

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2025
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172
<http://diffjournal.spbu.ru/>
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

О наибо́лестрейших малых перемещениях платформы с перевернутыми маятниками

Каюмов О.Р.^{1,*}

¹Филиал ОмГПУ в г. Таре

* Oleg_Kayumov@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача оптимального по быстродействию перемещения платформы, движущейся поступательно вдоль горизонтальной прямой и несущей n перевернутых маятников, причем в процессе движения маятники не должны проходить через нижние вертикальные положения. Единственная управляющая сила приложена к платформе и ограничена по модулю, трение отсутствует. Система переводится из одного неустойчивого состояния покоя в аналогичное другое на заданное расстояние. Оно предполагается малым в той мере, которая позволяет использовать линеаризованные уравнения движения. Исследуется эволюция функций оптимального управления в зависимости от величины перемещения платформы. Предлагается общий подход к построению наглядной диаграммы, отражающей такую эволюцию. Показано, что при нечетном количестве перевернутых маятников движение платформы начинается с реверса, а при четном – нет. Найденные для линейной системы режимы оптимального управления применены к задаче малого перемещения платформы с двумя перевернутыми маятниками в нелинейной постановке.

Ключевые слова: задача оптимального быстродействия, платформа с перевернутыми маятниками.

Введение

Рассмотрим плоскую систему n маятников (рис. 1), точки подвеса которых находятся на твердом теле массы m_0 , совершающем поступательное движение вдоль горизонтальной оси Ox . Действующая на него управляющая сила u ограничена по модулю наперед заданной величиной a . С платформой соединены (цилиндрическими шарнирами) n невесомых стержней длинами

l_1, l_2, \dots, l_n с сосредоточенными массами m_1, m_2, \dots, m_n на концах. Трение в шарнирах, а также между платформой и опорной плоскостью отсутствует.

В начальный момент времени платформа покоится, а все маятники находятся в неустойчивых вертикальных состояниях равновесия.

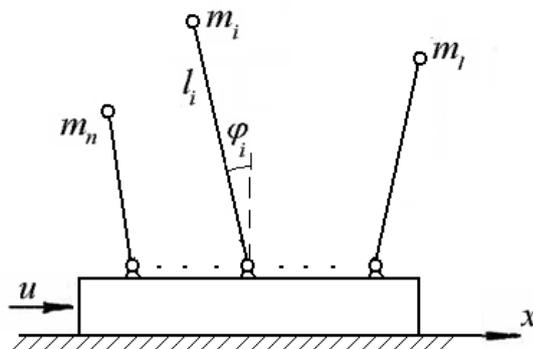


Рис. 1. Платформа с перевернутыми маятниками

В процессе перемещения платформы маятники могут совершать колебания в вертикальной плоскости, не препятствуя друг другу благодаря конструкции, но не должны «упасть» (т.е. пройти через нижнее устойчивое вертикальное положение). Такая система является упрощенной моделью для описания, например, малых перемещений платформы с высотными кранами. Задачи оптимального по быстродействию перемещения механизмов могут рассматриваться на основе принципа максимума Понтрягина [1] и в разных постановках формулировались еще в [2], однако примеров оптимального поведения таких систем найдено мало. Известную трудность представляет превышение числа степеней свободы над количеством управляющих воздействий, т.е. дефицит управлений. В разных постановках задачи позиционирования и стабилизации перевернутого маятника на несущем основании рассматривались, например, в [3-7]. В настоящей работе речь идет о платформе с несколькими перевернутыми маятниками. Используются подходы, предложенные автором в [8-10] для аналогичной задачи перемещения платформы с пружинными осцилляторами.

1. Уравнения движения и управляемость

Обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ углы, отмеряемые стержнями против часовой стрелки от состояний неустойчивого равновесия, $M = \sum_{i=0}^n m_i$ – массу всей системы, q_0 – координату платформы. Конфигурация системы задается вектором $\mathbf{q} = (q_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$. Далее ограничимся рассмотрением малых перемещений платформы, полагая и углы отклонений стержней от вертикали малыми в той степени, когда кинетическую и потенциальную энергии системы допустимо записать в квадратичном приближении. Тогда уравнения движения примут линейный вид

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\mathbf{q} = \mathbf{b}u, \quad |u| \leq a, \quad (1.1)$$

где $B = -g \text{diag}(0, m_1 l_1, m_2 l_2, \dots, m_n l_n)$ – матрица потенциальной энергии, $\mathbf{b} = (1, 0, \dots, 0)^T$. Матрицу A кинетической энергии и обратную ей матрицу A^{-1} можно записать в блочном виде

$$A = \begin{bmatrix} M & -\mathbf{d}^T \\ -\mathbf{d} & G \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{m_0} \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{\eta}^T \\ \boldsymbol{\eta} & H \end{bmatrix},$$

где $G = \text{diag}(m_1 l_1^2, m_2 l_2^2, \dots, m_n l_n^2)$, $\mathbf{d} = (m_1 l_1, m_2 l_2, \dots, m_n l_n)^T$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$, $\eta_i = 1/l_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Квадратная матрица H имеет на главной диагонали элементы $h_{ii} = \eta_i^2 (m_0 + m_i)/m_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, а все ее элементы вне диагонали равны $h_{ij} = \eta_i \eta_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$.

Известно [2, с. 342], что система (1.1) является управляемой, если длины стержней попарно различны, т.е. выполнено условие

$$l_i \neq l_j \text{ при } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

Как и в работе [2], преобразуем систему (1.1) к совокупности подсистем с независимыми переменными, но общим управлением. Для этого применим замену $\mathbf{q} = A^{-1}S\mathbf{z}$, где S – матрица из собственных векторов матрицы $N = BA^{-1}$.

Тогда получим

$$\ddot{\mathbf{z}} + D\mathbf{z} = \mathbf{f}u, \quad D = S^{-1}NS, \quad \mathbf{f} = S^{-1}\mathbf{b} \quad (1.3)$$

где у диагональной матрицы $D = \text{diag}(0, -\omega_1^2, -\omega_2^2, \dots, -\omega_n^2)$ на главной диагонали – собственные числа матрицы N , причем первое равно нулю, а остальные отрицательны в силу свойств матриц A и A^{-1} . Элементы вектора $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{n+1})^T$ не равны нулю, так как в противном случае при $f_j = 0$, $j = 2, \dots, n+1$, в системе (1.3) оказалась бы неуправляемая подсистема $\ddot{z}_j - \omega_j^2 z_j = 0$ (либо при $f_1 = 0$ оказалось бы $\ddot{z}_1 = 0$).

Вводя безразмерные переменные и время

$$\varpi_i = \frac{\omega_i}{\omega_1}, \quad x_0 = \frac{z_1 \omega_1^2}{f_1 a}, \quad x_i = \frac{z_{i+1} \omega_1^2}{f_{i+1} a}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad u' = \frac{u}{a}, \quad t' = \omega_1 t,$$

получим (опуская штрихи)

$$\ddot{x}_0 = u, \quad \ddot{x}_i - \varpi_i^2 x_i = u, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad |u| \leq 1. \quad (1.4)$$

Здесь и далее для определенности пронумеруем частоты в порядке возрастания значений, т.е. $1 = \varpi_1 < \varpi_2 < \dots < \varpi_n$.

2. Симметрии в задаче оптимального перемещения

Систему (1.4) представим в нормальной форме

$$\dot{x}_0 = y_0, \quad \dot{y}_0 = u, \quad \dot{x}_i = y_i, \quad \dot{y}_i = \varpi_i^2 x_i + u, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad |u| \leq 1. \quad (2.1)$$

Пусть требуемому перемещению платформы соответствует изменение переменной x_0 , равное безразмерному отрезку $2b$. Тогда назначим в середине этого отрезка начало отсчета координаты x_0 . Аналогичную «удвоенную» запись удобно применять и для искомого общего времени $2T$ движения системы, что придаст краевым условиям симметричный вид.

Задача оптимального по быстродействию перемещения платформы с перевернутыми маятниками формулируется следующим образом: нужно определить управление $u(t)$, $t \in [0, 2T]$, переводящее систему (2.1) из состояния

$$x_0(0) = -b, \quad y_0(0) = x_i(0) = y_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

за наименьшее время $2T$ (заранее неизвестное) в состояние

$$x_0(2T) = b, \quad y_0(2T) = x_i(2T) = y_i(2T) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3)$$

При этом, как было сказано выше, ограничимся рассмотрением малых перемещений, чтобы сохраняли смысл именно линейные уравнения (1.1).

Используя принцип максимума Понтрягина [1], составим гамильтониан

$$H = \mu_0 y_0 + \lambda_0 u + \sum_{i=0}^n \mu_i y_i + \sum_{i=0}^n \lambda_i (\varpi_i^2 x_i + u).$$

Тогда оптимальное управление получит вид

$$u = \text{sign} \sum_{i=0}^n \lambda_i, \quad (2.4)$$

где сопряженные переменные должны удовлетворять системе

$$\dot{\mu}_0 = 0, \quad \dot{\lambda}_0 = -\mu_0, \quad \dot{\mu}_i = -\varpi_i^2 \lambda_i, \quad \dot{\lambda}_i = -\mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5)$$

Искомое оптимальное управление существует при условии (1.2). Однако специфика краевых условий (2.2), (2.3) такова, что даже при совпадении длин каких-либо стержней решение задачи существует, поскольку два одинаковых стержня будут двигаться синхронно.

Утверждение 1. В задаче (2.1)–(2.5) записанное в смещенном времени $\tilde{t} = t - T$, $\tilde{t} \in [-T, T]$ оптимальное управление $u(\tilde{t})$, а также решения $x_i(\tilde{t})$, $\lambda_i(\tilde{t})$, будут нечетными функциями, а $y_i(\tilde{t})$, $\mu_i(\tilde{t})$, $i = 0, 1, \dots, n$, – четными функциями.

Для доказательства достаточно убедиться, что в новом времени \tilde{t} все соотношения (2.1)–(2.5) инвариантны относительно замены $\tilde{t} \rightarrow -\tilde{t}$, $u \rightarrow -u$, $x_i \rightarrow -x_i$, $\lambda_i \rightarrow -\lambda_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, при неизменных y_i, μ_i , $i = 0, 1, \dots, n$.

Из утверждения 1 вытекают соотношения

$$u(T) = x_i(T) = \lambda_i(T) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

характеризующие состояние системы в конце оптимальной полутраектории.

Утверждение 2. В задаче (2.1)–(2.5) оптимальное управление (2.4) является кусочно-постоянным с конечным числом переключений, число которых нечетно.

Доказательство следует из линейной независимости известных решений системы (2.5). Их сумма, стоящая под знаком sign в формуле (2.4), не может быть тождественно равной нулю. Поэтому особые режимы, моделируемые бесконечно быстрыми переключениями управления, здесь невозможны. При этом количество переключений нечетно, поскольку наряду с моментом времени переключения T возможны лишь «попарно симметричные» моменты вида τ и $(2T - \tau)$, где $\tau < T$.

Далее обозначим $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, T$ – последовательные моменты времени переключения управления на полутраектории, вводя вспомогательные параметры

$$\gamma_k = T - \tau_k, \quad k = 1, 2, \dots, j. \quad (2.7)$$

Можно показать (подробности опускаем), что если движение системы (2.1) началось при действии управления $u = 1$ на участке $t \in [0, \tau_1]$, то на j -м участке постоянства управления при $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$ каждая переменная $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, будет явной функцией времени

$$x_i(t) = \frac{-1}{\varpi_i^2} \left[(-1)^{j+1} - \operatorname{ch} \varpi_i t + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \varpi_i (t - \tau_k) \right]. \quad (2.8)$$

Если бы движение началось при $u = -1$, то выражение в правой части (2.8) изменило бы знак на противоположный. В любом из этих случаев, согласно соотношению (2.6), в конце оптимальной полутраектории (т.е. при $t = T$) для всех $i = 1, 2, \dots, n$ должны выполняться условия

$$(-1)^{j+1} - \operatorname{ch}(\varpi_i T) + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+1} \operatorname{ch}(\varpi_i \tau_k) = 0. \quad (2.9)$$

Для каждой подсистемы $\dot{x}_i = y_i$, $\dot{y}_i = \varpi_i^2 x_i + u$, $i \in 1, 2, \dots, n$, системы (2.1) в начальный момент времени изображающая точка на фазовой плоскости (x_i, y_i) выходит из начала координат, а сама фазовая кривая склеивается из участков гипербол. На рис. 2 сплошными линиями показаны семейства гипербол при $u = +1$, а пунктирными линиями – при $u = -1$.

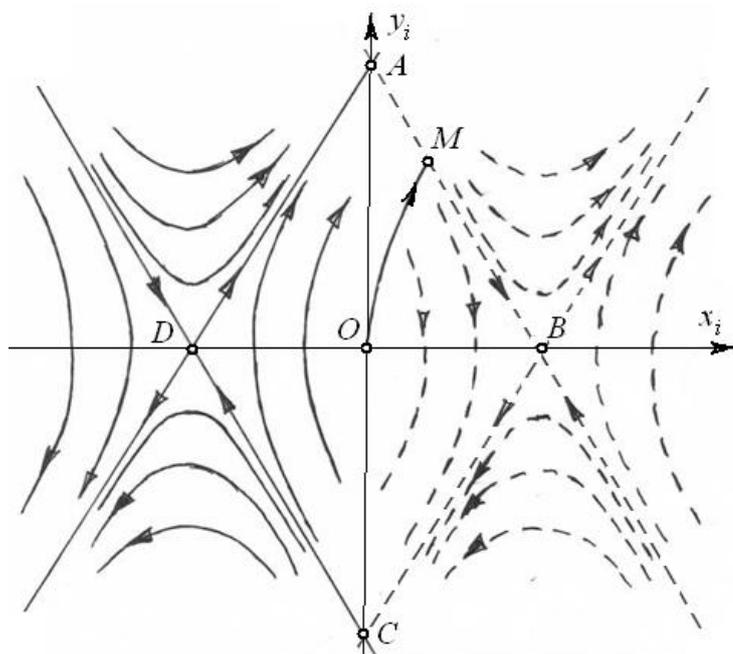


Рис. 2. Кривые на фазовой плоскости (x_i, y_i)

Сепаратрисы пересекаются в седловых точках $B(\frac{1}{\varpi_i^2}; 0)$ и $D(-\frac{1}{\varpi_i^2}; 0)$, а также в точках $A(0; \frac{1}{\varpi_i})$ и $C(0; -\frac{1}{\varpi_i})$. Известная [11] область нуль-управляемости подсистемы лежит в открытой бесконечной полосе между параллельными прямыми AB и CD . Фазовая кривая, выходящая из $(0; 0)$ при $u = +1$ (либо $u = -1$), пересекла бы AB (либо CD) в момент времени $t = (\ln 2)/\varpi_i$. Поэтому значение τ_1 первого момента переключения управления в системе (2.1) должно удовлетворять условию

$$\tau_1 < (\ln 2)/\varpi_n \quad (2.10)$$

где ϖ_n - наибольшее из значений ϖ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. По той же причине существуют верхние границы ϑ_i значений τ_i всех остальных моментов времени переключений:

$$\tau_i < \vartheta_i, \quad i = 1, 2, \dots, j. \quad (2.11)$$

3. Необходимые условия оптимальности движений

Поскольку зависимость $T(b)$ значений наименьшего времени от задаваемых значений дальности является монотонной, то ей соответствует обратная монотонная зависимость b от T , построив которую, можно ее затем «обратить», чтобы получить $T(b)$. Поэтому далее поставленную задачу быстродействия будем рассматривать для взаимной к быстродействию вариационной задачи на максимум дальности ($2b$) при заданном времени ($2T$).

Для режима с моментами времени переключения управления $\tau_1, \dots, \tau_j, T, 2T - \tau_j, \dots, 2T - \tau_1$ дальность $\tilde{x}_0 = x_0 + b$ перемещения платформы за время T можно представить в виде

$$\tilde{x}_0(T, \gamma_1, \dots, \gamma_j) = \pm \left[\frac{1}{2} T^2 + \sum_{k=1}^j (-1)^k \gamma_k^2 \right]. \quad (3.1)$$

Здесь знак «+» (либо «-») перед скобкой ставится, если на начальном этапе $t \in [0, \tau_1)$ действовало управление $u(t) = 1$ (либо $u(t) = -1$).

Решая задачу на экстремум функции (3.1) при ограничениях (2.9), будем выводить необходимые условия оптимальности управления. Пусть γ_k , $k = 1, 2, \dots, j$ – оптимальный набор переменных, обеспечивающих (при заданном значении T) наибольшую величину дальности (3.1). Тогда этот набор удовлетворит условиям

$$\partial F / \partial \gamma_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, j. \quad (3.2)$$

для функции Лагранжа

$$F = \tilde{x}_0 + \sum_{i=1}^n \chi_i \beta_i(T, \gamma_1, \dots, \gamma_j),$$

где $\beta_i(T, \gamma_1, \dots, \gamma_j)$, $i = 1, 2, \dots, n$ – выражения в левых частях уравнений (2.9). Взяв (для определенности) знак «+» в формуле (3.1) и вводя обозначения $\xi_i = \varpi_i \chi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, приведем систему (3.2) к виду

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \operatorname{sh}(\varpi_i \gamma_k) = -\gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, j. \quad (3.3)$$

Рассмотрим ее решение (относительно ξ_i) для трех случаев.

1) Если $j = n$, то определитель Δ матрицы левой части не равен нулю, так как составлен из линейно независимых столбцов. Поэтому система (3.3) получит единственное решение

$$\xi_i = \Delta_i / \Delta, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4)$$

где определители Δ_i получаются из Δ заменой i -го столбца на столбец $(-\gamma_1, -\gamma_2, \dots, -\gamma_n)^T$. Подставляя (3.4) в (3.3), получим

$$\gamma_k \Delta + \sum_{i=1}^n \Delta_i \operatorname{sh}(\varpi_i \gamma_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Если бы в (3.1) взяли знак « \leftarrow », то сменились бы знаки в правых частях формул (3.3) и (3.4), но вид системы (3.5) остался бы тот же. При этом систему (3.5) можно заменить равносильными соотношениями

$$Y_{n+1} = \left\| \begin{array}{cccccc} \gamma_k & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \\ \operatorname{sh}(\varpi_1 \gamma_k) & \operatorname{sh}(\varpi_1 \gamma_1) & \operatorname{sh}(\varpi_1 \gamma_2) & \dots & \operatorname{sh}(\varpi_1 \gamma_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{sh}(\varpi_n \gamma_k) & \operatorname{sh}(\varpi_n \gamma_1) & \operatorname{sh}(\varpi_n \gamma_2) & \dots & \operatorname{sh}(\varpi_n \gamma_n) \end{array} \right\| = 0 \quad (3.6)$$

при $k = 1, 2, \dots, n$.

2) Если $j > n$, то, взяв первые n соотношений из системы (3.3), получим из них решения (3.4), которые подставим в (3.3). Тогда определитель (3.6) окажется равным нулю не только при $k = 1, 2, \dots, n$, но и при $k = n + 1, \dots, j$.

3) Если $j < n$, то в системе (3.3) можно положить $\xi_{j+1} = \xi_{j+2} = \dots = \xi_n = 0$, а остальные ξ_i , $i = 1, 2, \dots, j$, найти по формулам (3.4). Тогда, подставив (3.4) в (3.3), получим соотношения (3.5), которые равносильны равенству нулю углового минора $(j + 1) \times (j + 1)$ из (3.6).

Таким образом, если γ_k , $k = 1, 2, \dots, j$ – оптимальный набор переменных, обеспечивающих (при заданном значении T) экстремум функции (3.1) при ограничениях (2.9), то он должен удовлетворить условиям (3.6) при всех $k = 1, 2, \dots, j$ (с заменой определителя Y_{n+1} на его минор Y_{j+1} в случае $j < n$).

Эти необходимые условия оптимальности управления аналогичны ранее выведенным [8] в задаче быстрогодействия для системы, отличающейся от (1.4) заменой знаков « \leftarrow » на « \rightarrow », полученным путем анализа сопряженной системы из принципа максимума Понтрягина.

Для случая $j = n$ эти условия можно сформулировать в следующем виде.

Утверждение 3. Если в задаче (2.1)–(2.3) полутраектория оптимальна по быстродействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с $(n + 1)$ переключениями в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, T$, то управляющая функция имеет вид

$$u = \operatorname{sign}(\kappa \det Q_{n+1}(t)), \quad Q_{n+1}(t) = \left\| \begin{array}{cccccc} f_0(t) & f_0(\tau_1) & f_0(\tau_2) & \dots & f_0(\tau_n) \\ f_1(t) & f_1(\tau_1) & f_1(\tau_2) & \dots & f_1(\tau_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(t) & f_n(\tau_1) & f_n(\tau_2) & \dots & f_n(\tau_n) \end{array} \right\| = 0 \quad (3.7)$$

$$\kappa \neq 0, \quad f_0(t) = T - t, \quad f_i(t) = \operatorname{sh} \varpi_i (T - t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

В формуле (3.8) знак коэффициента κ определяется значением управления $u(t)$ при $t \in [0, \tau_1]$ и далее подлежит уточнению.

Утверждение 3 можно использовать для проверки выполнения условий оптимальности вдоль полутраекторий с количеством переключений $j = n$. С этой целью при заданной длительности T сначала решается система (2.9), т.е. находятся значения корней $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ и соответствующих им моментов переключения $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, T$. Далее проверяется вдоль этой траектории действие управления вида (3.7). Если кроме ожидаемых моментов переключения возникают другие, при

которых управление тоже обращается в ноль, то такое управление не удовлетворяет необходимым условиям оптимальности.

4. Количество переключений управления при малых перемещениях платформы

Ограничиваясь рассмотрением лишь малых перемещений платформы, при которых допустимо использовать линеаризованную модель объекта, докажем следующее свойство.

Утверждение 4. Существует такое значение T_0 , что для всех $T \in (0, T_0]$ функции $u(t)$, $t \in [0, T)$, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности в задаче (2.1)–(2.3), будут иметь не более n моментов времени переключения.

Доказательство. В силу управляемости системы (2.1) для любого значения T существует решение задачи быстродействия (2.1)–(2.3), то есть найдется оптимальный набор переменных γ_k , $k = 1, 2, \dots, j$, удовлетворяющих условию (3.6). Далее применим функцию

$$\phi(\rho) = \text{sh}\rho/\rho, \quad (4.1)$$

которую доопределим значением $\phi(0) = 1$. Тогда соотношения (3.6) преобразуются к виду

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \phi(\varpi_1\gamma_k) & \phi(\varpi_1\gamma_1) & \phi(\varpi_1\gamma_2) & \dots & \phi(\varpi_1\gamma_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi(\varpi_n\gamma_k) & \phi(\varpi_n\gamma_1) & \phi(\varpi_n\gamma_2) & \dots & \phi(\varpi_n\gamma_n) \end{array} \right\| = 0, \quad k = 1, 2, \dots, j. \quad (4.2)$$

Они гарантируют линейную зависимость векторов

$$\overrightarrow{OB_k} = (1, \phi(\varpi_1\gamma_k), \dots, \phi(\varpi_n\gamma_k))^T, \quad k = 1, 2, \dots, j, \quad (4.3)$$

отложенных от точки O в аффинном пространстве с координатами $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)^T$. Будем доказывать, что при достаточно малом T количество векторов (4.3), удовлетворяющих условию (4.2), не может превзойти числа n .

Предположим противное: пусть $j = n + 1$, и все векторы (4.3) принадлежат некоторой гиперплоскости δ . Ввиду одинаковости первой координаты, все точки B_k , $k = 1, 2, \dots, n + 1$, лежат в $(n - 1)$ -мерной плоскости, полученной пересечением гиперплоскостей δ и $\xi_0 = 1$. При проектировании на подпространство, порождаемое координатными осями $O\xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), векторы $\overrightarrow{OB_k}$, $k = 1, 2, \dots, n + 1$, отобразятся в векторы

$$\overrightarrow{OA_k} = (\phi(\varpi_1\gamma_k), \dots, \phi(\varpi_n\gamma_k))^T, \quad k = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Покажем, что при достаточно малом T точка A_{n+1} не сможет принадлежать $(n - 1)$ -мерной плоскости, содержащей все точки A_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то есть вектор $\overrightarrow{A_1A_{n+1}}$ не сможет принадлежать подпространству, порождаемому векторами $\overrightarrow{A_1A_i}$, $i = 2, \dots, n$. Ввиду малости T (а, значит, и всех значений γ_k) применим разложение в ряд для функции $\phi(\varpi_i\gamma_k)$ с удержанием $(n + 1)$ слагаемых. Введя упрощающие обозначения

$$\varpi_i^2 = \nu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \gamma_k^2 = \theta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n + 1, \quad (4.4)$$

получим

$$\phi(\varpi_i \gamma_k) \approx 1 + \sum_{m=0}^n \frac{(v_i \theta_k)^m}{(2m+1)!} = \eta(v_i \theta_k).$$

Векторы

$$\overrightarrow{A_1 A_j} = (\eta(v_1 \theta_j) - \eta(v_1 \theta_1), \dots, \eta(v_n \theta_j) - \eta(v_n \theta_1))^T, \quad j = 2, \dots, n+1$$

приводятся к виду

$$\overrightarrow{A_1 A_j} = \frac{\theta_j - \theta_1}{3!} \mathbf{a}_1 + \frac{\theta_j^2 - \theta_1^2}{5!} \mathbf{a}_2 + \dots + \frac{\theta_j^n - \theta_1^n}{(2n+1)!} \mathbf{a}_n,$$

где вспомогательные векторы $\mathbf{a}_i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)^T$, $i = 1, 2, \dots, n$, линейно независимы, поскольку из таких строк составится (с точностью до ненулевого множителя) определитель Вандермонда. Если бы вектор $\overrightarrow{A_1 A_{n+1}}$ принадлежал подпространству, порождаемому векторами $\overrightarrow{A_1 A_i}$, $i = 2, \dots, n$, то был бы равен нулю определитель V , составленный из координат этих векторов в базисе \mathbf{a}_i , $i = 1, 2, \dots, n$:

$$V = \varsigma \begin{vmatrix} \theta_2 - \theta_1 & \theta_2^2 - \theta_1^2 & \dots & \theta_2^n - \theta_1^n \\ \theta_3 - \theta_1 & \theta_3^2 - \theta_1^2 & \dots & \theta_3^n - \theta_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{n+1} - \theta_1 & \theta_{n+1}^2 - \theta_1^2 & \dots & \theta_{n+1}^n - \theta_1^n \end{vmatrix}, \quad \varsigma = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Однако этот определитель упрощается к виду

$$V = \varsigma \prod_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{n+1} (\theta_j - \theta_i),$$

поэтому поскольку $\theta_i \neq \theta_j$ (при $i \neq j$), то $V \neq 0$. Тем самым утверждение 4 доказано.

Геометрический смысл доказательства заключается в том, что вектор-функция

$$\mathbf{r} = (\phi(\varpi_1 \rho), \dots, \phi(\varpi_n \rho))^T, \quad \rho \in [0, T] \tag{4.5}$$

описывает в n -мерном пространстве линию, которую, как и в [9], назовем «контрольной кривой». При малых значениях T она может содержать n точек A_j с параметрами γ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющими условию (3.6), но не может иметь $(n+1)$ таких точек.

Пример 1. Для случая $n = 2$ система (1.4) приобретает вид

$$\ddot{x}_0 = u, \quad \ddot{x}_1 - x_1 = u, \quad \ddot{x}_2 - \omega^2 x_2 = u, \quad |u| \leq 1, \tag{4.6}$$

где в силу $\varpi_1 = 1$ принято упрощенное обозначение $\varpi_2 = \omega$. На рис. 3 изображена контрольная кривая на плоскости (ξ_1, ξ_2) при $\omega = 2$. Точке W соответствует параметр $\rho = T$, а точкам A_1 и A_2 – параметры γ_1 и γ_2 . Они вычислены как корни системы (2.9), которая при $j = 3$ и заданном значении T имеет вид

$$1 - \operatorname{ch}(T) + 2\operatorname{ch}(\gamma_1) - 2\operatorname{ch}(\gamma_2) = 0, \quad (4.7)$$

$$1 - \operatorname{ch}(\omega T) + 2\operatorname{ch}(\omega\gamma_1) - 2\operatorname{ch}(\omega\gamma_2) = 0.$$

Значениям γ_1 , γ_2 и T соответствуют (по формулам (2.7)) моменты времени τ_1 , τ_2 и T переключения управления. Согласно утверждению 3, для случая $n = 2$ управление с пятью переключениями будет удовлетворять необходимым условиям оптимальности лишь при условии, что определитель (3.7) не обратится в нуль при других значениях времени t , кроме τ_1 , τ_2 , T , $2T - \tau_2$, $2T - \tau_1$. Геометрически это условие соответствует тому, что прямая g , проведенная через точки A_1 и A_2 (с параметрами $\rho = \gamma_1$ и $\rho = \gamma_2$), не имеет других общих точек с контрольной кривой (рис. 3).

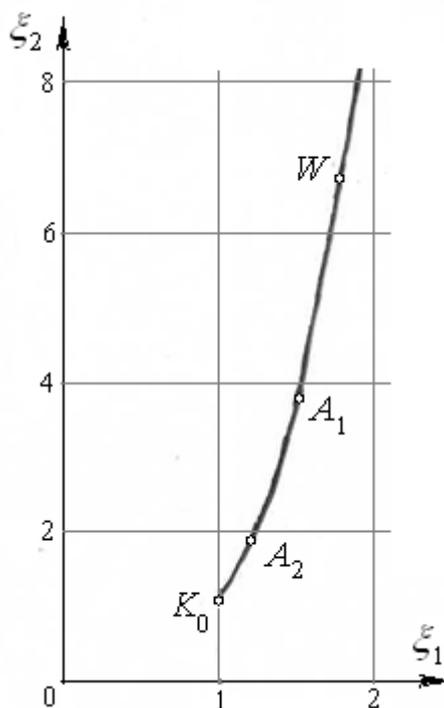


Рис. 3. Контрольная кривая для случая $n = 2$ при $\varpi_1 = 1$, $\varpi_2 = 2$

Действительно, если параметру $\rho = T$ соответствует точка W , то в смещенном времени $\tilde{t} \in [-T, T]$ изображающая точка M с координатами $(\phi(\tilde{t}), \phi(\omega\tilde{t}))$, двигаясь по контрольной кривой из W в K_0 и обратно, дважды пройдет дугу WK_0 . При этом знак управления $u(\tilde{t})$, согласно формулам (3.7) и (4.1), меняется последовательно в точках A_1 , A_2 , K_0 , A_2 и A_1 .

Заметим, что на рис. 3 кривая вогнута, поэтому прямая $g = A_1A_2$ не может иметь других пересечений с контрольной кривой.

Для случая $n = 3$ из утверждения 4 следует, что в трехмерном пространстве малый фрагмент контрольной кривой не может содержать более трех компланарных точек, и т.д.

5. Значения корней γ_k системы (2.9) при малых T

Далее для каждого наперед заданного значения параметра T будем искать соответствующую функцию оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, 2T]$, обеспечивающую наибольшую дальность перемещения платформы с выполнением краевых условий (2.2)-(2.3). Согласно утверждениям 1 и 2 эта функция – кусочно-постоянная, причем в смещенном времени $\tilde{t} = t - T$, $\tilde{t} \in [-T, T]$ она окажется нечетной. Поэтому отысканию подлежат моменты времени переключения $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, T$, наряду с которыми будем использовать вспомогательные параметры (2.7). Для каждого

конкретного малого значения T эти параметры должны удовлетворять системе уравнений (2.9), в которой в силу утверждения 4 можно без уменьшения общности принять $j = n$. Альтернативный случай $j < n$ формально охватывается той же системой, если некоторые из переменных γ_i приравнять к нулю. Таким образом, можно говорить о непрерывных функциях $\gamma_i(T)$, $i = 1, 2, \dots, n$, характеризующих эволюцию оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, 2T]$ с изменением параметра T .

В предположении о малости значений T (а значит, и всех γ_k , $k = 1, 2, \dots, n$) используем разложения в ряды Маклорена, применяя обозначения (4.4) и $\kappa = T^2$:

$$\operatorname{ch}(\varpi_i T) \approx 1 + \sum_{j=1}^n \frac{(v_i \kappa)^j}{(2j)!}, \quad \operatorname{ch}(\varpi_i \gamma_k) \approx 1 + \sum_{j=1}^n \frac{(v_i \theta_k)^j}{(2j)!}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (5.1)$$

Подставляя соотношения (5.1) в (2.9), перегруппируем слагаемые, выделяя в них выражения:

$$p_j = \frac{1}{(2j)!} \left[\frac{\kappa^j}{2} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \theta_k^j \right], \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.2)$$

Тогда, вводя вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$, преобразуем систему (2.9) к виду

$$\Omega \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \Omega = \begin{vmatrix} 1 & v_1 & \dots & v_1^{n-1} \\ 1 & v_2 & \dots & v_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & v_n & \dots & v_n^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (5.3)$$

Поскольку определитель Вандермонда

$$\det \Omega = \prod_{i=1}^n (v_i - v_j) \neq 0, \quad \text{при } \varpi_i \neq \varpi_j \ (i \neq j),$$

то из матричного соотношения (6.3) следует $p_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, что приводит к системе n уравнений относительно n переменных $\alpha_i = \theta_i / \kappa$, $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \alpha_k^i = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.4)$$

В точности такая же система нелинейных алгебраических уравнений возникала в [10], где рассматривались малые значения T для линейной модели, отличающейся от (1.4) лишь знаками, т.е. положительными собственными значениями матрицы BA^{-1} . Было показано, что система (5.4) всегда имеет n корней $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n > 0$, причем числа α_1 и α_n , α_2 и α_{n-1} и т.д. дополняют друг друга до единицы. В явном виде числовые значения этих корней можно записать [10] лишь для систем (5.4) при $n \leq 7$, а при большей размерности n возможны лишь приближенные решения. Например, при $n = 2$ получим корни $\alpha_1 = 3/4$, $\alpha_2 = 1/4$; при $n = 3$ – корни $\alpha_1 = (2 + \sqrt{2})/4$, $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = (2 - \sqrt{2})/4$; при $n = 4$ – корни $\alpha_1 = (5 + \sqrt{5})/8$, $\alpha_2 = (3 + \sqrt{5})/8$, $\alpha_3 = (5 - \sqrt{5})/8$, $\alpha_4 = (3 - \sqrt{5})/8$ и т.д.

При этом показано [10], что если из корней $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$, системы (5.4) n -го порядка составить знакоперевающую сумму степеней $(n + 1)$, то она будет меньше числа $1/2$. Т.е. при любом n выполнится неравенство

$$S = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \alpha_k^{n+1} - \frac{1}{2} < 0. \tag{5.5}$$

Поскольку среди корней системы (5.4), имеющих исходный смысл $\alpha_i = \gamma_i^2/T^2, i = 1, 2, \dots, n$, нет нулевых значений, а сама система порождена представлением (5.1), то в предположении о малости T показана справедливость следующего свойства.

Утверждение 5. В задаче быстрогодействия (2.1)–(2.3) при достаточно малом значении T функция оптимального управления $u(t), t \in [0, T)$, имеет ровно n переключений. Функциональные зависимости $\gamma_i(T), i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют соотношениям

$$\frac{d\gamma_i}{dT} = \sqrt{\alpha_i} \text{ при } T = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{5.6}$$

где $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$, – корни системы (5.4).

Далее определим знак оптимального управления $u(t), t \in [0, T)$ на первом участке его постоянства, т.е. значение $u(0)$. Для этого заметим, что в соотношениях (5.2) при $j = 1$ переменная

$$p_1 = \frac{1}{(2)!} \left[\frac{T^2}{2} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \gamma_k^2 \right]$$

содержит в квадратных скобках то же выражение, что и формула (3.1) для дальности перемещения платформы, которую можно переписать в виде

$$\tilde{x}_0(T) = \pm 2p_1(T) = 2p_1(T) \text{sign}[u(0)]. \tag{5.7}$$

При подстановке в эту формулу найденных выражений $\gamma_i^2 = \alpha_i T^2, i = 1, 2, \dots, n$ получим нулевой результат, т.е. выражение $\tilde{x}_0(T)$ имеет более высокий порядок малости, чем T^2 .

Поскольку все функции в системе (2.9) гладкие, то для рассматриваемого диапазона малых значений T функции $\gamma_i(T), i = 1, 2, \dots, n$, тоже гладкие. Поэтому возможно приближение

$$\gamma_i(T) \approx \gamma_i(0) + \dot{\gamma}_i(0)T + \ddot{\gamma}_i(0)T^2/2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{5.8}$$

где $\gamma_i(0) = 0, \dot{\gamma}_i(0) = \sqrt{\alpha_i}, i = 1, 2, \dots, n$.

Разложения (5.1) позволили найти лишь линейные компоненты в представлении (5.8), где они могут рассматриваться как первое приближение. Знак выражения $p_1(T)$ можно проявить лишь во втором приближении, если в разложении (5.1) вместо n степеней переменной $\varkappa = T^2$ удержать $(n + 1)$ степеней, при этом подразумевая и расширение обсуждаемого диапазона T . Тогда после подстановки степенных разложений в систему (2.9) в ней появится новая (в дополнение к (5.2)) компонента

$$p_{n+1} = \frac{1}{(2n + 2)!} \left[\frac{\varkappa^{n+1}}{2} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \theta_k^{n+1} \right].$$

Она может быть представлена в форме

$$p_{n+1} = \frac{-T^{2n+2}}{(2n+2)!} \left[\sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\frac{\gamma_k^2}{T^2} \right)^{n+1} - \frac{1}{2} \right] > 0, \quad (5.9)$$

где в квадратных скобках – новое (возмущенное) выражение вида S (5.5), сохраняющее прежний знак « \leftarrow » при малых значениях T .

В новом приближении вместо однородной системы (5.3) получится неоднородная:

$$\Omega \mathbf{p} = -p_{n+1} \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = (v_1^n, v_2^n, \dots, v_n^n)^T. \quad (5.10)$$

Отсюда методом Крамера следует новое значение $p_1 = -p_{n+1} \det \Omega_1 / \det \Omega$, где матрица Ω_1 получается из Ω заменой первого столбца на столбец \mathbf{g} , поэтому

$$\det \Omega_1 = (-1)^{n-1} \det \Omega \prod_{k=1}^n (v_k), \quad p_1 = (-1)^n p_{n+1} \prod_{k=1}^n (v_k). \quad (5.11)$$

Таким образом, при достаточно малом T из системы (5.3) в первом приближении имели оценку $p_1 = 0$, а после уточнения оказалось, что знак p_1 зависит от числа $(-1)^n$. Поскольку $p_{n+1} > 0$, то при нечетном n получим $p_1 < 0$, а при четном n будет $p_1 > 0$.

Вращаясь к выражению (5.7), которое для дальности платформы должно быть положительным, можем сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 6. В задаче быстрогодействия (2.1)–(2.3) при достаточно малом значении T функция оптимального управления $u(t), t \in [0, T)$, имеет на первом участке постоянства значение $u(0) = +1$, если n – четно, и значение $u(0) = -1$, если n – нечетно.

Иначе говоря, платформа с нечетным количеством перевернутых маятников в начале управляемого перемещения совершает реверс, а с четным количеством – нет.

6. Оптимальное управление в системе (2.1) при $n=2$

Далее в задаче оптимального быстрогодействия (2.1)–(2.3) рассмотрим подробнее случай $n = 2$, соответствующий малым перемещениям платформы с двумя перевернутыми маятниками. Как и прежде, исследуем взаимную к быстрдействию вариационную задачу на максимум дальности (2b) при заданном времени ($2T$).

Утверждение 7. В задаче быстрогодействия (2.1)–(2.3) для случая $n = 2$ при любом значении T функция оптимального управления $u(t), t \in [0, T)$, имеет ровно два момента переключения.

Для доказательства, во-первых, покажем, что на плоскости (ξ_1, ξ_2) контрольная кривая

$$\xi_1 = \phi(\varpi_1 \rho), \quad \xi_2 = \phi(\varpi_2 \rho), \quad \rho \in [0, \infty), \quad \varpi_2 > \varpi_1 \quad (6.1)$$

является вогнутой, поэтому не может содержать более двух коллинеарных точек.

Исследуем выражение для второй производной

$$\frac{d^2 \xi_2}{d\xi_1^2} = \frac{\dot{\xi}_1 \ddot{\xi}_2 - \dot{\xi}_2 \ddot{\xi}_1}{\dot{\xi}_1^3} \quad (6.2)$$

где точками сверху обозначены производные по параметру ρ . Заменим функции степенными рядами, вновь используя обозначение $\varpi_i^2 = v_i, i = 1, 2$:

$$\xi_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_i^n \rho^{2n}}{(2n+1)!}, \quad \dot{\xi}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n v_i^n \rho^{2n-1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{in}(\rho),$$

$$\ddot{\xi}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n-1)v_i^n \rho^{2n-2}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{in}(\rho), \quad i = 1, 2.$$

Поскольку в формуле (6.2) знаменатель положителен, осталось рассмотреть числитель, записанный как разность произведений двух сумм с бесконечным числом слагаемых. При раскрытии таких скобок сгруппируем компоненты с одинаковой суммарной степенью параметра ρ и получим для них неравенство

$$[a_{1n}(\rho)b_{2m}(\rho) + a_{1m}(\rho)b_{2n}(\rho)] - [a_{2n}(\rho)b_{1m}(\rho) + a_{2m}(\rho)b_{1n}(\rho)] \geq 0,$$

потому что оно после упрощения (подробности опускаем) равносильно справедливому неравенству

$$(m-n)(v_2^m v_1^n - v_2^n v_1^m) \geq 0.$$

При $m = n$ левая часть равна нулю, а при $m > n$ либо $m < n$ она положительна, так как $v_2 > v_1$. Тем самым доказаны положительность числителя в выражении (6.2) и вогнутость контрольной кривой (6.1) на плоскости (ξ_1, ξ_2) . Это значит, что на линии (6.1) не может быть более двух коллинеарных точек, а функция оптимального управления $u(t), t \in [0, T)$ не может иметь более двух переключений на полутраектории.

Во-вторых, покажем, что на контрольной кривой точки A_1, A_2 с параметрами γ_1, γ_2 не могут совместиться. В противном случае при их сближении, когда разность $(\gamma_1 - \gamma_2)$ стала бы бесконечно малой, получили бы сколь угодно близкие моменты времени переключения τ_1 и τ_2 , что привело бы на фазовой плоскости (рис. 2) к выходу изображающей точки за пределы области управляемости. Таким образом, для случая $n = 2$ при любом значении T функция оптимального управления $u(t), t \in [0, T)$, имеет ровно два момента переключения. Утверждение 7 доказано.

На промежутке $t \in [0, 2T)$ управление, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности, будет иметь пять моментов переключения $\tau_1, \tau_2, T, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$. Для отыскания значений τ_1, τ_2 (при каждой задаваемой величине T) в соответствии с обозначениями (2.7) требуется найти корни γ_1, γ_2 системы (4.7). Их существование при малых T следовало из утверждения 5, а в соответствии с утверждением 7 наличие корней γ_1, γ_2 системы (4.7) гарантируется и при любом значении T .

Для исследования зависимостей $\gamma_1(T)$ и $\gamma_2(T)$ продифференцируем левые части уравнений (4.7) по параметру T и разрешим систему относительно производных:

$$\frac{d\gamma_1}{dT} = \frac{D_1}{D}, \quad \frac{d\gamma_2}{dT} = \frac{D_2}{D}. \tag{6.3}$$

Определитель D выразим через координаты ξ_1 и ξ_2 точек $A_1(\phi(\gamma_1), \phi(\omega\gamma_1)), A_2(\phi(\gamma_2), \phi(\omega\gamma_2))$ на контрольной кривой (рис. 3):

$$D = \det \begin{vmatrix} \text{sh}(\gamma_2) & \text{sh}(\gamma_1) \\ \text{sh}(\omega\gamma_2) & \text{sh}(\omega\gamma_1) \end{vmatrix} = \omega\gamma_1\gamma_2 \det \begin{vmatrix} \phi(\gamma_2) & \phi(\omega\gamma_2) \\ \phi(\gamma_1) & \phi(\omega\gamma_1) \end{vmatrix} = \omega\gamma_1\gamma_2 S_{21}.$$

Здесь S_{21} – ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OA_2}$ и $\overrightarrow{OA_1}$. Используя координаты точки $W(\phi(T), \phi(\omega T))$, преобразуем аналогично определители

$$D_1 = \frac{1}{2} \omega \gamma_2 T S_{20}, \quad D_2 = \frac{1}{2} \omega \gamma_1 T S_{10},$$

где S_{20}, S_{10} – ориентированные площади параллелограммов, построенных соответственно на векторах $\overrightarrow{OA_2}$ и \overrightarrow{OW} , $\overrightarrow{OA_1}$ и \overrightarrow{OW} .

Поскольку повороты векторов $\overrightarrow{OA_2} \rightarrow \overrightarrow{OW}$, $\overrightarrow{OA_1} \rightarrow \overrightarrow{OW}$, $\overrightarrow{OA_2} \rightarrow \overrightarrow{OA_1}$ осуществляются против часовой стрелки, то для всех сочетаний параметров T, γ_1, γ_2 получим неравенства $S_{20} > 0$, $S_{10} > 0$, $S_{21} > 0$. Поэтому в системе (6.3) при каждом значении T выполняются условия

$$\frac{d\gamma_1}{dT} > 0, \quad \frac{d\gamma_2}{dT} > 0, \tag{6.4}$$

т.е. функции $\gamma_1(T), \gamma_2(T)$ – монотонно возрастающие.

Заметим, что характер такого возрастания с учетом неравенств (2.10)-(2.11) стеснен ограничениями

$$T - \frac{\ln 2}{\omega} < \gamma_1 < T, \quad T - \vartheta_2 < \gamma_2 < T,$$

откуда следует существование пределов

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\gamma_i}{T} = 1, \quad i = 1, 2,$$

т.е. наличие при $T \rightarrow \infty$ асимптот $\gamma_1(T) \rightarrow T - c_1, \gamma_2(T) \rightarrow T - c_2$, где $T > c_2 > c_1 > 0$.

Для отыскания числовых значений констант c_1, c_2 рассмотрим пределы при $T \rightarrow \infty$ для производных (6.3), т.е. решим систему уравнений

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D_i}{D} = 1, \quad i = 1, 2.$$

Сокращая в этих соотношениях числители и знаменатели на старшие степени $e^T e^{\omega T}$, получим в обозначениях $d_i = e^{c_i}, i = 1, 2$, систему двух уравнений

$$d_1 d_1^\omega (d_2^\omega - d_2) = 2(d_1 d_2^\omega - d_2 d_1^\omega), \quad d_2 d_2^\omega (d_1^\omega - d_1) = 2(d_1 d_2^\omega - d_2 d_1^\omega) \tag{6.5}$$

Из этой системы можно выразить $d_2 = 2d_1/(2 - d_1)$, где с учетом неравенства (2.10) выполняется условие $1 < d_1 < 2$. В итоге получим уравнение с одним неизвестным d_1 :

$$1 - \frac{d_1^\omega}{2} = \left(1 - \frac{d_1}{2}\right)^\omega$$

Можно показать (подробности опускаем), что такое уравнение с учетом неравенства (2.10) имеет единственное решение, зависящее от задаваемого значения ω .

Пример 2. В продолжение примера 1 для случая $\omega = 2$ в системе (6.5) получим решение $d_1 = 4/3, d_2 = 4$, т.е. $c_1 = \ln(4/3), c_2 = \ln 4$. Это означает, что при $T \rightarrow \infty$ асимптотами функций $\gamma_1(T)$ и $\gamma_2(T)$ будут прямые с уравнениями $\gamma_1 = T - \ln(4/3)$ и $\gamma_2 = T - \ln 4$. Соответственно, уточняются ограничения на величины моментов времени переключения управления при $\omega = 2$ в виде

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \tau_1 = \ln\left(\frac{4}{3}\right), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \tau_2 = \ln 4. \quad (6.6)$$

Для наглядного представления эволюции функций $u(t), t \in [0, T)$ (с изменением значения T) можно применять способ изображения, предложенный в [9] и названный диаграммой функций оптимального управления. На рис. 4 показана такая диаграмма для рассматриваемой системы (4.6) при $\omega = 2$.

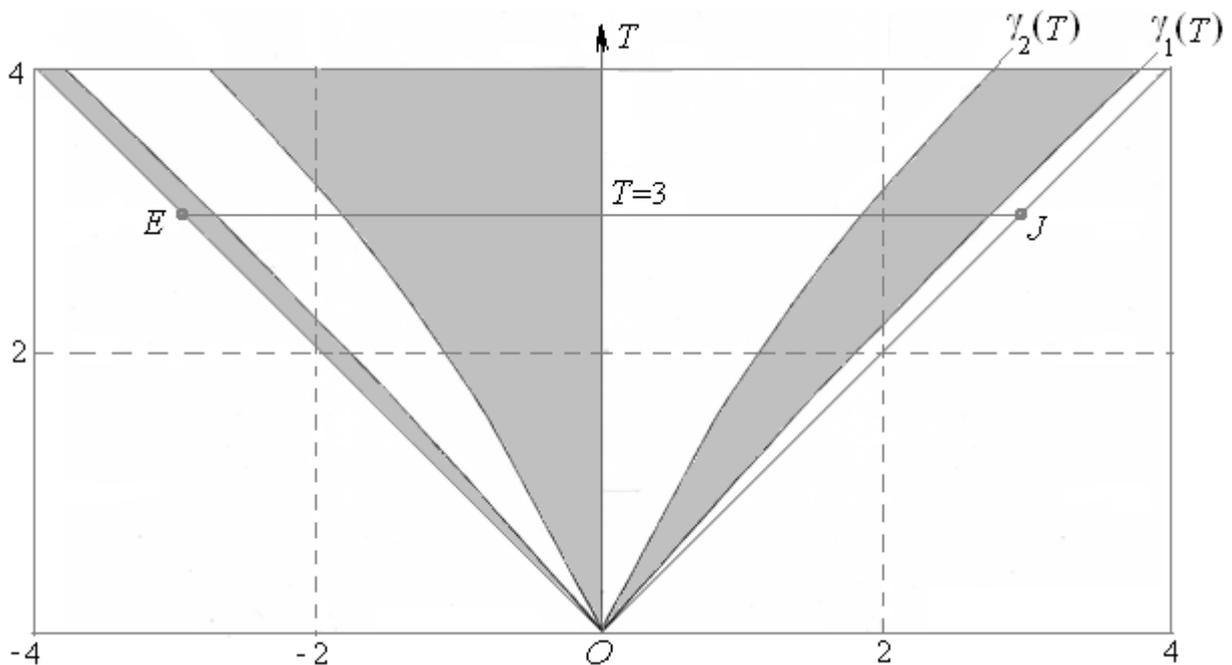


Рис. 4. Диаграмма функций оптимального управления для системы (4.6) при $\omega = 2$

На рис. 4 вверх по оси симметрии отложена ось T . Каждое горизонтальное сечение диаграммы прочитывается слева-направо и символизирует в смещенном времени $\tilde{t} = t - T$ одну кусочно-постоянную функцию оптимального управления $u(\tilde{t}), \tilde{t} \in [-T, T]$. Серым отрезкам горизонтали соответствуют промежутки времени, где $u = 1$, а белым отрезкам – где $u = -1$. Например, сечение EJ задает при $T = 3$ функцию оптимального управления с пятью переключениями в моменты $\tau_1, \tau_2, T, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$, где $\tau_1 \approx 0.25676702, \tau_2 \approx 1.14729855$. Осевая симметрия диаграммы (с заменой цвета зеркальных областей) обусловлена утверждением 1. Симметричные графики функций $\gamma_1(T)$ и $\gamma_2(T)$ изображаются вдоль вертикальной оси T , они строятся путем численного интегрирования системы (6.3). В ее уравнениях при $T = 0$ возникает неопределенность вида $[0/0]$, поэтому в алгоритме Рунге-Кутты в качестве начальных значений производных можно взять величины (5.5). Для случая $n = 2$ они следуют из решения системы (5.4) в виде $\alpha_1 = 3/4, \alpha_2 = 1/4$, так что из формул (5.6) при $T = 0$ имеем $\dot{\gamma}_1(0) = \sqrt{3}/2, \dot{\gamma}_2(0) = 1/2$. Построенные на диаграмме области раскрашиваются в соответствии с утверждением 6.

Специфика зависимостей $\gamma_1(T)$ и $\gamma_2(T)$ (с обнаруженными их асимптотами) такова, что с ростом значений T моменты переключения τ_1, τ_2 меняются лишь уточнением очередных знаков после запятой.

На рис. 5 показаны оптимальные полутраектории системы системы (4.6) при $\omega = 2$ на фазовой плоскости (x_1, y_1) , вычисленные для разных заранее заданных параметров T (их значения помечены в конечных точках на координатной оси Oy_1). Каждая полутраектория выходит из точки $O(0,0)$ при $u = 1$, завершается точкой на оси Oy_1 и затем, согласно утверждению 1, дополнилась бы симметричной (относительно оси Oy_1) полутраекторией, которая завершилась бы в точке O . Область всех возможных оптимальных полутраекторий на плоскости (x_1, y_1) ограничена пунктирной линией, построенной как условная фазовая кривая $O \rightarrow R_1 \rightarrow R_2$ при управлении с двумя «предельными» моментами переключения $\tau_1 = \ln(4/3)$ и $\tau_2 = \ln 4$, взятыми из соотношений (6.6). К этой условной линии асимптотически приближаются оптимальные полутраектории при $T \rightarrow \infty$.

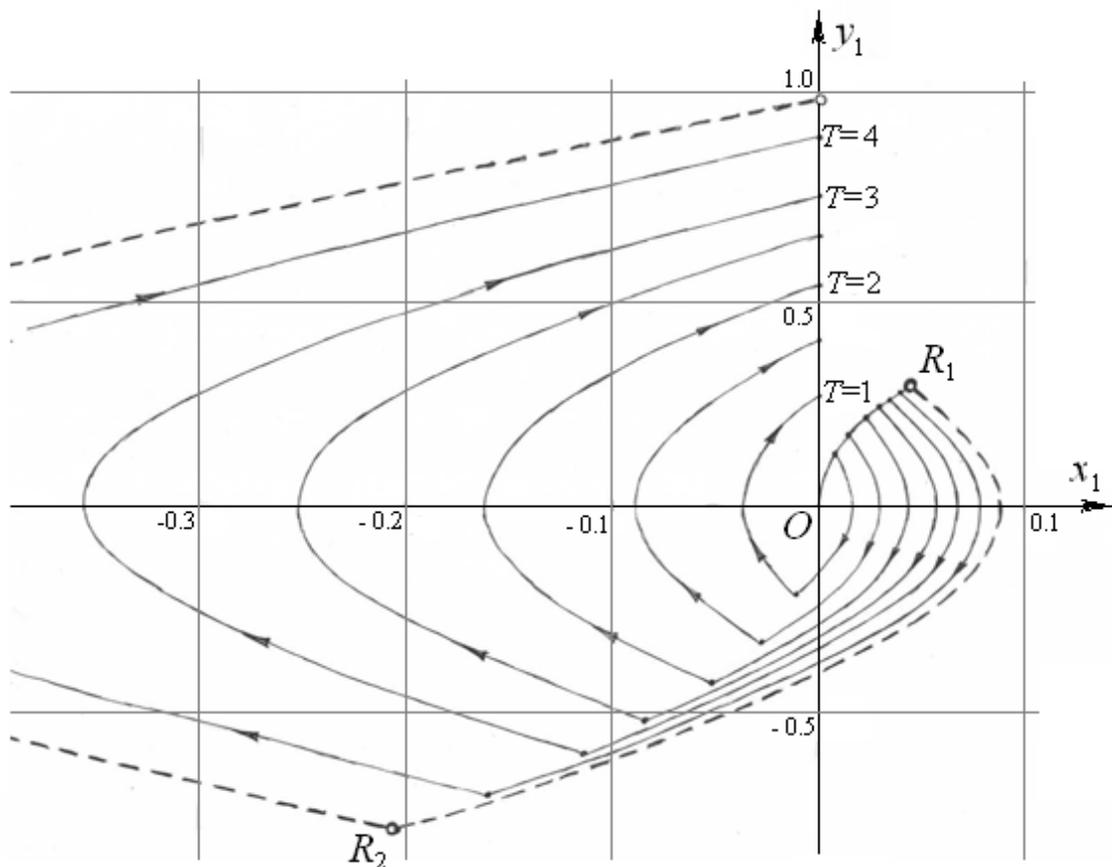


Рис. 5. Оптимальные полутраектории на фазовой плоскости (x_1, y_1) для системы (4.6) при $\omega = 2$

На рис. 6 показана зависимость между безразмерными параметрами $2b$ и $2T$ (характеризующими, соответственно, дальность и время перемещения) в задаче быстрогодействия (2.1)-(2.3) для случая $n = 2$, т.е. для системы (4.1) при $\omega = 2$.

Заметим, что в задаче быстрогодействия для системы (4.6) никакие ограничения на координаты не оговаривались, хотя исходная линейная модель (1.1) возникла в предположении о малости перемещений. Тем не менее, как покажем далее, это не порождает конкретных запретов на «безразмерную» длительность T в системе (4.6) в том смысле, что любое горизонтальное сечение диаграммы (рис. 4) может стать актуальным для малого перемещения платформы с перевернутыми маятниками (при соответствующем выборе величины внешней управляющей силы).

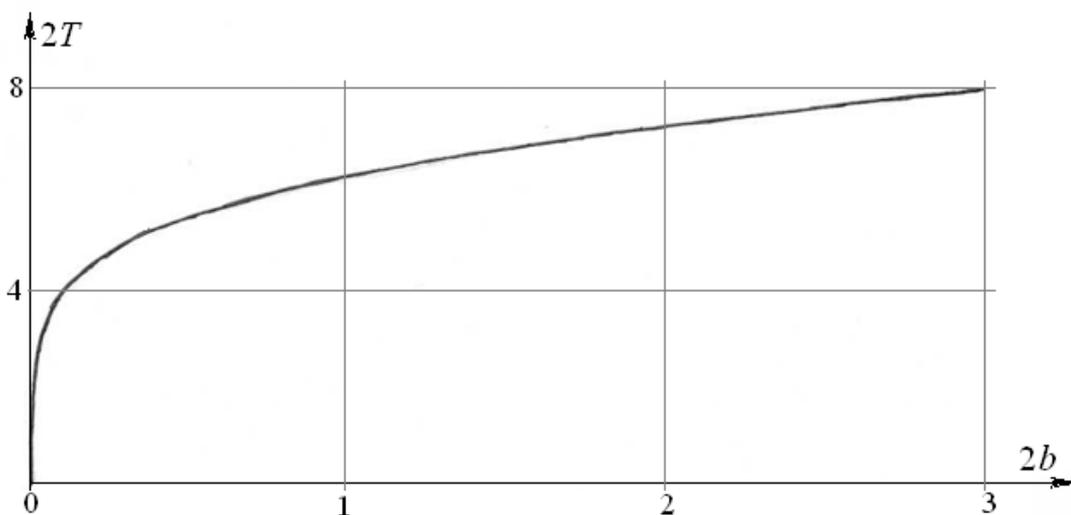


Рис. 6. Зависимость между параметрами $2b$ и $2T$ для системы (4.6) при $\omega = 2$

7. Сравнение поведения линейной и нелинейной моделей

Возвращаясь к исходной модели с физическими параметрами, рассмотрим задачу перемещения платформы с двумя перевернутыми маятниками. Далее возьмем конкретные массо-инерционные характеристики в виде $m_0 = 1$ кг (масса платформы), $m_1 = 0.3$ кг и $m_2 = 0.1$ кг – точечные массы на концах двух невесомых жестких стержней. Длины стержней примем $l_2 = 1$ м и $l_1 \approx 0.306186349$ м – это значение найдено напоследок из условия, чтобы упомянутые выше преобразования системы (1.1) к виду (2.1) дали параметры $\varpi_1 = 1$, $\varpi_2 = 2$; тогда в расчетах можно будет использовать готовые управляющие функции, найденные в примере 2. Задачу перемещения платформы исследуем численно сначала в линейном приближении (1.1), а затем и в общей (нелинейной) постановке. В обоих случаях из физических соображений заранее известно недопустимое значение углов отклонения стержней от вертикали, когда уравниются моменты вертикальной силы тяжести и горизонтальной переносной силы инерции. Это «запретное» значение угла φ_* вычисляется по формуле

$$\varphi_* = \arctg\left(\frac{a/g}{m_0+m_1+m_2}\right). \tag{7.1}$$

Пример 3. Используем найденные функции оптимального управления (рис. 4) для перемещения линейной системы (1.1) с принятыми массо-инерционными характеристиками. Вводя безразмерные константы, управление, координату и время

$$w = \frac{a}{m_0g}, \quad \varepsilon_1 = \frac{m_1}{m_0}, \quad \varepsilon_2 = \frac{m_2}{m_0}, \quad \beta = \frac{l_1}{l_2}, \quad u_1 = \frac{u}{m_0g}, \quad z_0 = \frac{q_0}{l_1}, \quad t_1 = t\sqrt{\frac{g}{l_1}}, \tag{7.2}$$

преобразуем уравнения (1.1) к виду, где производные по времени t_1 помечены точками:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_0 &= \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2 + u_1, & |u_1| &\leq w, \\ \ddot{\varphi}_1 &= (1 + \varepsilon_1)\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2 + u_1, & \ddot{\varphi}_2 &= \beta[\varepsilon_1\varphi_1 + (1 + \varepsilon_2)\varphi_2 + u_1] \end{aligned} \tag{7.3}$$

Начальные условия движения

$$z_0(0) = \dot{z}_0(0) = 0, \quad \varphi_i(0) = \dot{\varphi}_i(0) = 0, \quad i = 1, 2 \tag{7.4}$$

взаимно-однозначно соответствуют условиям (2.2) системы (2.1). Поскольку масштаб безразмерного времени t' в уравнениях (2.1) и t_1 в (7.3) разный, то для применения имеющейся функции оптимального управления $u(t')$, $t' \in [0, 2T]$ требуется пересчет времён по формуле

$$t' = t_1 \sqrt{\chi_2}, \quad \chi_2 = \omega_1^2 l_1 / g \approx 0.3273609968,$$

где χ_2 – второе собственное число матрицы $(-l_1/g)BA^{-1}$.

Для случая $T = 3$ (выделенного сечением EJ на рис. 4) получим в новом времени t_1 продолжительность полутраектории $T_1 \approx 5.2433371915$, а первые моменты переключения $\tau_1 \approx 0.4487720218$, $\tau_2 \approx 2.0052243857$.

Диапазон допустимых отклонений стержней, оправдывающий линеаризацию модели, заранее не определен. Известно лишь заведомо «запретное» значение (7.1), которое в принятых безразмерных переменных (7.2) будет

$$\varphi_* = \operatorname{arctg}\left(\frac{w}{1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right). \tag{7.5}$$

Заметим, что линейные уравнения (7.3) инвариантны относительно одновременного изменения масштаба координат и управления. Это значит, что если при некотором выбранном значении величины w управляющей силы наибольшие отклонения угловых координат $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$, превысили допустимые в k раз, то при действии силы w/k поведение углов окажется приемлемым.

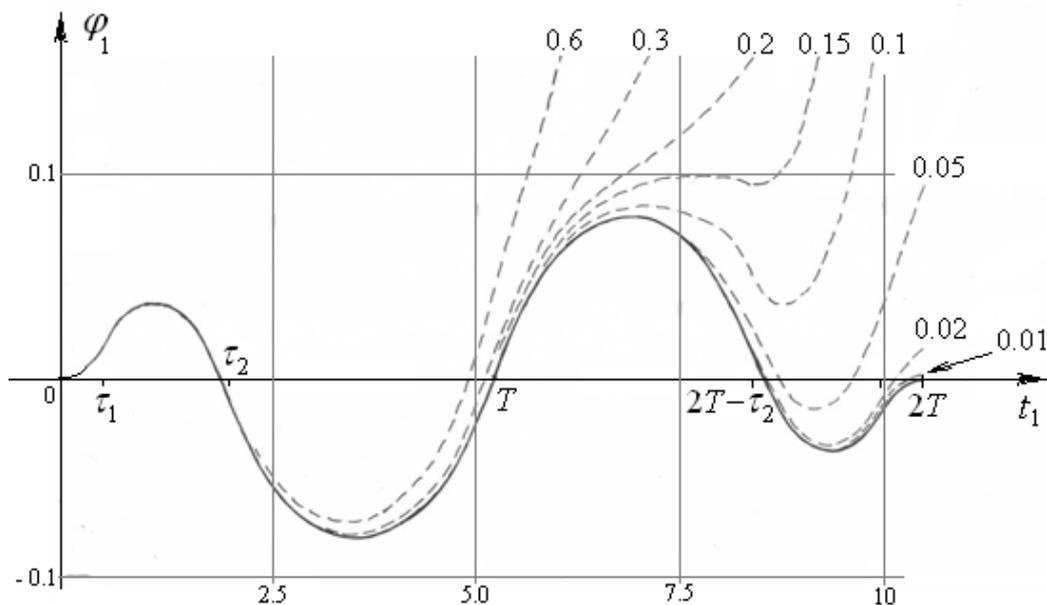


Рис. 7. График функции $\varphi_1(t_1)$ при наивысшем перемещении системы (7.3)

На рис. 7 сплошной линией показана зависимость угла φ_1 от безразмерного времени t_1 в системе (7.3) при действии управления с ограничением $w = 0.15$, что в физических величинах соответствует действию на платформу силой $a = 0.15 m_0 g \approx 1.5$ н. Пунктирные линии комментируются ниже.

Далее такую же управляющую функцию применим к более точной (нелинейной) модели.

Пример 4. Для вывода нелинейных уравнений движения платформы с двумя перевернутыми маятниками используем обобщенные координаты $\mathbf{q} = (q_0, \varphi_1, \varphi_2)^T$ и функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{q}_0^2 (m_0 + m_1 + m_2) + \sum_{i=1}^2 m_i l_i \left(\frac{1}{2} l_i \dot{\phi}_i^2 - \dot{q}_0 \phi_i \cos \phi_i - g \cos \phi_i \right).$$

Уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{b}u, \quad \mathbf{b} = (1, 0, 0)^T, \quad |u| \leq a$$

с переходом к безразмерным константам, переменным и времени (7.2) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \ddot{z}_0 &= [\varepsilon_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \varepsilon_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + F] / \sigma, & |u_1| &\leq w, \\ \ddot{\varphi}_1 &= [(1 + \varepsilon_1) \sin \varphi_1 + \varepsilon_2 \sin \varphi_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + F \cos \varphi_1] / \sigma, \\ \ddot{\varphi}_2 &= \beta [\varepsilon_1 \sin \varphi_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + (1 + \varepsilon_2) \sin \varphi_2 + F \cos \varphi_2] / \sigma, \\ F &= u_1 - \varepsilon_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 - \varepsilon_1 \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 / \beta, \quad \sigma = 1 + \varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon_2 \sin^2 \varphi_2. \end{aligned} \tag{7.6}$$

На рис. 7 пунктирными линиями показаны графики функций $\varphi_1(t_1)$ в системе (7.6) при действии управлений с разными значениями w (они помечены для каждой кривой). Чем больше w , тем раньше начинается падение перевернутого маятника. Далее для разных значений w были численно найдены значения τ_1, τ_2 , при которых управление с пятью переключениями в моменты $\tau_1, \tau_2, T, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$, перемещает платформу с возвращением маятников в верхнее неустойчивое состояние равновесия.

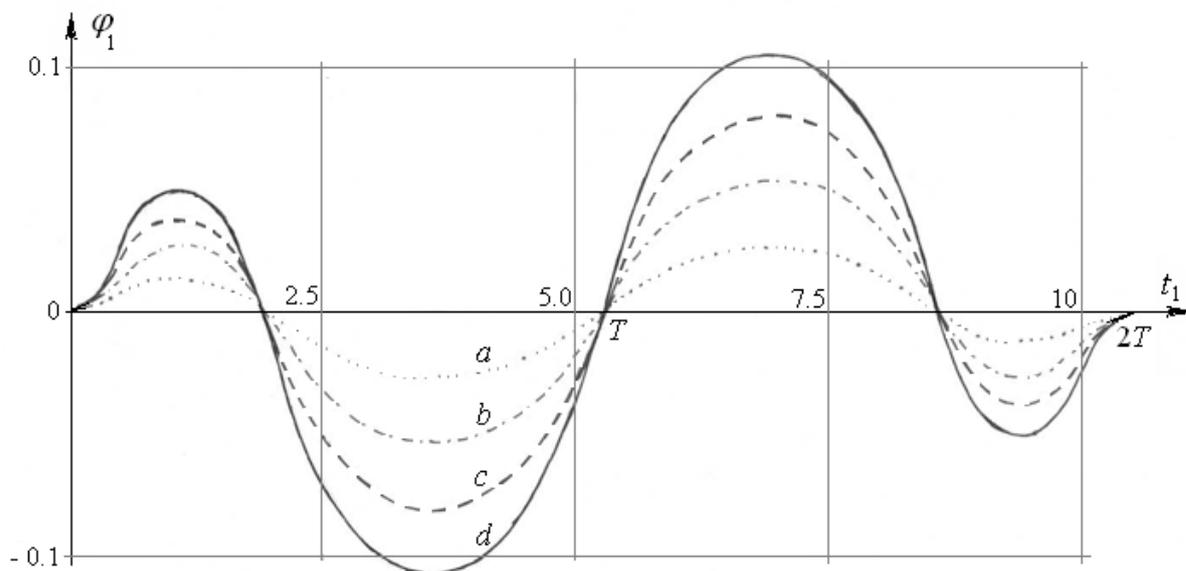


Рис. 8. График функции $\varphi_1(t_1)$ при перемещении нелинейной системы (7.6)

На рис. 8 показаны соответствующие графики функций $\varphi_1(t_1)$, которые качественно не отличаются от графиков $\varphi_2(t_1)$. Кривые a (при $w = 0.05$), b ($w = 0.10$), c ($w = 0.15$), d ($w = 0.20$) имеют близкие, но не совпадающие первую и третью точки пересечения с осью безразмерного времени t_1 , но совпадающие вторую (при $t_1 = T$) и четвертую (при $t_1 = 2T$).

Найденные значения моментов переключения показаны в таблице 1 в пересчете в реальное время t (в сек), когда $2T \approx 1.852979$ сек, где также указано перемещение платформы L (в м). Для сравнения даны значения, вычисленные для линейной системы, где дальность пропорциональна w .

Таб. 1. Численные значения моментов переключения τ_1, τ_2 и дальности перемещения L

	Для линейной системы	Значения для нелинейной системы при разных ресурсах w			
		$w = 0.05$	$w = 0.10$	$w = 0.15$	$w = 0.20$
τ_1	0.0792972905	0.0793110766	0.0793284205	0.0793306441	0.0793306728
τ_2	0.3543199059	0.3544101985	0.3545352745	0.3545877910	0.3546422015
L	0.54386 w	0.026810	0.053765	0.079930	0.106740

8. Заключение

Рассмотрена задача оптимального по быстродействию перемещения платформы с n перевернутыми маятниками на заданное расстояние посредством горизонтальной силы, когда в начале и в конце движения система должна находиться в состоянии покоя. В предположении о малости отклонений маятников от вертикали уравнения движения использовались в линейном приближении (1.1), упрощаемых к виду (1.4). Исследование проводилось для взаимной вариационной задачи (на максимум расстояния при заданном времени движения). Ввиду симметрии краевых условий (2.2)-(2.3) и уравнений (2.5) сопряженной системы (из принципа максимума Понтрягина) искомая функция оптимального управления оказалась кусочно-постоянной с нечетным числом переключений. В моменты переключения $\tau_i, i = 1, 2, \dots, n$, обращается в ноль выраженный через них вспомогательный определитель (3.7). Это условие было интерпретировано геометрически в многомерном пространстве как движение изображающей точки по «контрольной кривой» (4.5). Анализ свойств этой кривой показал, что для малых значений длительности $2T$ оптимальной траектории на ней будет $(2n + 1)$ переключений управления. Т.е. число переключений на полутраектории равно количеству n маятников. При этом если число n нечетное, то начальное значение управляющей функции отрицательно, так что платформа начинает перемещение с реверса. Если же n четно, то реверса нет. Значения моментов времени переключения оказались ограниченными сверху наперед известными величинами, поскольку ограничена область управляемости в фазовом пространстве. Поэтому с ростом значения T эволюция корней $\gamma_i = T - \tau_i, i = 1, 2, \dots, n$, нелинейной системы (2.9) задается графиками функций $\gamma_i(T)$, имеющих асимптоты. Рассмотрен подробно случай $n = 2$, для которого контрольная кривая является плоской. Ввиду вогнутости этой кривой оптимальное управление имеет ровно два момента переключения τ_1, τ_2 на полутраектории при любой ее длительности T . При $T \rightarrow \infty$ значения τ_1, τ_2 имеют пределы, определяемые из уравнения (6.5). Графики $\gamma_1(T), \gamma_2(T)$, построенные путем интегрирования уравнений (6.3), позволяют представить множество функций оптимального управления $u(t), t \in [0, T)$ (с изменением значения T) в виде наглядной диаграммы (рис. 4). Для общего случая n устройство такой диаграммы в окрестности нижней вершины O определяется соотношением (5.6), причем значения корней $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$, вспомогательной нелинейной системы (5.4) не зависят от набора частот $\omega_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Показано, что сценарий со сколь угодно большим значением T может оказаться все равно актуальным для задачи перемещения платформы с маятниками, поскольку малость отклонений звеньев от вертикали может быть достигнута уменьшением амплитуды действующей горизонтальной силы. Численный анализ при $n = 2$ подтвердил, что при малых значениях этой силы закон управления нелинейной системой (7.6) может быть качественно тем же (с двумя переключениями на полутраектории), что и для линейной системы (7.3), причем значения τ_1, τ_2 для этих систем весьма близки.

Литература

- [1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука. 1976. 392 с.
- [2] Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. – М.: Наука, 1980. 383 с.
- [3] Голубев Ю.Ф. Оптимальное по быстродействию управление перемещением неустойчивого стержня // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 5. С. 42–50.
- [4] Srinivasan B., Huguenin P., Bonvin D. Global stabilization of an inverted pendulum. Control strategy and experimental verification // Automatica. 2009. V. 45. P. 265-269.
- [5] Gordillo F., Aracil J. A new controller for the inverted pendulum on a cart // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2008. No. 18. P. 1607-1621.
- [6] Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управляемый маятник на подвижном основании // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. № 1. С. 9-23.
- [7] Рапопорт Л.Б., Генералов А.А. Управление перевернутым маятником на колесе // Автоматика и телемеханика. 2022. № 8. С. 3-28.
- [8] Каюмов О.Р. Оптимальное по быстродействию перемещение платформы с осцилляторами // Прикладная математика и механика. 2021. Т.85. Вып. 6. С. 699-718.
- [9] Каюмов О.Р. Диаграммы функций оптимального управления в задаче наибыстрейшего перемещения платформы с двумя осцилляторами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2022. № 5. С. 66-83.
- [10] Каюмов О.Р. О диаграммах функций оптимального управления в задаче перемещения платформы с осцилляторами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2024. № 2. С. 87-103.
- [11] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука. 1972. 574 с.

On the fastest small movements of the platform with inverted pendulums

Кайумов О.Р.^{1,*},

¹ Branch of Omsk State Pedagogical University, Tara, Omsk Oblast, Russia

* Oleg_Kayumov@mail.ru

Abstract. We consider the problem of time-optimal movement of a platform moving translationally along a horizontal straight line and carrying n inverted pendulums, and during the movement the pendulums should not pass through the lower vertical positions. The only control force is applied to the platform and is limited in magnitude, there is no friction. The system is transferred from the one unstable state of rest to a similar state at a given distance. It is assumed to be small to the extent that linearized equations of motion can be used. The evolution of optimal control functions depending on the amount of platform movement is studied. A general approach to constructing a visual diagram reflecting such evolution is proposed. It is shown that when the number of inverted pendulums is odd, the movement of the platform begins from reverse, but when there is an even number, it does not. The optimal control modes found for a linear system are applied to the problem of small displacement of a platform with two inverted pendulums in a nonlinear formulation.

Keywords: time-optimal problem, platform with inverted pendulum.