ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2025
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Интегро-дифференциальные системы

О фредгольмовости граничных задач для уравнения Коши-Римана когда условия Карлемана не имеют место

Зейналов Р.М.

Азербайджанский Технический Университет,
Институт Систем Управления Министерства
Науки и Образования Азербайджанской Республики

raminz.math@gmail.com

Аннотация. Излагаемая работа посвящена исследованию решения граничных задач для уравнения Коши-Римана с нелокальными граничными условиями. В рассматриваемом случае условия Карлемана не имеют место, т.е. на границе одновременно движутся не менее двух точек, которые следуют друг за другом. В этом случае, используя фундаментальное решение рассматриваемого уравнения, определяется основное соотношение, которое состоит из двух частей. Первая часть дает произвольное решение уравнения Коши-Римана, определенное в области $D \subset R^2$, а вторая часть дает необходимые условия разрешимости граничных задач. В отличие от обыкновенного дифференциального уравнения здесь необходимые условия содержат глобальные члены, т.е. интегралы по границам. В эти условия входят сингулярные интегралы, которые в общем случае регуляризируются с помощью граничного условия, и, таким образом, полученные регулярные выражения вместе с граничными условиями определяют фредгольмовость поставленной задачи.

Ключевые слова: Условия Карлемана, основные соотношения, необходимые условия, сингулярность, регуляризация.

1. Введение

Для уравнения Коши-Римана были исследованы многозначные граничные задачи [1]-[3]. Как известно, решением уравнения Лапласа является гармоническая функция, а решением уравнения Коши-Римана – аналитическая функция. Для уравнения Коши-Римана рассмотрены граничные задачи с нелокальными граничными условиями в различных областях, а именно: в областях, выпуклых по направлению x_2, в единичном квадрате, в прямоугольнике и др. Далее, проводя дискретизацию задач, было исследовано численное решение граничных задач [4]-[6]. Заметим, что условия Карлемана характеризуются следующим образом: "Если на границе одновременно двигается не менее двух точек, тогда соседние точки или отходят от одной граничной точки, или же приближаются к одной граничной точке". В противном случае, т.е. когда на границе соседние точки следуют друг за другом, условия Карлемана не имеют место.

Мы показали, что если для уравнения Коши-Римана условия Карлемана не имеют место, тогда эта задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода, и если условия Карлемана справедливы, то граничная задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [6].

2. Постановка задачи и ее решение

Рассмотрим следующую граничную задачу:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}+i\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}=0, \qquad x=(x_1,x_2)\in D\subset R^2, \tag{1}$$

$$\alpha_1(t)u\big(t,\gamma_1(t)\big)+\alpha_2(t)u\big(a_1+b_1-t_1,\gamma_2(a_1+b_1-t)\big)=\varphi(t), t\in[a_1,b_1], \tag{2}$$

где $i=\sqrt{-1}$, D – ограниченная плоская область, выпуклая по направлению x_2, $\alpha_1(t),\alpha_2(t)$ и $\varphi(t)$ - заданные непрерывные функции. Г – граница области D является линией Ляпунова. При проектировании области D на ось x_1, параллельно к x_2 граница Г разбивается на две части, Γ_1 и Γ_2. Уравнения этих линий $x_2=\gamma_k(x_1), k=1,2;$ $x_1\in[a_1,b_1]\subset\mathbb{R}.$ Граничное условие (2) характеризуется тем, что движущиеся точки на границе следуют друг за другом.

Известно, что фундаментальные решения уравнения (1) имеют вид [7]:

$$U(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}, \tag{3}$$

Умножая уравнение (1) на фундаментальное решение (3) и интегрируя по области D, имеем:

$$0=\int\limits_D\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}U(x-\xi)dx+i\int\limits_D\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}U(x-\xi)dx.$$

Применяя формулу Остроградского-Гаусса, т.е. произведя интегрирование по частям, имеем:

$$0=\int\limits_\Gamma u(x)U(x-\xi)\cos(\nu,x_2)\,dx-$$

$$-\int\limits_D u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}dx+i\int\limits_\Gamma u(x)U(x-\xi)\cos(\nu,x_1)\,dx-$$

$$-i\int_D u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}dx = \int_\Gamma u(x)U(x-\xi)[\cos(\nu,x_2)+icos(\nu,x_1)]dx -$$

$$-\int_D u(x)\left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}+i\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\right]dx =$$

$$=\int_\Gamma u(x)U(x-\xi)[\cos(\nu,x_2)+icos(\nu,x_1)]dx-\big(\delta(x-\xi),u(x)\big),$$

где через ν обозначена внешняя нормаль к границе Γ области D, $\delta(x)$ −сингулярная обобщенная функция.

Учитывая свойства дельта функции Дирака, получаем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{u(x)[\cos(\nu,x_2)+icos(\nu,x_1)]}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}dx=\begin{cases}u(\xi), & \xi\in D,\\ \frac{1}{2}u(\xi), & \xi\in\Gamma.\end{cases} \tag{4}$$

Как видно из (4), основное соотношение состоит из двух частей. Первая часть, когда $\xi\in D$, дает произвольное решение уравнения (1), а вторая часть, когда $\xi\in\Gamma$, дает необходимые условия.

Из основного соотношения (4) имеем:

$$\frac{1}{2}u\big(\xi_1,\gamma_1(\xi_1)\big)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{u(x)[\cos(\nu,x_2)+icos(\nu,x_1)]}{x_2-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{u(x)[\cos(\nu,x_2)+icos(\nu,x_1)]}{x_2-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}dx;$$

$$u\big(\xi_1,\gamma_1(\xi_1)\big)=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u\big(x_1,\gamma_1(x_1)\big)[-\cos(x_1,\tau)+isin(x_1,\tau)]}{\gamma_1(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\frac{dx_1}{cos(x_1,\tau)}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u\big(x_1,\gamma_2(x_1)\big)[\cos(x_1,\tau)-isin(x_1,\tau)]}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\frac{dx_1}{cos(x_1,\tau)}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u\big(x_1,\gamma_1(x_1)\big)[1-i\gamma_1'(x_1)]}{[\gamma_1'(\sigma_1(x_1-\xi_1))+i](x_1-\xi_1)}dx_1+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u\big(x_1,\gamma_2(x_1)\big)[1-i\gamma_2'(x_1)]}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}dx_1, \tag{5}$$

где τ - касательные в направлениях как в Γ_1, так и в Γ_2, $\sigma_1\in(x_1,\xi_1)$,

$$\frac{1}{2}u\big(\xi_1,\gamma_2(\xi_1)\big)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{u(x)[\cos(\nu,x_2)+icos(\nu,x_1)]}{x_2-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{u(x)[\cos(\nu,x_2)+icos(\nu,x_1)]}{x_2-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}dx;$$

$$u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))[-\cos(x_1,\tau)+sin(x_1,\tau)]}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\frac{dx_1}{cos(x_1,\tau)}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))[\cos(x_1,\tau)-isin(x_1,\tau)]}{\gamma_2(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\frac{dx_1}{cos(x_1,\tau)}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))[1-i\gamma_1'(x_1)]}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}dx_1+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))[1-i\gamma_2'(x_1)]}{[\gamma_2'(\sigma_2(x_1-\xi_1))+i](x_1-\xi_1)}dx_1. \qquad (6)$$

Исходя из граничного условия (2), полученные необходимые условия (5) и (6) представим в виде:

$$u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1-\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\gamma_1'(\sigma_1)+i}\frac{\gamma_1'(\sigma_1)-\gamma_1'(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}[1-i\gamma_2'(x_1)]dx_1, \qquad (7)$$

$$u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}[1-i\gamma_1'(x_1)]dx_1-$$

$$-\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1+\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{\gamma_2'(\sigma_2)+i}\frac{\gamma_2'(\sigma_2)-\gamma_2'(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1,$$

или

$$u(a_1+b_1-\xi_1,\gamma_2(a_1+b_1-\xi_1)=\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(a_1+b_1-x_1,\gamma_2(a_1+b_1-x_1\ ))}{x_1-\xi_1}dx_1-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}[1-i\gamma_1'(x_1)]dx_1+$$

$$+\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{\gamma_2'(\sigma_2)+i}\frac{\gamma_2'(\sigma_2)-\gamma_2'(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1. \qquad (8)$$

Учитывая (7), (8) и граничное условие, создадим следующую линейную комбинацию [8]:

$$\alpha_1(\xi_1)u\big(\xi_1,\gamma_1(\xi_1)\big)+\alpha_2(\xi_1)u\big(a_1+b_1-\xi,\gamma_2(a_1+b_1-\xi)\big)=$$

$$=\frac{i}{\pi}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\alpha_1(\xi_1)u\big(x_1,\gamma_1(x_1)\big)+\alpha_2(\xi_1)u\big(a_1+b_1-x_1,\gamma_2(a_1+b_1-x_1)\big)}{x_1-\xi_1}dx_1+$$

$$+\cdots=\frac{i}{\pi}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\big[\big(\alpha_1(\xi_1)-\alpha_1(x_1)\big)+\alpha_1(x_1)\big]u\big(x_1,\gamma_1(x_1)\big)+}{x_1-\xi_1}$$

$$\frac{+\big[\big(\alpha_2(\xi_1)-\alpha_2(x_1)\big)+\alpha_2(x_1)\big]u\big(a_1+b_1-x_1,\gamma_2(a_1+b_1-x_1)\big)}{x_1-\xi_1}dx_1+$$

$$+\cdots=\frac{i}{\pi}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\alpha_1(x_1)u\big(x_1,\gamma_1(x_1)\big)+\alpha_2(x_1)u\big(a_1+b_1-x_1,\gamma_2(a_1+b_1-x_1)\big)}{x_1-\xi_1}dx_1+ \tag{9}$$

$$+\cdots=\frac{i}{\pi}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\varphi(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1+\cdots$$

где через (…) обозначена сумма несингулярных слагаемых.

Так как левая часть (9) также совпадает с левой частью граничного условия (2), то выражение (9) нам ничего нового не даст. Причиной этого является то, что для поставленной граничной задачи условия Карлемана не имеют место. Поэтому для фредгольмовости поставленной задачи нужны дополнительные условия. Приведем одно из этих условий:

$$u\big(x_1,\gamma_1(x_1)\big)=\varphi_1(x_1),\qquad x_1\in[a_1,b_1], \tag{10}$$

Тогда из граничного условия (2) при условии

$$\alpha_2(x_1)\neq 0, \tag{11}$$

получим:

$$u\big(a_1+b_1-x_1,\gamma_2(a_1+b_1-x_1)\big)=\frac{\varphi(x_1)-\alpha_1(x_1)\varphi_1(x_1)}{\alpha_2(x_1)}. \tag{12}$$

Таким образом, не фредгольмовость, а аналитический вид решения задачи (1), (2), (10) получается из первого выражения основного соотношения (4) в виде

$$u(\xi)=\frac{-1}{2\pi}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\varphi_1(x_1)[1-\gamma_1'(x_1)]dx_1}{\gamma_1(x_1)-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\varphi(a_1+b_1-x_1)-\alpha(a_1+b_1-x_1)\varphi_1(a_1+b_1-x_1)}{\alpha_2(a_1+b_1-x_1)}\cdot\frac{1-i\gamma_2'(x_1)}{\gamma_2(x_1)-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}dx_1 \qquad (13)$$

Этим установлено следующие утверждение:

Теорема: Пусть D – ограниченная плоская область, выпуклая по направлению x_2, граница Г – линия Ляпунова, тогда граничная задача (1), (2), (10) имеет единственное решение представленное в виде (13), где $\alpha_1(x_1), \alpha_2(x_1), \varphi(x_1)$ и $\varphi_1(x_1)$ заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условию (11).

3. Литература

[1] Aliyev N, Fatemi M, Jahanshahi M. Analytic solution for the Cauchy-Riemann equation with non-local boundary conditions in the first semi-quarter // Quarterly journal of science of Tarbiat Muallem University. Vol.9. №1. Winter 2010. Iran. P. 29–40.

[2] Zeynalov R.M., Aliev N.A. Determining a spectrum of a boundary value problem // Transactions of National Academy of sciences of Azerbaijan series of physical-technical and mathematical sciences. 2019. Vol.39. No 1. P.170–177.

[3] Зейналов Р. М., Алиев Н. А. Задача Зарембы-Стеклова для уравнения Коши-Римана // Вестник Дагестанского Государственного Университета. 2015. Том 30, Вып.6. P.74–79.

[4] Зейналов Р.М. Исследование одной граничной задачи для интегро-дифференциального уравнения с главной частью Коши-Римана // Вестник Бурятского государственного университета Математика, информатика. 2023. №1. С. 3–10. DOI: 10.18101/2304-5728-2023-1-3-10

[5] Aliyev F.A., Aliyev N.A., Hasanov K.G., Guliyev A.P., Turarov A.K., Isayeva G.V., Numerical-analytical method for solving of the first order partial quasi-linear equations // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, Baku, Azerbaijan, 2015, Vol. 6. №. 2. P. 158–164.

[6] Aliev N.A., Mustafayeva Y.Y., Murtuzayeva S.M., The influence of the Carleman condition on the fredholm property of the boundary value problem for Cauchy-Riemann equation // Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Baku, Azerbaijan. 2012. Vol.1. No.2. P.153–162.

[7] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

[8] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ГИФМЛ, 1961. 400 с.

On Fredholm boundary value problems for the Cauchy-Riemann equation Cauchy-Riemann equation when the Carleman conditions do not hold

Zeynalov R.M.

Azerbaijan Technical University,
Institute of Control Systems of the Ministry of
Science and Education of the Republic of Azerbaijan

raminz.math@gmail.com

Abstract. This paper is devoted to the study of the solution of boundary value problems for the Cauchy-Riemann equation with nonlocal boundary conditions. In the considered case, the Carleman conditions do not take place, i.e. at least two points that follow each other move simultaneously on the boundary. In this case, using the fundamental solution of the equation under consideration, the basic relation is determined, which consists of two parts. The first part gives an arbitrary solution of the Cauchy-Riemann equation defined in the domain $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{R}^{2}$ and the second part gives the necessary conditions for the solvability of the boundary problems. Unlike the ordinary differential equation, here the necessary conditions contain global terms, i.e., integrals over the boundaries. These conditions include singular integrals, which in general case are regularized by means of the boundary condition, and thus the obtained regular expressions together with the boundary conditions determine the Fredholm character of the problem.

Keywords: Carleman conditions, basic relations, necessary conditions, singularity, regularization.