

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 1, 2007

Электронный журнал,
рег. № П2375 от 07.03.97

ISSN 1817-2172

<http://www.neva.ru/journal>

e-mail: jodiff@mail.ru

Оптимальное управление

ЗАДАЧА МНОГОКРАТНОЙ КОРРЕКЦИИ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ВОЗМУЩЕНИЯ¹

Б.И. Ананьев

Россия, 620219, Екатеринбург, ул. Ковалевской, д. 16,
Институт математики и механики УрО РАН,
e-mail: abi@imm.uran.ru

Н.В. Гредасова

Россия, 620219, Екатеринбург, ул. Ковалевской, д. 16,
Институт математики и механики УрО РАН,
e-mail: gnv@imm.uran.ru

Аннотация.

Рассмотрена задача многократной коррекции для линейных управляемых систем с дискретным множеством наблюдений. Предложены некоторые алгоритмы коррекции управления и изучены их свойства. В качестве приложения исследован простой случай задачи выставки.

¹Статья выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-00148

1 Введение

Задача многократной коррекции служит естественным обобщением задач однократной коррекции движения, рассмотренных в работах [1–4]. Для случаев, когда возмущения стеснены интегральными ограничениями многократная коррекция изучалась в [5, 6]. В работе [6] рассмотрена общая нелинейная постановка для многошаговых систем. В настоящей работе задача изучается для линейной непрерывной системы с дискретным множеством наблюдений и с геометрическими ограничениями на возмущения. Система в первом приближении описывает отклонение движения управляемого объекта от номинальной траектории. В дискретные моменты производится измерение фазового вектора с возмущением, ограниченным компактным множеством. Начальное состояние системы также содержится в компакте. В начале процесса коррекции определяется оптимальное программное управление, решающее задачу минимаксного управления по неполным данным [7]. Затем с использованием понятия информационного множества [7] в результате сравнения минимакса целевого функционала с прогнозом отыскиваются моменты коррекции программного управления. В качестве приложения полученных результатов рассмотрен простой случай задачи выставки инерциальной системы самолёта, стартующего с движущегося корабля.

2 Оценивание состояния управляемой системы

Пусть отклонение управляемого объекта от заданного движения $x^0(t) \equiv 0$ описывается в линейном приближении дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор; $u \in R^r$ – вектор управления, стесненный ограничением

$$u(t) \in U \quad (2)$$

с выпуклым компактом U ; $v(t)$ – неизвестная детерминированная функция, удовлетворяющая априорному ограничению

$$v(t) \in V \quad (3)$$

с выпуклым компактным ограничивающим множеством V ; $A(t)$, $B(t)$ – непрерывные матрицы соответствующих размерностей. Начальное состояние

системы (1) стеснено включением

$$x_0 \in X_0, \quad (4)$$

где X_0 – выпуклый компакт. Поскольку движение системы (1) происходит вблизи начала координат, обычно считается, что компакты ограничений (2) – (4) содержат нулевые векторы.

Предположим, что фазовый вектор системы (1) недоступен для измерения. Наблюдается величина

$$y_k = C_k x(t_k) + w_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (5)$$

в заданные моменты времени $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq T$, $y_k \in R^m$, $\text{rank } C_k = m$. Помеха w_k стеснена ограничением

$$w_k \in W \quad (6)$$

с выпуклым компактом W , содержащим нуль.

Введём в рассмотрение информационное множество $X(t, y, u)$ в соответствии с определением, данным в [7], и примем его за оценку фазового вектора системы (1) в текущий момент t .

Теорема 1 Информационное множество $X(t, y, u)$ системы (1) с измерениями (5) и ограничениями (3), (4), (6) является выпуклым компактом и определяется рекуррентно по формулам

$$\begin{aligned} X(t, y, u) &= S(t, t_k)X(t_k, y, u) + \int_{t_k}^t S(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \\ &+ \int_{t_k}^t S(t, \tau)Vd\tau, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N; \quad t_0 = 0, \quad t_{N+1} = T; \quad (7) \\ X(t_k, y, u) &= X(t_k - 0, y, u) \cap Y_k, \\ Y_k &= \{x : C_k x \in y_k - W\}, \quad X(0, y, u) = X_0. \end{aligned}$$

Многозначное отображение $X(\cdot, y, u)$ непрерывно по Хаусдорфу на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ и предел слева $X(t_k - 0, y, u)$ существует для всех $k = 1, \dots, N + 1$. Здесь $S(t, \tau)$ – фундаментальная матрица однородной системы (1).

Теорема устанавливается стандартными рассуждениями, аналогичными приведенным в [7]. Поскольку выпуклый компакт K однозначно определяется своей опорной функцией [8], $\rho(l | K) = \max_{x \in K} l'x$, из теоремы 1 получаем

Следствие 1 Опорная функция множества $X(t, y, u)$ определяется формулами

$$\begin{aligned} \rho(l | X(t, y, u)) &= \rho(S'(t, t_k)l | X(t_k, y, u)) + \int_{t_k}^t l'S(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \\ &+ \int_{t_k}^t \rho(S'(t, \tau)l | V)d\tau, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N; \quad t_0 = 0, \\ t_{N+1} &= T; \quad \rho(l | X(t_k, y, u)) = \inf_{p \in R^m} \{ \rho(l - C'_k p | X(t_k - 0, y, u)) + \\ &+ \rho(p | y_k - W) \}, \quad k = 1, \dots, N, \quad X(0, y, u) = X_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и далее символ $'$ означает транспонирование. В обосновании нуждается лишь вторая формула в (8). В силу предположений о матрице C'_k имеем

$$Y_k = \ker C_k \oplus C'_k(C_k C'_k)^{-1}(y_k - W). \quad (9)$$

Известно [8], что опорная функция пересечения выпуклого компакта и выпуклого замкнутого множества определяется операцией инфимальной конволюции. Ввиду (9) получаем $\rho(q | Y_k) = +\infty$, если $q \notin \text{im} C'_k$. Значит, $q = C'_k p$ и мы приходим к формуле из (8). Отметим ещё, что множество $X(t_k - 0, y, u)$ получается по формулам (7), (8), если t_k заменить на t_{k-1} , а t на t_k .

3 Задача программного управления по неполным данным

Пусть величина отклонения траектории системы (1) от нуля в конечный момент оценивается величиной $\Phi(x(T))$, где Φ – неотрицательная выпуклая и конечная функция, заданная на R^n . Введём ряд обозначений. Символом f^s далее обозначается функция $f(\cdot)$, рассматриваемая на отрезке $[0, s]$. Та же функция, рассматриваемая на отрезке $[s, T]$, будет обозначаться f_s , а на отрезке $[s, \tau]$ – как f_s^τ , где $\tau < T$. Для сокращения записей полагаем $f^k = f^{t_k}$, $f_k = f_{t_k}$, $f_k^m = f_{t_k}^{t_m}$. Аналогично, для сигнала y и помехи w обозначаем $y^k = \{y_1, \dots, y_k\}$, $y_k^m = \{y_k, \dots, y_m\}$.

Определим минимакс отклонения системы от нуля в конечный момент как

$$r_t(y, u) = \min_{u_t} \max_{x \in X(t, y, u)} \max_{v_t} \Phi(x(T)). \quad (10)$$

Величина (10) является гарантированным результатом управления в позиции $X(t, y, u)$, где под позицией будем понимать информационное множество в

данный момент $t \in [0, T]$. Любое управление \bar{u}_t , реализующее минимум в (10), назовём оптимальным в данной позиции.

Получим необходимое условие оптимальности. Имеем

$$r_t(y, u) = \min_{u_t} \max_l \left\{ \rho(S'(T, t)l \mid X(t, y, u)) + \int_t^T l' S(T, \tau) B(\tau) \times \right. \\ \left. \times u(\tau) d\tau + \int_t^T \rho(S'(T, \tau)l \mid V) d\tau - \Phi^*(l) \right\},$$

где $\Phi^*(\cdot)$ – функция, сопряжённая к $\Phi(\cdot)$. Переходя к вогнутой оболочке и переставляя \max и \min местами, аналогично [1, 2] получим

$$r_t(y, u) = \max_l \left\{ (\text{conc}) \left[\rho(S'(T, t)l \mid X(t, y, u)) + \int_t^T \rho(S'(T, \tau) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times l \mid V) d\tau - \Phi^*(l) \right] - \int_t^T \rho(-B'(\tau)S'(T, \tau)l \mid U) d\tau \right\}. \quad (11)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2 Пусть \bar{l} – вектор, доставляющий максимум в (11). Тогда необходимо имеем

$$\bar{l}' S(T, \tau) B(\tau) \bar{u}_t(\tau) = \min_{u \in U} \bar{l}' S(T, \tau) B(\tau) u.$$

Отметим случай, когда формула (11) принимает относительно простой вид. Обозначим сумму $\rho(lS'(T, t)q \mid X(t, y, u)) + \int_t^T \rho(lS'(T, \tau)q \mid V) d\tau$ через $F(l; q, t, y, u)$, $|l| \leq 1$, $q \in R^n$. Ввиду выпуклости и положительной однородности функции $F(\cdot; q, t, y, u)$ получаем

Утверждение 1 Пусть $\Phi(x) = |q'x|$, где $q \in R^n$. Тогда $\Phi(x) = \max_{|l| \leq 1} lq'x$ u , следовательно,

$$r_t(y, u) = \max \left\{ (F(1; q, t, y, u) + F(-1; q, t, y, u))/2, F(1; q, t, \right. \\ \left. y, u) - \int_t^T \rho(-B'(\tau)S'(T, \tau)q \mid U) d\tau, F(-1; q, t, y, u) - \int_t^T \rho(B'(\tau) \times \right. \\ \left. \times S'(T, \tau)q \mid U) d\tau \right\}. \quad (12)$$

Действительно, при условиях утверждения

$$r_t(y, u) = \max_{|l| \leq 1} \{ (\text{conc}) F(l; q, t, y, u) - \int_t^T \rho(-lB'(\tau)S'(T, \tau)q | U) d\tau \}.$$

Поскольку $(\text{conc}) F(l; \cdot) = F(-1; \cdot) + ((F(1; \cdot) - F(-1; \cdot))/2)(l+1)$, максимум по отрезку $[-1, 1]$ достигается в одной из трёх точек $-1, 0$ или 1 . Следовательно, получаем (12).

4 Алгоритмы многократной коррекции

Введём множество допустимых продолжений сигнала

$$Y(t, \tau, y, u) = \{ y_{k+1}^j : k = m(t), j = m(\tau), x \in X(t, y, u), v(\alpha) \in V, w_i \in W \}. \quad (13)$$

Здесь $m(t) = \max\{i \geq 1 : t_i \leq t\}$. Если $\tau \geq t_{k+1} > t$, то множество (13) непусто, компактно и выпукло.

Теперь можем определить прогноз гарантированного результата (10), (11) по формуле

$$r_t(\tau, y, u) = \max_{y \in Y(t, \tau, y, u)} r_\tau(y, u). \quad (14)$$

Величина (14) характеризует наихудший прогноз гарантированного результата управления, если система находится в позиции $X(t, y, u)$ и вплоть до момента τ применяется допустимое управление u_t^τ . Условимся считать, что

$$r_t(\tau, y, u) = r_\tau(y, u), \quad t_k \leq t \leq \tau < t_{k+1}, \quad (15)$$

для всякого полуинтервала $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0, \dots, N$. В данной позиции с назначенным управлением $u_t(\tau)$, $t \leq \tau \leq T$ определим минимум наихудшего прогноза по формуле

$$\underline{r}_t(y, u) = \min_{t \leq \tau \leq T} r_t(\tau, y, u). \quad (16)$$

Прежде чем формулировать алгоритмы, отметим следующее. Пусть $t_k \leq t < t_{k+1}$. Тогда по формулам (8), (11) находим

$$\begin{aligned} r_t(y, u) = \max_l \{ & (\text{conc}) [\rho(S'(T, t_k)l | X(t_k, y, u)) + \int_{t_k}^T \rho(S'(T, \tau) \times \\ & \times l | V) d\tau - \Phi^*(l)] + \int_{t_k}^t l' S(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau - \int_t^T \rho(-B'(\tau)S'(T, \\ & \tau)l | U) d\tau \} \geq r_{t_k}(y, u), \end{aligned} \quad (17)$$

причём неравенство (17) верно для любого допустимого управления $u_{t_k}^t$. Следовательно, с учётом (15) лишь последующие за t_k измерения в моменты t_{k+1}, t_{k+2}, \dots могут обеспечить уменьшение прогноза гарантированного результата (14).

А. Алгоритм пошаговой многократной коррекции. Будем изменять будущее управление $u_k = u_{t_k}$ лишь в некоторые моменты t_k поступления информации по формуле (5). Далее будем полагать, что $r_k(y, u) = r_{t_k}(y, u)$, $\underline{r}_k(y, u) = \underline{r}_{t_k}(y, u)$. Если в позиции $X(t_k, y, u)$ имеем неравенство

$$r_k(y, u) > \underline{r}_k(y, u), \quad (18)$$

то управление u_k , найденное на предыдущих шагах, не корректируется. В противном случае, если управление u_k к тому же не оптимально, переходим к оптимальному управлению \bar{u}_k в задаче (10). В конце процесса получаем величину $r_T(y, u)$ как максимум целевой функции $\Phi(\cdot)$, вычисленный на конечной позиции $X(T, y, u)$, а также управление $u = u(\cdot, y)$. Это управление зависит от реализации сигнала y^N . Моменты коррекции обозначим $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_K\}$, где $\tau_i = t_{i_i}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_K \leq N$. В частности, совокупность моментов коррекции может быть пустой, что означает удачный выбор начального управления $\bar{u}_0(\cdot)$ и пошаговое уменьшение наихудшего терминального критерия независимо от реализующегося сигнала. Другой крайний случай состоит в совпадении моментов коррекции со всем множеством $\{t_1, \dots, t_N\}$. В силу неравенства (17) минимум в равенстве (16) при $t = t_k$ можно подсчитывать по конечному множеству $\{t_{k+1}, \dots, t_N\}$.

Б. Алгоритм коррекции с уменьшенным количеством проверок. С целью уменьшения проверок неравенства (18) в позиции $X(t_k, y, u)$, где выполняется неравенство (18) и не надо корректировать будущее управление u_k , сохраняем это управление вплоть до момента

$$\vartheta_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\tau \in \{t_{k+1}, \dots, t_N\}} r_k(\tau, y, u). \quad (19)$$

Если же в момент t_k неравенство (18) не выполняется, то полагаем $\vartheta_{k+1} = t_{k+1}$. В момент ϑ_{k+1} повторяем процедуру.

В. Алгоритм коррекции с прогнозом на один шаг. Алгоритм аналогичен А, но вместо неравенства (18) проверяется более простое неравенство

$$r_k(y, u) > r_k(t_{k+1}, y, u). \quad (20)$$

В принципе, количество коррекций управления в этом алгоритме может оказаться больше, чем в алгоритме А.

Все отмеченные алгоритмы предваряются подсчётом числа r_0 и определением начального оптимального управления \bar{u}_0 . Отметим, что построение множеств $X(t, y, u)$ с помощью опорных функций (8) – достаточно сложная задача. Поэтому часто прибегают к аппроксимации сверху указанных множеств эллипсоидами или прямоугольниками [9, 10]. Аппроксимация приводит к оценкам сверху для величин (11), (14).

5 Основные результаты

Обозначим сигнал, реализующийся в системе (1) – (6) при $u = 0$, через \tilde{y} . Наблюдаемый сигнал представим как $y_k = \tilde{y}_k + C_k z_k$, где $z_k = z(t_k)$ – решение системы (1) при $x_0 = 0$, $v \equiv 0$, $u \neq 0$. Тогда в силу линейности уравнений получим, что

$$X(t, y, u) = X(t, \tilde{y}, u) + z(t). \quad (21)$$

Утверждение 2 *Если в момент t_k назначается управление \bar{u}_k , оптимальное в задаче (10), то для всякого прогноза справедливы неравенства $r_k(\tau, y, u) \leq r_k(y, u)$, $\tau \in \{t_{k+1}, \dots, t_N\}$. Если в дополнение к сказанному момент t_k является моментом коррекции в алгоритме А, то указанные неравенства превращаются в равенства для всякого $\tau \in \{t_{k+1}, \dots, t_N\}$.*

Действительно, если бы $r_k(\tau, y, u) > r_k(y, u)$, то нашлось бы такое продолжение $y_{k+1}^l \in Y(t_k, \tau, y, u)$, $l = m(\tau)$, сигнала y^k , что $r_\tau(y, u) > r_k(y, u)$. Значит, существует вектор $x \in X(\tau, y, u)$ и помеха v_τ , порождающие вместе с управлением \bar{u}_k значение $x(T)$, для которого $\Phi(x(T)) > r_k(y, u)$. Но это невозможно в силу выбора управления \bar{u}_k . Второе утверждение леммы вытекает из определения момента коррекции в алгоритме А.

С учётом утверждения 2 получаем теорему.

Теорема 3 *Пусть в системе (1) – (6) при $u = 0$ реализуется некоторый сигнал \tilde{y}^N , и зафиксировано начальное оптимальное управление \bar{u}_0 . Тогда алгоритм А однозначно определяет последовательность $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_K\}$, $\tau_i = t_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_K \leq N$, моментов изменения управления. При этом управление u^T , формируемое алгоритмом на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, совпадает с оптимальным управлением \bar{u}_{τ_i} в задаче (10), $i = 1, \dots, K-1$. Гарантированные значения $r_i = r_{\tau_i}(y, u)$ критерия качества образуют невозрастающую последовательность:*

$$r_0 \geq r_1 \geq \dots \geq r_K. \quad (22)$$

Здесь имеют место строгие неравенства $r_i > r_{i+1}$ тогда и только тогда, когда реализуется не самый худший сигнал из множества $Y(\tau_i, \tau_{i+1}, y, u)$.

Аналогичные теоремы можно сформулировать и для алгоритмов Б и В.

6 Примеры

1) Вначале рассмотрим иллюстративный пример. Дана скалярная система $\dot{x} = u$, $|u| \leq \mu$, $|x_0| \leq \mu$, на отрезке $[0, 4]$. В моменты $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$ производятся наблюдения $y_k = x(t_k) + w_k$, $|w_k| \leq \nu$, $2\mu > \nu$. Пусть $\Phi(x) = |x|$. Используем равенства

$$\begin{aligned} \min_{|u| \leq \mu} \max_{a \leq x \leq b} |u + x| &= \min_{|u| \leq \mu} \{(b-a)/2 + |u - (a+b)/2|\} = \\ &= \begin{cases} (b-a)/2, & |a+b| \leq 2\mu; \\ b-\mu, & a+b > 2\mu; \\ -a-\mu, & a+b < -2\mu. \end{cases} \end{aligned}$$

для определения оптимального управления. В указанной минимаксной задаче имеем

$$\bar{u} = \begin{cases} (a+b)/2, & |a+b| \leq 2\mu; \\ -\mu, & a+b > 2\mu; \\ \mu, & a+b < -2\mu. \end{cases}$$

Используя выписанные равенства, получаем $r_0 = \mu$. Это значение получается, например, при $u \equiv 0$. Именно это управление и выберем в качестве начального. Пусть сигнал \tilde{y} реализуется при $x_0 = \mu$, $w_1 = w_2 = 0$, $w_3 = \nu$. С учётом того, что $X(t_k, y, u) = \int_0^{t_k} u(t)dt + [(\tilde{y}_k - \nu) \vee a, (\tilde{y}_k + \nu) \wedge b]$, где $X(t_{k-1}, \tilde{y}, 0) = [a, b]$, $c \vee d = \max\{c, d\}$, $c \wedge d = \min\{c, d\}$, находим $X(1, y, u) = [\mu - \nu, \mu]$, $r_1(y, u) = \nu/2 < \mu$ при управлении $\bar{u}_1^2 \equiv \nu/2 - \mu$, $\bar{u}_2 \equiv 0$. Поскольку наихудший прогноз даёт результат $\underline{r}_1 = \nu/2$, момент 1 есть момент коррекции. Мы переходим в позицию $X(2, y, u) = [-\nu/2, \nu/2]$, где $r_2(y, u)$ также равно $\nu/2$. Управление $u_2 \equiv 0$ не меняем, поскольку оно оптимально. Третье измерение приводит к тому, что $X(3, y, u) = \{\nu/2\}$, т.е. множество состоит из одной точки. Значит, в момент 3 следует изменить управление на $\bar{u}_3 \equiv -\nu/2$. В результате получаем нулевое значение критерия $r_4 = 0$. Отметим, что здесь алгоритмы А, Б, В приводят к одинаковому результату.

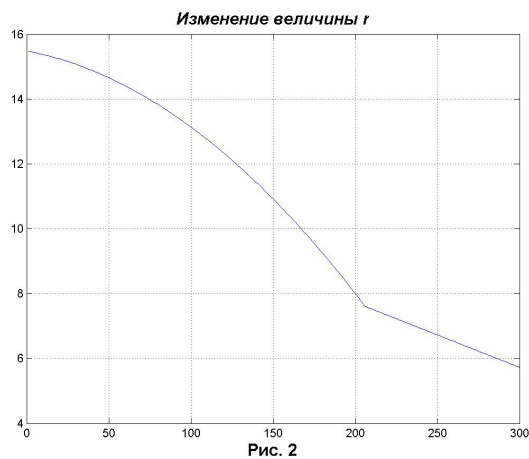
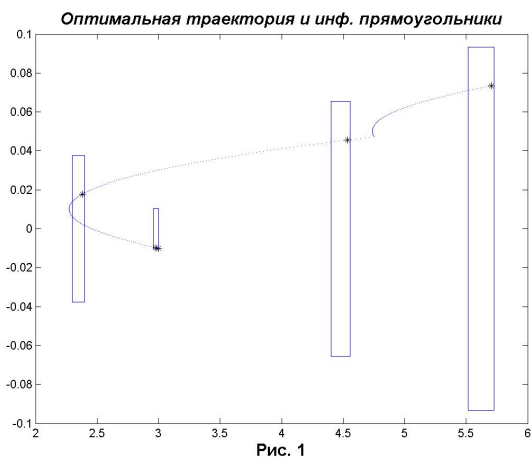
2) Рассмотрим простой случай задачи согласования (выставки) систем координат корабля и стартующего с него самолёта. Пусть корабль движется

по экватору. Тогда [11, 12] отклонение систем можно характеризовать одним углом θ , для которого

$$\dot{\theta} = u + \varepsilon, \quad \dot{\varepsilon} = v.$$

Здесь ε – дрейф, u – разность абсолютных угловых скоростей систем координат, используемая как управление, v – неопределённая помеха. Для измерения используется разность выходов акселерометров: $y = g\theta + w$, где g – ускорение свободного падения, w – непредсказуемые уходы нулей акселерометров. Измерения проводятся с шагом $\Delta = 1$ сек., время выставки $T = 300$ сек. В отличие от [11–13] рассматриваемая модель чисто детерминированная. Были выбраны следующие числовые данные: $|\theta_0| \leq 3^\circ$, $|\varepsilon_0| \leq 0.01$ град./сек., $|v| \leq 0.01/36$ град./сек²., $|u| \leq 0.05$ град./сек., $|w| \leq 0.002$ м/сек². Сигнал формируется при начальных условиях: $\theta_0 = 3^\circ$, $\varepsilon_0 = -0.01$ град./сек., $v \equiv 0.01/36$ град./сек²., $w \equiv -0.002$ м/сек². Использовался алгоритм В с прогнозом на 1 шаг. При этом информационные множества аппроксимировались прямоугольниками. Алгоритм приводит к одному моменту коррекции на 207-ом шаге.

Результаты моделирования простого случая представлены на Рис. 1, Рис. 2.



Список литературы

- [1] Ананьев Б.И., Куржанский А.Б., Шелементьев Г.С. Минимаксный синтез в задачах импульсного наведения и коррекции движения. // Прикладная математика и механика, 1976, Т.40, вып.1, С. 3-13.

- [2] *Ананьев Б.И.* Минимаксная квадратичная задача коррекции движения. // Прикладная математика и механика, 1977, Т.41, вып.3, С. 436-445.
- [3] *Красовский Н.Н.* Игровая задача о коррекции движения. // Прикладная математика и механика, 1969, Т.33, вып.3, С. 386-396.
- [4] *Черноусько Ф.Л.* Минимаксная задача одноразовой коррекции при погрешностях измерений. // Прикладная математика и механика, 1968, Т.32, вып.4, С.584-595.
- [5] *Ананьев Б.И., Гредасова Н.В.* Многократная коррекция движения линейно - квадратичной управляемой системы. // Вестник УГТУ-УПИ, № 4(56). 2005. С. 280-288.
- [6] *Ананьев Б.И., Гредасова Н.В.* Коррекция решения многошаговой системы в условиях неопределенности. // Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании: сб. материалов областной научно-практической конференции. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006. Ч. 1. С. 3-11.
- [7] *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- [8] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
- [9] *Kurzhanski A.B., Vályi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1996.
- [10] *Костоусова Е.К.* О полиэдральном оценивании областей достижимости линейных многошаговых систем. // Автоматика и телемеханика, 1977, № 3. С. 57-68.
- [11] *Богуславский И.А.* Прикладные задачи фильтрации и управления. М.: Наука, 1983.
- [12] *Климов Д.М.* Инерциальная навигация на море. М.: Наука, 1984.
- [13] *Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И.* Задача коррекции в инерциальной навигации. М.: Изд-во МГУ, 1982.