds.$$

Заметим, что оператор A непрерывно действует на подмножестве неотрицательных функций пространства C, так как представляет собой суперпозицию непрерывных операторов

$$A = GNT,$$

где $G : L_q \to C$ — оператор Грина с непрерывным ядром $G(t, s)$.

Обозначим через K конус неотрицательных функций пространства C, удовлетворяющих условию

$$x(t) \geq \frac{m}{M} \|x\|_C, \qquad t \in [0, 2\pi], \tag{2.6}$$

где $m > 0$ и M соответственно минимум и максимум функции Грина.

Справедлива

Лемма 1 *Конус K инвариантен относительно оператора A.*

Доказательство. В силу свойства 3 функции Грина для $x \in K$ имеем

$$\|Ax\|_C = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \int_0^{2\pi} G(t,s) f\left(s, (Tx)\left(s\right)\right) \, ds \leq M \int_0^{2\pi} f\left(s, (Tx)\left(s\right)\right) \, ds.$$

В то же время

$$(Ax)(t) \geq m \int_0^{2\pi} f\left(s, (Tx)\left(s\right)\right) \, ds \geq \frac{m}{M} \|Ax\|_C.$$

Следовательно, $A(K) \subset K$.
Лемма доказана.

Лемма 2 *Оператор $A : K \to K$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Предположим, что $D \subset K$ — ограниченное множество. Тогда найдется положительное число γ такое, что $\|x\|_C \leq \gamma$ для любого

$x \in D$. Докажем, что $\sup_{y\in A(D)} \|y\|_C < \infty$, где $y = Ax$. Действительно, в силу (2.5) и неравенства Гельдера имеем

$$\sup_{y\in A(D)} \|y\|_C \le Mb\int_0^{2\pi} (Tx)^{\frac{p}{q}}(s)\,ds \le (2\pi)^{\frac{q-1}{q}} Mb\|Tx\|_{L_p}^{\frac{p}{q}}$$
$$\le (2\pi)^{\frac{q-1}{q}} bM\tau^{\frac{p}{q}}\|x\|_C^{\frac{p}{q}} \le (2\pi)^{\frac{q-1}{q}} bM\tau^{\frac{p}{q}}\gamma^{\frac{p}{q}},$$

где τ — норма оператора T.

Опирась на (2.5), несложно показать, что равномерная непрерывность функции Грина $G(t,s)$ обеспечивает равностепенную непрерывность $A(D)$. Из теоремы Арцела - Асколи следует компактность оператора A. Непрерывность A была ранее установлена. Следовательно, оператор A вполне непрерывен.

Для доказательства существования по крайней мере одного положительного решения задачи (2.1)–(2.3) воспользуемся следующей известной теоремой Го –Красносельского [11].

Теорема 1 *Пусть X — банахово пространство и $P \subset X$ — конус в X. Предположим Ω_1, Ω_2 — открытые подмножества в X с $0 \in \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ и $\mathcal{A} : P \to P$ — вполне непрерывный оператор такой, что*

(i) $\|\mathcal{A}u\| \le \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_1$ и $\|\mathcal{A}u\| \ge \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_2$, или

(ii) $\|\mathcal{A}u\| \ge \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_1$ и $\|\mathcal{A}u\| \le \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_2$.

Тогда $\mathcal{A}$ имеет неподвижную точку в $P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$.

Введем обозначения:

$$f_0 = \lim_{u\to 0^+} vrai \inf_{0\le t\le 2\pi} \frac{f(t,u)}{u}, \qquad f_\infty = \lim_{u\to +\infty} vrai \inf_{0\le t\le 2\pi} \frac{f(t,u)}{u},$$

$$\Omega_r = \{x \in C : \|x\|_C < r\}, \qquad \partial\Omega_r = \{x \in C : \|x\|_C = r\},$$

где $r > 0$.

Теорема 2 *Предположим, что при $p > q$ выполнено условие* (2.5)*, $f_\infty = +\infty$ и $0 < vrai \min_{0\le t\le 2\pi}(T\chi)(t) < \infty$, где $\chi(t) \equiv 1$. Тогда краевая задача* (2.1)–(2.3) *имеет хотя бы одно положительное решение.*

Доказательство. В силу (2.5) для $x \in K \cap \partial\Omega_{r_1}$, применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\|Ax\|_C = \max_{0 \le t \le 2\pi} \int_0^{2\pi} G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds \le Mb \int_0^{2\pi} (Tx)^{\frac{p}{q}}(s)\, ds$$
$$\le (2\pi)^{\frac{q-1}{q}} Mb \|Tx\|_{L_p}^{\frac{p}{q}} \le (2\pi)^{\frac{q-1}{q}} Mb\tau^{\frac{p}{q}} \|x\|_C^{\frac{p}{q}} \le (2\pi)^{\frac{q-1}{q}} Mb\tau^{\frac{p}{q}} r_1^{\frac{p}{q}-1} \cdot \|x\|_C.$$

Взяв в качестве r_1 величину $\left(\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{q-1}{q}} Mb\tau^{\frac{p}{q}}}\right)^{\frac{q}{p-q}}$, для всех $x \in K \cap \partial\Omega_{r_1}$ из последнего неравенства получим $\|Ax\|_C \le \|x\|_C$.

Из условия теоремы $f_\infty = \infty$ вытекает существование такого числа $H > 0$, что

$$vrai \inf_{0 \le t \le 2\pi} f(t,u) \ge \xi u, \quad u \ge H, \tag{2.7}$$

где $\xi \ge \dfrac{M}{m^2 \int_0^{2\pi} (T\chi)(s)\, ds}$.

Пусть $r_2 = \max\{\frac{H}{\frac{m}{M} vrai \min_{0 \le t \le 2\pi} (T\chi)(t)}, 2r_1\}$. Тогда для $x \in K \cap \partial\Omega_{r_2}$ соответственно имеем

$$(Tx)(t) \ge \frac{m}{M} \|x\|_C \cdot vrai \min_{0 \le t \le 2\pi} (T\chi)(t) \ge H, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Наконец, в силу (2.7) для любого $x \in K \cap \partial\Omega_{r_2}$ имеем

$$(Ax)(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds \ge m\xi \int_0^{2\pi} (Tx)(s)\, ds$$
$$\ge \frac{m^2\xi}{M} \|x\|_C \int_0^{2\pi} (T\chi)(s)\, ds \ge \|x\|_C.$$

Откуда следует $\|Ax\|_C \ge \|x\|_C$.

Следовательно, в силу условия (i) теоремы 1 вполне непрерывный оператор A имеет неподвижную точку в $K \cap (\overline{\Omega}_{r_2} \backslash \Omega_{r_1})$, что в свою очередь равносильно существованию по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (2.1)–(2.3) в указанной области.

Замечание 1. *В случае $p < q$ и $f_0 = \infty$ по приведенной в теореме 2 схеме несложно показать выполнение условия (ii), гарантирующее наличие по крайней мере одного положительного решения задачи* (2.1)–(2.3).

Теорема 3 *При выполнении условий теоремы 2 краевая задача* (2.1)–(2.3) *имеет единственное положительное решение, если функция* $f(t,u)$ *дифференцируема по* u, *производная* $f'_u(t,u)$ *монотонно возрастает по* u *и*

$$M\tau\|f'_u\left(t,r_2\left(T\chi\right)(t)\right)\|_{L_{p'}}<1, \tag{2.8}$$

где $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1.$

Доказательство. Как следует из теоремы 2 для положительного решения задачи (2.1)–(2.3) справедлива оценка

$$0<x(t)\le r_2,\quad 0\le t\le 2\pi. \tag{2.9}$$

Предположим, что задача (2.1)–(2.3) имеет два положительных решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Из принципа единственности для выпуклых операторов [12, с. 220] следует, что $|x_1(t)-x_2(t)|$ не является строго положительной функцией. Обозначим через $y(t)$ разность $x_1(t)-x_2(t)$. Без ограничения общности можно считать, что найдутся такие числа t_0 и t_1, что $y(t_0)=\|y\|_C,\quad y(t_1)\le 0.$

На основании (2.4), применяя теорему о среднем, имеем

$$y(t)=\int_0^{2\pi}G(t,s)f'_u(s,\tilde{u}(s))(Ty)(s)\,ds,\quad 0\le t\le 2\pi,$$

где $\tilde{u}(s)$ принимает значения, промежуточные между $(Tx_1)(s)$ и $(Tx_2)(s)$.

В силу монотонности $f'_u(t,u)$ и (2.9) имеем

$$\|y\|_C\le M\int_0^{2\pi}|f'_u\left(s,r_2\left(T\chi\right)(s)\right)|\,|(Ty)(s)|\,ds \\ \le M\|\psi\|_{L_{p'}}\|Ty\|_{L_p}\le M\|\psi\|_{L_{p'}}\tau\|y\|_C,$$

где $\psi(t)\equiv f'_u\left(t,r_2\left(T\chi\right)(t)\right),\quad \frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1.$

Итак, имеем

$$\|y\|_C\le M\tau\|\psi\|_{L_{p'}}\|y\|_C.$$

Если это неравенство не выполняется, то краевая задача (2.1)–(2.3) имеет единственное положительное решение. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Wang S., Chen F., Qian D. The existence of periodic solution for superlinear second order ODEs by a new fixed point approach. *J. Differ. Equ.*, 2024; (410):481–512.

[2] Yan R., Zhao Y. Positive Solutions for Periodic Boundary Value Problems of Fractional Differential Equations with Sign-Changing Nonlinearity and Green's Function. *Axioms*, 2023; (12:9):1–13.

[3] Benner P., Chuiko S., Zuyev A. A periodic boundary value problem with switchings under nonlinear perturbations. *Bound Value Probl* , 2023; (50):1–12.

[4] Rudakov I.A. On the Existence of Countably Many Periodic Solutions of a Boundary Value Problem for the Beam Vibration Equation with Homogeneous Boundary Conditions. *Diff. Equat.*, 2022; (58):1052–1063.

[5] Bravyi E.I. On Periodic Boundary-Value Problems for Systems of Functional-Differential Equations. *J Math Sci*, 2018; (230):660-663.

[6] Jiang D. On the existence of positive solutions to second order periodic BVPs. *Acta Math. Sci.*, 1998; (18):31–35.

[7] Zhang Z., Wang J. On existence and multiplicity of positive solutions to periodic boundary value problems for singular nonlinear second order differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 2003; (281):99–107.

[8] Graef J.R., Kong L., Wang H. Existence, multiplicity, and dependence on a parameter for a periodic boundary value problem. *J.Differ. Equ.*, 2008; (245):1185–1197.

[9] Yao Q. Positive solutions of nonlinear second-order periodic boundary value problems. *Appl. Math. Lett.*, 2007; (20):583–590.

[10] Красносельский М. А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 500 с.

[11] Guo D., Lakshmikantham V. Nonlinear Problems in Abstract Cones. Boston: Academic Press, 1988. 275 p.

[12] Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 396 с.

On the existence and uniqueness of a positive solution to a periodic boundary value problem for one nonlinear functional differential equation of the second order

G. E. Abduragimov
Dagestan State University
gusen_e@mail.ru

Abstract. We consider a boundary value problem with periodic boundary conditions on the segment $[0, 2\pi]$ for one nonlinear second-order functional differential equation. Using the Go-Krasnoselsky fixed point theorem, sufficient conditions for the existence of a positive solution to the problem under study are obtained. The proof of the uniqueness of this solution is established only in the superlinear case.

Keywords: boundary value problem, positive solution, Green's function, cone, operator fixed point index.