

Теория обыкновенных дифференциальных уравненийФАЗОВЫЕ ПОТОКИ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА  
КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КРУГЕ ПУАНКАРЕ. IV<sub>2</sub><sup>1</sup>А. Ф. Андреев, И. А. Андреева<sup>2</sup>

Продолжаем качественное исследование системы

$$\frac{dx}{dt} = p_0x^3 + p_1x^2y + p_2xy^2 + p_3y^3 \equiv X(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = ax^2 + bxy + cy^2 \equiv Y(x, y),$$

где  $a, b, c, p_0, \dots, p_3 \in \mathbb{R}$  — параметры, подчиненные лишь условию: формы  $X(x, y)$  и  $Y(x, y)$  — взаимно просты. Без ограничения общности считаем, что в ней первый ненулевой из коэффициентов  $p_3, \dots, p_0$  и первый ненулевой из коэффициентов  $c, b, a$  положительны. Содержание частей I, II, III [1-3] этого исследования и программа части IV кратко изложены нами во введении к части IV<sub>1</sub> [4].

Настоящая его часть IV<sub>2</sub> — продолжение части IV<sub>1</sub>. Нумерация параграфов в этих двух частях сквозная.

**§ 2.  $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = (\mathbf{2}, \mathbf{2})$ .**

Условия § 2 означают, что для системы (0.1) каждый из многочленов  $P(u) := X(1, u)$  и  $Q(u) := Y(1, u)$  имеет ровно два различных вещественных корня. Для взаимного расположения всех этих корней на числовой оси

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ (НШ-954.2008.1), РФФИ (08-01-00346), ФЦП Министерства образования и науки РФ "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (2010-1.1-111-128-033).

<sup>2</sup> © А. Ф. Андреев, И. А. Андреева, 2010

и могут представиться семь различных случаев (см. ниже). Цель § 2 — исследование системы (0.1) в каждом из этих случаев по программе п. 0.2 (см. часть IV<sub>1</sub> [4]).

Для каждого фиксированного случая мы сначала (на основании результатов частей I–III) перечисляем особые точки системы в круге Пуанкаре  $\bar{\Omega}$  и выясняем их возможные топодинамические типы (ТД-типы, см. IV<sub>1</sub>, § 0). Это позволяет нам разбить каждый случай на несколько подслучаев ( $nc$ ) с попарно различными наборами ТД-типов особых точек в них. Для каждого подслучая каждого случая мы, используя соответствующий ему набор ТД-типов особых точек, составляем перечень их сепаратрис и изучаем методом Б(ездорожной) К(арты) (БД-карты, см. IV<sub>1</sub>, § 0) глобальное поведение последних. Если эти сепаратрисы при их продолжении на все  $t$  ведут себя однозначно (сохраняют взаимное расположение при изменении значений параметров системы в допустимых для данного подслучая пределах), то они осуществляют вполне определенное разбиение круга  $\Omega$  на максимальные простые инвариантные ячейки (МП-ячейки, см. IV<sub>1</sub>, § 0). Это позволяет нам построить для данного подслучая Ф(азовый) П(ортрет) системы в круге  $\bar{\Omega}$ : как графический (ГФП), в виде рисунка, так и описательный (ОФП), в виде таблицы, которая содержит перечень сепаратрис особых точек (с указанием их предельных множеств) и перечень МП-ячеек (с указанием для каждой из них ее границы, источника и стока). Мы, как правило, строим для рассматриваемого подслучая ОФП системы, причем не выписываем искомую таблицу явно, а даем лишь простой метод ее получения — метод Д(еформации) Б(азовой) Т(аблицы), т.е. некоторой уже известной нам таблицы типа ОФП, малая деформация которой превращает ее в искомую. Номер БТ для рассматриваемого подслучая и список ее деформаций мы указываем в таблице, номер которой совпадает с номером данного случая.

Примеры деформаций БТ: 1) удаление (изъятие) из нее некоторой строки, 2) замена в ней одного символа на другой (например, замена  $O_1^+$  на  $O_0^+$ ,  $\tilde{S}_3^+$  на  $\tilde{S}_1^+$ ,  $O_1^+$  на  $O_0^+$  и наоборот:  $O_1^+ \rightleftharpoons O_0^+$ ).

Если для рассматриваемого подслучая данного случая сепаратрисы особых точек ведут себя неоднозначно, т.е. существует несколько вариантов их глобального взаимного расположения, то каждому из них соответствует подслучай этого подслучая, т.е. подподслучай ( $nnc$ ) данного случая системы, и мы строим ОФП системы для этих ее подподслучаев.

Заметим, что построение по известному ОФП системы ее ГФП и наоборот — минутное дело.

Пусть  $u_1, u_2, u_3$  — корни  $P(u)$ ,  $q_1, q_2$  — корни  $Q(u)$ .

**2.1. Случай  $u_1 < u_2 = u_3 < q_1 < q_2$ .**

Этот случай можно рассматривать как предельный для случая 1.1 (см. IV<sub>1</sub>) при  $u_3 - u_2 \rightarrow +0$ . Для него особыми точками системы (0.1) в круге Пуанкаре  $\bar{\Omega}$  являются: точка  $O(0, 0)$  и бесконечноудаленные особые точки (БО-точки)  $O_i(u_i, 0)$ ,  $i = \overline{0, 2}$ ,  $u_0 = 0$ , а их ТД-типы описываются словом

$$\tilde{A}_O = S_0^+ S_1^- N^- S_2^- \tag{2.1.0}$$

и словами  $\tilde{A}_i^\pm := \tilde{A}_{O_i}^\pm$ ,  $i = \overline{0, 2}$ , из таблицы 2.1.0.

Таблица 2.1.0. ТД-типы БО-точек в случае 2.1.

Подслучай	$\tilde{A}_0^{+(-)}$	$\tilde{A}_1^{+(-)}$	$\tilde{A}_2^{+(-)}$
1 $u_1 > 0$	$N_-^- (N_+^-)$	$N_+^+ (S_-^-)$	$S_-^+ N_+^+ (\emptyset)$
2 $u_1 = 0$	$N_-^- N_+^+ (\emptyset)$	—	$S_-^+ N_+^+ (\emptyset)$
3 $u_1 < 0 < u_2$	$N_+^+ (N_-^+)$	$N_-^- (S_+^+)$	$S_-^+ N_+^+ (\emptyset)$
4 $u_2 = 0$	$(N_+^+ N_-^+)$	$N_-^- (S_+^+)$	—
5 $u_2 < 0$	$N^+ (N^+)$	$N_-^- (S_+^+)$	$\emptyset (N_-^+ S_-^+)$

**Замечание 2.1.** Нижние индексы пучков  $O_0^{+(-)}$ -кривых в строке 5 таблицы 2.1.0 не указаны, потому что при  $q_1 q_2 \neq 0$  они зависят от знаков  $q_1, q_2$ , а при  $q_1 q_2 = 0$  не существуют. Такая ситуация встречается в таблицах ТД-типов БО-точек и для других случаев.

Таким образом в случае 2.1 (как, впрочем, и в любом случае из §2) мы различаем для системы (0.1) пять подслучаев с попарно различными наборами ТД-типов особых точек: подслучаи 2.1. $k$ ,  $k = \overline{1, 5}$ . Изучая каждый из них по вышеописанной программе, приходим к следующим выводам.

Подслучай 2.1.1:  $u_1 > 0$ . Сепаратрисы особых точек:  $S_0, S_1, S_2, \tilde{S}_1^-, \tilde{S}_2^+$  (где  $S_0, S_1, S_2$  — сепаратрисы точки  $O(0, 0)$ , примыкающие к ней по направлениям  $OO_-^0, OQ_1^+, OQ_2^-$  соответственно,  $\tilde{S}_1^- (\tilde{S}_2^+)$  — сепаратриса точки  $O_1^- (O_2^+)$ ). Их поведение однозначно.

Подслучай 2.1.2:  $u_1 = 0$ . Сепаратрисы:  $S_0, S_1, S_2, \tilde{S}_2^+$ . Их поведение однозначно.

Подслучай 2.1.3:  $u_1 < 0 < u_2$ . Сепаратрисы особых точек те же, что и в подслучае 2.1.1, но для них возможны три варианта глобального взаимного расположения:  $S_2$  и  $\tilde{S}_1^-$  по одному разу пересекают полуось  $y = 0, x < 0$ , но,

если это происходит, скажем, при значениях  $x$   $x_2$  и  $x_1^-$  соответственно, то для последних возможно любое из равенств-неравенств: 1)  $x_2 > x_1^-$ , 2)  $x_2 = x_1^-$ , 3)  $x_2 < x_1^-$ . Возникают подподслучаи случая 2.1: ппс 2.1.3 $l$ ,  $l = \overline{1, 3}$ .

Подслучай 2.1.4:  $u_2 = 0$ . Сепаратрисы особых точек  $S_0, S_1, S_2, \tilde{S}_1^-$ . Для них справедливо то же, что и для сепаратрис в подслучае 2.1.3. Возникают подподслучаи 2.1.4 $l$ ,  $l = \overline{1, 3}$ , случая 2.1.

Подслучай 2.1.5:  $u_1 > 0$ . Сепаратрисы:  $S_0, S_1, S_2, \tilde{S}_1^-, \tilde{S}_2^-$ . Для них возможны пять вариантов глобального взаимного расположения: те же, что и в подслучае 1.1.7 при замене  $x_3^-$  на  $x_2^-$ . Этим вариантам соответствуют подподслучаи 2.1.5 $l$ ,  $l = \overline{1, 5}$ , случая 2.1.

Для любого из рассмотренных выше подслучаев и подподслучаев случая 2.1 ОФП системы дает метод ДБТ (см. таблицу 2.1).

Таблица 2.1. ОФП системы в случае 2.1.

Искомая таблица	Базовая таблица	Деформация строк базовой таблицы	Перенумерация строк
2.1.1	1.1.1	Удаление строки 5, замена символов: $O_3^+$ на $O_0^+$ , $\tilde{S}_3^-$ на $\tilde{S}_1^-$	$\overline{1, 4, 6} \rightarrow \overline{1, 5}$
2.1.2	2.1.1	Удаление строки 5 и символа $\tilde{S}_1^-$ из строки 4	–
2.1.3 $_{1(3)}$	1.1.3 $_{3(5)}$	Удаление строки 6 и символа $\tilde{S}_3^-$ из строки 5	–
2.1.3 $_2$	2.1.3 $_{1,3}$	Удаление строки 4	$\overline{1, 3, 5} \rightarrow \overline{1, 4}$
2.1.4 $l$ , $l = \overline{1, 3}$	2.1.3 $l$	Удаление строки 2, замена символа $O_2^+$ на $O_0^+$	$1, \overline{3, 5} \rightarrow \overline{1, 4}$
2.1.5 $l$ , $l = \overline{1, 5}$	1.1.7 $l$	Удаление строки 2 и символа $\tilde{S}_2^+$ из строки 1, замена символа $\tilde{S}_3^-$ на $\tilde{S}_2^-$	$1, \overline{3, 6} \rightarrow \overline{1, 5}$ .

## 2.2. Случай $u_1 = u_2 < u_3 < q_1 < q_2$ .

Этот случай является предельным для случая 1.1 при  $u_2 - u_1 \rightarrow +0$ . Для него особые точки системы:  $O(0, 0)$  — конечная,  $O_i(u_i, 0)$ ,  $i \in \{0, 1, 3\}$ , — БО-точки,  $u_0 = 0$ , ТД-тип точки  $O$  дает формула (2.1.0), ТД-типы БО-точек — таблица 2.2.0.

Таблица 2.2.0. ТД-типы БО-точек в случае 2.2.

Подслучай		$\tilde{A}_0^{+(-)}$	$\tilde{A}_1^{+(-)}$	$\tilde{A}_3^{+(-)}$
1	$u_1 > 0$	$N_-^- (N_+^-)$	$\emptyset (S_-^- N_+^-)$	$N_+^+ (S_-^-)$
2	$u_1 = 0$	$N_-^- (N_+^-)$	–	$N_+^+ (S_-^-)$
3	$u_1 < 0 < u_3$	$N_-^- (N_+^-)$	$N_-^- (S_+^-) (\emptyset)$	$N_+^+ (S_-^-)$
4	$u_3 = 0$	$N_-^- N_+^+ (\emptyset)$	$N_-^- S_+^- (\emptyset)$	–
5	$u_3 < 0$	$N^+ (N^+)$	$N_-^- S_+^- (\emptyset)$	$N_-^- (S_+^+)$

Изучение подслучаев 2.2. $k$ ,  $k = \overline{1, 5}$ , этого случая системы приводит нас к следующим выводам.

При любом  $k \in \{1, \dots, 5\}$  в подслучае 2.2. $k$  перечень сепаратрис особых точек дают слова  $\tilde{A}_O$  (формула (2.1.0)) и  $\tilde{A}_{1,3}^\pm$  (таблица 2.2.0, строка  $k$ ). В подслучаях 2.2. $k$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , все эти сепаратрисы ведут себя однозначно. В подслучае 2.2.5 для сепаратрис  $S_2$  и  $\tilde{S}_3^-$  возможны те же варианты глобального взаимного расположения, что и в подподслучаях 1.1.7 $l$ ,  $l = \overline{3, 5}$ , случая 1.1. Этим вариантам соответствуют подподслучаи 2.2.5 $l$ ,  $l = \overline{1, 3}$ , случая 2.2. ОФП системы для каждого из вышеуказанных подслучаев и подподслучаев случая 2.2 дает метод ДБТ (см. таблицу 2.2).

Таблица 2.2. ОФП системы в случае 2.2.

Искомая таблица	Базовая таблица	Деформация строк базовой таблицы	Перенумерация строк
2.2.1	1.1.1	Удаление строки 2 и символа $\tilde{S}_2^+$ из строки 1, замена символа $O_2^-$ на $O_1^-$ в строке 5.	$1, \overline{3}, \overline{6} \rightarrow \overline{1}, \overline{5}$
2.2.2	2.2.1	Удаление строки 5 и символа $\tilde{S}_1^-$ из строки 4, замена символа $O_1^-$ на $O_0^-$ в строке 4.	–
2.2.3	1.1.1	Удаление строки 6 и символа $\tilde{S}_1^-$ из строки 5; замена строки 2 на строку	–
		2   $\tilde{S}_1^+ : O_1^+ \rightarrow O_3^+$   $\Omega_2$   $\tilde{S}_1^+$   $O_0^+ \rightarrow O_3^+$ .	
2.2.4	2.2.3	Удаление строки 5 и символа $\tilde{S}_3^-$ из строки 4, замена всюду $O_3^+$ на $O_0^+$ .	–
2.2.5 <sub>1(3)</sub>	1.1.7 <sub>3(5)</sub>	Удаление строки 4 и символа $\tilde{S}_1^-$ из строки 3; замена строки 2 на строку	$\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6} \rightarrow \overline{1}, \overline{5}$
		2   $\tilde{S}_1^+ : O_1^+ \rightarrow O_0^+$   $\Omega_2$   $\tilde{S}_1^+$   $O_3^+ \rightarrow O_0^+$	
2.2.5 <sub>2</sub> ,	2.2.5 <sub>1,3</sub>	Удаление строки 4.	$\overline{1}, \overline{3}, \overline{5} \rightarrow \overline{1}, \overline{4}$

### 2.3. Случай $u_1 < q_1 < q_2 < u_2 = u_3$ .

Этот случай является предельным для случая 1.2 при  $u_3 - u_2 \rightarrow +0$ . Для него особые точки системы:  $O(0, 0)$  и  $O_i(u_i, 0)$ ,  $i = \overline{0}, 2$ ,  $u_0 = 0$ , ТД-типы особых точек дают формула (2.1.0) и таблица 2.3.0.

Таблица 2.3.0. ТД-типы БО-точек в случае 2.3.

Подслучай	$\tilde{A}_0^{+(-)}$	$\tilde{A}_1^{+(-)}$	$\tilde{A}_2^{+(-)}$
1   $u_1 > 0$	$N_-^-(N_+^-)$	$N_+^+(S_-^-)$	$S_-^+N_+^+(\emptyset)$
2   $u_1 = 0$	$N_-^+N_+^+(\emptyset)$	–	$S_-^+N_+^+(\emptyset)$
3   $u_1 < 0 < u_2$	$N_+^+(N_+^+)$	$N_+^-(S_+^+)$	$S_-^+N_+^+(\emptyset)$
4   $u_2 = 0$	$N_+^+N_-^+$	$N_+^-S_+^+$	–
5   $u_2 < 0$	$N_+^+(N_+^+)$	$N_+^-(S_+^+)$	$\emptyset (N_-^+S_+^+)$

Имеют место подслучаи 2.3.k,  $k = \overline{1}, 5$ .

При любом  $k \in \{1, \dots, 5\}$  в подслучае 2.3.k сепаратрисы особых точек дают слова  $\tilde{A}_O$  (формула (2.1.0)) и  $\tilde{A}_i^\pm$ ,  $i = 1, 2$ , (таблица 2.3.0, строка k) поведение сепаратрис однозначно. ОФП системы для подслучаев 2.3.k,  $k =$

$\overline{1, 4}$ , дает метод ДБТ (см. таблицу 2.3), для подслучая 2.3.5 мы выписываем его явно.

Таблица 2.3. ОФП системы для подслучаев 2.3.k,  $k = \overline{1, 4}$ .

Искомая таблица	Базовая таблица	Деформация строк базовой таблицы	Перенумерация строк
2.3.1	1.2.1	Удаление строки 5, замена $O_3^+$ на $O_2^+$ в строках 3,4,6, $\tilde{S}_3^-$ на $\tilde{S}_1^-$ в строке 4.	$\overline{1, 4, 6} \rightarrow \overline{1, 5}$
2.3.2	2.3.1	Удаление строки 5 и символа $\tilde{S}_1^-$ из строки 4.	–
2.3.3	1.2.3 <sub>5</sub>	Удаление строки 6 и символа $\tilde{S}_3^-$ из строки 5; замена символа $O_3^+$ на $O_2^+$ в строке 3.	–
2.3.4	2.3.3	Удаление строки 3, замена символа $\tilde{S}_2^+$ на $\tilde{S}_1^-$ в строке 2.	$1, 2, 4, 5 \rightarrow \overline{1, 4}$

Таблица 2.3.5. ОФП системы в подслучае 2.3.5.

1	$S_0 : O_1^+ \rightarrow O$	$\Omega_1$	$S_0 S_1$	$O_1^+ \rightarrow O_0^+$
2	$S_1 : O \rightarrow O_1^+$	$\Omega_2$	$S_1 \tilde{S}_1^-$	$O \rightarrow O_0^+$
3	$\tilde{S}_1^- : O \rightarrow O_1^-$	$\Omega_3$	$\tilde{S}_1^- S_2$	$O \rightarrow O_2^-$
4	$S_2 : O \rightarrow O_2^-$	$\Omega_4$	$S_2 \tilde{S}_2^- S_0$	$O_1^+ \rightarrow O_2^-$
5	$\tilde{S}_2^- : O_1^+ \rightarrow O_2^-$	$\Omega_5$	$\tilde{S}_2^-$	$O_1^+ \rightarrow O_0^-$

## 2.4. Случай $u_1 < q_1 < u_2 = u_3 < q_2$ .

Этот случай является предельным для случая 1.3 при  $u_3 - u_2 \rightarrow +0$ . Для него особые точки системы в  $\bar{\Omega}$ :  $O(0, 0)$  и  $O_i(u_i, 0)$ ,  $i = \overline{0, 2}$ ,  $u_0 = 0$ , ТД-тип точки  $O$  дает формула (2.1.0), ТД-типы БО-точек — таблица 2.4.0.

Таблица 2.4.0. ТД-типы БО-точек в случае 2.4.

Подслучай	$\tilde{A}_0^{+(-)}$	$\tilde{A}_1^{+(-)}$	$\tilde{A}_2^{+(-)}$
1, 2, 3	См. таблицу 1.3.0.		$\emptyset(S_-^+ N_+^+)$
4	$u_2 = 0$	$N^+(N^+)$	$N_+^-(S_+^+)$
5	$u_2 < 0$	$N^+(N^+)$	$N_-^+ S_+^+ (\emptyset)$

Имеем подслучаи 2.4.k,  $k = \overline{1, 5}$ . Для любого из них список сепаратрис

дают слова  $\tilde{A}_O$  и  $\tilde{A}_{1,2}^\pm$ , сепаратрисы ведут себя однозначно. ОФП системы для подслучаев 2.4.k,  $k = \overline{1, 4}$ , дает метод ДБТ (см. таблицу 2.4), для подслучая 2.4.5 мы выписываем его явно.

Таблица 2.4. ОФП системы для подслучаев 2.4.k,  $k = \overline{1, 4}$ .

Искомая таблица	Базовая таблица	Деформация строк базовой таблицы	Перенумерация строк
2.4.1	1.3.1	Удаление строки 4 и символа $\tilde{S}_3^+$ из строки 3, замена символа $O_3^-$ на $O_2^-$ в строках 5,6.	$\overline{1, 3, 5, 6} \rightarrow \overline{1, 5}$
2.4.2	1.3.2	Удаление строки 3 и символа $\tilde{S}_3^+$ из строки 2, замена символа $O_3^-$ на $O_2^-$ .	$1, 2, \overline{4, 6} \rightarrow \overline{1, 5}$
2.4.3	1.3.3	Удаление строки 3 и символа $\tilde{S}_3^+$ из строки 2, замена символа $O_3^-$ на $O_2^-$ .	$1, 2, \overline{4, 6} \rightarrow \overline{1, 5}$
2.4.4	2.4.3	Удаление строки 4, замена символов $\tilde{S}_2^-$ на $S_2$ в строке 3, $O_2^-$ на $O_0^-$ .	$\overline{1, 3, 5, 6} \rightarrow \overline{1, 5}$

Таблица 2.4.5. ОФП системы в подподслучае 2.4.5.

1	$S_0 : O_1^+ \rightarrow O$	$\Omega_1$	$S_0 S_1$	$O_1^+ \rightarrow O_2^+$
2	$S_1 : O \rightarrow O_2^+$	$\Omega_2$	$S_1 \tilde{S}_2^+$	$O \rightarrow O_2^+$
3	$\tilde{S}_2^+ : O \rightarrow O_2^+$	$\Omega_3$	$\tilde{S}_2^+ \tilde{S}_1^-$	$O \rightarrow O_0^+$
4	$\tilde{S}_1^- : O \rightarrow O_1^-$	$\Omega_4$	$\tilde{S}_1^- S_2$	$O \rightarrow O_0^-$
5	$S_2 : O \rightarrow O_0^-$	$\Omega_5$	$S_2 S_0$	$O_1^+ \rightarrow O_0^-$

## 2.5. Случай $u_1 = u_2 < q_1 < u_3 < q_2$ .

Этот случай является предельным для случая 1.5 при  $u_2 - u_1 \rightarrow +0$ . Особые точки системы:  $O(0, 0)$ ,  $O_i(u_i, 0)$ ,  $i = 0, 1, 3$ ,  $u_0 = 0$ . ТД-тип точки  $O$

$$\tilde{A}_O = S_0^+ N_1^+ N_2^- (S^0)^- S_1^+ S_2^-, \quad (2.5.0)$$

где  $S_0, S^0, S_1$  и  $S_2$  — сепаратрисы точки  $O$ , примыкающие к  $O$  по направлениям  $OO_0^-, OO_0^+, OQ_1^-$  и  $OQ_2^-$  соответственно,  $N_1, N_2$  — узловые пучки  $O$ -кривых, примыкающие к  $O$  по направлениям  $OQ_1^+, OQ_2^+$ . ТД-типы БО-точек дает таблица 2.5.0.



Таблица 2.5.0. ТД-типы БО-точек в случае 2.5.

Подслучай		$\tilde{A}_0^{+(-)}$	$\tilde{A}_1^{+(-)}$	$\tilde{A}_3^{+(-)}$
1.	$u_1 > 0$	$N^- (N_+^-)$	$\emptyset (S^- N_+^-)$	$S^- (N_+^+)$
2.	$u_1 = 0$	$N^- (N_+^-)$	-	$S^- (N_+^+)$
3.	$u_1 < 0 < u_2$	$N^- (N^-)$	$N^- S_+^- (\emptyset)$	$S^- (N_+^+)$
4.	$u_3 = 0$	$\emptyset (N^- N_+^+)$	$N^- S_+^- (\emptyset)$	-
5.	$u_3 < 0$	$N^- (N^+)$	$S_+^+ N^- (\emptyset)$	$S_+^+ (N^-)$

Для любого из подслучаев 2.5.k,  $k = \overline{1, 4}$ , все сепаратрисы ведут себя однозначно, а потому и ФП системы имеет определенный вид. В подслучае 2.5.5 для сепаратрис  $S^0$  и  $\tilde{S}_3^+$  возможны варианты глобального взаимного расположения (такие же, как и в подслучае 1.5.7). Им соответствуют подподслучаи 2.5.5 $_l$ ,  $l = \overline{1, 3}$ , случая 2.5. Для любого из них ФП системы определяется однозначно. Для всех рассмотренных выше подслучаев и подподслучаев случая 2.5 ОФП системы дает метод ДБТ (см. таблицу 2.5).

Таблица 2.5. ОФП системы для подслучаев и подподслучаев случая 2.5.

Искомая таблица	Базовая таблица	Деформация строк базовой таблицы					Перенумерация строк
2.5.1	1.5	Удаление строки 2 и символа $\tilde{S}_3^+$ из строки 1, замена символа $O_2^-$ на $O_1^-$ в строках 5,6.					$1, \overline{3}, \overline{7} \rightarrow \overline{1}, \overline{6}$
2.5.2	2.5.1	Удаление строки 3, замена в строке 2 слова $\tilde{S}_3^+ \tilde{S}_1^-$ на $\tilde{S}_3^+ S_1 S^0$ .					$1, 2, \overline{4}, \overline{6} \rightarrow \overline{1}, \overline{5}$
2.5.3	2.5.2	Замена строки 1 строками					$0, 5 \rightarrow \overline{1}, \overline{6}$
		0.	$S_0 :$	$O_1^+ \rightarrow O$	$\Omega_0$	$S_0 \tilde{S}_1^+$	
		1.	$\tilde{S}_1^+$	$O_1^+ \rightarrow O$	$\Omega_1$	$\tilde{S}_1^+ \tilde{S}_3^+$	$O_0^+ \rightarrow O$
2.5.4	2.5.3	Удаление строки 3, замена в строке 2 слова $\tilde{S}_1^+ \tilde{S}_3^+$ на $\tilde{S}_1^+ S_1 S^0$ .					$1, 2, \overline{4}, \overline{6} \rightarrow \overline{1}, \overline{5}$ .
2.5.5 $_1(3)$	1.5.7 $_1(3)$	Удаление строки 5 и символа $\tilde{S}_1^-$ из строки 3(4), замена в строках 1, 2: $O_2^+, \tilde{S}_2^+$ на $O_1^+, \tilde{S}_1^+$ соответственно					$\overline{1}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7} \rightarrow \overline{1}, \overline{6}$
2.5.5 $_2$	2.5.5 $_3$	Удаление строки 3.					$1, 2, \overline{4}, \overline{6} \rightarrow \overline{1}, \overline{5}$

### 2.6. Случай $q_1 < u_1 = u_2 < u_3 < q_2$ .

Этот случай является предельным для случая 1.6 при  $u_2 - u_1 \rightarrow +0$ .

Особые точки системы:  $O(0, 0)$  и  $O_i(u_i, 0)$ ,  $i \in \{0, 1, 3\}$ ,  $u_0 = 0$ . ТД-тип точки  $O$  имеет вид (2.5.0), ТД-типы БО-точек — вид, указанный в таблице 2.6.0.

Таблица 2.6.0. ТД-типы БО-точек в случае 2.6.

Подслучай		$\tilde{A}_0^{+(-)}$	$\tilde{A}_1^{+(-)}$	$\tilde{A}_3^{+(-)}$
1.	$u_1 > 0$	$N^-(N^-)$	$S_-^- N_+^- (\emptyset)$	$S_-^-(N_+^+)$
2.	$u_1 = 0$	$N_+^-(N_-^-)$	–	$S_-^-(N_+^+)$
3.	$u_1 < 0 < u_3$	$N_+^-(N_-^-)$	$\emptyset(N_-^- S_+^-)$	$S_-^-(N_+^+)$
4.	$u_3 = 0$	$\emptyset(N_-^- N_+^+)$	$\emptyset(N_-^- N_+^+)$	–
5.	$u_3 < 0$	$N^+(N^+)$	$\emptyset(N_-^- S_+^-)$	$S_+^+(N_-^-)$

Различаем подслучаи 2.6. $k$ ,  $k = \overline{1, 5}$ . Исследуем их на поведение сепаратрис и на наличие подподслучаев.

Подслучай 2.6.1:  $u_1 > 0$ . Сепаратрисы особых точек:  $S_0, S^0, S_1, S_2, \tilde{S}_1^+, \tilde{S}_3^+$ . Их глобальное взаимное расположение допускает семь вариантов, которые характеризуются теми же условиями, что и в подслучае 1.6.1 случая 1.6. Этим вариантам соответствуют подподслучаи 2.6.1 $l$ ,  $l = \overline{1, 7}$ , случая 2.6.

Подслучай 2.6.2:  $u_1 = 0$ . Сепаратрисы особых точек:  $S_0, S^0, S_1, S_2, \tilde{S}_3^+$ . Для них возможны три варианта взаимного расположения, которые (в обозначениях из подслучая 1.6.1) характеризуются условиями на  $S_0$  и  $S^0$ : 1)  $0 < x^0 < x_0$ , 2)  $0 < x^0 = x_0$ , 3)  $0 < x_0 < x^0$ . Им соответствуют подподслучаи 2.6.2 $l$ ,  $l = \overline{1, 3}$ , случая 2.6.

Подслучай 2.6.3:  $u_1 < 0 < u_3$ . Сепаратрисы особых точек  $S_0, S^0, S_1, S_2, \tilde{S}_1^+, \tilde{S}_3^+$ . Из них  $S_0, S^0$  и  $\tilde{S}_3^+$  по одному разу пересекают полуось  $y = 0, x > 0$ , причем, если это имеет место при значениях  $x$   $x_0, x^0$  и  $x_3^+$  соответственно, то  $0 < x^0 < x_3^+$ , а для  $x_0$  возможно любое из положений 1)  $x_3^+ < x_0$ , 2)  $x_3^+ = x_0$ , 3)  $x^0 < x_0 < x_3^+$ , 4)  $x_0 = x^0$ , 5)  $0 < x_0 < x^0$ . Последним соответствуют подподслучаи 2.6.3 $l$ ,  $l = \overline{1, 5}$ , случая 2.6.

Подслучай 2.6.4:  $u_3 = 0$ . Сепаратрисы особых точек  $S_0, S^0, S_1, S_2, \tilde{S}_1^-$ . Для них возможны три варианта взаимного расположения, которые определяются теми же условиями на  $S_0$  и  $S^0$ , что и в подслучае 2.6.2. Им соответствуют подподслучаи 2.6.4 $l$ ,  $l = \overline{1, 3}$ , случая 2.6.

Подслучай 2.6.5:  $u_1 > 0$ . Сепаратрисы особых точек те же, что и в подслучае 2.6.3, но на этот раз для них (в тех же обозначениях)  $0 < x_0 < x_3^+$ , а для  $x^0$  возможно любое из положений 1)  $x_3^+ < x^0$ , 2)  $x_3^+ = x^0$ , 3)  $x_0 < x^0 < x_3^+$ , 4)

$x^0 = x_0$ , 5)  $x^0 < x_0$ . Последним соответствуют подподслучаи 2.6.5 $_l$ ,  $l = \overline{1, 5}$ , случая 2.6.

Для любого из вышеперечисленных подподслучаев случая 2.6 фазовый портрет системы определяется однозначно, ОФП системы можно построить методом ДБТ (см. таблицу 2.6).

Таблица 2.6. ОФП системы для подподслучаев случая 2.6.

Искомая таблица	Базовая таблица	Деформация строк базовой таблицы	Перенумерация строк
2.6.1 $_l$ , $l = \overline{1, 7}$	1.6.1 $_l$	Удаление строки 7 и символа $\tilde{S}_2^-$ из строки 6, замена символа $O_2^+$ на $O_1^+$ .	$\overline{1, 7} \rightarrow \overline{1, 6}$
2.6.2 $_l$ , $l = 1, 3, 5$	2.6.1 $_{l+2}$	Удаление строки 1 и символа $\tilde{S}_1^+$ из строки 2.	$\overline{2, 6} \rightarrow \overline{1, 5}$
2.6.2 $_2$	2.6.2 $_{1,3}$	Удаление строки 2.	$1, \overline{3, 5} \rightarrow \overline{1, 4}$
2.6.2 $_4$	2.6.2 $_{3,5}$	Удаление строки 3.	$1, 2, 4, 5 \rightarrow \overline{1, 4}$
2.6.3 $_l$ , $l = 1,$ $3, 5$ ( $l = 2, 4$ )	2.6.2 $_l$	Добавление строки 6 (5) : 6(5)   $\tilde{S}_1^- : O_1^- \rightarrow O_3^-$   $\Omega_{6(5)}$   $\tilde{S}_1^-$   $O_1^- \rightarrow O_3^-$ замена в строке 5(4) слова $S_2S_1$ на $S_2S_1\tilde{S}_1^-$	$\overline{1, 5} \rightarrow \overline{1, 6}$ $(\overline{1, 4} \rightarrow \overline{1, 5})$
2.6.4 $_l$ $l = 1, 3$ ( $l = 2$ )	2.6.3 $_l$	Удаление строки 1 и символа $\tilde{S}_3^+$ из строки 2, замена в строках 4,5(3,4) символа $O_3^-$ на $O_0^-$	$\overline{2, 6} \rightarrow \overline{1, 5}$ $(\overline{2, 5} \rightarrow \overline{1, 4})$
2.6.5 $_l$ $l = 1, 3$	1.6.7 $_l$	Удаление строки 2, замены: в строке 3 $\tilde{S}_1^+$ на $S_0S_2$ , в строках 6,7: $O_2^-$ на $O_1^-$ , $\tilde{S}_2^-$ на $\tilde{S}_1^-$ .	$1, \overline{3, 7} \rightarrow \overline{1, 6}$
2.6.5 $_5$	1.6.7 $_7$	Удаление строки 4, замены: в строке 3 $\tilde{S}_1^+$ на $\tilde{S}_3^+$ , в строке 6 $O_2^-$ на $O_1^-$	$\overline{1, 3, 5, 7} \rightarrow \overline{1, 6}$
2.6.5 $_2$	2.6.5 $_1$	Удаление строки 3.	$1, 2, \overline{4, 6} \rightarrow \overline{1, 5}$
2.6.5 $_4$	2.6.5 $_3$	Удаление строки 2, замена в строке 3 слова $S_1S^0\tilde{S}_3^+$ на $S_1S^0S_2\tilde{S}_3^+$	$1, \overline{3, 6} \rightarrow \overline{1, 5}$

**Замечание 2.2.** Для построения ОФП системы в подподслучаях 2.6.5 $_l$ ,  $l = 1, 3, 5$ , случая 2.6 методом ДБТ таблица 2.6 рекомендует использовать в качестве базовых таблиц таблицы 1.6.7 $_l$ ,  $l = 1, 3, 7$ , соответственно. Но таблицы 1.6.7 $_l$ ,  $l = \overline{1, 7}$ , в §1 явно не выписаны. Их легко получить, используя свойство обратимости случая 1.6 (см. §1, случай 1.4, замечание 1.3): при замене в системе (0.1)  $(t, y) \rightarrow (-t, -y)$  и изменении нумераций вещественных корней полиномов  $P(u)$  и  $Q(u)$  на обратные он переходит в себя же. Поэтому для него подслучаи 1.6.1 и 1.6.7 взаимно обратны в смысле замечания 1.3. Точнее: взаимно обратны в этом смысле подподслучаи случая 1.6 1.6.1 $_k$

и 1.6.7 $l$ ,  $k, l \in \{1, \dots, 7\}$ , для которых условия на сепаратрисы системы  $S_0$ ,  $S^0$ ,  $\tilde{S}_1^+$ ,  $\tilde{S}_3^+$  (они (см. § 1, случай 1.6, подслучай 1.6.1) выражаются в терминах абсцисс  $x_0$ ,  $x^0$ ,  $x_1^+$ ,  $x_3^+$  точек пересечения этих сепаратрис с полуосью  $y = 0$ ,  $x > 0$ ) получаются одно из другого перестановкой вида  $x_0, x^0, x_1^+, x_3^+ \rightarrow x^0, x_0, x_3^+, x_1^+$ .

### 2.7. Случай $q_1 < u_1 < u_2 = u_3 < q_2$ .

Этот случай обратен случаю 2.6 в смысле замечания 1.3. Поэтому все возможные для него ОФП системы могут быть получены обращением таковых, найденных для случая 2.6.

**Замечание 2.3.** В ОФП системы (0.1) для всех ее подслучаев и подподслучаев, рассмотренных в § 2, инвариантные для нее ячейки круга  $\Omega$  мы, как правило, нумеруем так: ячейки, примыкающие к точке  $O$ , — в порядке их следования при обходе точки  $O$  в  $+$ -направлении, номера остальных предшествуют номерам упомянутой группы ячеек или следуют за ними (причем ячейки, примыкающие к одной и той же БО-точке, нумеруются в таком же порядке, что и примыкающие к  $O$ ).

## Литература

1. Андреев А. Ф., Андреева И. А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. I // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. 2007, N 4. С. 17–26.  
<http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal>
2. Андреев А. Ф., Андреева И. А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. II // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. 2008, N 1. С. 1–13.  
<http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal>
3. Андреев А. Ф., Андреева И. А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. III // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. 2008, N 3. С. 39–53.  
<http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal>
4. Андреев А. Ф., Андреева И. А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. IV<sub>1</sub> // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. 2009, N 4. С. 181–213.  
<http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal>