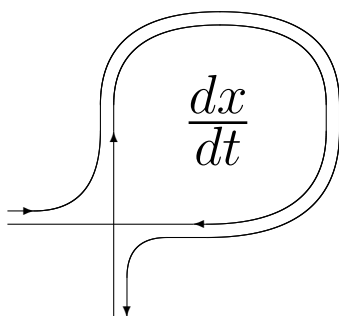




ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2025

Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория нелинейных колебаний

Скрытые колебания и бистабильность в системе осциллятора Ван дер Поля с пассивной нагрузкой

А. А. Тучин^{1,‡}, А. В. Купцова^{1,†}, П. В. Купцов^{2,1,*}

¹СГТУ имени Гагарина Ю. А.,

²Саратовский филиал института радиотехники и электроники им. В. А.
Котельникова РАН,

*kupav@mail.ru, †anna.kuptsova@gmail.com, ‡artemtych@gmail.com

Аннотация. Рассматривается осциллятор Ван дер Поля с нагрузкой в виде пассивного контура. Показано что в такой системе может существовать скрытый аттрактор в виде устойчивого предельного цикла. Выявлены и проанализированы различные режимы бистабильности в такой системе: сосуществование самовозбуждающегося и скрытого предельных циклов, а также бистабильность двух самовозбуждающихся предельных циклов, имеющая характер гистерезиса.

Ключевые слова: двухмодовый осциллятор Ван дер Поля, бифуркационный анализ, скрытый аттрактор, самовозбуждающийся аттрактор, неподвижная точка.

1 Введение

Простые модельные системы очень часто помогают разобраться в особенностях поведения нелинейных динамических систем. Одна из таких модельных

систем — многомодовый генератор на основе генератора Ван дер Поля, когда генератор связан с пассивным колебательным контуром. Такая система относится к числу классических и исследовалась ещё в ранних работах [1, 2]. Тем не менее она продолжает привлекать внимание исследователей. В частности, в работе [3] рассматривается радиофизическая реализация этой системы и исследуются механизмы возникновения в ней бистабильности. Постоянный интерес к простым классическим моделям связан с тем, что по мере обнаружения новых универсальных динамических закономерностей возникает необходимость пересмотра наших знаний о классических моделях.

Скрытые колебания — это сравнительно недавно обнаруженный феномен нелинейной динамики, понимание которого имеет большое практическое значение. В отличие от «обычных», самовозбуждающихся аттракторов, бассейны притяжения скрытых аттракторов не имеют пересечений с малой окрестностью неподвижной точки и в силу этого их обнаружение затруднено, так как априори неизвестно как задать начальные условия, что бы система вышла на режим скрытых колебаний. Наличие в фазовом пространстве рядом с установившимся режимом ещё одного, условия выхода на который неизвестны, может быть источником нежелательного поведения системы. При наличии возмущений она может переключиться на этот режим что может привести к драматическим последствиям [4, 5, 6, 7].

Срытым аттракторам посвящено большое количество работ. Некоторые теоретические разработки методов их анализа можно найти в работах [8, 9, 10, 11]. В работах [12, 13, 14, 15, 16, 17] исследуются скрытые колебания в системах различной природы. Скрытыми могут быть не только периодические но и хаотические и странные нехаотические аттракторы. Некоторые примеры таких системы исследуются в работах [18, 19, 20]. Экспериментальное наблюдение скрытого хаотического аттрактора описано в работе [21].

В этой статье мы рассматриваем осциллятор Ван дер Поля связанный с пассивным контуром. Цель работы состоит в том, чтобы показать, что даже в такой простой, классической системе возможно возникновение скрытого аттрактора. Мы подробно исследуем бистабильность самовозбуждающегося и скрытого аттрактора, сопоставляем её особенности с бистабильностью в виде гистерезиса.

2 Исследуемая система и условия устойчивости неподвижной точки

Рассмотрим осциллятор Ван дер Поля с нагрузкой в виде пассивного контура с затуханием:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (\epsilon - x_1^2)y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -2\beta y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma(x_1 - x_2).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x_1 и y_1 динамические переменные осциллятора Ван дер Поля, ω_1 его собственная частота, а ϵ — параметр его надкритичности. При $\epsilon > 0$ в одиночном осцилляторе происходит бифуркация Андронова—Хопфа: неподвижная точка в нуле теряет устойчивость и от неё отделяется устойчивый предельный цикл. В системе (1) осциллятор Ван дер Поля связан с пассивным контуром, величина этой связи задаётся параметром γ . Контур имеет собственную частоту ω_2 , а затухание контролируется параметром β .

Система (1) имеет единственную неподвижную точку в нуле. Её устойчивость определяется собственными числами λ матрицы Якоби этой системы в неподвижной точке, которые вычисляются как решения характеристического уравнения

$$\begin{aligned}\lambda^4 - (\epsilon - 2\beta)\lambda^3 + (\omega_2^2 + \omega_1^2 + 2\gamma - 2\beta\epsilon)\lambda^2 - \\ - (\epsilon\omega_2^2 - 2\beta\omega_1^2 + \epsilon\gamma - 2\beta\gamma)\lambda + \omega_1^2\omega_2^2 + \gamma\omega_2^2 + \gamma\omega_1^2 = 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Чтобы найти критические точки, положим вещественную часть λ равной нулю, $\lambda = i\Omega$, и разложим уравнение (1) на вещественную и мнимую части. Решая эти уравнения относительно Ω и γ получим, что одно из решений имеет нулевую частоту:

$$\Omega_{\text{кр}}^0 = 0,\tag{3}$$

$$\gamma_{\text{кр}}^0 = -\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{(\omega_2^2 + \omega_1^2)}.\tag{4}$$

При таком значении силы связи $\gamma = \gamma_{\text{кр}}^0$ одно из собственных чисел неподвижной точки обращается в ноль. Если $\gamma < \gamma_{\text{кр}}^0$ вещественная часть по меньшей мере одного из собственных чисел становится положительной, т. е. неподвижная точка неустойчива при любом ϵ , в том числе и при $\epsilon \leq 0$ когда осциллятор Ван дер Поля не возбуждён. Такую ситуацию с сильной отрицательной

связью можно интерпретировать как появление в системе дополнительного источника энергии и в дальнейшем мы не будем рассматривать этот случай, ограничившись $\gamma > \gamma_{\text{кр}}^0$.

Второе решение уравнения (2) при $\lambda = i\Omega$ имеет вид:

$$\Omega_{\text{кр}}^{\pm} = \sqrt{\gamma_{\text{кр}} + \frac{\epsilon\omega_2^2 - 2\beta\omega_1^2}{\epsilon - 2\beta}}, \quad (5)$$

$$\gamma_{\text{кр}}^{\pm} = \beta\epsilon \pm \frac{\sqrt{2\beta\epsilon((\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + \epsilon^2\omega_2^2 + 4\beta^2\omega_1^2) - \beta^2\epsilon^2(4(\omega_2^2 + \omega_1^2) - (\epsilon - 2\beta)^2)}}{\epsilon - 2\beta}. \quad (6)$$

Далее мы исследуем свойства этого решения более подробно.

3 Линейный анализ устойчивости неподвижной точки

Рассмотрим $\gamma_{\text{кр}}^{\pm}$ и $\gamma_{\text{кр}}^0$ как функции от ϵ . Напомним, что при этих значениях связи γ некоторые из собственных чисел характеристического уравнения (2) проходят через мнимую ось, т. е. имеют нулевые вещественные части. Вспомним также, что мы ограничиваемся рассмотрением случая $\gamma > \gamma_{\text{кр}}^0$. На рис. 1 показан вид этих функций при разных значениях частоты контура ω_2 и затухания β . Серым показаны участки кривых, на которых частота (5) становится мнимой, и в силу этого соответствующее $\gamma_{\text{кр}}$ не отвечает интересующей нас ситуации.

Формула (6) задаёт две ветви кривой, которые при $\epsilon = 0$ совпадают, $\gamma_{\text{кр}}^{+} = \gamma_{\text{кр}}^{-} = 0$. При $\epsilon > 0$ одна из ветвей отвечает за положительные значения $\gamma_{\text{кр}}^{+} > 0$, а вторая за отрицательные $\gamma_{\text{кр}}^{-} < 0$. При $\epsilon = 2\beta$ имеется вертикальная асимптота в окрестностях которой кривые уходят на бесконечность. На рис. 1 эти асимптоты показаны пунктиром.

Будем двигаться вдоль оси ϵ с постоянным γ . В области левее асимптоты происходит первое пересечение кривой критических значений $\gamma_{\text{кр}}^{\pm}$. В этой точке неподвижная точка теряет устойчивость вследствие бифуркации Андронова—Хопфа и рождается устойчивый предельный цикл. В одиночном генераторе Ван дер Поля, т. е. при $\gamma = 0$, эта бифуркация происходит при $\epsilon = 0$. Наличие пассивного контура при $\gamma \neq 0$ проявляется в том, что рождение устойчивого предельного цикла происходит при ненулевом ϵ_0 . Это очевидным образом объясняется тем, что за счёт пассивной нагрузки для возбуждения колебаний в генераторе требуется больше энергии, так как часть её

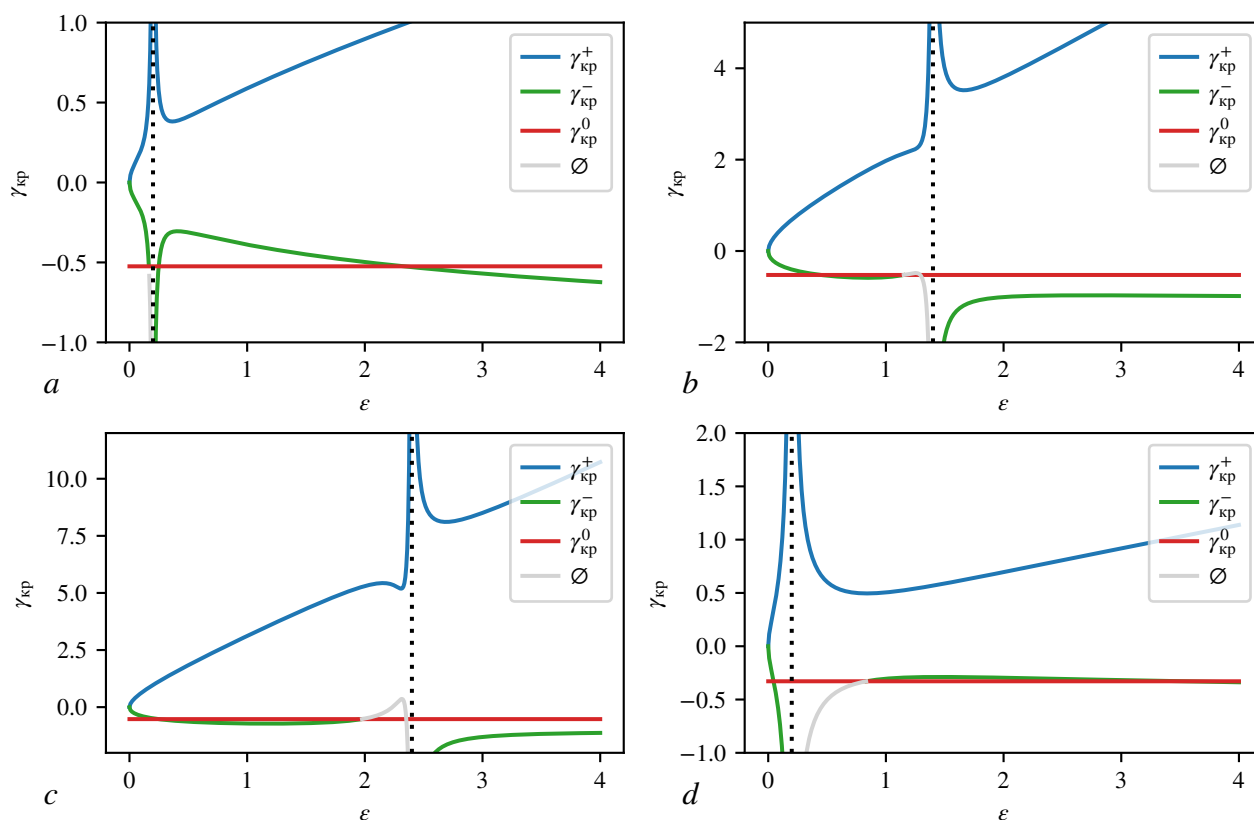


Рис. 1: Критические значения $\gamma_{кр}^{\pm}$ (5) в зависимости от ϵ . Знак $\emptyset$ обозначает участки, на которых подкоренное выражение в формуле для частоты (5) становится отрицательным и поэтому в этих точках вещественная часть собственных чисел на обращается в ноль. Пунктир показывает асимптоту $\epsilon = 2\beta$. $\omega_1 = 1$, $a - \omega_2 = 1.05$, $\beta = 0.1$, $b - \omega_2 = 1.05$, $\beta = 0.7$, $c - \omega_2 = 1.05$, $\beta = 1.2$, $d - \omega_2 = 0.7$, $\beta = 0.1$.

расходуется на компенсацию затухания в контуре. Соответственно, чем больше сила связи γ , тем больше энергии уходит в контур, и значит тем большей должна быть отвечающая за подкачку энергии величина ϵ , чтобы в системе возникли незатухающие колебания. Значение $\epsilon = 2\beta$ при котором проходит асимптота — это случай полной компенсации потерь. При таком уровне подкачки энергии незатухающие колебания в системе (1) возникают независимо от силы связи.

Обсудим случай малого затухания и небольшой частотной расстройки контура и генератора, так что $\omega_2 > \omega_1$, см. рис. 1а. Как видно из этого рисунка, в области правее асимптоты кривая $\gamma_{\text{кр}}^+$ сначала убывает из бесконечности, а затем снова начинает расти. Как можно проверить непосредственно, первая производная $\gamma_{\text{кр}}^+$ по ϵ при $\epsilon \rightarrow \infty$ стремится к значению 2β , т. е. при больших ϵ эта функция нарастает по линейному закону. Это значит, что $\gamma_{\text{кр}}^+$ как функция ϵ всегда имеет по меньшей мере один минимум. Если двигаться вдоль оси ϵ с постоянным γ выше этого минимума, мы три раза пересечём линию критических значений. Как обсуждается в разделе 4, это приводит к нетривиальному режиму бистабильности самовозбуждающегося и скрытого предельных циклов.

Случай когда $\gamma_{\text{кр}}^0 < \gamma < 0$ качественно не отличается от рассмотренного выше. Отметим, во-первых, что, как нетрудно проверить, вычислив соответствующий предел, при $\epsilon \rightarrow \infty$ кривая $\gamma_{\text{кр}}^-$ стремится к значению $-\omega^2$. При этом всегда выполняется неравенство $\gamma_{\text{кр}}^0 > -\omega^2$. Поэтому при больших ϵ значения $\gamma_{\text{кр}}^-$ находятся вне области рассмотрения и не оказывают влияния на исследуемую бифуркационную картину. Тем не менее возможна ситуация как на рис. 1а когда максимум $\gamma_{\text{кр}}^-$ находится выше $\gamma_{\text{кр}}^0$. Тогда картина получится качественно такой же как и для положительных γ . Если γ выше этого максимума, то мы снова наблюдаем единственную бифуркацию Андронова—Хопфа. Если же γ лежит ниже максимума, то двигаясь по оси ϵ мы ещё дважды пересекаем кривую $\gamma_{\text{кр}}^-$ и наблюдаем поведение, качественно аналогичное случаю $\gamma > 0$.

Положение и количество экстремумов функций $\gamma_{\text{кр}}^\pm(\epsilon)$ в зависимости от затухания β показаны на рис. 2. Рис. 2а построен для частотной расстройки, как на рис. 1а. Видно, что кривая $\gamma_{\text{кр}}^+$ всегда имеет по меньшей мере один минимум, а на кривой $\gamma_{\text{кр}}^-$ всегда есть хотя бы один максимум. При малом β других экстремумов нет. Именно этот случай иллюстрирует рис. 1а.

Если увеличить β , на кривой $\gamma_{\text{кр}}^-$ появляются ещё по одному минимуму и максимуму. Вид кривых в этом случае показан на рис. 1б. Видно, что экстре-

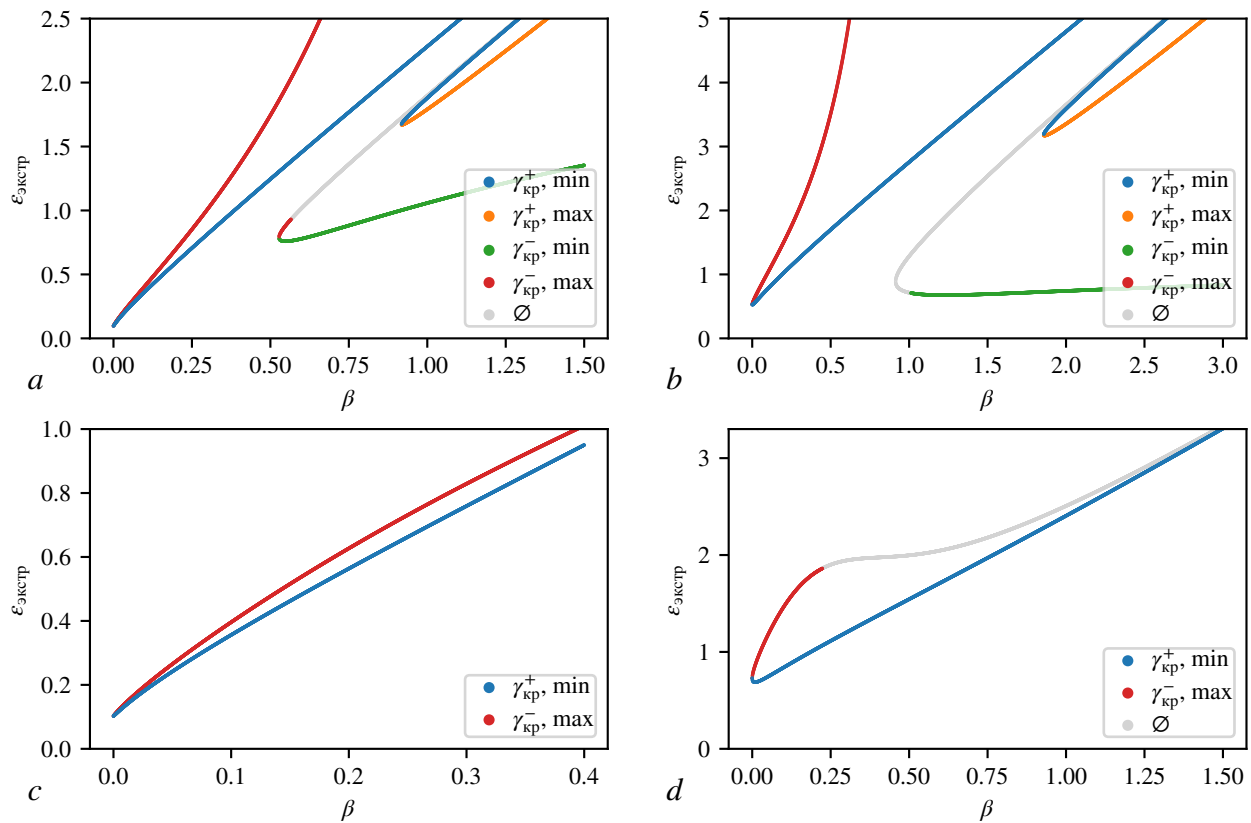


Рис. 2: Экстремумы $\gamma_{кр}^{\pm}$ (6) как функции ϵ в зависимости от β . Знак $\emptyset$ на рисунках обозначает участки кривых где выражение под корнем в формуле для частоты (5) становится отрицательным и поэтому соответствующие значения параметров не отвечают нулевым вещественным значениям собственных чисел. $\omega_1 = 1$, $a - \omega_2 = 1.05$, $b - \omega_2 = 1.3$, $c - \omega_2 = 0.95$, $c - \omega_2 = 0.7$.

мумы появились в левой части кривой, до асимптоты. Эти новые экстремумы очень мало отличаются по высоте. Кроме того, минимум оказался ниже $\gamma_{\text{кр}}^0$, а максимум не отвечает интересующему нас решению характеристического уравнения так как ему отвечает отрицательное значение под корнем в формуле для частоты (5).

Ещё одно качественное изменение ситуации происходит при дальнейшем повышении затухания β , когда появляются минимум и максимум на кривой $\gamma_{\text{кр}}^+$. Это иллюстрирует рис. 1с. Видно, что как и в предыдущем случае расстояние между минимумом и максимумом не велико. Тем не менее, если двигаться вдоль оси ϵ при γ вблизи от этих экстремумов, наблюдается интересный режим с гистерезисом, который рассматривается в разделе 4.

Если увеличить частотную расстройку $\omega_2 > \omega_1$, то картина качественно не меняется. Это иллюстрирует рис. 2b.

Если поменять знак расстройки и взять $\omega_2 < \omega_1$ картина становится иной. Как видно из рис. 2с, d, на кривой $\gamma_{\text{кр}}^+$ имеется только один минимум, а на кривой — только один максимум $\gamma_{\text{кр}}^-$. При этом когда частотная расстройка достаточно велика при увеличении β минимум перестаёт отвечать интересующему нас решению, рис. 2d. В отличие от случая, когда $\omega_2 > \omega_1$ новые экстремумы не появляются.

Кривые $\gamma_{\text{кр}}^\pm$ при расстройке $\omega_2 < \omega_1$ как на рис. 2d, показаны на рис. 1d. Качественно их структура похожа на подробно рассмотренный выше случай $\omega_2 > \omega_1$ на рис. 1a. Тем не менее картина бифуркаций, которые происходят в системе при изменении ϵ , оказывается совершенно иной. В частности, несмотря на наличие бистабильности, режим скрытых колебаний не возникает. Это обсуждается в разделе 4.

4 Бифуркационная картина: бистабильность в присутствии скрытых колебаний и в форме гистерезиса

Обратимся к случаю, показанному на рис. 1a: частотная расстройка $\omega_2 > \omega_1$, малое затухание. Будем анализировать видоизменение режимов системы (1) при движении вдоль оси ϵ с постоянным γ .

На рис. 3a, b показано поведение собственных чисел при γ взятом немного ниже минимума функции $\gamma_{\text{кр}}^+$. Видно, что в точке бифуркации, которая расположена левее асимптоты $\epsilon = 2\beta$, одна из двух комплексно сопряжённых пар собственных чисел проходит через мнимую ось и неподвижная точка стано-

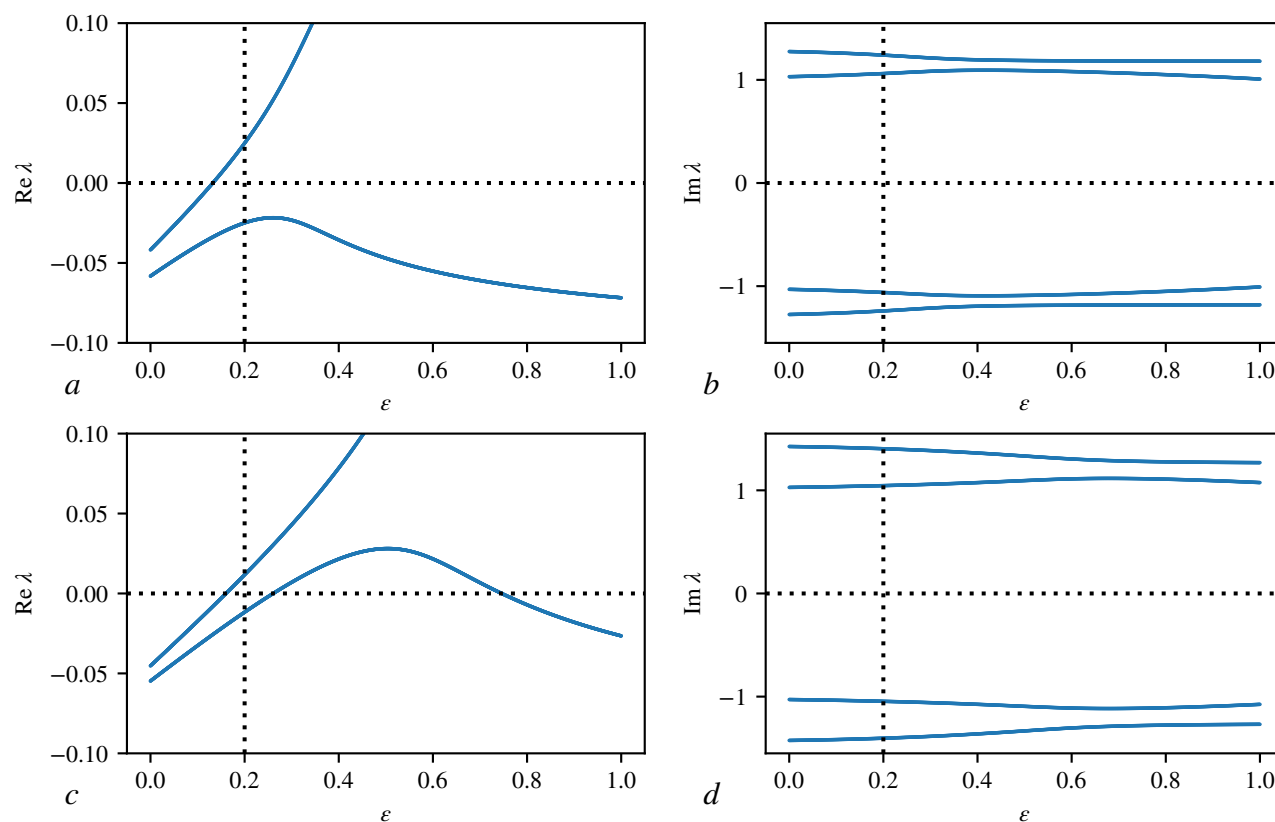


Рис. 3: Вещественная и мнимая части собственных чисел неподвижной точки, получаемых как решение уравнения (2) при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.05$, $\beta = 0.1$. $a, b - \gamma = 0.3$, $c, d - \gamma = 0.5$. Горизонтальный пунктир показывает ноль, вертикальный — асимптоту $\epsilon = 2\beta$.

вится неустойчивой. Это соответствует бифуркации Андронова—Хопфа, которая приводит к рождению предельного цикла. Других бифуркационных перестроек, связанных с изменением характера устойчивости неподвижной точки, не происходит.

На рис. 4а показана бифуркационная диаграмма, соответствующая случаю, представленному на рис. 3а,б. Эта и другие диаграммы на рис. 4 получены по методу непрерывного продолжения по параметру при помощи программы ХРРАУТ [22]. Видно что неподвижная точка теряет устойчивость в результате бифуркации Андронова—Хопфа и рождается устойчивый предельный цикл. Как ожидалось, другие перестройки характера поведения системы не обнаруживаются.

Рассмотрим теперь случай, когда мы двигаемся вдоль оси ϵ при γ выше минимума функции $\gamma_{кр}^+$. В этом случае мы ещё дважды пересекаем кривую $\gamma_{кр}^+$, см. рис. 1а. Как видно из рис. 3с,д, при этом вторая пара комплексно сопряжённых собственных чисел проходит через мнимую ось в положительную полуплоскость, а затем возвращается в отрицательную. Соответствующая этой ситуации бифуркационная диаграмма представлена на рис. 4б. Видно, что при увеличении ϵ также как и в предыдущем случае сначала неподвижная точка теряет устойчивость и рождается устойчивый предельный цикл в результате бифуркации Андронова—Хопфа. Этот цикл обозначен цифрой 1. Когда при дальнейшем увеличении ϵ мы снова пересекаем кривую критических значений $\gamma_{кр}^+$, происходит рождение ещё одного цикла, который рождается как неустойчивый. Этот цикл обозначен на рис. 4б цифрой 2. Отслеживание второго цикла методом продолжения по параметру ϵ показывает, что в некоторый момент он становится устойчивым и в системе возникает бистабильность. Далее мы наблюдаем как этот цикл сначала снова теряет устойчивость, а затем исчезает в точке, где вторая пара собственных чисел проходят через мнимую ось в обратном направлении.

Для идентификации динамики системы в режиме бистабильности мы будем вычислять периоды колебаний. Для этого мы используем подход на основе построения сечений Пуанкаре по методу Эно [23]. Сначала вычисляется минимальное и максимальное значение x_1 в установившемся режиме, затем плоскость сечения Пуанкаре задаётся на уровне среднего этих двух значений: $x_1 = (\min x_1 + \max x_1)/2$. Находя по методу Эно моменты пересечения этой плоскости в одном направлении, например всегда снизу вверх, мы запоминаем интервалы времени между этими пересечениями. Режим считается периодическим с периодом равным интервалу между похождениями плоско-

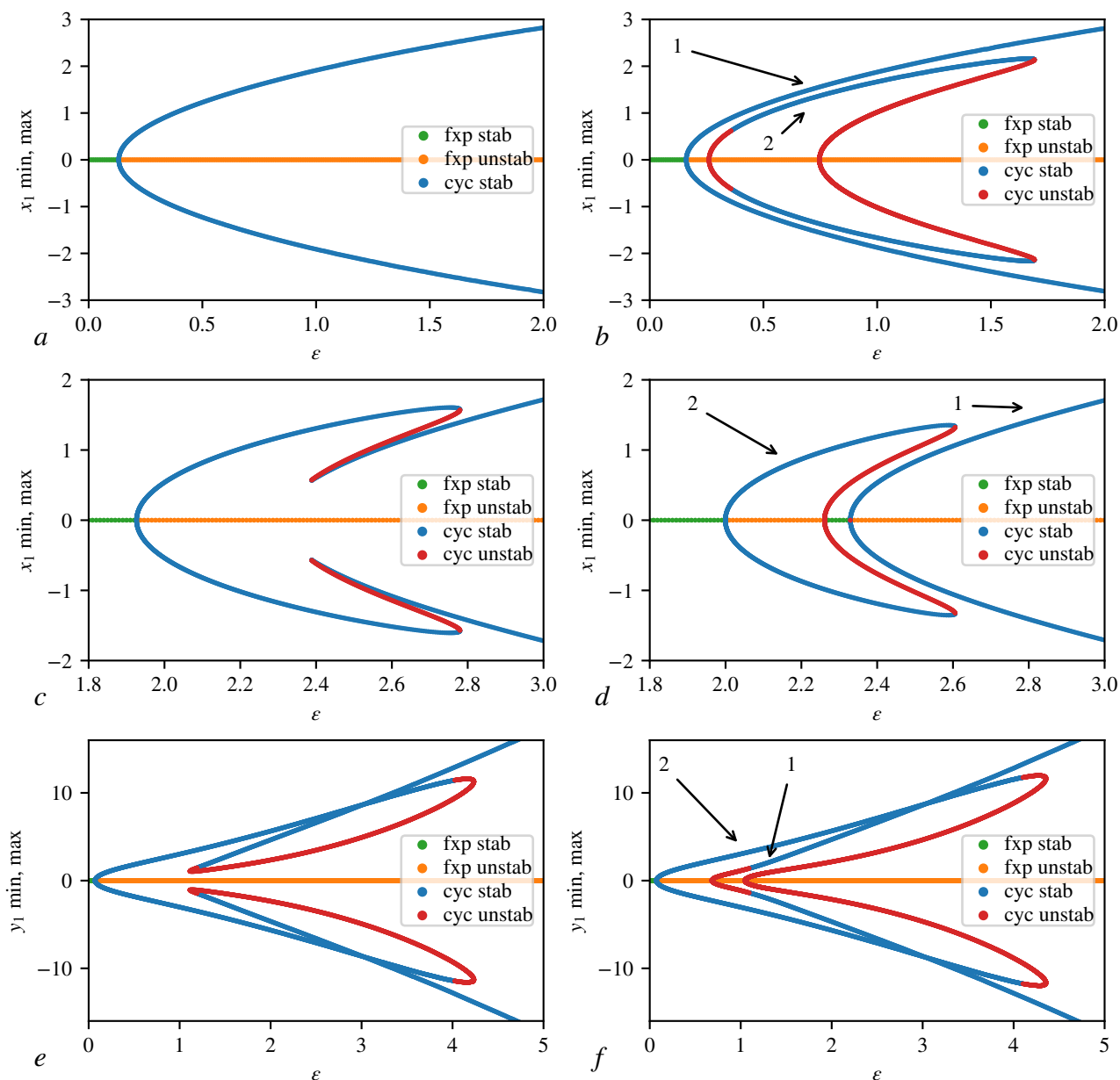


Рис. 4: Бифуркационные диаграммы системы (1). Цвета отмечают значения x_1 на диаграммах a и b и y_1 на c и d в различных режимах: «fxp stab» и «fxp unstab» — соответственно, устойчивая и неустойчивая неподвижная точка, «cyc stab», «cyc unstab» — устойчивый и неустойчивый предельные циклы. $\omega_1 = 1$. $a - \omega_2 = 1.05$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.3$, $b - \omega_2 = 1.05$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.5$, $c - \omega_2 = 1.05$, $\beta = 1.2$, $\gamma = 5.185$, $d - \omega_2 = 1.05$, $\beta = 1.2$, $\gamma = 5.3$, $e - \omega_2 = 0.7$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.49$, $f - \omega_2 = 0.7$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.51$.

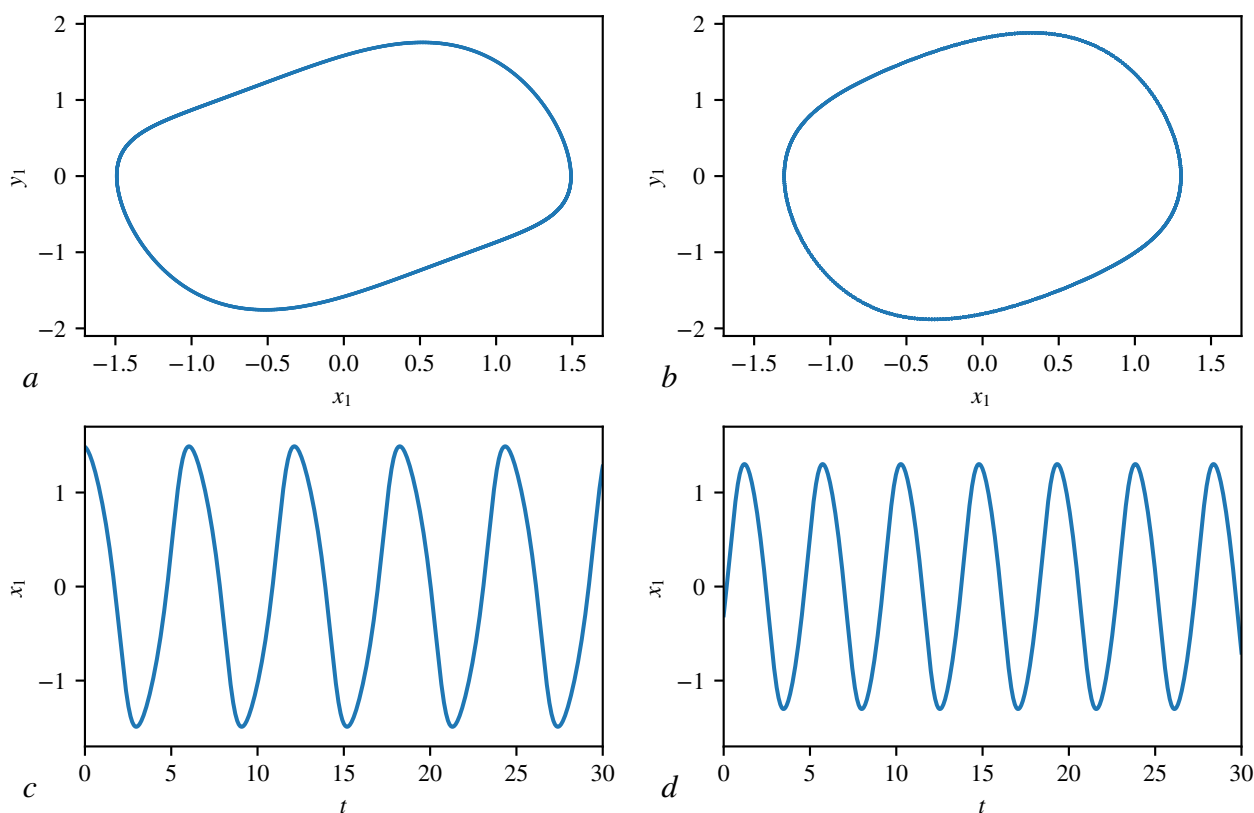


Рис. 5: Предельные циклы системы (1), полученные при старте с разных начальных условий для случай $\omega_2 > \omega_1$. a, b — проекции фазовых портретов на плоскость (x_1, y_1) , c, d — временные серии $x_1(t)$. Диаграммы a, c иллюстрируют режим 1 на рис. 4b, период $T = 6.107$, диаграммы b, d соответствуют режиму 2, период: $T = 4.530$. $\epsilon = 0.7$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.05$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.5$.

сти сечения, если получены три подряд одинаковых в пределах численной погрешности значения.

На рис. 5 показаны устойчивые предельные циклы системы (1) в режиме бистабильности, обозначенные на рис. 4b стрелкам 1 и 2. Для построения этих циклов стартовые точки траекторий задавались специальным образом: были использованы значения, вычисленные при построении бифуркационной диаграммы на рис. 4b. Рисунки 5a,c представляют цикл 1. Период этого цикла для заданного ϵ , см. подпись к рисунку, равен $T = 6.107$. Если пересчитать это в частоту $2\pi/T = 1.029$ то мы увидим, что это значение очень близко к средней собственной частоте подсистем $(\omega_1 + \omega_2)/2 = (1 + 1.05)/2 = 1.025$. Второй цикл, представленный на рис. 5b,d, соответствует режиму, помеченному на рис. 4b стрелкой 2. Этот цикл имеет другую амплитуду, существенно другой период $T = 4.530$ и, соответственно, заметно более высокую частоту $2\pi/T = 1.387$.

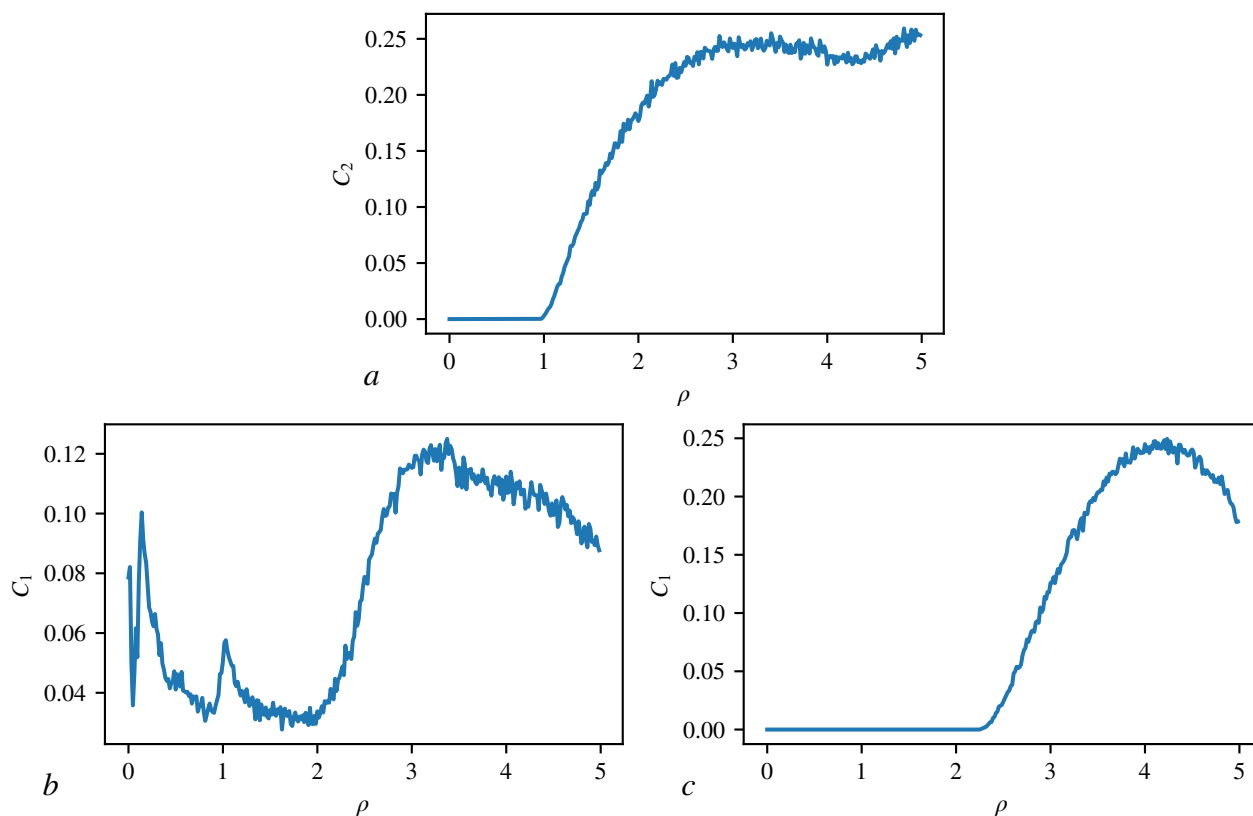


Рис. 6: Доля циклов C_1 или C_2 , на которые выходит система при запуске со случайной точки, находящейся на расстоянии ρ от неподвижной точки. $a - \epsilon = 0.7$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.05$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.5$. $b - \epsilon = 2.43$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.05$, $\beta = 1.2$, $\gamma = 5.3$. $c - \epsilon = 1.4$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0.7$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.51$.

Зная периоды циклов и, следовательно, имея возможность их идентифицировать, найдём вероятность выхода траектории на каждый из них при запуске со случайной начальной точки, см. рис. 6. Для построения рисунка мы задаём некоторое расстояние от неподвижной точки ρ , генерируем много раз случайный вектор начального состояния по модулю равный ρ , запускаем систему из этой точки и вычисляем период получившегося цикла. Далее вычисляем относительную частоту для цикла 1 или 2, см. подписи на осях, и откладываем её как функцию ρ . На рис. 6*a* показана вероятность выхода траектории на предельный цикл 2 для случая, показанного на рис. 4*b* и 5*b,d*. Видно, что стартуя вблизи от неподвижной точки система всегда выходит на цикл 1 и никогда не оказывается на цикле 2. Другим словами, неустойчивая неподвижная точка и её малая окрестность полностью попадают внутрь бассейна притяжения цикла 1. При увеличении ρ система уже может оказаться на цикле 2 но даже на достаточно больших расстояниях от неподвижной точки вероятность не превышает уровня около 0.25. Это позволяет заключить, что цикл 2 имеет сравнительно небольшой бассейн притяжения, который не включает в себя малую окрестность неподвижной точки.

Если реализовать рассмотренную ситуацию в натурном эксперименте, в подавляющем большинстве случаев мы будем наблюдать только цикл 1, так как при включении экспериментальная установка стартует из окрестностей неподвижной точки. Тем не менее имеется ещё одна возможность пронаблюдать различные режимы в эксперименте — после выхода на установившийся режим можно медленно изменять один из параметров системы. Таким образом можно получить режимы, сосуществующие при наличии в системе гистерезиса. В численном эксперименте этому соответствует счёт с наследованием. Вычисляем установившееся решение, запоминаем одну из его точек, изменяем один из параметров и вычисляем новое решение, стартуя из сохранённой точки. На рис. 9*a* показаны режимы системы при вычислении с наследованием при движении вдоль оси ϵ слева направо и справа налево. В каждой точке вычислено и отложено значение периода. Видно, что независимо от направления движения система всегда остаётся на цикле 1, который мы идентифицируем по близости его периода к собственному периоду системы $2\pi/(\omega_1 + \omega_2)/2 = 6.130$. Второй цикл с меньшим периодом никогда не наблюдается.

Таким образом, режим, отмеченный на бифуркационной диаграмме 4*b* цифрой 2, следует классифицировать как скрытый аттрактор [4, 6]. Его главный отличительный признак — невозможность наблюдения в эксперименте

без того, чтобы принять специальные меры по заданию начальной точки вдали от состояния равновесия [21]. При этом очевидно, что при наличии в натурной системе шумов возможно переключение на скрытый режим с нежелательными последствиями [5].

Рассмотрим теперь случай большого затухания, когда на кривой $\gamma_{\text{кр}}^+$ появляется дополнительные минимум и максимум левее вертикальной асимптоты, рис. 1с. На рис. 4с показана бифуркационная диаграмма при γ ниже точки минимума на кривой $\gamma_{\text{кр}}^+$, расположенного левее асимптоты. Видно что на бифуркационной кривой имеется петля гистерезиса. В пределах этой петли сосуществуют два режима устойчивых периодических колебаний, а также неустойчивый предельный цикл. При увеличении γ мы пересекаем кривую критических значений $\gamma_{\text{кр}}^+$. При этом левые края петли гистерезиса сливаются и два цикла отделяются друг от друга. На рис. 4d видно, что теперь имеются два цикла. Цифрой 1 мы обозначили тот, который сохраняется при неограниченном росте ϵ , а цифра 2 обозначает цикл, который рождается при малом ϵ , затем теряет устойчивость и исчезает. Примеры этих циклов в области где они сосуществуют показаны на рис. 7. Цикл 1 имеет более высокий период и значительно меньшую амплитуду чем цикл 2.

Особенность данной ситуации в том, что локально условия рождения обоих циклов одинаковые: левее точки бифуркации неподвижная точка устойчивая, затем она теряет устойчивость и от неё отделяется устойчивый предельный цикл. Можно предположить, что именно этим обусловлен вид кривой вероятности выхода на цикл 1 с ростом расстояния до неподвижной точки, рис. 6b. Видно, что ненулевая вероятность выхода на цикл 1 имеется на любом расстоянии от неподвижной точки. Следовательно, малая окрестность неподвижной точки пересекается с бассейнами притяжения обоих циклов. Следовательно такая система в натурном эксперименте при запуске будут случайным образом выбирать один из двух режимов.

Вычисление режимов с наследованием для данного случая показаны на рис. 9b. Видно, что эти кривые демонстрируют типичный для гистерезиса вид. Двигаясь в сторону увеличения ϵ мы наблюдаем цикл 2 до тех пор пока он не теряет устойчивость, а когда мы движемся в сторону уменьшения ϵ то наблюдаем сначала цикла 1, затем он исчезает и неподвижная точка становится устойчиво. Далее наблюдается цикл 2.

Таким образом, режим бистабильности, показанный на рис. 4с следует классифицировать как гистерезис. При этом бассейны притяжения каждого из двух сосуществующих циклов включают в себя малую окрестность непо-

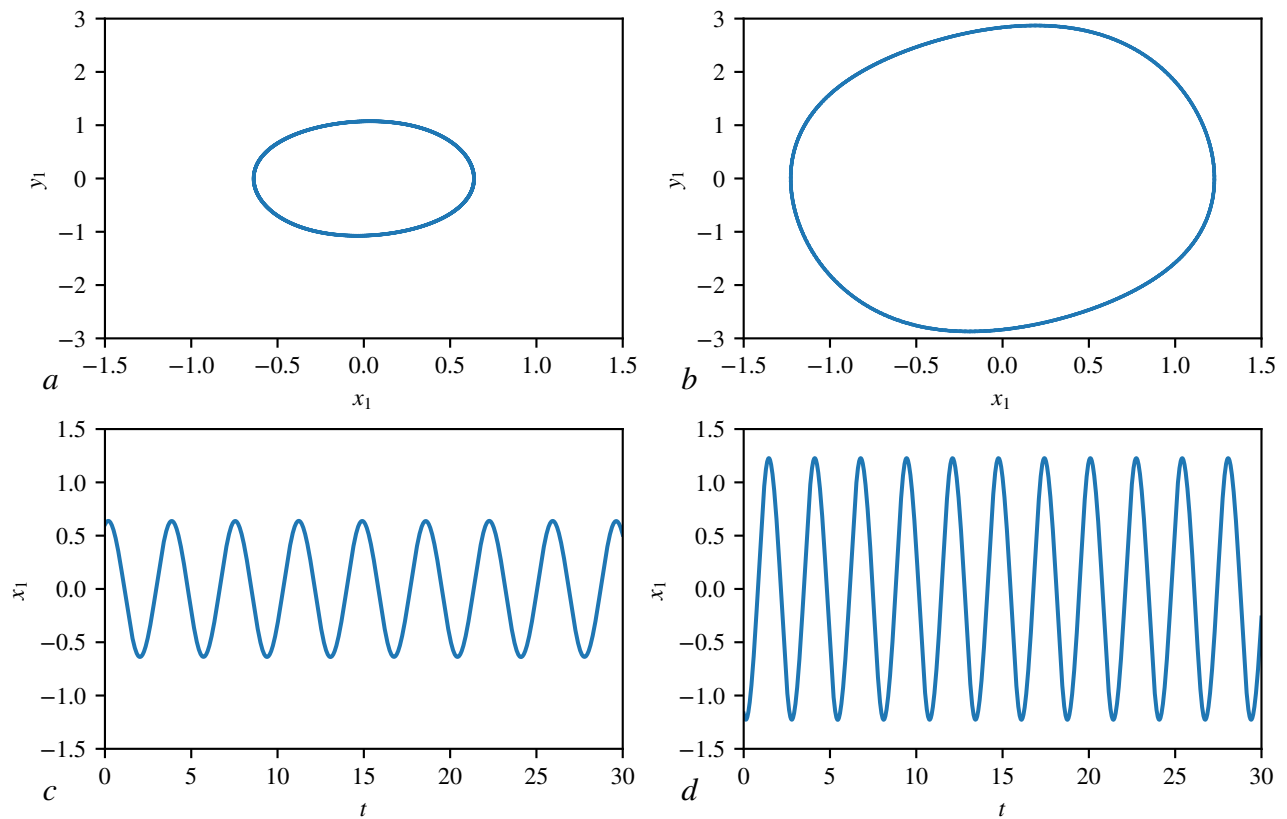


Рис. 7: Предельные циклы системы (1), полученные при старте с разных начальных условий для случай $\omega_2 > \omega_1$ и большого затухания. a, b — проекции фазовых портретов на плоскость (x_1, y_1) , c, d — временные серии $x_1(t)$. Диаграммы a, c иллюстрируют режим 1 на рис. 4b, период $T = 3.679$, диаграммы b, d соответствуют режиму 2, период: $T = 2.662$. $\epsilon = 2.43$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.05$, $\beta = 1.2$, $\gamma = 5.3$.

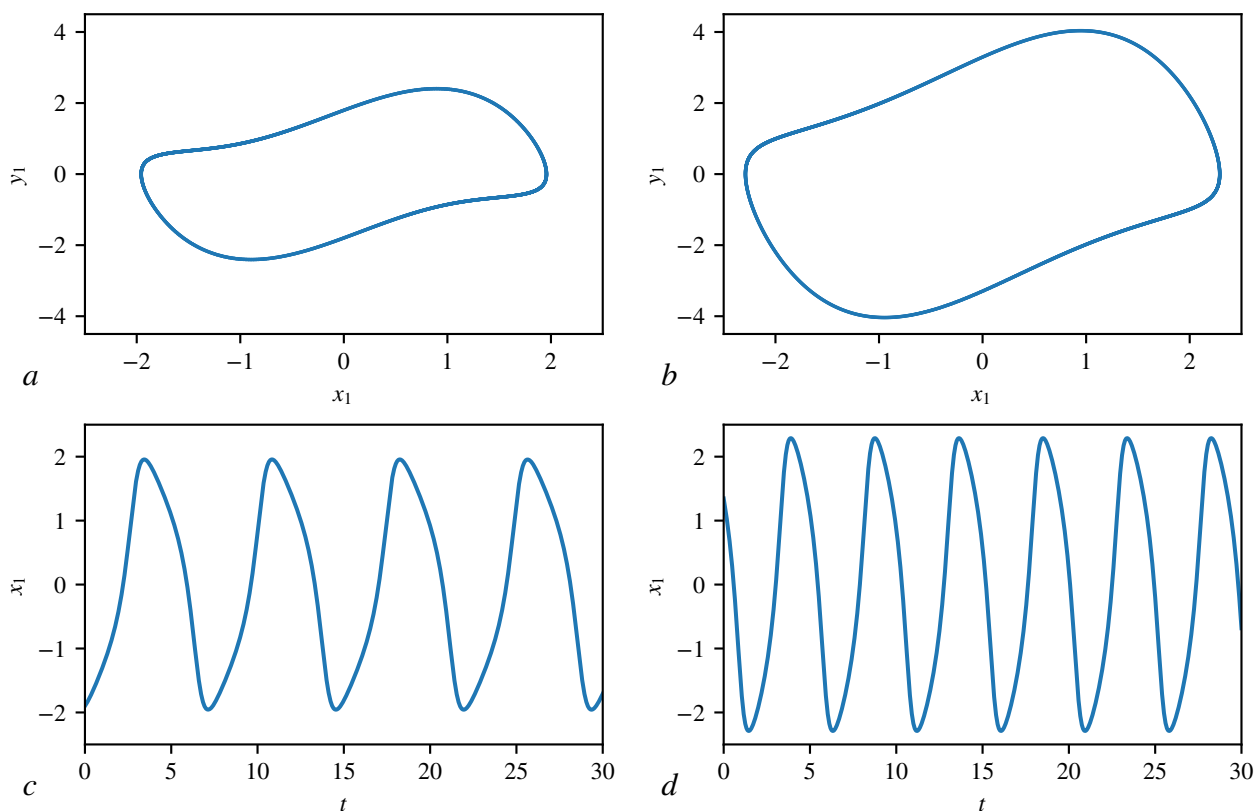


Рис. 8: Предельные циклы, иллюстрирующие бистабильность в системе (1) при $\omega_2 < \omega_1$. Диаграммы a, c соответствуют режиму 1 на рис. 4d, период $T = 7.404$, диаграммы b, d — режим 2, период $T = 4.872$. $\epsilon = 1.4$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0.7$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.51$.

движной точки и поэтому достижимы в эксперименте при простом запуске натурной системы.

Ещё один случай показан на рис. 1d. Он соответствует малому затуханию и частотной расстройке $\omega_2 < \omega_1$. Хотя качественно вид кривых на этом рисунке мало отличается от случая $\omega_2 > \omega_1$ на рис. 1a, бифуркационная картина оказывается совершенно иной. На рис. 4e показана бифуркационная диаграмма для случая когда γ немного ниже минимума на кривой $\gamma_{\text{кр}}^+$. Отметим, что на рис. 4e, f по вертикальной оси отложена y_1 для большей наглядности.

Двигаясь по параметру ϵ мы только один раз пересекаем кривую критических значений $\gamma_{\text{кр}}^+$ что соответствует бифуркации Андронова—Хопфа. В области правее асимптоты $\epsilon = 2\beta$ обнаруживается гистерезис, когда сосуществуют две устойчивые «версии» цикла и одна неустойчивая. При малых γ петля очень мала, поэтому на рис. 4e мы показали её при γ лишь немного меньше чем минимум $\gamma_{\text{кр}}^+$.

Если увеличивать γ , то в точке когда этот параметр достигает минимума

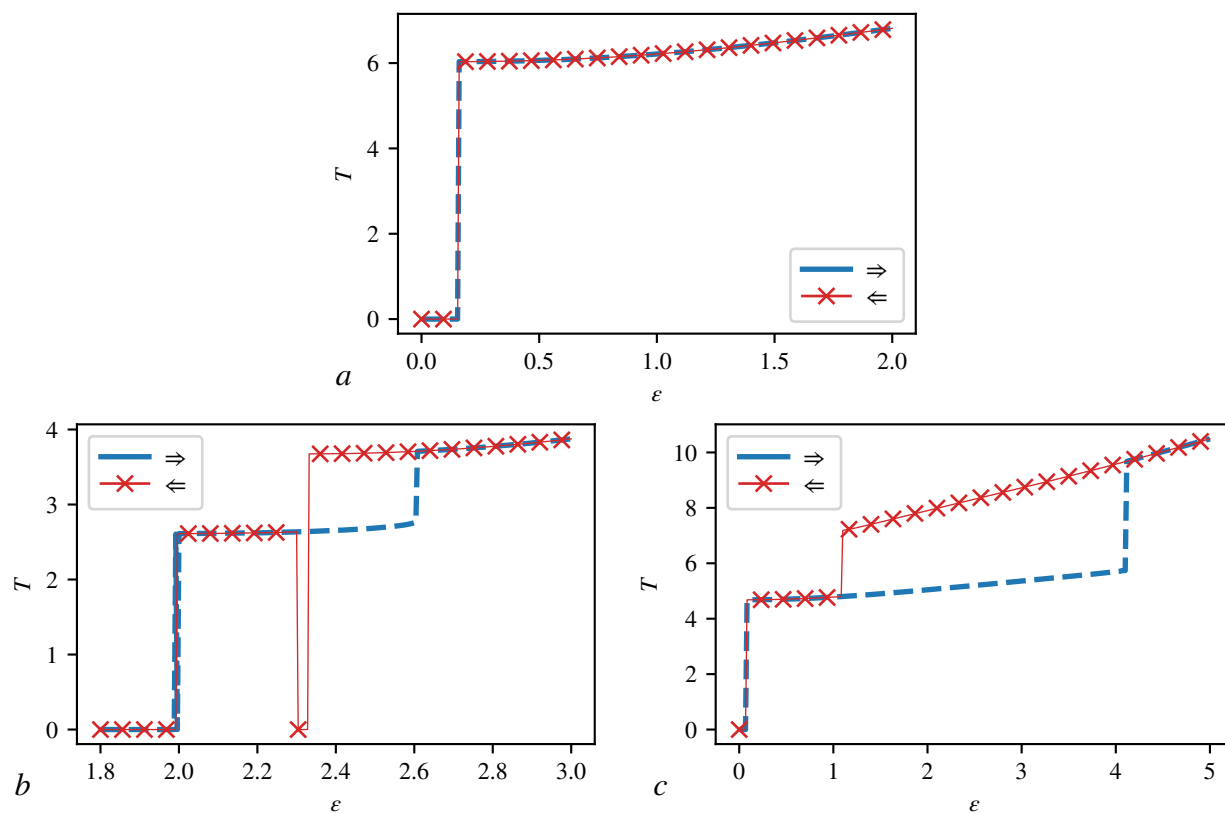


Рис. 9: Периоды циклов, наблюдаемые в системе при движении по параметру ϵ с наследованием в сторону увеличения и в сторону уменьшения, см. стрелки на легендах. $a - \omega_1 = 1, \omega_2 = 1.05, \beta = 0.1, \gamma = 0.5$. $b - \omega_1 = 1, \omega_2 = 1.05, \beta = 1.2, \gamma = 5.3$. $c - \omega_1 = 1, \omega_2 = 0.7, \beta = 0.1, \gamma = 0.51$.

на кривой $\gamma_{\text{кр}}^+$, левые оконечности верхней и нижней частей петли гистерезиса сливаются что приводит к разрыву петли и возникновения двух независимых предельных циклов обозначенных цифрами 1 и 2, рис. 4*f*. Цифрой 1 мы обозначили цикл, который сохраняется при неограниченном росте ϵ . Цикл 2 отделяется от неподвижной точки когда она теряет устойчивость. Отслеживая его мы видим, что он теряет устойчивость, на рис. 4*d* это происходит примерно при $\epsilon \approx 4.5$ и далее, возвращаясь по параметру мы наблюдаем его обратное слияние с неподвижной точкой примерно при $\epsilon \approx 1.5$ когда два её комплексно сопряжённых собственных числа проходят через мнимую ось.

Цикл 1 отделяется от неподвижной точки примерно при $\epsilon \approx 0.9$, что также сопровождается переходом через мнимую ось пары её комплексно сопряжённых собственных чисел. В момент рождения этот цикл неустойчивый но при увеличении ϵ он стабилизируется и далее остаётся устойчивым. До момента потери первым циклом устойчивости в систем имеет место бистабильность.

На рис. 8 приведены примеры циклов 1 и 2. При заданном ϵ , значение которого приведено в подписи к рисунку, цикл 1, рис. 8*a, c* имеет период $T = 7.404$ и частоту 0.849 что близко к средней собственной частоте подсистем $(\omega_1 + \omega_2)/2 = 0.85$. Цикл 2, рис. 8*b, d*, имеет период $T = 4.872$ и, соответственно, частоту 1.290, что значительно выше частоты первого цикла.

На рис. 6*c* показана вероятность выхода на цикл 1 в зависимости от расстояния начальной точки до неподвижной точки ρ . Видно, что стартовав вблизи от неподвижной точки система выходит только на цикл 2. Достижение цикла 1 оказывается возможным только при достаточно большом ρ . Это значит, что также как и в случае скрытых колебаний, представленном на рис. 6*a*, малая окрестность неподвижной точки не имеет пересечения с бассейном притяжения цикла 1.

Однако данный режим не может быть классифицирован как скрытые колебания. Как видно из рис. 9*c* при движении по параметру с наследованием мы можем пронаблюдать как цикл 1 так и 2. Таким образом, несмотря на то, что цикл 1 нельзя пронаблюдать непосредственно стартуя с произвольных начальных условий вблизи от неподвижной точки, этот режим следует классифицировать не как скрытый, а отнести его к случаю гистерезиса.

5 Заключение

В этой работе мы рассмотрели систему, состоящую из осциллятора Ван дер Поля, связанного пассивным контуром. Для этой системы мы построили бифуркационную диаграмму и исследовали режимы бистабильности, в которых сосуществуют два устойчивых предельных цикла. Было обнаружено, что бистабильность может быть двух типов.

Наиболее интересный обнаруженный режим — бистабильность в присутствии скрытых колебаний. В этом режиме один из сосуществующих предельных циклов рождается по тому же сценарию как и в одиночном осцилляторе Ван дер Поля: при увеличении параметра ϵ , отвечающего за подкачку в систему энергии, пара комплексно сопряжённых собственных чисел неподвижной точки проходит через мнимую ось в результате чего происходит суперкритической бифуркации Андронова—Хопфа. Малая окрестность ставшей неустойчивой неподвижной точки остаётся в бассейне притяжения этого цикла так что старт из произвольной начальной точки в окрестности неподвижной точки всегда выводит систему на этот цикл. Это соответствует типичной для эксперимента ситуации когда натурная система после включения выходит на режим из окрестности неподвижной точки. Однако кроме этого цикла имеется ещё один скрытый предельный цикл. Он рождается когда вторая пара комплексно сопряжённых собственных чисел неподвижной точки проходит через мнимую ось. Сразу после появления этот цикл неустойчивый и стабилизируется при увеличении параметра ϵ . Существует диапазон по параметру, в котором устойчивый скрытый цикл сосуществует с основным, и не существует области параметров в которой бы устойчивый скрытый цикл был бы единственным устойчивым режимом системы. При этом бассейн притяжения этого цикла достаточно мал и расположен далеко от неподвижной точки. Поэтому на этот режим система может попасть только случайно, в результате шумового или иного воздействия на основной цикл, что с очевидностью не является желательным и ожидаемым поведением для натуральных систем.

Другой тип обнаруженный бистабильности реализуется по типу гистерезиса. При некоторых значениях параметров имеется один устойчивый цикл, при других второй и имеется область, где эти циклы сосуществуют. Возможна ситуация когда в области сосуществования малая окрестность неустойчивой неподвижной точки имеет пересечения с бассейнами притяжения обоих циклов, так что при старте система случайным образом выбирает один из двух режимов. Также обнаружена ситуация в которой малая окрестность непо-

движной точки принадлежит бассейну только одного цикла. В некоторой степени это напоминает случай скрытых колебаний — стартуя около неподвижной точки система никогда не сможет попасть на второй цикл. Тем не менее вследствие гистерезиса на второй цикл система может попасть при других значениях параметров, которые затем можно плавно подстроить чтобы вывести систему в область бистабильности на нужный режим.

Описанные закономерности поведения автогенератора с пассивной нагрузкой имеют достаточно общий характер, так как получены на примере канонических моделей, к которым сводятся многие натурные системы. Автоколебательное поведение можно достаточно часто встретить как в естественных системах, так и в инженерных разработках. При этом модель такого поведения в виде чисто автоколебательной системы по типу осциллятора Ван дер Поля — это скорее идеализация. В реальности подсистема, совершающая автоколебания, скорее всего будет взаимодействовать с пассивными подсистемами, характеризующимися некоторой собственной частотой колебаний и диссипацией энергии. В качестве иллюстрации этого можно указать метроном на слабо закреплённой опоре или радиофизический генератор с нагрузкой в виде звукового динамика. О возможном появлении бистабильности в такой системе известно уже достаточно давно. В настоящей работе показано, что бистабильность может реализоваться в виде сосуществования самовозбуждающегося и скрытого предельных циклов. Знание о наличии ещё одного режима, который невозможно пронаблюдать в эксперименте, если специальным образом не подготовить установку, крайне важно с точки зрения разработки инженерных решений. Это может предотвратить развитие не предусмотренного поведения изделия. С другой стороны, наличие скрытого режима может иметь практическую пользу. Достаточно типично, когда бассейны притяжения разных режимов находятся вблизи от неподвижной точки и поэтому система при включении случайным образом выбирает один из двух типов поведения. Бистабильность со скрытым аттрактором даёт полностью контролируемую ситуацию: в момент включения система всегда выходит на один и тот же режим, а переключение на другой осуществляется только при воздействии определённой амплитуды. Это свойство может быть полезным, например, в схемах модуляции для кодирования бинарного сигнала.

Вклад соавторов в работу: А. А. Тучин и А. В. Купцова — исследование устойчивости в линейном приближении (разделы 2 и 3), П. В. Купцов — бифуркационный анализ (раздел 4). Работа П. В. Купцова выполнена в рамках госзадания СФИРЭ им. В. А. Котельникова РАН.

Список литературы

- [1] van der Pol B. On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1922. Т. 43. № 256. С. 700–719.
- [2] Андронов А. А., Витт А. А. К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы // Журнал технической физики. 1934. Т. 4. № 1. С. 122–143.
- [3] Astakhov O. V., Astakhov S. V., Krakhovskaya N. S. и др. The emergence of multistability and chaos in a two-mode van der Pol generator versus different connection types of linear oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2018. — 06. Т. 28. № 6. С. 063118.
- [4] Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert–Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2013. Т. 23. № 01. С. 1330002.
- [5] Кузнецов Н. В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // Известия РАН. Теория и Системы управления. 2020. № 5. С. 5–27.
- [6] Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T. и др. Hidden attractors in dynamical systems // Physics Reports. 2016. Т. 637. С. 1–50.
- [7] Jafari S., Sprott J. C., Nazarimehr F. Recent new examples of hidden attractors // The European Physical Journal Special Topics. 2015. Т. 224. № 8. С. 1469–1476.
- [8] Буркин И. М. Метод "перехода в пространство производных". 40 лет эволюции // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2015. № 3. С. 51–93.
- [9] Prasad A. Existence of perpetual points in nonlinear dynamical systems and its applications // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2015. Т. 25. № 02. С. 1530005.
- [10] Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Киселёва М. А., Мокаев Р. Н. Глобальные задачи дифференциальных включений: проблемы Калмана и Вышнеградского, цепи Чуа // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 4. С. 1–52.

- [11] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Mokaev T. N. и др. Finite-time Lyapunov dimension and hidden attractor of the Rabinovich system // *Nonlinear Dynamics*. 2018. Т. 92. № 2. С. 267–285.
- [12] Brezetskyi S., Dudkowski D., Kapitaniak T. Rare and hidden attractors in Van der Pol-Duffing oscillators // *The European Physical Journal Special Topics*. 2015. Т. 224. № 8. С. 1459–1467.
- [13] Pham V.-T., Vaidyanathan S., Volos C., Kapitaniak T. *Nonlinear dynamical systems with self-excited and hidden attractors*. Springer, 2018. Т. 133.
- [14] Kuznetsov N. V., Mokaev T. N., Kuznetsova O. A., Kudryashova E. V. The Lorenz system: hidden boundary of practical stability and the Lyapunov dimension // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Т. 102. № 2. С. 713–732.
- [15] Андриевский Б. Р., Кузнецов Н. В., Кудряшова Е. В., Кузнецова О. А. Крутильно-изгибный флаттер крыла: математические модели, исследование и предотвращение. Обзор // *Дифференциальные уравнения и процессы управления*. 2021. № 4. С. 116–191.
- [16] Paul Asir M., Prasad A., Kuznetsov N. V., Shrimali M. D. Chimera states in a class of hidden oscillatory networks // *Nonlinear Dynamics*. 2021. Т. 104. № 2. С. 1645–1655.
- [17] Matouk A. E., Abdelhameed T. N., Almutairi D. K. и др. Existence of Self-Excited and Hidden Attractors in the Modified Autonomous Van Der Pol-Duffing Systems // *Mathematics*. 2023. Т. 11. № 3.
- [18] Stankevich N. V., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Chua L. O. Scenario of the Birth of Hidden Attractors in the Chua Circuit // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2017. Т. 27. № 12. С. 1730038.
- [19] Danca M.-F., Kuznetsov N. Hidden Strange Nonchaotic Attractors // *Mathematics*. 2021. Т. 9. № 6.
- [20] Wang N., Zhang G., Kuznetsov N., Bao H. Hidden attractors and multistability in a modified Chua's circuit // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2021. Т. 92. С. 105494.
- [21] Kuznetsov N., Mokaev T., Ponomarenko V. и др. Hidden attractors in Chua circuit: mathematical theory meets physical experiments // *Nonlinear Dynamics*. 2023. Т. 111. № 6. С. 5859–5887.

- [22] Ermentrout B. Simulating, analyzing, and animating dynamical systems: A guide to XPPAUT for researchers and students. Software, Environments and Tools, Series Number 14. SIAM, Philadelphia, 2002. C. 204. ISBN: 0898715067.
- [23] Henon M. On the numerical computation of Poincaré maps // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1982. Т. 5. № 2. С. 412–414.

Hidden oscillations and bistability in a system of van der Pol oscillator with passive load

A. A. Tuchin^{1,‡}, A. V. Kuptsova^{1,†}, P. V. Kuptsov^{2,1,*}

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

²Kotelnikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, Saratov Branch

*kupav@mail.ru, †anna.kuptsova@gmail.com, ‡artemtych@gmail.com

Abstract. This study considers a Van der Pol oscillator with a passive load. It is demonstrated that this system can exhibit a hidden attractor in the form of a stable limit cycle. Furthermore, the study identifies and analyses various modes of bistability in this system, including the coexistence of self-excited and hidden limit cycles, as well as bistability of two self-excited limit cycles exhibiting hysteresis behavior.

Keywords: two-mode van der Pol oscillator, bifurcation analysis, hidden attractor, self-excited attractor, fixed point.