

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 1, 2018
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>
e-mail: jodiff@mail.ru

Прикладные задачи

Методы фрактального анализа в исследовании изображений биомедицинских препаратов

Н. Ампилова, Е. Куликов, В. Сергеев, И. Соловьев

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет

Аннотация

Для решения задач сравнения и классификации цифровых изображений в настоящее время часто используются методы фрактального и мультифрактального анализа. В данной работе мы представляем результаты применения таких методов к изображениям, полученным с помощью метода чувствительной кристаллизации. Указанный метод был предложен для изучения препаратов крови, но в настоящее время наблюдается все возрастающий интерес к нему не только при исследовании медицинских препаратов, но и при анализе качества продуктов питания, изучении свойств почвы. Методы показывают достаточную перспективность как для простого сравнения изображений из разных классов, так и для получения классификационных признаков групп изображений. Также в этом контексте затрагиваются вопросы, связанные с классификацией изображений.

Ключевые слова: анализ изображений, фрактальные методы, классификационные признаки, биомедицинские препараты.

Abstract

The methods of fractal and multifractal analysis are now widely used because they allow us to analyze and classify digital images with complex structure. We present the results of application of these methods to images obtained by sensitive crystallization method. It was developed for studying blood images and now finds increasing use in analysis of medicines, definition of food and soil quality. It seems these methods are rather perspective both in comparing images from different classes and in obtaining a

classifying sign for a group of images. Problems arising in images classification are also discussed.

Keywords: image analysis, fractal methods, classifying signs, biomedical preparations.

1. Введение

Исследования многих процессов окружающей действительности часто используют цифровые образы состояний процессов, полученные в различные моменты времени наблюдений. В качестве примера можно указать изображение напряженности магнитного поля, записи электроэнцефалограмм, фазовые портреты динамических систем, показывающие их инвариантные множества, или кластерные образования, возникающие в различных диффузионных процессах. Изучение и анализ изображений как правило начинается с их визуальной оценки. Наше зрение обычно отмечает различия в структуре изображений посредством обнаружения топологических инвариантов или объектов, которые могут быть приняты в качестве специфических особенностей образа.

Если говорить об экспертном знании, то оно часто состоит в способности обнаруживать особенности изображений и выстраивать ассоциативные цепочки образов, представляя результат наблюдения как описание структуры изображения. При использовании математических методов анализа изображений мы также стремимся обнаружить такие особенности, которые могут рассматриваться как описания структуры изображений. Таким образом, математические методы опираются на формализацию нашего визуального восприятия, что также можно считать формализацией знаний эксперта. Мы приходим к тому, что выбор подходящей формализации для топологических инвариантов может привести к получению достаточно надежных результатов.

Обратимся к изучению изображений, иллюстрирующих действие малых доз в медицине. Здесь применяемые методы анализа также часто опираются на визуальное наблюдение. В этой области исследований можно выделить приобретающие все больший интерес специалистов методы чувствительной кристаллизации и капиллярного динамолиза. Метод чувствительной кристаллизации основан на введении небольшой дозы некоторого вещества (крови или экстракта какого-либо растения) в раствор хлорида меди. В результате происходит кристаллизация раствора, а форма получаемого кристалла позволяет судить о состоянии исследуемого организма и вещества.

Близкий подход демонстрирует метод капиллярного динамолиза, который состоит в нанесении некоторого раствора на фильтровальную бумагу и изучении структуры получаемого характерного рисунка.

Чувствительная кристаллизация вполне успешно применяется для анализа качества продуктов, биомедицинских препаратов [8, 13, 16], в свою очередь капиллярный динамолиз широко используется для анализа качества почвы [3, 9]. Оба метода порождают образцы достаточно богатой и сложной структуры.

Однако применяемые математические методы их анализа в основном используют статистики второго порядка [3].

Наш опыт анализа образов биомедицинских препаратов, основанный на использовании методов фрактального анализа, например, при вычислении спектра Реньи для изображений растворов серебра [6], показывает хорошее разделение значений спектра и успешную классификацию соответствующих образцов. В данной работе мы применяем фрактальные и мультифрактальные методы для анализа кристаллов крови. Результаты проведенных экспериментов показывают, что эти методы вполне перспективны и дают возможность успешного получения ряда классификационных признаков. Более того, интерпретация этих признаков облегчает понимание внутренних процессов, порождающих подобные кристаллы.

2. Метод чувствительной кристаллизации

Метод чувствительной кристаллизации был предложен и развит Е. Пфайффером еще в 1930 году [12], однако и сейчас он остается актуальным. Метод основан на добавлении цельной крови или экстракта какого-либо растения в раствор хлорида меди с последующей кристаллизацией полученного раствора при подходящих физических условиях. Основные положения метода и систематический обзор проведенных экспериментов с кристаллами крови подробно описан А. Селаври [14,15]. Этот метод также помогает обнаружить дисфункции различных органов и патологические процессы в организме. Изучение обширного экспериментального материала позволяет выявить характерные формы в образах кристаллов, при этом каждому классу может быть сопоставлен некоторый тип заболевания, а расположение специфической формы на тестовом образце соответствует локализации некоторого органа. Подробному описанию этого метода диагностики и его применению в современных исследованиях посвящена монография Н. Колтового и С. Краевого [18].

Применение разнообразных и строгих математических методов к анализу образов кристаллов дает нам возможность выделения многих особенностей, таких как регулярные области, раковины и другие структуры, и получать достаточно информативные классификационные признаки.

3. Используемые методы анализа изображений

3.1. Вычисление мультифрактального спектра с помощью функции плотности

Под мультифрактальным спектром цифрового изображения будем понимать множество фрактальных размерностей его фрактальных подмножеств. В работе [16] был предложен метод вычисления мультифрактального спектра, основанный на вычислении определенной характеристики (функции плотности) для каждого пикселя. Все изображение разбивается на множества уровня, т.е. подмножества исходного изображения, содержащие пиксели с близкими

характеристиками. Для каждого множества уровня вычисляется его фрактальная размерность.

Пусть μ обозначает меру интенсивностей пикселей. Для каждого $x \in R^2$ обозначим за $B(x, r)$ квадрат с центром x и “радиусом” (половиной длины стороны) r . Предположим, что $\mu(B(x, r)) = kr^{d(x)}$, где $d(x)$ — так называемая локальная функция плотности, k — некоторая константа. Будем менять величину r , выбирая ее достаточно малой. Тогда функция плотности определяется как

$$d(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r}.$$

Эта величина характеризует степень неоднородности распределения интенсивности в окрестности точки x . Множество всех точек x , имеющих локальную плотность α , образует множество уровня $E_\alpha = \{x \in R^2: d(x) = \alpha\}$. На практике часто для того, чтобы не увеличивать количество множеств уровня, рассматривают множества $E(\alpha, \varepsilon) = \{x \in R^2: d(x) \in [\alpha, \alpha + \varepsilon)\}$.

Далее мы вычисляем фрактальные размерности множеств E_α и получаем фрактальный спектр $f(\alpha)$.

3.2. Вычисление мультифрактального спектра с помощью обобщенной статистической суммы

Одной из важных характеристик сложных изображений является информационная размерность, которая принадлежит классу размерностей Реньи. Эти размерности используют некоторую нормированную меру, распределенную на изображении. Все изображение разбивается на ячейки одного размера, для каждой ячейки вычисляется ее мера. Выбор меры зависит от характера изображения. Поскольку изображения как правило представляют собой сохраненные в определенные моменты времени образы сложных процессов, то заданное распределение меры можно интерпретировать в контексте решаемой задачи: например для динамических систем это относительная частота посещения траекториями системы ячеек фазового пространства, для процессов распределения вещества это концентрация вещества в определенных областях пространства.

Идея метода состоит в вычислении двух показателей: спектра сингулярностей и информационных размерностей носителей исходной меры и ее последовательных перенормировок с помощью так называемого прямого мультифрактального преобразования.

Рассмотрим множество M в фазовом пространстве и его разбиение на N ячеек размера l . Пусть $\{p_i(l)\}$ некоторая нормированная мера, заданная на этом множестве. Информационная размерность носителя этой меры на M может быть вычислена как

$$\dim M = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N p_i(l) \ln p_i(l)}{\ln l}.$$

В работе [4] авторы предложили использовать так называемую обобщенную статистическую сумму $\varphi(q) = \sum_{i=1}^N p_i^q(l)$, где q — вещественный параметр, и вычислять две величины, зависящие от этого параметра.

Предположим, что $p_i(l) \approx l^{\alpha_i}$, тогда $\alpha_i \approx \ln p_i(l) / \ln l$. Мы также предполагаем, что существует функция $\tau(q)$, такая что $\varphi(q) \approx l^{\tau(q)}$. По начальной мере $\{p_i(l)\}$ построим последовательность мер $\mu(q, l) = \{\mu_i(q, l)\}$, полученных с помощью прямого мультифрактального преобразования $\mu_i(q, l) = \frac{p_i^q(l)}{\sum_{i=1}^N p_i^q(l)}$.

Для каждой меры $\mu(q, l)$ вычислим информационную размерность $f(q)$ ее носителя

$$f(q) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i(q, l) \ln \mu_i(q, l)}{\ln l}.$$

Вычислим также усреднения показателей α_i по мере $\mu(q, l)$

$$\alpha(q, l) = \frac{\sum_{i=1}^N \ln p_i(l) \mu_i(q, l)}{\ln l}$$

и предел этих усреднений при l стремящемся к 0

$$\alpha(q) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \ln p_i(l) \mu_i(q, l)}{\ln l}.$$

Таким образом, мы получаем набор размерностей $f(q)$ (мультифрактальный спектр) носителей мер из определенной последовательности и набор усредненных показателей $\alpha(q)$, вычисленный на мерах этой последовательности, как функции параметра q . Исключая параметр мы можем получить зависимость $f(\alpha)$.

Заметим, что выбор последовательности мер, построенной с помощью прямого мультифрактального преобразования, приводит к следующему соотношению:

$$f(q) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i(q, l) \ln \mu_i(q, l)}{\ln l} =$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i(q, l) \ln \frac{p_i^q(l)}{\sum_j p_j^q(l)}}{\ln l} =$$

$$q \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i(q, l) \ln p_i(l)}{\ln l} - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i(q, l) \ln \varphi(q, l)}{\ln l} =$$

$$q\alpha(q) - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln \varphi(q)}{\ln l} =$$

$$q\alpha(q) - \tau(q).$$

Кроме этого

$$d\tau(q)/dq =$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{\ln l} \frac{\sum_i p_i^k(l) \ln p_i(l)}{\sum_j p_j^k(l)} =$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_i \frac{p_i^q(l)}{\sum_j p_j^q(l)} \ln p_i(l)}{\ln l} =$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, l) \ln p_i(l)}{\ln l} =$$

$$\alpha(q).$$

Таким образом, на выбранной последовательности справедлива формула преобразования Лежандра.

Заметим, что в практических приложениях нет необходимости получать спектр $f(\alpha)$. Более того, наличие двух графиков более удобно для сравнения характеристик цифровых изображений.

3.3. Метод фрактальной сигнатуры (вычисление размерности Минковского)

Описываемый здесь метод основан на вычислении размерности Минковского для поверхности «уровня градации серого» исследуемого изображения. Соответствующая техника была описана в [5], в работе [11] введен термин «фрактальная сигнатура», под которым авторы понимали отношение логарифма площади поверхности к логарифму номера шага. Позже в работе [10] авторы использовали этот метод для различения в документе текста, графики и фона, но фрактальной сигнатурой называли фрактальную размерность поверхности. Метод успешно применялся к решению ряда прикладных задач [6,7]. Мы использовали этот метод (с некоторыми вариациями) для анализа образцов биомедицинских препаратов [1, 2].

Пусть $F = \{X_{ij}, i = 0, 1, \dots, K, j = 0, 1, \dots, L\}$ — функция «уровня градации серого» некоторого полутонового изображения, где X_{ij} — интенсивность пикселя с координатами (i, j) . Для того, чтобы рассматривать график этой функции как

поверхность, ее доопределяют в точках $(x, y), i < x < K, j < y < L$ значением в точке (i, j) . В определенном диапазоне значений меры поверхность графика функции F может рассматриваться как фрактал. В приложениях обработки изображений функция F — это непустое ограниченное множество в R^3 .

Для приближенного вычисления площади поверхности используется так называемая техника построения «покрывала» (δ -параллельного тела) толщиной 2δ . У покрывала вычисляется объем, по которому приближенно находится площадь поверхности и ее фрактальная размерность (размерность Минковского). Для непустых ограниченных множеств в R^3 размерность Минковского совпадает с емкостной.

Для $\delta = 1, 2, \dots$ верхняя $(u_\delta(i, j))$ и нижняя $(b_\delta(i, j))$ поверхности покрывала определяются посредством следующей итеративной процедуры:

$$u_\delta(i, j) = \max \left\{ \begin{array}{l} u_{\delta-1}(i, j) + 1, \\ \max_{|(m,n)-(i,j)| \leq 1} u_{\delta-1}(m, n) \end{array} \right\},$$

$$b_\delta(i, j) = \min \left\{ \begin{array}{l} b_{\delta-1}(i, j) - 1, \\ \min_{|(m,n)-(i,j)| \leq 1} b_{\delta-1}(m, n) \end{array} \right\}.$$

Объем покрывала Vol_δ вычисляется как

$$Vol_\delta = \sum (u_\delta(i, j) - b_\delta(i, j)).$$

Для вычисления площади поверхности можно использовать формулы:

$$A_\delta = \frac{Vol_\delta}{2\delta},$$

$$A_\delta = \frac{Vol_\delta - Vol_{\delta-1}}{2}.$$

Вторая формула более предпочтительна, если объем тела, полученного для значения δ зависит от особенностей объема, полученного для $\delta-1$. Фрактальная размерность поверхности D определяется из соотношения $D \approx 2 - \frac{\log A_\delta}{\log \delta}$.

Нужно заметить, что в качестве характеристики изображения можно использовать фрактальную размерность, площадь поверхности или вектор составленный из величин $S_\delta = \frac{\log A_\delta}{\log \delta}$. Можно разбить изображение на ячейки и вычислить площадь поверхности для каждой ячейки. Это позволяет получить

сегментацию, т.е. деление на области с близкими характеристиками (площадями). Кроме того, если вычислить общую площадь поверхности как сумму площадей для ячеек, то мы можем получить зависимость этой площади от размера ячейки. Это дает возможность получить векторную характеристику для исследуемого изображения. Рассматриваемый метод работает фактически с поверхностью, построенной по изображению, а не с самим изображением.

Мы приводим далее результаты экспериментов на цветных изображениях. В этих экспериментах рассматривались различные компоненты палитр, выбранных для представления изображений. Заметим, что выбор компоненты может оказать значительное влияние на результат анализа конкретного изображения: существенные признаки, выявленные в одной компоненте палитры, могут быть не видны в другой. Поэтому для более полного исследования разумно проводить вычисления в разных палитрах.

4. Результаты экспериментов

Для экспериментов были выбраны образцы типичных кристаллов крови, а также увеличенные фрагменты образцов различных кристаллов.

4.1. Пример 1. Типичные формы кристаллов крови

Рассмотрим образцы кристаллов крови, отражающие некоторые дисфункции различных внутренних органов [15].

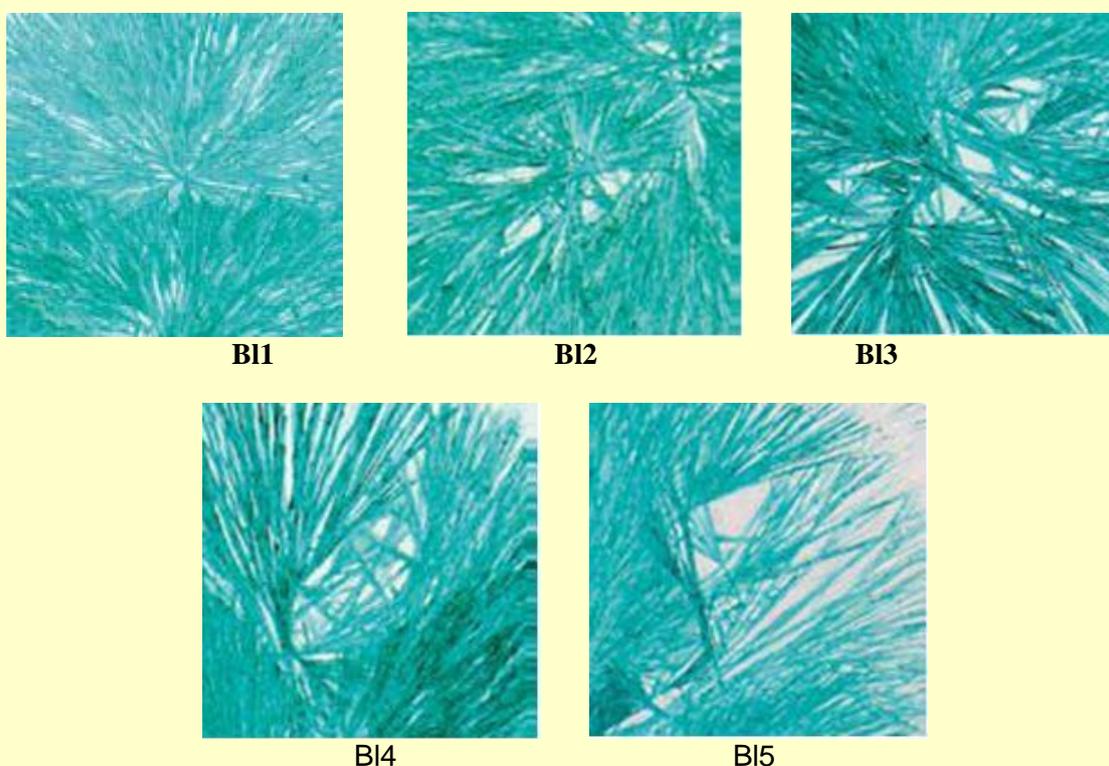


Рис 1. Типичные формы кристаллов крови

Здесь B11 — кристаллизация в форме звезды с дырчатой структурой, что характерно для острых воспалительных процессов; B12 — кристаллизация в форме звезды с полостью, характеризующая хронический воспалительный процесс; B13 — дырчатая структура — дегенеративный процесс; B14 — полая структура, характеризующая доброкачественную опухоль; B15 — структура с пересекающимися линиями, злокачественная опухоль.

Показанные изображения имеют размер 180x180, все исследования проводились для компоненты H палитры HSV.

4.1.1. Метод фрактальной сигнатуры

Для каждого изображения вычислялась площадь поверхности, в зависимости от выбранного размера ячейки разбиения. Графики этой зависимости показаны на Рис.2. Мы видим, что график для изображения, характеризующего наличие злокачественной опухоли, существенно отличается от остальных. Числовые характеристики отражают разницу в структуре изображений.

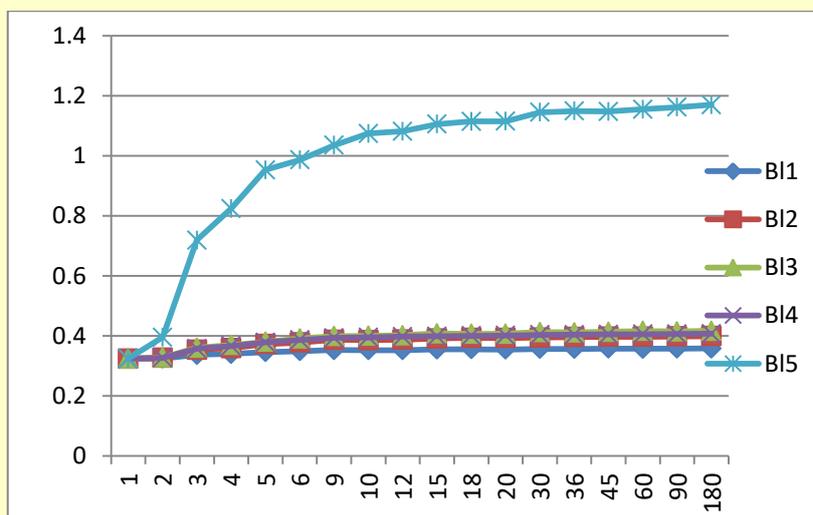
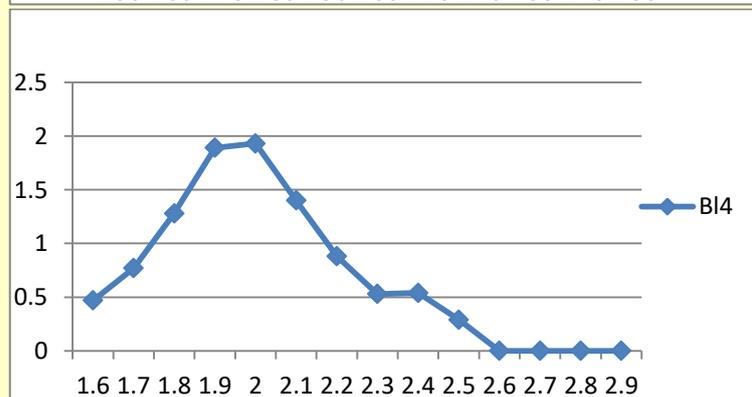
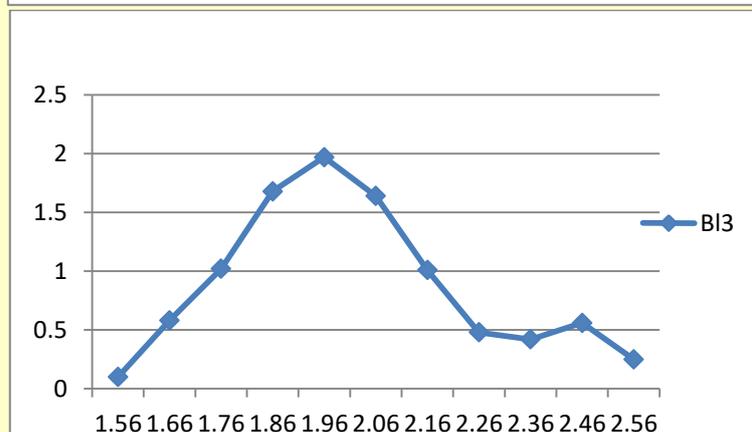
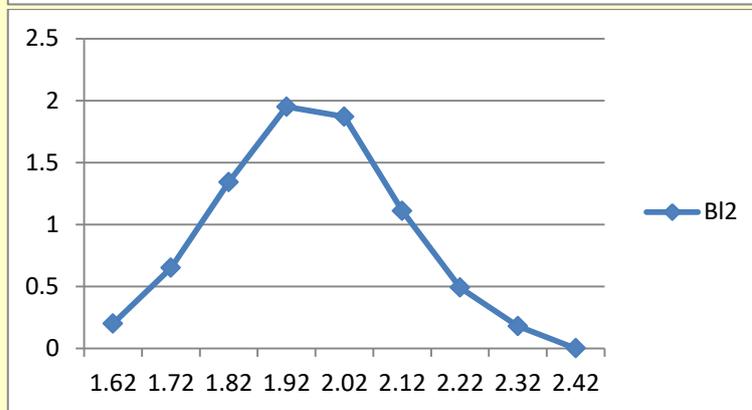
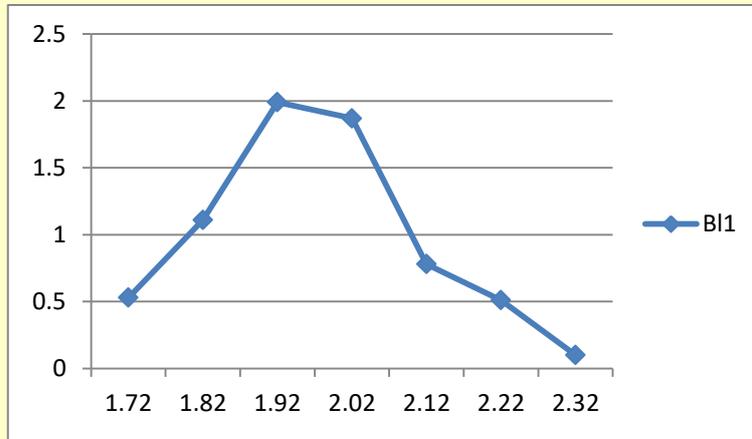


Рис. 2. График, демонстрирующий значительное отличие показателей злокачественной опухоли от других образцов

4.1.2. Мультифрактальный спектр с использованием функции плотности

Для этих же изображений вычислялись спектры с использованием функции плотности. На следующих графиках показатель сингулярности α располагается на оси абсцисс, фрактальная размерность $f(\alpha)$ — на оси ординат. Заметим, что каждое изображение характеризуется своим диапазоном значений функции плотности (показателя сингулярности). Так как этот показатель описывает локальное изменение интенсивности в окрестности каждой точки, то диапазон значений характеризует сложность структуры в целом. График спектра описывает распределение подмножеств с выбранным показателем сингулярности. В экспериментах шаг по интервалу значений показателей сингулярности был выбран равным 0.1. Для первого графика (изображение B11) это значит, что

фрактальная размерность множества точек, для которых показатель сингулярности лежит в диапазоне $[1.72, 1.82)$, приблизительно равна 0.5, фрактальная размерность множества точек со значениями функции плотности в интервале $[1.82, 1.92)$ приблизительно равна 1.11, и т.д.



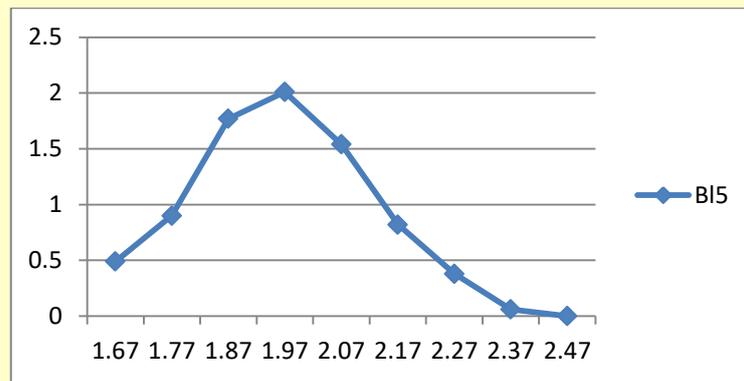


Рис. 3. Мультифрактальный спектр B11- B15,, вычисленный с использованием функции плотности

Метод дает возможность построить множества уровня — разбиение на подмножества, соответствующие заданному диапазону показателей сингулярности. Множества уровня для изображения B11 показаны ниже.

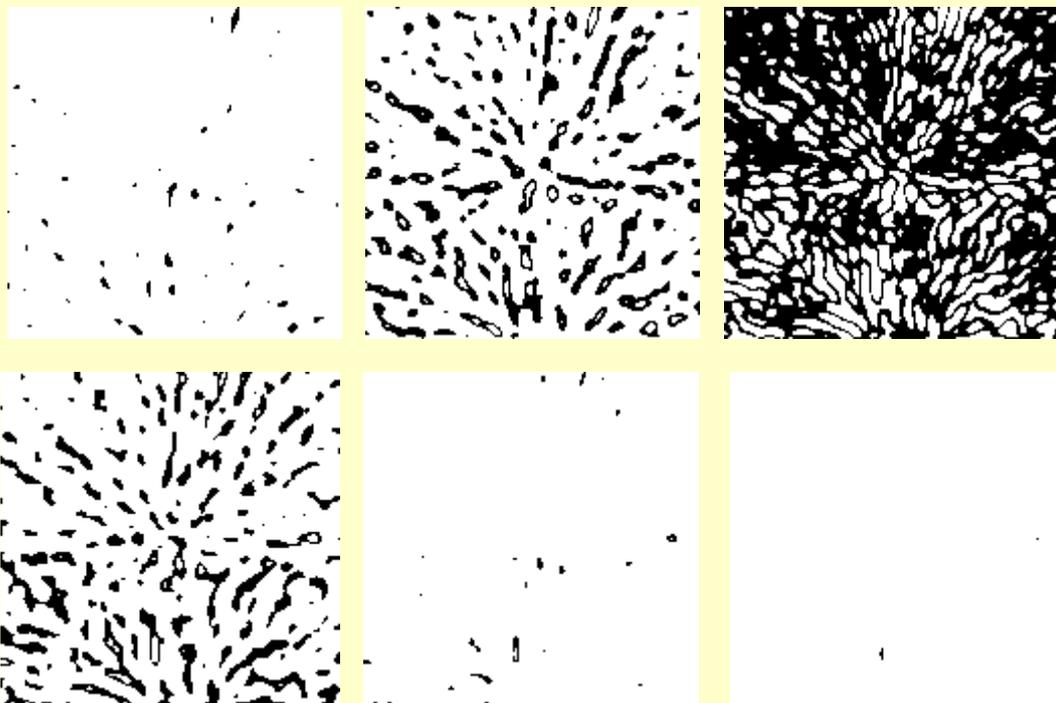
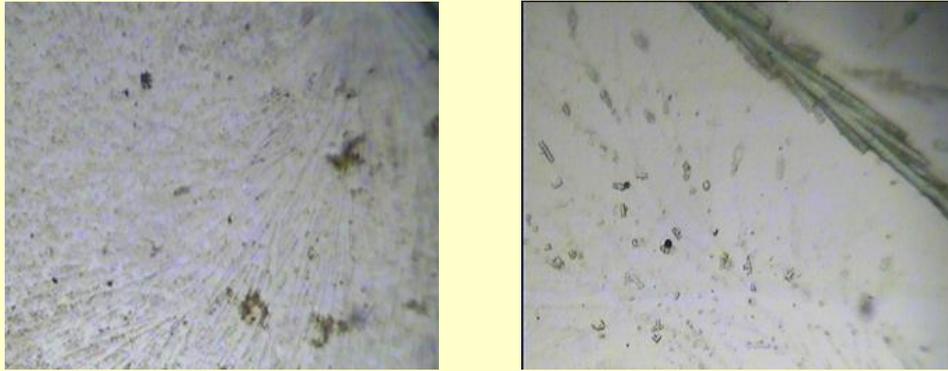


Рис. 4. Слева направо и сверху вниз показаны изображения множеств уровня для значений функции плотности $[1.72,1.82)$, $[1.82,1.92)$, $[1.92,2.02)$, $[2.02,2.12)$, $[2.12,2.22)$, $[2.22,2.32)$.

4.2. Пример 2. Кристаллы крови и морковного сока

Рассмотрим изображение кристалла крови и кристалл, полученный после добавления в раствор морковного сока. Для эксперимента были выбраны увеличенные части изображений с одинаковыми координатами.



А3

В3

Рис. 5. Увеличенные фрагменты изображений: слева кристалл крови, справа морковный сок.

Вычисление спектров с использованием функции плотности позволяет получить следующие характеристики

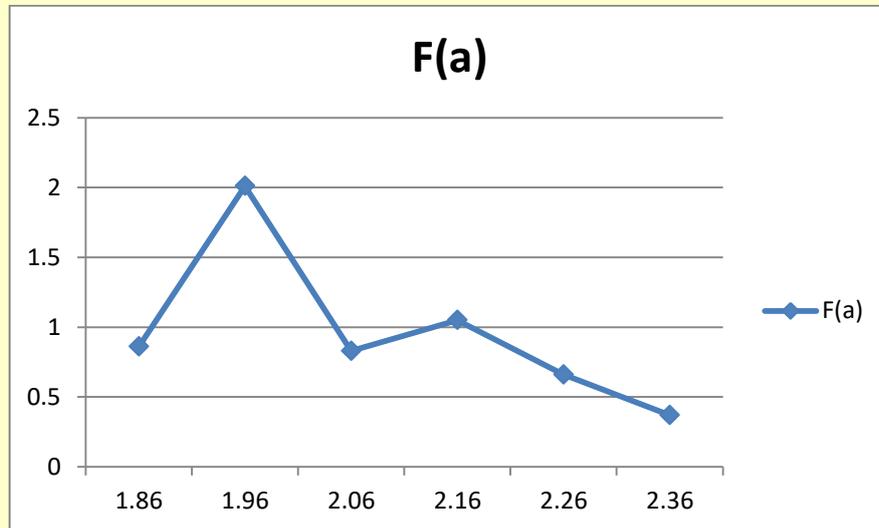


Рис.5. График мультифрактального спектра для изображения А3

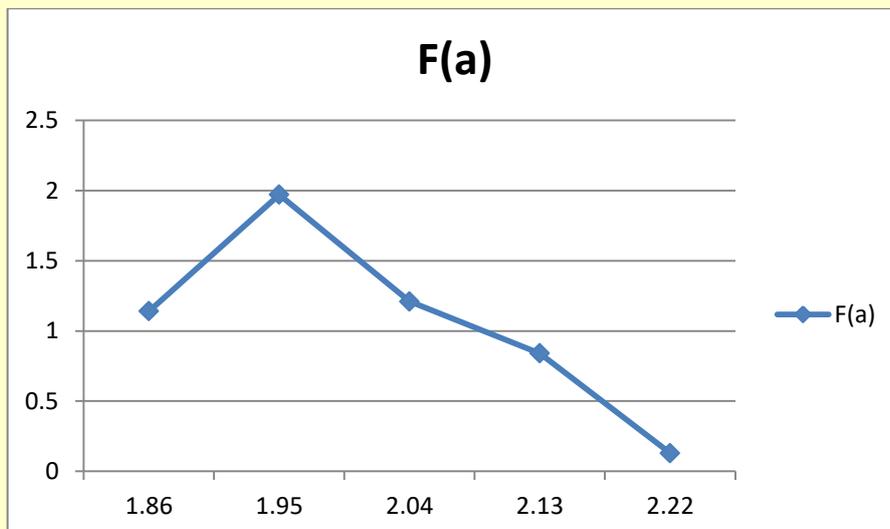


Рис.6. График мультифрактального спектра для изображения А3

Вычисление параметризованных спектров для этих изображений дает следующие графики. Параметр q выбирался в диапазоне $[-3,3]$ с шагом 0.5. Вычисления проводились для компоненты H палитры HSV.

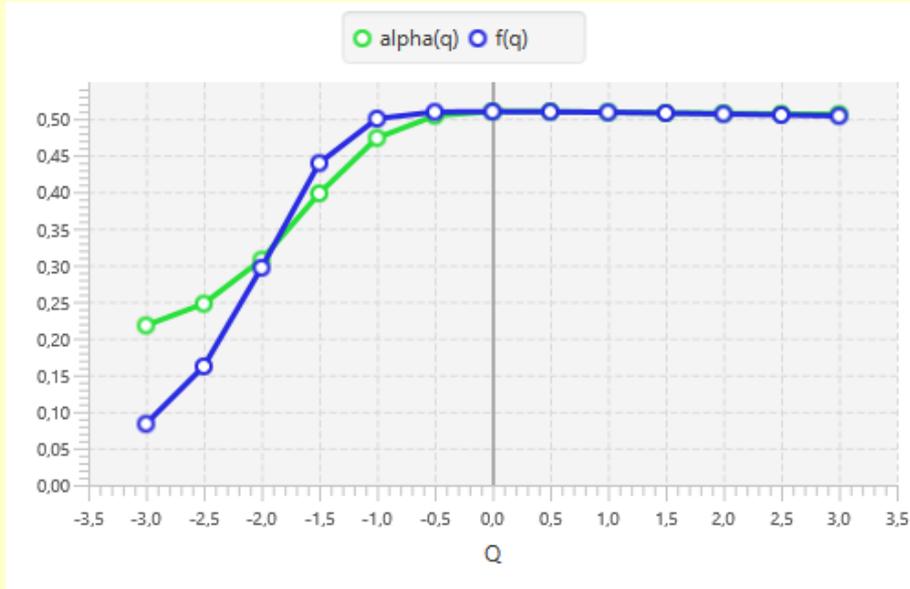


Рис.7 Параметризованные спектры для изображения A3

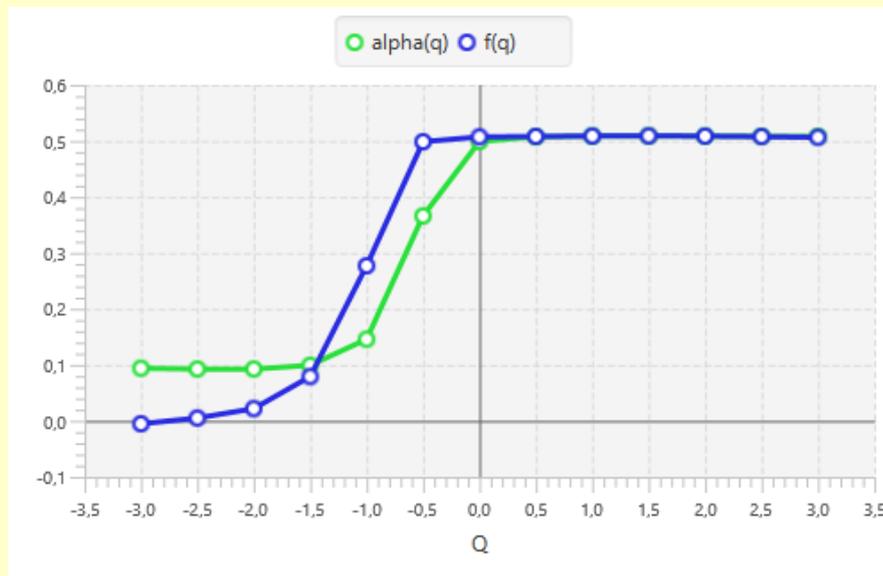


Рис.8 Параметризованные спектры для изображения B3

Мы видим, что вычисление спектра с использованием функции плотности и параметризованных спектров позволяет получить разные характеристики исследуемых образцов.

4.3. Пример 3. Кристаллы крови различных пациентов

Рассмотрим увеличенные фрагменты образцов кристаллов крови 3 пациентов (выбирались фрагменты с одинаковыми координатами).



A2

C2

D2

Рис. 9. Изображения увеличенных фрагментов исходных образцов

Ниже показаны результаты вычислений мультифрактального спектра на основе функции плотности.

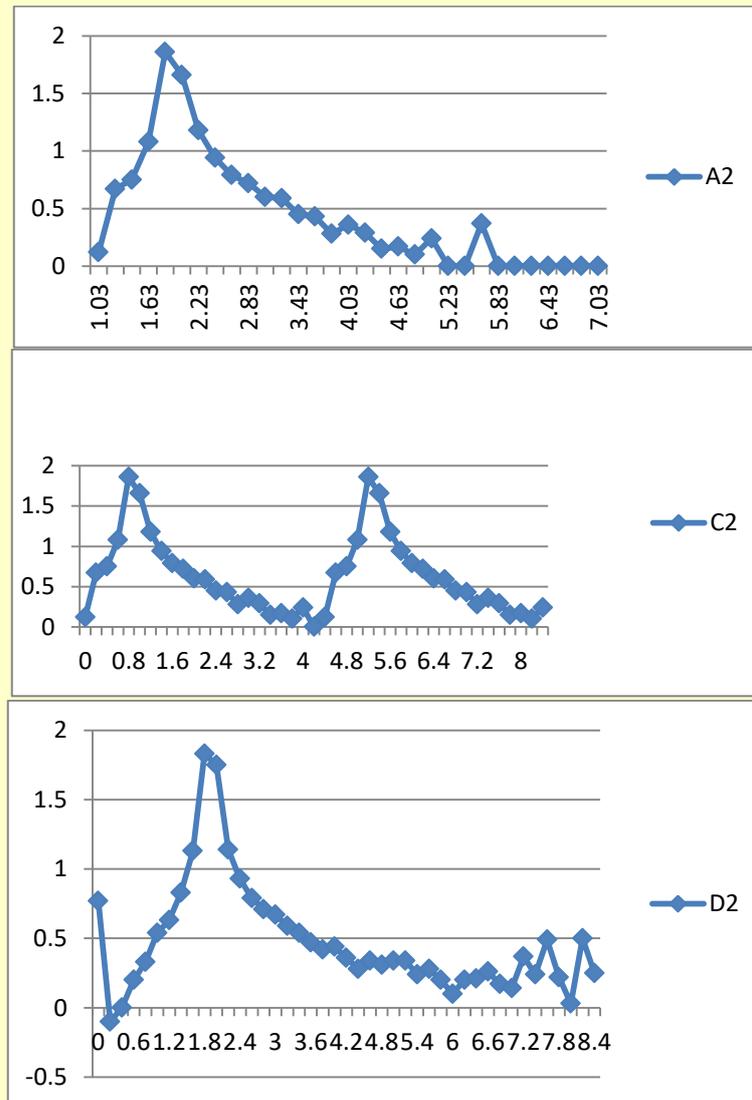


Рис.10. Мультифрактальные спектры A2, C2, D2 , вычисленные по функции плотности

Анализ полученных графиков показывает разные области определения показателей сингулярности – максимальную область имеет изображение D2. Все графики различны, что позволяет говорить о разных структурах изображений. Эта разница наглядно подтверждается рассмотрением соответствующих множеств уровня, которые фактически показывают расслоение изображения на подмножества с близкими характеристиками.

Вычислим теперь параметризованные спектры. Параметр q менялся в диапазоне $[-3,3]$ с шагом 0.5.

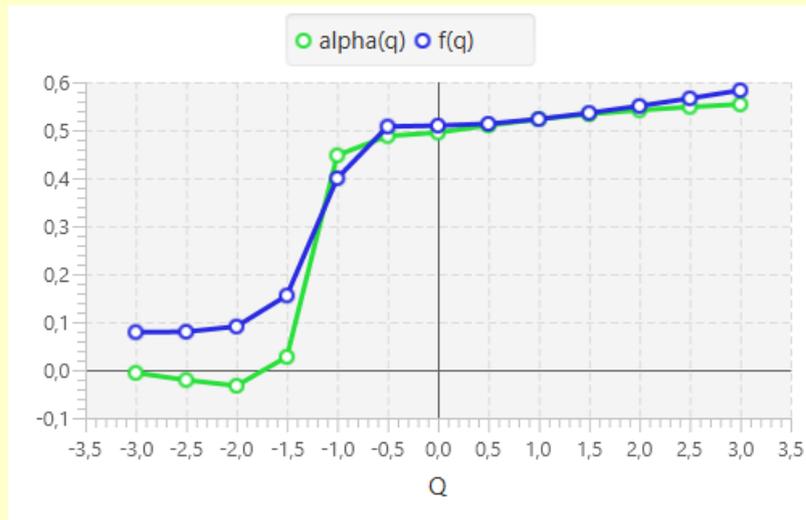


Рис. 11 Параметризованные спектры для A2.jpg

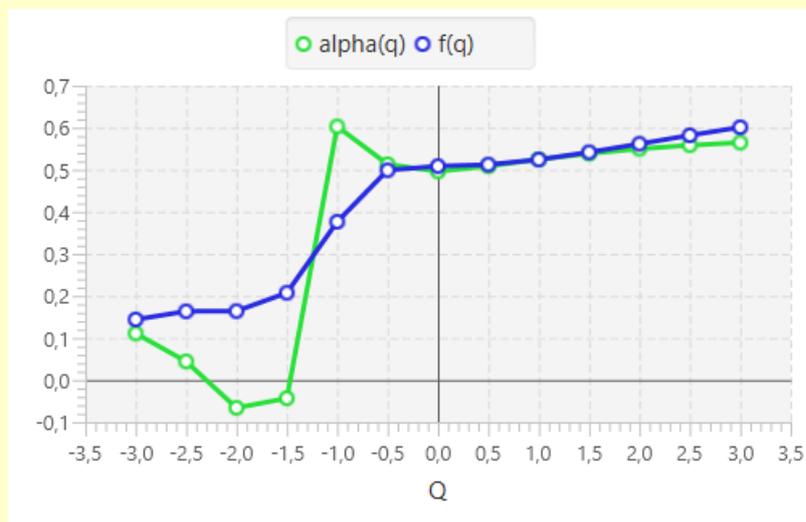


Рис.12 Параметризованные спектры для c2.jpg

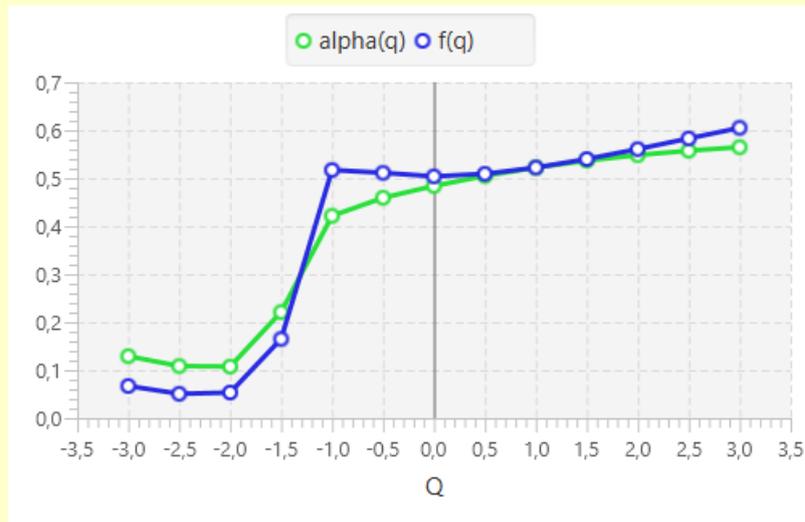


Рис.13 Параметризованные спектры для d2.jpg

Как мы видим, оба метода показывают спектры, которые характеризуют значительную разницу в структуре изображений.

5. Заключение

Мы рассмотрели применение трех методов анализа цифровых изображений со сложной структурой, относящихся к классу биомедицинских препаратов. Методы основаны на вычислении различных фрактальных характеристик и позволяют получать векторные характеристики: зависимость площади поверхности функции градации серого от размера ячейки (в методе фрактальной сигнатуры), спектр фрактальных размерностей множеств уровня в методе вычисления локальной функции плотности и параметризованный спектр при использовании обобщенной статистической суммы. Работа с цветными изображениями сложной текстуры допускает широкий выбор параметров: палитра, способ задания меры на изображении, выбор параметра q в методе обобщенной статистической суммы. Поэтому решение задачи выявления классификационных признаков всегда требует значительной исследовательской работы для любого класса изображений. Иногда полезно провести предварительную фильтрацию. Приведенные результаты экспериментов показывают, что применение методов фрактального анализа достаточно перспективно для получения информативных признаков и решения задачи классификации.

6. Благодарности

Авторы благодарят V. V. Mujumdar, Исполнительного директора института прикладных исследований J297, M.I.D.C, Bhosari, Pune, (Индия) за предоставленные изображения кристаллов.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Erasmus+ International Mobility (KA107) / National Technical University of Athens - St. Petersburg State University

Литература

- [1] N. Ampilova, I. Soloviev. Application of Fractal and Multifractal Analysis Algorithms to Image Segmentation and Classification. WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine, ISSN / E-ISSN: 1109-9518 / E-ISSN: 2224-2902, Volume 13, 2016, Art. #3, pp. 14-21.
- [2] N. Ampilova, I. Soloviev, Y. Shupletsov. On some aspects of the fractal signature method. Proc. 8 Int. Conf. CEMA13, 17-19 Oct. 2013, Sofia, Bulgaria, pp. 80-84.
- [3] S. Baumgartner, P. Doesburg, C. Scherr, and J.-O. Andersen. Development of a Bio-crystallisation Assay for Examining Effects of Homeopathic Preparations Using Cress Seedlings, Evidence-Based Complementary and Alternative Medicine Volume 2012, Article ID 125945, pp. 1-14.
- [4] Ashvin B. Chhabra, Charles Meneveau, Roderick V. Jensen and K.R. Sreenivasan. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularities spectrum and its application to fully developed turbulence. Physical Review A, Volume 40, Number 9, November 1, 1989, pp. 5284-5294
- [5] K. J. Falconer Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, 1990.
- [6] P. Frangos, C. Pandis, A. Malamou, P. Stefanias. Applying the modified fractal signature method to image classification: some preliminary results for ISAR radar images. Proc. 7 Int. Conf. CEMA12, 8-10 Nov. 2012, Athens, Greece, pp. 50-52.
- [7] E. Gurevich, N. Ampilova, I. Soloviev. On a natural-science investigation of the ultralow doses effect, Proc. 8 Int. Conf. CEMA13, 17-19 Oct. 2013, Sofia, Bulgaria. pp. 85-88.
- [8] M. O. Kokornaczyk G. Trebbi, G. Dinelli, I. Marotti, V. Bregola, D. Nanni, Borghini F, L. Betti. Droplet evaporation method as a new potential approach for highlighting the effectiveness of ultrahigh dilutions. Complementary Therapies in Medicine 2014, vol.22, pp. 333—340.
- [9] M. O. Kokornaczyk, F. Primavera, R. Luneia, S. Baumgartner & L. Betti. Analysis of soils by means of Pfeiffer's circular chromatography test and comparison to chemical analysis results. Biological Agriculture & Horticulture, 2016. pp. 1-15.
- [10] Xiaogang Mao, C. Y. Suen. Modified Fractal Signature (MFS): A New Approach to Document Analysis for Automatic Knowledge Acquisition. IEEE Trans. Knowledge and Data Eng., vol.9. no.5, 1997, pp. 742-762.
- [11] S. Peleg, J. Naor, R. Hartley, D. Avnir. Multiple Resolution Texture Analysis and Classification. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. Pami-6, no. 4, July 1984, pp. 518-523.
- [12] E. Pfeiffer. Empfindliche Kristallisation-vor-gänge als Nachweis von Formkräften im Blut. Dresden, 1935.
- [13] G. Reiter, J.-G. Barth. Some general remarks on crystallisation in the presence of additives. Elemente d. N. 92, 2010, pp. 30–61.
- [14] A. Selawry, O. Selawry. Kupferchlorid Kri-stallisation im Natiswissenschaft und Medizin. Gustav-Fisher Verlag, Stuttgart, 1957.
- [15] A. Selawry, Functional types of metals in Psychology and Medicine, v.2., SPb, Demetra, (in Russian), 2011.
- [16] B. Waldburger, Die Empfindliche Kristallisation. Eine Methode zur Qualitatatsforschung. Goetheanum Research Institute. The Laboratory for Sensitive Crystallisation, Dornach, 2007.
- [17] Yong Xu, Hui Ji, Cornelia Fermuller. Viewpoint Invariant Texture Description Using Fractal Analysis. Int. J. Comp. Vis, 2009, 83, pp. 85-100.
- [18] Н. А. Колтовой, С. А. Краевой Диагностика по капле крови. Кристаллизация биожидкостей. Книга 1. Кристаллизация сыворотки крови методом открытой капли. М.: Bookvika.ru, 2014.