ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 2, 2010
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal
http://www.newa.ru/journal
e-mail: jodiff@mail.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

Инвариантные множества для системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито

О.В. АЛЕКСАНДРОВА

Украина, г. Макеевка, ул.Державина,2, Донбасская Национальная Академия Строительства и Архитектуры, кафедра высшей и прикладной математики и информатики, e-mail: alexand_olga_la@mail.ru

Аннотация.

Предложен метод вычисления инвариантного множества для системы стохастических дифференциальных уравнений Ито методами группового анализа этих уравнений. Для системы двух нелинейных стохастических дифференциальных уравнений построены инвариантные множества.

1. Анализ известных результатов и формулировка основных теорем.

Сейчас все чаще исследуются стохастические системы, в которых присутствует некоторый инвариант, характеризующий ее устойчивость. В 1978 г. В.А. Дубко [1] ввел понятие первого интеграла для системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) и доказал условие его существования. Он также показал, что при определенных требованиях многообразия, связанные с первым интегралом системы СДУ, являются устойчивыми многообразиями.

Определение 1. [1]

Пусть $x(t) \in R^n$ - динамический процесс, являющийся решением системы СДУ Ито с винеровскими возмущениями. Неслучайная вещественная функция $u(x(t);t)$ называется первым интегралом системы СДУ, если она с вероятностью 1 на любой из траекторий решения принимает постоянное значение, зависящее только от значения $x(0)$: $u(x(t);t) = u(x(0);0)$.

В статье [2] для неоднородных систем СДУ без последействия:

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + \sum_k b_k(t, \xi(t))dw_k(t) + \int_R C(t, \xi(t), u)\nu(dt, du) \tag{1}$$

введено понятие инвариантности поверхностей.

Определение 2. [2].

Множество

$$\varGamma_Q(G) = \{(t, x): G(t, x) = C\} \tag{2}$$

называется инвариантным в области Q множеством уравнения (1), если для любых $(t_0, x_0) \in \varGamma_Q(G)$ и всех $t \geq t_0$: $[G(t, \xi(t)) - G(t_0, x_0)]\phi(t) = 0$ п.в., где $\phi(t) = 1$ при $t_0 \leq t < \tau_Q(t_0, x_0)$, и $\phi(t) = 0$ при $t \geq \tau_Q(t_0, x_0)$.

Здесь $\tau_Q(t_0, x_0)$ - момент первого выхода траектории решения $\xi(t)$ из области Q, т.е. $\tau_Q(t_0, x_0) = \inf\{t \geq t_0 : \xi(t) \notin D\}$, если множество тех $t \geq t_0$, для которых $\xi(t) \notin D$ непустое, и $\tau_Q(t_0, x_0) = \infty$ в противном случае.

Таким образом, сравнение определений 1 и 2 дает следующий вывод: инвариантное множество для обыкновенного стохастического дифференциального уравнения – это его первый интеграл. Применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям то же самое можно прочитать, например, в [3, с.338]: «Закон сохранения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений эквивалентен классическому понятию первого интеграла или константе движения системы».

В данной работе предложен более простой и более эффективный способ построения инвариантного множества для системы обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений Ито при помощи методов группового анализа. Полученный результат продемонстрирован на примере нелинейной системы стохастических дифференциальных уравнений Ито. Предложенный способ построения инвариантного множества системы не требует вычисления специального вида функций, как в работе [2], а подразумевает только умение решать детерминированные дифференциальные уравнения с частными производными.

Для координат касательного вектора введем обозначение:

$$\Xi(t,u,w)=\begin{pmatrix}\eta(t,u,w)\\ \zeta(t,u,w)\end{pmatrix}.$$

2. Основные результаты статьи.

Теорема 1. (необходимое и достаточное условие существования первого интеграла для системы СДУ Ито).

Пусть E - локальная однопараметрическая группа симметрий уравнения

$$du(t)=A(t,u(t))dt+B(t,u(t))dw(t), \tag{3}$$

Пусть $X=\xi(t)\partial_t+\sum_{i=1}^{2}\Xi_i(t,u,w)\partial_{u_i}$ – инфинитезимальный оператор группы E. Гладкая функция $F(t,u,w)$ определяет первый интеграл для уравнения (3) тогда и только тогда, когда координаты касательного вектора группы на кривой $F(t,u,w)=C$ имеют значения $\xi(t)=1$, $\Xi(F)=0$.

Доказательство.

Пусть $F(t,u,w)$ - функция, определяющая в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций некоторую кривую $F(t,u,w)=C$.

Касательный вектор к этой кривой на множестве точек $\{\forall(t,u,w)\in G : F(t,u,w)=C\}$ имеет вид $\xi(t)=1$, $\Xi(t,u,w)=\Xi(F)=0$. Подставим координаты касательного вектора в систему определяющих уравнений [4]:

$$\begin{cases} -\Xi_F \cdot \left(\nabla F\overline{B}\right)=\overline{0}, \\ -\Xi_F \cdot \left[\nabla F\overline{A}+\frac{1}{2}Sp\left(\Delta F\overline{B}\overline{B}^T\right)\right]-\frac{1}{2}\Xi_{FF}\left[\left(\nabla F\overline{B}\right)\overline{B}^T\nabla F^T\right]=\overline{0}. \end{cases} \tag{4}$$

Коэффициент при Ξ_{FF} во втором уравнении равен 0 (в силу первого равенства системы (4) и ассоциативности умножения матриц), следовательно, систему (4) можно переписать:

$$\begin{cases} -\Xi_F \cdot \left(\nabla F\overline{B}\right)=\overline{0}, \\ -\Xi_F \cdot \left[\nabla F\overline{A}+\frac{1}{2}Sp\left(\Delta F\overline{B}\overline{B}^T\right)\right]=\overline{0}. \end{cases} \tag{5}$$

Применим к функции $F(t,u,w)$ формулу Ито:

$$dF=\left[\nabla F\overline{A}+\frac{1}{2}Sp\left(\Delta F\overline{B}\overline{B}^T\right)\right]dt+\nabla F\overline{B}dw(t). \tag{6}$$

Из системы (5) следует, что правая часть уравнения (6) равна 0.

Следовательно, $dF=0$. Так как система (5) выполнена для любых $(t,u)\in G$ и $w\in R^2$, то $F(t,u,w)=C$, $\forall(t,u)\in G$. Таким образом, $F(t,u,w)$ является первым интегралом системы обыкновенных СДУ Ито.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\{\forall(t,u)\in G : F(t,u,w)=c\}$, где G – инвариантное множество системы уравнений Ито. Докажем, что в этом случае касательный вектор на кривой $F(t,u,w)=C$ имеет вид: $\xi(t)=1$, $\Xi(F)=0$.

Запишем систему определяющих уравнений для координат касательного вектора (в матричной форме):

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\xi_t \overline{B} - \Xi_F \cdot \left(\nabla F \overline{B}\right) + \overline{B}_a\big|_{a=0} = \overline{0}, \\ \\ \xi_t \overline{A} + \overline{A}_a\big|_{a=0} - \Xi_F \cdot \left[\nabla F \overline{A} + \frac{1}{2} Sp\left(\Delta F \overline{B}\overline{B}^T\right)\right] - \frac{1}{2}\Xi_{FF}\left(\nabla F \overline{B}\right)\overline{B}^T \nabla F^T = \overline{0}. \end{cases} \quad (7)$$

Так как

$$dF = \left[\nabla F \overline{A} + \frac{1}{2} Sp\left(\Delta F \overline{B}\overline{B}^T\right)\right]dt + \nabla F \overline{B} dw(t) = 0,$$

то

$$\nabla F \overline{A} + \frac{1}{2} Sp\left(\Delta F \overline{B}\overline{B}^T\right) = 0 \qquad \text{и} \qquad \nabla F \overline{B} = 0.$$

Следовательно, система (7) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\xi_t \overline{B} + \overline{B}_a\big|_{a=0} = \overline{0}, \\ \\ \xi_t \overline{A} + \overline{A}_a\big|_{a=0} = \overline{0}. \end{cases} \quad (8)$$

Но выполнение равенств (8) возможно лишь при выполнении условий

$$\xi_t = 0, \; \overline{B}_a\big|_{a=0} = \overline{0}, \; \overline{A}_a\big|_{a=0} = \overline{0}.$$

Следовательно,

$$\xi(t) = const, \; \Xi(F) = 0, \; \overline{A}_t = \overline{0}, \; \overline{B}_t = \overline{0}. \quad (9)$$

Поскольку $(\xi(t), \Xi)$ - координаты касательного вектора группы, то без ограничения общности можно положить $\xi(t) = 1$.

Теорема 1 доказана.

Условия (9) дают возможность сформулировать еще одно утверждение:

Следствие. Для того чтобы обыкновенное СДУ Ито обладало стационарным множеством, необходимо, чтобы его коэффициенты не зависели от переменной времени (t).

Теорема 1 иллюстрируется примером системы нелинейных уравнений Ито, известную [5], как модель Гестона.

Для этой системы сформулированы и доказаны теоремы 2, 3, 4, 5.

Пример.

Рассмотрим систему нелинейных СДУ Ито, известную [5], как модель Гестона:

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + S(t)\sqrt{v}dw_1(t), \\ dv(t) = -\gamma(v-\theta)dt + k\rho\sqrt{v}dw_1(t) + k\sqrt{v}\sqrt{1-\rho^2}dw_2(t). \end{cases} \tag{10}$$

Здесь θ – среднее значение волатильности при $t \to \infty$,

γ – скорость релаксации к среднему значению θ,

k характеризует величину флуктуаций v ,

$w_1(t)$, $w_2(t)$ – независимые винеровские процессы.

Термин волатильность означает общую меру неопределенности в динамике стоимости актива и характеризует величину рыночных флуктуаций его цены. В модели Башелье–Самуэльсона [6] волатильность σ является одним из параметров модели геометрического броуновского движения, широко применяемого как универсальная модель для спекулятивных рынков. При постоянном σ уравнение Самуэльсона предсказывает лог – нормальное распределение стоимости актива, а переменная σ может быть оценена как средне–квадратическое отклонение приращений логарифма стоимости, измеряемых в течение некоторого промежутка времени. Накопленные в настоящее время эмпирические данные [7], в основном западные, позволяют сделать вывод, что предположение о постоянстве волатильности не учитывает многие важные особенности рынка. В работе [8], в теории оценки опционов была предложена модель со стохастической волатильностью – модель Гестона. В этой модели $\sigma = \sqrt{v}$ и принимается [8], что v удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dv(t) = -\gamma(v-\theta)dt + k\rho\sqrt{v}dw_1(t) + k\sqrt{v}\sqrt{1-\rho^2}dw_2(t),$$

где $\rho \in [-1;1]$ - коэффициент корреляции, $w_2(t)$ – стандартный винеровский процесс, независимый от $w_1(t)$.

Для системы (10) построены инвариантные множества в зависимости от сочетаний параметров k, γ и θ, входящих в систему.

Теорема 2.

Инвариантное множество для системы уравнений Гестона при $\frac{k^2}{4} = \gamma\theta$, $\gamma \neq 0$, $\theta \neq 0$ имеет вид:

$$\left\{\forall(t,v,w_1,w_2): e^{\frac{\gamma}{2}t}\left(2\sqrt{v} - kw_2\sqrt{1-\rho^2} - k\rho w_1\right) + \frac{\gamma}{2}\int e^{\frac{\gamma}{2}s}\left(2\sqrt{v} - kw_2(s)\sqrt{1-\rho^2} - k\rho w_1(s)\right)ds = C\right\}$$

Здесь C – постоянная.

Теорема 3. Если $\frac{k^2}{4} \neq \gamma\theta$, $k = 0$, $\gamma = 0$, то инвариантное множество для системы уравнений Гестона выглядит таким образом:

$$\Gamma = \left\{\forall(t,v): 2\sqrt{v} = C\right\}.$$

Теорема 4. Если $\frac{k^2}{4} \neq \gamma\theta$, $k = 0$, $\gamma \neq 0$, то инвариантное множество для системы уравнений Гестона имеет вид:

$$\Gamma = \left\{\forall(t,v): 4e^{\gamma t}(v-\theta) = C\right\}.$$

Теорема 5. Если $\frac{k^2}{4} \neq \gamma\theta$, $k \neq 0$, $\gamma = 0$, то у системы (4.5) инвариантного множества не существует.

3. Первые интегралы для системы уравнений Гестона.

Оператор группы преобразований, допускаемой системой (10), будем искать в классе операторов [4]:

$$X = \xi(t)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(t,S,v,w_1,w_2)\frac{\partial}{\partial S} + \zeta(t,S,v,w_1,w_2)\frac{\partial}{\partial v}.$$

Для определения функций ξ, η, ζ решим систему уравнений [4]:

$$\begin{cases} -\eta_{w_1} + \left(\frac{1}{2}\xi_t - \eta_S\right)S\sqrt{v} - k\rho\sqrt{v}\eta_v + \eta\sqrt{v} + \zeta\frac{S}{2\sqrt{v}} = 0, \\ -\eta_{w_2} - k\sqrt{v}\sqrt{1-\rho^2}\eta_v = 0, \\ -\eta_t + (\xi_t - \eta_S)\mu S + \gamma(v-\theta)\eta_v + \mu\eta - \frac{1}{2}\left(\eta_{w_1w_1} + \eta_{w_2w_2}\right) - \eta_{Sw_1}S\sqrt{v} - \\ -k\rho\sqrt{v}\eta_{vw_1} - \eta_{vw_2}k\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{v} - Sk\rho v\eta_{Sv} - \frac{1}{2}\eta_{SS}S^2v - \frac{1}{2}k^2v\eta_{vv} = 0, \\ -\zeta_{w_1} + \left(\frac{1}{2}\xi_t - \zeta_v\right)k\rho\sqrt{v} - S\sqrt{v}\zeta_S + \zeta\frac{k\rho}{2\sqrt{v}} = 0, \\ -\zeta_{w_2} + \left(\frac{1}{2}\xi_t - \zeta_v\right)k\sqrt{v}\sqrt{1-\rho^2} + \zeta\frac{k\sqrt{1-\rho^2}}{2\sqrt{v}} = 0, \\ -\zeta_t - (\xi_t - \zeta_S)\gamma(v-\theta) - \mu S\zeta_S - \gamma\zeta - \frac{1}{2}\left(\zeta_{w_1w_1} + \zeta_{w_2w_2}\right) - \zeta_{Sw_1}S\sqrt{v} - \\ -k\rho\sqrt{v}\zeta_{vw_1} - \zeta_{vw_2}k\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{v} - Sk\rho v\zeta_{Sv} - \frac{1}{2}\zeta_{SS}S^2v - \frac{1}{2}k^2v\zeta_{vv} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

Решением четвертого и пятого уравнений системы (11) будет функция:

$$\zeta = v\xi_t + \sqrt{v}\,F\left(t, -k\rho w_1 - w_2k\sqrt{1-\rho^2} + 2\sqrt{v}\right). \tag{12}$$

Далее, решая первое и второе уравнения системы (11), с учетом (12), найдем:

$$\eta = \xi_t S\ln S + \frac{Sw_1}{2}F\left(t, 2\sqrt{v} - kw_2\sqrt{1-\rho^2} - k\rho w_1\right) +$$

$$+S\Phi\left(t,2\sqrt{v}-kw_2\sqrt{1-\rho^2}-k\rho w_1\right),\tag{13}$$

$$\zeta=\xi_t v+\sqrt{v}F\left(t,2\sqrt{v}-kw_2\sqrt{1-\rho^2}-k\rho w_1\right).$$

Обозначим $\beta=2\sqrt{v}-kw_2\sqrt{1-\rho^2}-k\rho w_1$.

Подставим найденные η и ζ в третье и шестое уравнения системы (11):

$$\begin{cases} -\xi_{tt}S\ln S-\dfrac{Sw_1}{2}F_t-S\Phi_t-\dfrac{Sv\xi_t}{2}-\dfrac{S\sqrt{v}F}{2}+ \\ +F_\beta\left(\gamma\sqrt{v}+\left(\dfrac{k^2}{4}-\gamma\theta\right)\dfrac{1}{\sqrt{v}}\right)\dfrac{Sw_1}{2}+S\Phi_\beta\left(\gamma\sqrt{v}+\left(\dfrac{k^2}{4}-\gamma\theta\right)\dfrac{1}{\sqrt{v}}\right)=0, \\ -\xi_{tt}v-\sqrt{v}F_t-\gamma v\xi_t+\dfrac{F}{2}\left(-\gamma\sqrt{v}+\left(\dfrac{k^2}{4}-\gamma\theta\right)\dfrac{1}{\sqrt{v}}\right)+ \\ +\sqrt{v}F_\beta\left(\gamma\sqrt{v}+\left(\dfrac{k^2}{4}-\gamma\theta\right)\dfrac{1}{\sqrt{v}}\right)=0. \end{cases}\tag{14}$$

Теперь докажем сформулированные теоремы.

Доказательство теоремы 2.

Сначала докажем, что при $\dfrac{k^2}{4}=\gamma\theta$, $\gamma\neq 0$, $\theta\neq 0$ система уравнений (10) допускает бесконечномерную группу инвариантности с касательным вектором:

$$\xi(t)=c_1,$$

$$\eta=S\tilde{\Phi}\left(e^{\frac{\gamma}{2}t}\left(2\sqrt{v}-\alpha(t)\right)+\frac{\gamma}{2}\int_0^t e^{\frac{\gamma}{2}s}\left(2\sqrt{v}-\alpha(t)\right)ds\right)+$$

$$+\frac{Sw}{2}\tilde{F}\left(e^{\frac{\gamma}{2}t}\left(2\sqrt{v}-\alpha(t)\right)+\frac{\gamma}{2}\int_0^t e^{\frac{\gamma}{2}s}\left(2\sqrt{v}-\alpha(s)\right)ds\right)-$$

$$-\frac{S}{2}\int_0^t \tilde{F}\left(e^{\frac{\gamma}{2}s}\left(2\sqrt{v}-\alpha(s)\right)+\frac{\gamma}{2}\int_0^s e^{\frac{\gamma}{2}q}\left(2\sqrt{v}-\alpha(q)\right)dq\right)\sqrt{v}ds$$

$$\zeta=\sqrt{v}\tilde{F}\left(e^{\frac{\gamma}{2}t}\left(2\sqrt{v}-\alpha(t)\right)+\frac{\gamma}{2}\int_0^t e^{\frac{\gamma}{2}s}\left(2\sqrt{v}-\alpha(t)\right)ds\right). \qquad (15)$$

где $\tilde{\Phi}$, $\tilde{F}$ – дважды дифференцируемые функции,

$$\alpha(t)=kw_2(t)\sqrt{1-\rho^2}+k\rho w_1(t). \qquad (16)$$

Пусть $\frac{k^2}{4}=\gamma\theta$, $\gamma\neq 0$, тогда второе уравнение системы (14) преобразуется к виду:

$$-\xi_{tt}v-\sqrt{v}F_t-\gamma v\xi_t-\gamma\sqrt{v}\frac{F}{2}+\gamma vF_\beta=0,$$

которое расщепляется на 2 уравнения:

$$\xi_{tt}+\gamma\xi_t=0 \text{ и } -F_t-\gamma\frac{F}{2}+\gamma\sqrt{v}F_\beta=0.$$

В силу (16)

$$\beta=2\sqrt{v}-kw_2\sqrt{1-\rho^2}-k\rho w_1=2\sqrt{v}-\alpha(t), \text{ откуда } \sqrt{v}=\frac{\alpha(t)+\beta}{2}.$$

Тогда

$$\xi(t)=c_1+c_2e^{-\gamma t},\ F=\tilde{F}\left(e^{\frac{\gamma}{2}t}\beta+\frac{\gamma}{2}\int\alpha(s)e^{\frac{\gamma}{2}s}ds\right). \qquad (17)$$

Подставим теперь найденные выражения в первое уравнение системы (14):

$$-\gamma^2c_2e^{-\gamma t}S\ln S-S\Phi_t+\frac{Sv}{2}c_2e^{-\gamma t}+S\gamma\sqrt{v}\Phi_\beta-\frac{S\sqrt{v}}{2}\tilde{F}=0.$$

Так как $\gamma \neq 0$, а слагаемое $-\gamma^2 c_2 e^{-\gamma t} S \ln S$ не подобно никакому другому, то из последнего уравнения следует $c_2=0$. Получаем уравнение для определения функции Ф:

$$-S\Phi_t + S\gamma\sqrt{v}\Phi_\beta - \frac{S\sqrt{v}}{2}\tilde{F} = 0,$$

Из последнего уравнения найдем:

$$\varPhi = -\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{F}\left(e^{\frac{\gamma}{2}s}\beta + \frac{\gamma}{2}\int_0^s \alpha(q)e^{\frac{\gamma}{2}q}dq\right)\sqrt{v}ds + \tilde{\varPhi}\left(e^{\frac{\gamma}{2}t}\beta + \frac{\gamma}{2}\int_0^t \alpha(s)e^{\frac{\gamma}{2}s}ds\right). \qquad (18)$$

Подставим выражения (18) и (16) в (13), учитывая, что $c_2=0$, получим искомые равенства.

Согласно теореме 1, первый интеграл – это функция, на уравнении кривой которой касательный вектор допускаемой группы принимает вид (1, 0, 0). Положим в (14) $c_1 = 1$. Из формул (14) нетрудно видеть, что на множестве

$$\varGamma : \left\{ e^{\frac{\gamma}{2}t}\left(2\sqrt{v} - \alpha(t)\right) + \frac{\gamma}{2}\int_0^t e^{\frac{\gamma}{2}s}\left(2\sqrt{v} - \alpha(s)\right)ds = C \right\}$$

функции η и ζ одновременно обращаются в нуль.

Таким образом, $\varGamma$ – инвариантное множество для системы уравнений Гестона в случае $\frac{k^2}{4} = \gamma\theta$, $\gamma \neq 0$, $\theta \neq 0$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3.

Утверждение теоремы легко получить при помощи подстановки в формулы (17) $\gamma = 0$, $k = 0$.

Доказательство теоремы 4.

Пусть $\frac{k^2}{4} \neq \gamma\theta,\ k = 0,\ \gamma \neq 0.$

Тогда из (15) следует $\alpha(t) = 0$, и $\sqrt{v} = \frac{\beta}{2}$.

Как и в предыдущем случае (см. доказательство теоремы 2), доказывается, что $\xi(t) = c_1$, где c_1 - постоянная величина.

Подставим $\sqrt{v} = \frac{\beta}{2}$ и $k = 0$ в систему (14). После упрощения получим:

$$\begin{cases} \frac{w}{2}\left(-F_t + \frac{\beta}{2}F_\beta\left(\gamma - \frac{4\gamma\theta}{\beta^2}\right)\right) + \left(\frac{\beta}{4}F + \Phi_t - \frac{\beta}{2}\Phi_\beta\left(\gamma - \frac{4\gamma\theta}{\beta^2}\right)\right) = 0, \\ -F_t + \frac{F}{2}\left(\gamma + \frac{4\gamma\theta}{\beta^2}\right) + \frac{\beta}{2}F_\beta\left(\gamma - \frac{4\gamma\theta}{\beta^2}\right) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Так как в данном случае β не зависит от переменной w_1, то и функция F также не зависит от переменной w_1. Следовательно, коэффициент при w_1 в первом уравнении системы (19) можно приравнять нулю. Получим, что функция F является решением системы:

$$\begin{cases} -F_t + \frac{\beta}{2}F_\beta\left(\gamma - \frac{4\gamma\theta}{\beta^2}\right) = 0, \\ -F_t + \frac{F}{2}\left(\gamma + \frac{4\gamma\theta}{\beta^2}\right) + \frac{\beta}{2}F_\beta\left(\gamma - \frac{4\gamma\theta}{\beta^2}\right) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Так как $\gamma \neq 0$, то из системы (20) следует, что $F = 0$. Тогда функцию Φ находим из уравнения:

$$-\Phi_t + \gamma\left(\frac{\beta}{2} - \frac{2\gamma\theta}{\beta}\right)\Phi_\beta = 0.$$

Таким образом, $\Phi = I\left(4e^{\gamma t}(v-\theta)\right)$.

Подставляя найденные выражения для ξ, F, Φ в уравнения (14), получим:

$$\xi(t) = c_1,\ \eta = S \cdot I\left(4e^{\gamma t}(v-\theta)\right),\ \zeta = 0. \tag{21}$$

Полагая в формулах (21) $c_1 = 1$, найдем $\Gamma : \left\{4e^{\gamma t}(v-\theta) = C\right\}$ - это кривая, на которой $\eta = 0$. Так как $\zeta = 0$ везде, то в частности, ζ обращается в нуль и на кривой Γ. Следовательно, согласно теореме 1, Γ - инвариантное множество системы уравнений Гестона в случае $\frac{k^2}{4} \neq \gamma\theta,\ k = 0,\ \gamma \neq 0$.

Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5.

Сначала покажем, что если $\frac{k^2}{4} \neq \gamma\theta,\ k \neq 0,\ \gamma = 0$, то система уравнений (10) допускает бесконечномерную группу инвариантности с касательным вектором:

$$\xi(t) = c_1 t + c_2,\ \eta = Se^{\frac{k^2 t}{4\sqrt{v}}} H\left(2\sqrt{v} - kZ\sqrt{1-\rho^2} - k\rho w\right),\ \zeta = c_1 v, \tag{22}$$

где $H-$ дважды дифференцируемая функция.

Подставим в систему (20) $\gamma = 0$. Получим:

$$\begin{cases} -\xi_{tt} S\ln S - \dfrac{Sw}{2}F_t - S\Phi_t - \dfrac{Sv\xi_t}{2} - \dfrac{S\sqrt{v}F}{2} + \dfrac{Sw}{2}\left(\dfrac{k^2}{4\sqrt{v}}\right)F_\beta + S\Phi_\beta \dfrac{k^2}{4\sqrt{v}} = 0, \\ -\xi_{tt} v - \sqrt{v}F_t + \dfrac{k^2}{8\sqrt{v}}F + \sqrt{v}\dfrac{k^2}{4\sqrt{v}}F_\beta = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Так как $\gamma = 0$, а слагаемое $\xi_{tt} S\ln S$ не подобно никакому другому, то его можем приравнять нулю. Получим $\xi(t) = c_1 t + c_2$.

Подставим в систему (23) $\sqrt{v}=\dfrac{\alpha(t)+\beta}{2}$, где α(t) определяется по формуле (16), получим:

$$\begin{cases} -\dfrac{Sw}{2}F_t - S\Phi_t - \dfrac{S\xi_t}{2}\left(\dfrac{\alpha(t)+\beta}{2}\right)^2 - \dfrac{SF}{2}\left(\dfrac{\alpha(t)+\beta}{2}\right) + \dfrac{Sw}{2}\left(\dfrac{k^2}{2(\alpha(t)+\beta)}\right)F_\beta + \\ + S\Phi_\beta \dfrac{k^2}{2(\alpha(t)+\beta)} = 0, \\ -\left(\dfrac{\alpha(t)+\beta}{2}\right)F_t + \dfrac{k^2}{4(\alpha(t)+\beta)}F + \dfrac{k^2}{4}F_\beta = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение дает $F = 0$. Для функции Φ имеем уравнение

$$-S\Phi_t + S\Phi_\beta \frac{k^2}{2(\alpha(t)+\beta)} = 0,$$

из которого находим $\Phi = H(\beta) e^{\frac{k^2 t}{2(\alpha(t)+\beta)}}$.

С учетом обозначения $\beta = 2\sqrt{v} - kw_2\sqrt{1-\rho^2} - k\rho w_1$ искомая функция равна

$$\Phi = e^{\frac{k^2 t}{4\sqrt{v}}} H\left(2\sqrt{v} - kw_2\sqrt{1-\rho^2} - k\rho w_1\right).$$

Подставим $F = 0$, $\Phi = e^{\frac{k^2 t}{4\sqrt{v}}} H\left(2\sqrt{v} - kw_2\sqrt{1-\rho^2} - k\rho w_1\right)$ в выражения (13), и получим формулы (22). Из формул (22) видно, что η и ζ одновременно в нуль не обращаются. Следовательно, в этом случае система Гестона не обладает инвариантным множеством.

Теорема 5 доказана.

4. Выводы.

В данной статье при помощи методов группового анализа стохастических дифференциальных уравнений сформулированы и доказаны условия существования инвариантного множества для системы двух стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Доказанная теорема позволяет также строить первые интегралы систем стохастических дифференциальных уравнений Ито.

При помощи доказанной теоремы выписаны первые интегралы для системы Гестона двух нелинейных уравнений Ито в зависимости от сочетаний параметров, входящих в систему. Установлено также, что в одном из рассмотренных случаев система Гестона не обладает первым интегралом.

Литература.

1. *Дубко В.А.* Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений. Киев, 1978, 28 с. (Препринт, ИМ АН УССР; 78.27).
2. *Г.Л. Кулініч*, С.В. Кушніренко. Інваріантні множини систем стохастичних диференціальних рівнянь без післядії// теор. ймовір. та матем. статист. , вип. 63, 2000, с. 112-118.
3. *В.В. Кириченко*, А.М. Ковалев, Интегралы дифференциальных уравнений линейных систем с постоянными коэффициентами//ж. Труды ИПММ НАН Украины, Донецк, 2007, вып.15, с.89-97.
4. *Alexandrova Olga V.* Group analysis of the Ito Stochastic system// J. Differential Equations and Dynamical Systems, 2006, Vol. 14,№ 3/4, p.255 – 279.
5. *Ширяев Ф. Н.* О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики.//ж. Теория вероятностей и ее применения, 1994, т. 39, с.5-22.
6. *Ширяев А. Н.* Аналитические модели динамики стоимостей акций и облигаций.// ж. Теория вероятностей и ее применения, 1994, т. 39, вып. 1, с.5-33.

7. *Бухбиндер Г. Л.*, Чистилин К. М. Описание российского фондового рынка в рамках модели Гестона //ж. Математическое моделирование. 2005, т. 17, № 10, с. 31 – 38.
8. *Cont R.* Empirical properties of assept returns: sylized facts and statistical issues // J. Quant. Finance, 2001, v.1, p. 223-236.
9. *Dragulescu A., Yakovenko V.M.* Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility // J. Quant. Finance, 2002, v.2, p. 443-453.