ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

УДК 517.938

ЛЕММЫ О ЗАМЫКАНИИ [1]

Д. В. Аносов, Е. В. Жужома

Содержание

[1]Авторы благодарят РФФИ, грант 11-01-12056-офи-м-2011, за финансовую поддержку. Работа выполнена в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039

Аннотация

К настоящему моменту имеется большое число публикаций, посвященных лемме о замыкании и ее вариациях. В обзоре рассматриваются различные типы лемм о замыкании. Приводятся идеи доказательств основных результатов и схемы построений важных примеров. Демонстрируется применение лемм о замыкании для описания массивных множеств в пространствах динамических систем.

Введение

Одной из известных проблем теории динамических систем является C^r лемма о замыкании. Обычно под этой леммой подразумевается бифуркационная задача, когда имеется незамкнутая орбита, обладающая некоторым свойством возвращаемости (например, нетривиальная рекуррентность или неблуждаемость). Требуется так возмутить исходную динамическую систему, чтобы у C^r близкой системы появилась периодическая орбита, проходящая через фиксированную точку. На самом деле в зависимости от типа возвращаемости орбиты (можно рассматривать, например, цепно рекуррентность, пролонгационную рекуррентность и т.д.), топологии в пространстве рассматриваемых динамических систем и накладываемых ограничений на допустимые возмущения получаются принципиально разные по методам решения и по уровню трудности задачи. Имеются другие нюансы, и в настоящее время речь должна идти о различных леммах о замыкании.

Наряду с очевидным самостоятельным интересом, практически все разновидности лемм о замыкании необходимо возникли при изучении структурной устойчивости (или грубости), а также из попыток описать массивные множества в пространствах динамических систем. В последнее время интерес к этим леммам возобновился в связи с программой Палиса [107], [108], [109], где представлены новые кандидаты типичных динамических систем. Интерес к леммам о замыкании не ослабевал с того момента, когда в теории динамических систем началась так называемая гиперболическая революция (термин принадлежит Д. В. Аносову [7]), то есть с конца 50-ых годов 20-го века. В последние двадцать лет наблюдался некоторый прогресс в решении многих задач, поставленных на заре этой революции (достаточно упомянуть решение проблемы Палиса-Смейла о необходимых и достаточных условиях структурной устойчивости). В обзоре приводятся (разумеется, в рамках нашей компетентности) полученные к настоящему времени результаты, относящиеся к леммам о замыкании, а также их применения к описанию типичных динамических систем.

Задача о замыкании непериодической траектории возникла, по существу, из одной цитаты Пуанкаре в его знаменитом труде "Новые методы небесной механики"[119], том 1, стр. 82:

... вот факт, который я не смог строго доказать, но который тем не менее кажется очень правдоподобным.

Если даны уравнения вида, указанного в п. 13,[2] *и некоторое частное решение этих уравнений, то можно всегда найти такое периодическое решение (период которого, правда, может быть очень большим), что разность между обоими решениями будет сколь угодно мала на протяжении любого сколь угодно большого промежутка времени.*

Разумеется, Пуанкаре (зная о линейных векторных полях на торе, которые задают минимальные потоки) имел в виду не произвольную гамильтонову систему, а типичную. Напомним, что на симплектическом многообразии M гамильтоновые векторные C^r поля, наделенные C^r топологией Уитни, образуют пространство $\mathcal{H}^r\ (M)$ Бэра, т.е. пространство, в котором любое G_δ-подмножество всюду плотно (G_δ-подмножество есть счетное пересечение открытых всюду плотных подмножеств). Любое G_δ-подмножество пространства Бэра называется *массивным*, а элемент массивного подмножества называется *типичным.* Из контекста ясно, что Пуанкаре рассматривал траектории на произвольной компактной регулярной энергетической поверхности (т.е., поверхности уровня функции Гамильтона). Таким образом, опуская неточности и ограничение на гладкость (Пуанкаре рассматривал аналитические гамильтоновы системы, $r = \omega$), выше приведенную цитату Пуанкаре можно сформулировать следующим образом.

У типичной гамильтоновой системы в пространстве $\mathcal{H}^r\ (M)$ на любой компактной регулярной энергетической поверхности всюду плотны периодические траектории. Более того, пусть равенство $H_0 = c$ определяет регулярную компактную энергетическую поверхность M_0 типичного гамильтониана H_0. Тогда для любой точки $x_0 \in M_0$ и чисел $\varepsilon > 0$, $T > 0$ найдется точка $y_0 \in M_0$, через которую проходит периодическая траектория такая, что

$$d(\phi_t(x_0), \phi_t(y_0)) < \varepsilon \quad \textit{для всех} \quad 0 \le t \le T,$$

[2]Речь идет об автономной системе аналитических уравнений Гамильтона (примеч. авт. статьи).

где ϕ_t – сдвиг на время t вдоль траекторий системы, d – метрика на M.

Промежуточным шагом в направлении решения приведенного утверждения (которое можно было бы назвать *гипотезой Пуанкаре о плотности периодических траекторий типичной гамильтоновой системы*) является следующее утверждение, которое естественно было бы назвать *задачей Пуанкаре о плотности периодических траекторий у типичной гамильтоновой системы* (эта задача обсуждается в параграфе 3). Для краткости, учитывая стиль и дух изложения, мы будем называть это утверждение C^r *леммой Пуанкаре о замыкании.* Итак, пусть точка $x_0 \in M$ лежит на регулярной компактной энергетической поверхности M_0 гамильтониана H_0, который определяет гамильтоново векторное поле $\vec{v} \in \mathcal{H}^r(M)$, и предположим, что через x_0 проходит непериодическая траектория поля $\vec{v}$. Тогда

в пространстве $\mathcal{H}^r$ (M) сколь угодно близко к $\vec{v}$ существует поле $\vec{w} \in \mathcal{H}^r$ (M), у которого через x_0 проходит периодическая траектория.

Как показал Эрман [73], эта лемма Пуанкаре для достаточно больших r неверна (см. также [74]). Однако для $r = 1$ эта лемма справедлива [128].

Спустя более, чем полвека после работы Пуанкаре [119], Рене Том в одном из своих препринтов [149] модифицировал приведенную цитату Пуанкаре и сформулировал ее в виде отдельного утверждения, относящегося к теории бифуркации. Поскольку Том считал утверждение легко доказываемым, он сформулировал его в виде леммы (он даже привел полустраничное доказательство, см. стр. 5-6 [149], но затем признал его неудовлетворительным). Первоначально речь шла о произвольно малой бифуркации, превращающей нетривиально рекуррентную[3] или неблуждающую[4] непериодическую точку в периодическую. Затем случаи нетривиальной рекуррентности и неблуждаемости разделились, и возникла собственно лемма о замыкании, которую мы ниже называем классической (на наш взгляд, ее можно было бы назвать *леммой Тома о замыкании*), и улучшенная лемма о замыкании.

Мы приведем формулировку указанных лемм только для диффеоморфизмов (для векторных полей она аналогична). Пусть $Diff^r(M)$ – пространство C^r диффеоморфизмов многообразия M, наделенное C^r топологией, и пусть $f \in Diff^r(M)$ имеет нетривиально рекуррентную точку $x_0 \in M$. Следующее утверждение называется *классической C^r леммой о замыкании*:

[3] Нетривиальная рекуррентность точки означает, что точка непериодическая и принадлежит своему ω- или α-предельному множеству.

[4] Неблуждаемость точки означает, что любая окрестность точки и некоторые сколь угодно большие итерации этой окрестности пересекаются.

для любой окрестности $U(f)$ диффеоморфизма f в пространстве $Diff^r(M)$ существует диффеоморфизм $g \in U(f)$ с периодической точкой x_0.

Для неблуждающей непериодической точки x_0 соответствующее утверждение называется *улучшенной C^r леммой о замыкании* [122]. Ясно, что улучшенная лемма влечет классическую, поскольку нетривиально рекуррентная точка является неблуждающей.

В C^0 топологии как классическая, так и улучшенная леммы о замыкании действительно легко доказывается, поскольку либо орбита точки x_0, либо близкие к x_0 орбиты проходят произвольно близко к x_0. Укажем на принципиальные трудности при доказательстве классической C^r леммы о замыкании для $r \geq 1$. Поскольку x_0 – нетривиально рекуррентная точка, то существует столь малое $\varepsilon > 0$ такое, что точки $f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)$ не лежат в ε-окрестности $U_\varepsilon(x_0)$ точки x_0, а $f^k(x_0)$ лежит в $U_\varepsilon(x_0)$ для некоторого $k \geq 3$, см. рис. 1. Другими словами, $f^k(x_0)$ есть первая точка положительной полуорбиты точ-

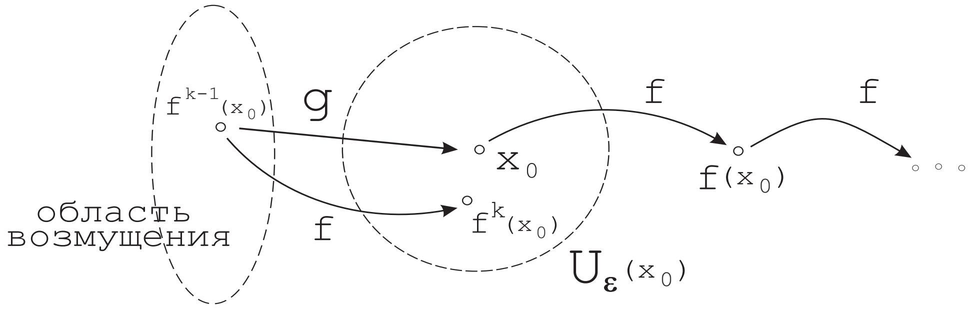


Рис. 1: Возмущение диффеоморфизма f вблизи $f^{k-1}(x_0)$.

ки x_0, которая возвращается в $U_\varepsilon(x_0)$. Естественно попытаться возмутить f в окрестности точки $f^{k-1}(x_0)$ так, чтобы получить диффеоморфизм $g \in U(f)$ с $g(f^{k-1})(x_0) = x_0$, который будет, на первый взгляд, иметь периодическую точку x_0. Однако, вообще говоря, нет гарантии, что промежуточные точки $f(x_0), \ldots, f^{k-2}(x_0)$ не лежат в области возмущения. Поэтому нет гарантии, что выполняются все следующие равенства:

$$f(x_0) = g(x_0), \quad \ldots, \quad f^{k-1}(x_0) = g^{k-1}(x_0).$$

Таким образом, говорить о наличии периодической точки x_0 у диффеоморфизма g будет преждевременно. Если $r = 0$, то требуемая область возмущения существует (можно взять прообраз относительно f достаточно тонкой трубки, лежащей в $U_\varepsilon(x_0)$ и соединяющей точки x_0, $f^k(x_0)$, который не содержит точки $f^i(x_0)$, $1 \leq i \leq k-2$). Для $r \geq 1$ попытка уменьшить область возмущения при фиксированной точке $f^k(x_0)$ так, чтобы в ней не было промежуточных точек может привести к “большой производной и выводу возмущающего диффеоморфизма g из заданной окрестности $U(f)$. Попытка же уменьшить область возмущения за счет выбора точки $f^k(x_0)$ ближе к x_0 увеличивает k и, следовательно, увеличивает число промежуточных точек. Аналогичные трудности возникают, если мы попытаемся возмущать f вблизи точек $f(x_0), \ldots, f^{k-2}(x_0)$ так, чтобы попасть в $f^{-1}(x_0)$. Это "перетягивание каната" и превращает классическую (а тем более, улучшенную) C^r лемму о замыкании в проблему при $r \geq 1$. На нетривиальность доказательства C^r леммы в общем случае при $r \geq 1$ впервые обратил внимание Пейкшото [112], [113].

Необходимо отметить одну более раннюю работу, которая была написана до появления формулировок лемм о замыкании. В 1939 году, описывая грубые диффеоморфизмы окружности S^1, Майер [17] фактически доказал (см. теорему 5 [17]) классическую C^r лемму о замыкании для $f \in Diff^r(S^1)$ при любом $r \geq 1$ (отметим, что следуя Пуанкаре, нетривиально рекуррентные точки Майер называл устойчивыми по Пуассону). Позднее Плисс [19] и Пейкшото [112] передоказали результат Майера, и применили его при доказательстве классической C^r леммы о замыкании для векторных полей на торе без особых точек.

Основной вклад в рассматриваемую нами тематику внес Чарльз Пью. В 1964 году он анонсировал классическую C^1 лемму о замыкании для диффеоморфизмов, потоков и векторных полей на двумерных и трехмерных многообразиях (эти результаты составили его диссертацию) [120]. В 1967 году Пью [121], [122] опубликовал доказательство классической и улучшенной C^1 лемм для многообразий произвольной размерности. Что же касается классической и улучшенной C^r лемм о замыкании для $r \geq 2$, то здесь имеется немного результатов. Смейл [147] сформулировал улучшенную C^r лемму о замыкании для $r \geq 2$ в качестве одной из проблем 21 века (проблема 10).

Улучшенная C^1 лемма о замыкании существенно используется в доказательстве массивности в пространстве $Diff^1(M)$ множества диффеоморфизмов Купки-Смейла, у которых неблуждающее множество есть замыкание гиперболических периодических точек [122]. Динамика диффеоморфизмов Купки-Смейла может быть весьма сложной и не поддающейся конечному описанию. В конце 50-ых годов 20 века под влиянием работ Андронова, Понтрягина [2] и Пейкшото [112] была надежда, что структурно устойчивые системы массивны в пространстве $Diff^1(M)$. Поэтому, когда выяснилось, что это не так [145], начались поиски других множеств, которые были бы массивными и состояли из систем с обозримой динамикой. Одно из направлений этих поисков было связано с обобщениями понятия неблуждаемости. Как следствие, появилась необходимость в леммах о замыканиях с ослабленными требованиями на возвращаемость непериодических точек (такими, например, как пролонгационная рекуррентность в смысле Ауслендера, Пью и т.п.[5]).

Наиболее общий тип возвращаемости – цепно рекуррентность. Напомним, что *ε-цепью длины n* от точки p к точке q называется последовательность $\{p_0 = p, p_1, \ldots, p_n = q\}$ такая, что $d(f(p_{j-1}), p_j) < \varepsilon$ для всех $1 \leq j \leq n$, где d – метрика на M. Точка p называется *цепно рекуррентной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь сколь угодно большой длины от p к p. Утверждение о рождении периодической точки из цепно рекуррентной точки естественно было бы назвать *усиленной C^r леммой о замыкании.* С дополнительными ограничениями на динамические системы такие леммы доказаны в [13], [30], [37], [46], [53].

В леммах с ослабленными требованиями на возвращаемость Ч. Пью выделил звено, изучение которого могло бы продвинуть доказательство указанных лемм. Именно, если взять две точки p, $q \in M$ с $\omega(p) \cap \alpha(q) \neq \emptyset$, то есть имеется точка, являющаяся точкой накопления положительной полуорбиты точки p и отрицательной полуорбиты точки q диффеоморфизма $f \in Diff^r(M)$, то естественно попытаться в C^r топологии так возмутить диффеоморфизм, чтобы точки p, q оказались на одной орбите. Следующее утверждение (иногда для краткости мы будем говорить о соединяющей лемме) называется *C^r леммой о соединении орбит*:

для любой окрестности $U(f)$ диффеоморфизма f в пространстве $Diff^r(M)$ существует диффеоморфизм $g \in U(f)$, у которого точки p, q принадлежат одной орбите.

Трудности доказательства C^r леммы о соединении орбит возрастают по сравнению с улучшенной (и тем более, классической) C^r леммой, так как вместо одной мы имеем дело с двумя орбитами.

Рикардо Мане предложил более общий вариант соединяющей леммы для орбит, сформулировав так называемую “Make or Break Lemma". Мы будем называть ее *C^r дихотомией Мане.* В обозначениях леммы о соединении орбит она формулируется следующим образом:

для любой окрестности $U(f)$ диффеоморфизма f в пространстве $Diff^r(M)$

[5]Отметим, что в идейном плане источником указанных понятий было введенное Бендиксоном [40] понятие продолжения сепаратрисы седла.

существует диффеоморфизм $g \in U(f)$ такой, что либо точки p, q принадлежат одной орбите, либо $\omega(p) \cap \alpha(q) = \emptyset$.

Имеются важные модификации леммы о соединении орбит, которые приводят к леммам о соединении устойчивых и неустойчивых многообразий инвариантных множеств диффеоморфизмов (одну из таких лемм называют леммой о рождении гомоклинических или гетероклинических точек). Приведем формулировку одного варианта соединяющей C^r леммы для инвариантных многообразий (которая, по существу, является утверждением о рождении гомоклинической точки из почти гомоклинической) в классическом случае, когда $W^u_f(p)$ и $W^s_f(p)$ являются неустойчивым и устойчивым многообразиями соответственно гиперболической периодической точки p диффеоморфизма $f \in Diff^r(M)$. Предположим, что существуют почти гомоклинические точки, ассоциированные с p,

$$\big(clos\ W^u_f(p) \cap W^s_f(q)\big) \bigcup \big(W^u_f(p) \cap clos\ W^s_f(q)\big) - \{p\} \neq \emptyset.$$

Тогда для любой окрестности $U(f)$ диффеоморфизма f в пространстве $Diff^r(M)$ существует диффеоморфизм $g \in U(f)$, совпадающий с f в некоторой окрестности точки p, такой, что $W^u_g(p) \cap W^s_g(p) - \{p\} \neq \emptyset$.

Существенный прогресс в изучении соединяющей C^1 леммы для инвариантных многообразий был получен Хаяши [70]. Из доказанного им результата, в частности, вытекает C^1 лемма о рождении гомоклинической точки, ассоциированной с изолированным гиперболическим множеством. Результат Хаяши дал импульс для серии работ, касающихся лемм о соединении как для инвариантных многообразий, так и для орбит.

В обзоре рассматриваются различные типы лемм о замыкании. Основные идеи доказательств классической и улучшенной C^1 лемм мы приводим в параграфе 1. Соединяющие C^1 леммы для инвариантных многообразий и орбит, а также усиленный вариант C^1 дихотомии Мане для векторных полей рассматриваются в параграфе 2. Задача Пуанкаре о плотности периодических траекторий и близкие к ней результаты (включая, контр-пример Эрмана) приводятся в параграфе 3. Некоторым аналогом задачи Пуанкаре о плотности периодических траекторий типичной гамильтоновой системы (в том смысле, что ничего не надо возмущать) для диффеоморфизмов с равномерной гиперболической структурой является лемма Аносова о замыкании, которая рассматривается в параграфе 4. Различные C^r леммы для $r \geq 2$ приводятся в параграфе 5. Здесь же описываются конструкции наиболее интересных и значительных, на наш взгляд, контр-примеров. В параграфе 6 собраны леммы о замыкании для специальных динамических систем и слоений. Наконец, в параграфе 7 мы демонстрируем применения лемм о замыкании для описания массивных множеств в пространствах динамических систем.

При написании обзора были полезны беседы (в разное время) с Carlos Gutierrez, Jie-hua Mai, Shuhei Hayashi. Последняя беседа оказалась возможной в результате приглашения второго автора в университет г.Токио, организованного Takashi Tsuboi, Shigenori Matsumoto. Всем им мы выражаем глубокую благодарность. Мы также благодарим С.Ю. Пилюгина, прочитавшего рукопись и сделавшего ряд полезных замечаний.

1 Классическая и улучшенная C^1 леммы

Для многообразий произвольной размерности классическую и улучшенную C^1 леммы о замыкании доказал Пью [121], [122]. Как вспоминает Пью [127], он узнал о проблеме замыкания от своего учителя Ф.Хартмана в 1963 году после семинара, на котором Хартман слушал выступление М.Пейкшото. Отметим, однако, что в доказательствах имелось несколько трудных мест (см. [123], а также замечание 11.1.4 [134]). Несмотря на то, что доказательства были признаны математическим сообществом, поиск более коротких и ясных доказательств продолжался [81], [128], [84], и настоящий момент имеется ясное изложение. Мы продемонстрируем основные идеи доказательства классической C^1 леммы. Пусть C^1 диффеоморфизм $f : M \to M$ гладкого многообразия M имеет нетривиально рекуррентную точку $x_0 \in \omega(x_0)$. Зафиксируем произвольную окрестность $U(f)$ диффеоморфизма f в пространстве $Diff^1(M)$. Сперва Пью (теорема 5.1 [121]) отметил, что достаточно получить периодическую орбиту, не обязательно проходящую через точку x_0, а проходящую сколь угодно близко к x_0. Это замечание относится к любому $r \geq 1$, и было названо *локальной C^r леммой о замыкании.* Сформулируем утверждение более точно:

для любой окрестности U_0 диффеоморфизма f в пространстве $Diff^r(M)$ и любой окрестности $V(x_0)$ точки x_0 существует $g \in U_0$ с периодической точкой, проходящей через окрестность $V(x_0)$.

Если $g \in U_0$ имеет периодическую точку $y_0 \in V(x_0)$, то можно построить сколь угодно близкий к тождественному C^r диффеоморфизм h, переводящий y_0 в x_0. Тогда диффеоморфизм $h \circ g \circ h^{-1}$ будет C^r близок к f и иметь периодическую точку x_0. Заметим, что в теореме 5.1 [121] это утверждение доказывается для гладкости C^1, но слово в слово повторяется для C^r, $r \geq 1$. Львиная доля доказательств лемм о замыкании использует локальную лемму.

На основании локальной леммы о замыкании, Пью выделил основное направление в доказательстве классической леммы:

для данных окрестностей $U_0 \subset Diff^1(M)$, $V(x_0) \subset M$ *необязательно замыкать часть орбиты* x_0, $f(x_0)$, $\ldots$, $f^k(x_0)$ *с крайними точками* x_0, $f^k(x_0) \in V(x_0)$, *поскольку "между" этими крайними точками могут оказаться промежуточные точки* $f(x_0)$, $\ldots$, $f^{k-1}(x_0)$, *а нужно замыкать такую часть орбиты* $f^m(x_0)$, $\ldots$, $f^n(x_0)$, *у которой крайние точки* $f^m(x_0)$, $f^n(x_0)$ *также лежат в* $V(x_0)$, *но "между" которыми нет промежуточных точек* $f^j(x_0)$, *где* $0 \leq m \leq j \leq n \leq k$, см. рис. 2. В некотором смысле,

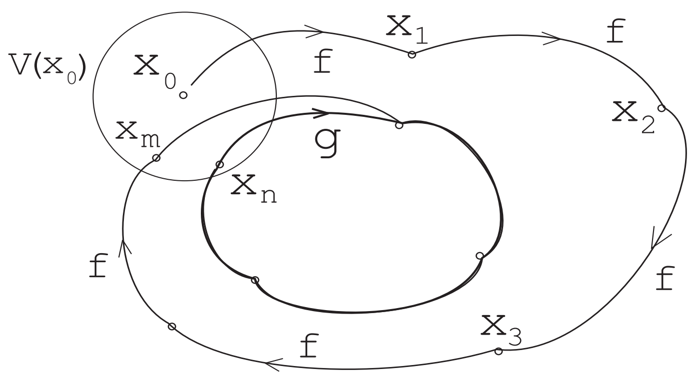


Рис. 2: Замыкание орбиты $x_i = f^i(x_0)$.

"между" означает, что существует требуемая область возмущения, которая покрывает точки $x_m = f^m(x_0)$, $x_n = f^n(x_0)$. Ясное доказательство того, что требуемая часть орбиты существует, можно найти в работах [84], [128]. В начале параграфа 2 мы приводим идею выделения подобной части орбиты.

После того, как такая часть орбиты найдена, строится ε-цепь от концевой точки x_n к начальной точке x_m, $n > m$, см. рис. 2, или к некоторой точке x_k, где $m \leq k < n$. Скачки в ε-цепи сосредоточены в непересекающихся шарах. Возмущения исходного диффеоморфизма, которые реализуют эти скачки, осуществляется с помощью следующего стандартного технического приема.

Пусть $B_r \subset \mathbb{R}^m$ – замкнутый шар радиуса r. Для произвольного числа $0 < \delta < 1$ обозначим через δB_r шар с тем же центром и радиусом δr. Он называется *δ-ядром* шара B_r. Для любых фиксированных точек P, Q, лежащих внутри B_r, существует C^∞ диффеоморфизм $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, тождественный вне B_r и переводящий P в Q. Если P и Q лежат в δB_r, то такой диффеоморфизм h называется *продвижением точки P в точку Q в δ-ядре* шара B_r. Используя стандартную бамп-функцию, можно доказать следующую лемму ([156], лемма 2.1).

Лемма 1.1 *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \delta < 1$ такое, что для любого замкнутого шара $B_r \subset \mathbb{R}^m$ и любых точек P, Q в δB_r существует продвижение $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ точки P в точку Q в δ-ядре шара B_r, причем все частные производные первого порядка отображения $h - id$ меньше ε.*

Действительно, возьмем C^∞ бамп-функцию $\alpha : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ такую, что $\alpha = 1$ в $B_{\frac{1}{3}}$, и $\alpha = 0$ вне $B_{\frac{2}{3}}$, при этом частные производные функции α не превосходят 6. Можно считать, что центр B_r совпадает с началом координат $\mathbb{R}^m$, и точки отождествляются с соответствующими векторами. Тогда

$$h(\vec{x}) = \vec{x} + \alpha\left(\frac{\vec{x} - \vec{P}}{r}\right)(\vec{Q} - \vec{P})$$

является требуемым продвижением, так как

$$\|\vec{Q} - \vec{P}\| < 2r\delta, \qquad \|\frac{\partial}{\partial x_i}(h - id)\| \le 6\frac{1}{r}2\delta r = \varepsilon.$$

Отметим, что радиус шара B_r в формулировке леммы не важен. Поэтому продвижение в δ-ядре шара B_r будет близко в C^1 топологии к тождественному, если ε и r будут достаточно малы. Тогда композиция $h \circ f$ будет C^1 близка к f. С помощью отображения $\exp_z : TM_z \to M$, которое локально отождествляет касательное пространство с окрестностью точки на многообразии, аналог леммы 1.1 можно доказать для многообразия M (см. аккуратное доказательство в [128], теорема 6.1).

В доказательстве C^1 леммы **возмущение исходного диффеоморфизма f строится как композиция f с продвижениями в δ-ядрах попарно не пересекающихся достаточно малых шаров**.

Далее будет использована теорема, относящаяся к последовательности изоморфизмов евклидовых пространств. Объясним откуда берется такая последовательность в лемме о замыкании. Зафиксируем окрестность U_0 нетривиально рекуррентной точки $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} x$. Тогда существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $j_1, \ldots, j_k, \ldots$ такая, что $f^{j_k}(x) \in U_0$ и $f^j(x) \notin U_0$ при $j \neq j_k$. Другими словами, это последовательность итерации, при которых x возвращается в U_0. Не уменьшая общности, можно считать окрестность U_0 картой атласа, и мы будем отождествлять ее с евклидовым пространством $\mathbb{R}^{\dim M}$, начало координат которого совпадает с точкой x. Тогда касательное пространство T_xM канонически изоморфно $\mathbb{R}^{\dim M}$, и далее мы будем отождествлять T_xM с $\mathbb{R}^{\dim M}$. Обозначим $f^{j_k}(x) \stackrel{\text{def}}{=} y_k$. Точки y_k принадлежат нетривиально рекуррентной орбите. Поэтому каждая точка последовательности $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ является точкой сгущения. Отображение f^{j_k} является C^1 диффеоморфизмом, которое в линейном приближении в точке x равно производной $Df^{j_k}(x) : T_xM \to T_{y_k}M$, являющейся изоморфизмом линейных пространств. Обозначим $Df^{j_k}(x) \stackrel{\text{def}}{=} F_k$, $T_{y_k}M \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_k^{\dim M}$.

Итак, у нас имеется последовательность точек $y_k \in \mathbb{R}^{\dim M}$, у которой имеются точки сгущения, и последовательность изоморфизмов $F_k : \mathbb{R}^{\dim M} \to \mathbb{R}_k^{\dim M}$. В этих условиях справедлива следующая теорема, доказанная Же Хуа Май [84] (хорошее изложение доказательства теоремы 1.1 можно найти в [32]).

Теорема 1.1 *Для любого $\delta > 0$ существуют точки y_s, y_l $(s > l)$ и набор точек $\{x_1, \ldots, x_\mu\}$, где $x_1 = y_s$, $x_\mu = y_l$, такой, что выполняются следующие условия:*

1. *$j_l + j_\mu < j_s$ (т.е., число μ должно быть выбрано так, чтобы j_μ не превосходило $j_s - j_l$, что в свою очередь означает, что точка $f^{j_\mu}(y_l) = f^{j_\mu + j_l}(x)$ принадлежит отрицательной полуорбите точки $y_s = f^{j_s}(x)$).*

2. *Для любого $i = 1, \ldots, \mu - 1$ точка $F_i(x_{i+1})$ лежит в δ-ядре шара $B(F_i(x_i))$, причем*

   (a) *Шары $B(F_i(x_i))$ попарно не пересекаются.*

   (b) *Каждый шар $B(F_i(x_i))$ не содержит точек $y_l, y_{l+1}, \ldots, y_s$, см. рис. 3.*

Показано, что **число μ зависит только от последовательности изоморфизмов F_i и числа δ, и не зависит от последовательности точек** (лишь бы она имела точки накопления). После того, как μ определено (и тем самым, фиксируется конечный набор изоморфизмов F_1, ..., F_μ), для данной последовательности точек y_k определяется конечная часть y_l, ..., y_s, крайние точки которого достаточно близки, а индексы l, s отличаются на достаточно большое значение.

Теперь доказательство классической леммы проводится следующим образом. Обозначим через g_i продвижение точки $F_i(x_i)$ в точку $F_i(x_{i+1})$ в δ-ядре

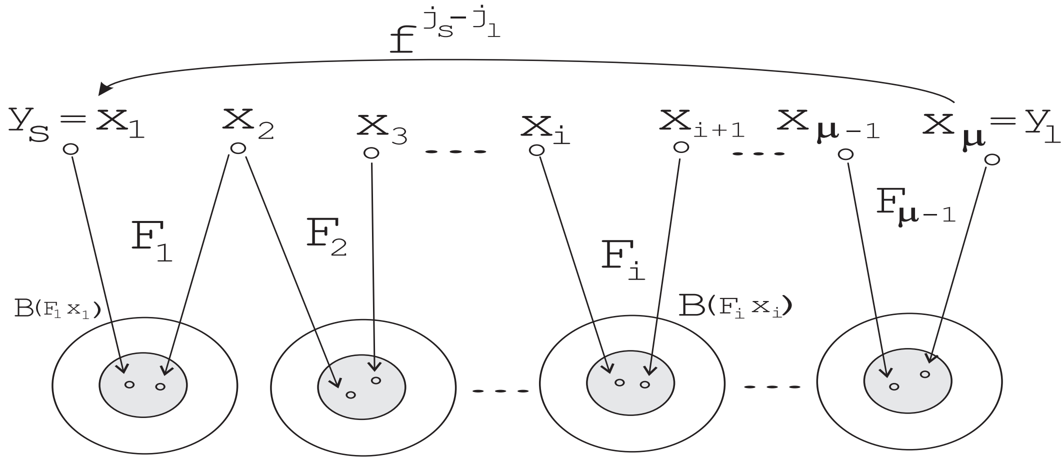


Рис. 3:

шара $B(F_i(x_i))$, и составим композицию $g = f \circ g_1 \circ \ldots \circ g_{\mu-1}$. Вне всех шаров $B(F_i(x_i))$ диффеоморфизм g совпадает с f, а внутри $B(F_i(x_i))$ – с $f \circ g_i$. Отметим, что из определения последовательности j_1, j_2, ... вытекает, что для любого $i = 1, \ldots$, точки $f(f^{j_i}x_i)$, $f^2(f^{j_i}x_i)$, ..., $f^{j_{i+1}-j_i-1}(f^{j_i}x_i)$ не лежат в окрестности U_0. Поэтому под действием g точка $f^{j_s}x = y_s = x_1$ будет иметь следующий маршрут

$$y_s = x_1 \xrightarrow{f^{j_1}} f^{j_1}(x_1) \xrightarrow{g_1} f^{j_1}(x_2) \xrightarrow{f^{j_2-j_1}} f^{j_2}(x_2) \xrightarrow{g_2} f^{j_2}(x_3) \xrightarrow{f^{j_3-j_2}} \ldots$$

$$\ldots \xrightarrow{f^{j_\mu - j_{\mu-1}}} f^{j_\mu}(x_\mu) = f^{j_\mu + j_l}(x) \xrightarrow{f^{j_s-(j_\mu+j_l)}} f^{j_s}(x) = x_1 = y_s.$$

Таким образом, точка $y_s = f^{j_s}(x)$ является периодической точкой диффеоморфизма g, который, можно сделать сколь угодно близким в C^1 топологии к f, поскольку это полностью зависит от диаметров шаров $B(F_i(x_i))$ и продвижений в их δ-ядрах (а последнее можно сделать сколь угодно малым).

Улучшенная C^1 лемма о замыкании доказывается аналогично (короткое доказательство см. в [85]). Используя основную идею работы [84], улучшенная C^1 лемма о замыкании была доказана для неособого (Df инъективен на касательных пространствах всех точек) эндоморфизма компактного замкнутого многообразия в [151].

Отметим работу Плисса [20], в которой рассматривается неавтономная двумерная система $\dot{\vec{x}} = P(t)\vec{x} + X(t, \vec{x})$ с диагональной матрицей $P(t) = diag(p(t), q(t))$, образованной интегрально разделенными функциями $p(t)$, $q(t)$, то есть $(sign\ t) \int_0^t [p(\tau) - q(\tau)]\, d\tau > c|t| - d$ для некоторых $c > 0$,

$d > 0$. Нелинейность $X(t, \vec{x})$ мала и имеет малую константу Липшица. Если $\vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0)$ – решение исходной системы с начальными условиями $(t_0, \vec{x}_0)$, то для любой C^1-окрестности $U(X)$ нелинейности X существует нелинейность $Y \in U(X)$ такая, что соответствующее решение удовлетворяет условию $\vec{y}(\theta, -\theta, \vec{x}(-\theta, 0, \vec{x}_0)) = 0$ для достаточно малого $\vec{x}_0$. Доказательство представляет интерес с точки зрения техники замыкания, так как в некотором смысле возмущение выписывается явно. Заметим, что условия на систему легко проверяются.

Завершая разговор о классической лемме, отметим три работы Lin Zhensheng, C^r closing lemma I, II, III, Ann. of Diff. Equat., 6(1990), 59-67; 7(1991), 68-77; 8(1992), 307-322, в которых было предъявлено доказательство классической C^r леммы для $r \geq 2$ (в первой работе рассматривался случай $\dim M \geq 3$, во второй – $\dim M = 2$, в третьей работе отдельно рассматривался случай $r = \infty$. В последних двух работах исправлялись ошибки, замеченные в предыдущих). На наш взгляд, который совпадает с мнением Карлоса Гутиерреса [67] и Же Хуа Май [86], предъявленное доказательство не является корректным, поскольку в указанных работах C^r возмущения для $r \geq 2$ не являются сколь угодно малыми (хотя C^1 возмущения таковы).

2 C^1 леммы о соединении орбит и многообразий

Как указывалось во введении, соединяющие леммы делятся на два класса: леммы о соединении орбит и леммы о соединении инвариантных многообразий точек. Это деление представляется удобным, несмотря на то, что соединяющие леммы для инвариантных многообразий формально можно рассматривать как соединяющие леммы для орбит. Выделение соединяющих лемм для инвариантных многообразий связано со спецификой решаемых задач, когда нужно малым возмущением динамической системы породить гетероклиническую или гомоклиническую орбиту, а не связать конкретные точки одной орбитой.

Первые результаты, касающиеся C^r леммы о рождении гомоклинических точек, были получены Такенсом [148], который доказал C^1 лемму о рождении гомоклинической точки в классе консервативных (симплектических) динамических систем, и Робинсоном [131], который доказал C^r $(r \geq 1)$ лемму о рождении гомоклинической точки для диффеоморфизма сферы (в случае неподвижной гиперболической точки). Затем эти результаты были развиты в работах Ньюхауса [99] и Пикстона [116]. Мане [89] доказал C^1 и C^2 леммы о рождении гомоклинической точки для периодической гиперболической точки p диффеоморфизма любого замкнутого многообразия в предположении, что мера точки p положительна относительно некоторой инвариантной вероятностной меры.

Напомним, что в исходной ситуации, которая рассматривается в соединяющей лемме для орбит, имеется точка накопления, скажем $z \in M$, положительной полуорбиты $O^+(p)$ точки p и отрицательной полуорбиты $O^-(q)$ точки q диффеоморфизма $f \in Diff^r(M)$, $z \in \omega(p) \cap \alpha(q)$. Для заданной окрестности диффеоморфизма f в пространстве $Diff^r(M)$ естественно взять точки $x \in O^+(p), y \in O^-(q)$ вблизи z и возмутить f так, чтобы полученный диффеоморфизм g переводил x в y. Эта стратегия приведет к успеху только в случае, если в области возмущения нет промежуточных точек $f(p)$, …, $f^i(p)$, …, $f^{m-1}(p) = f^{-1}(x)$, $f(y)$, …, $f^k(y) = q$, поскольку в противном случае нельзя гарантировать что орбиты точек p, q у возмущенного диффеоморфизма g пройдут через точки x, y соответственно, см. рис. 4, (a). В 1997 году японский

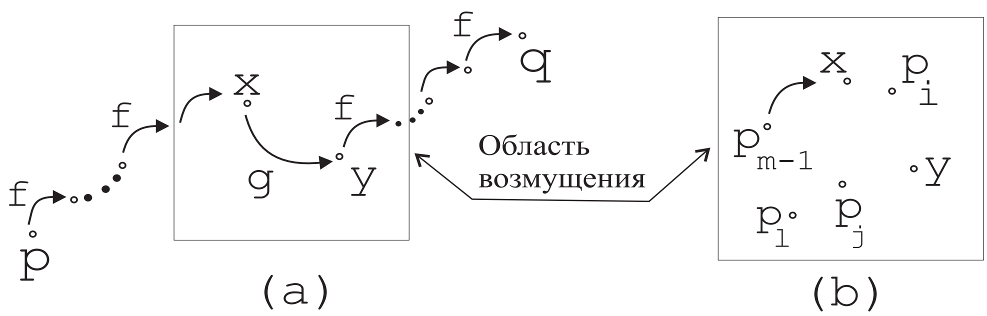


Рис. 4:

математик Хаяши [70] предложил процедуру преодоления возникшей трудности. Мы продемонстрируем основные идеи этой процедуры на конкретной ситуации. Предположим на минуту, что вблизи $p_{m-1} = f^{m-1}(p) = f^{-1}(x)$ находится промежуточная точка $p_j = f^j(p)$, $1 \leq j \leq m-2$. Если возмутить f одновременно так, чтобы g переводил $f^j(p)$ в $f^{m-1}(p)$, то наличие промежуточных точек $f^{j+1}(p), \ldots, f^{m-2}(p)$ в области возмущения уже не будет играть роли. Пара $f^j(p)$, $f^{m-1}(p)$ называется *срезающей парой.* Аналогичным образом вводится понятие срезающей пары для промежуточных точек из полуорбиты $O^-(q)$. В общем случае срезающие пары имеют вид $f^j(p)$, $f^l(p)$, $1 \leq j \leq l-1 \leq m-1$, или $f^{-j}(q)$, $f^{-l}(q)$, где $1 \leq l \leq j-1 \leq k-1$, рис. 4, (b). Одна из идей Хаяши заключалась в том, что нужно подбирать не только *соединяющую пару* точек x, y, но и подбирать оптимальным образом срезающие пары. Если точки в срезающих парах достаточно близки друг к другу, то можно построить требуемое возмущение в попарно непересекающихся шарах, содержащих срезающие пары и одну соединяющую пару (x, y). Тогда возмущение полуорбит $O^+(p)$, $O^-(q)$ в точках, которые принадлежат шару с соединяющей парой (x, y), не испортит нужное условие: обе полуорбиты по-прежнему будут проходить через соответствующие точки x, y соединяющей пары. Возмущения внутри указанных выше шаров напоминает возмущение, которое строилось в доказательстве классической или улучшенной леммах о замыкании – строится соответствующая ε-цепь. Поскольку последние леммы доказаны в классе гладкости C^1, то Хаяши [70] доказал соединяющую C^1 лемму. Отметим однако, что в классической и улучшенной леммах о замыкании рассматриваемая точка изначально является непериодической. С учетом этой специфики Хаяши дополнительно предполагал, что точка z непериодическая. Из-за этого предположения связывающая C^1 лемма для орбит в настоящий момент не доказана в полной общности.

Соединение орбит

Рассмотрим сперва результаты, относящиеся к соединяющей лемме для орбит. Впервые такого типа лемма была сформулирована как **проблема 23** в знаменитом списке 50-ти проблем Палиса и Пью [110]. Приведем ее формулировку.

Пусть U_1, U_2 – две открытые области такие, что топологическое замыкание положительной f-орбиты области U_1 пересекается с топологическим замыканием отрицательной f-орбиты области U_2. Существует ли диффеоморфизм g, C^r близкий к f, такой, что положительная g-орбита области U_1 пересекается с отрицательной g-орбитой области U_2?

К обсуждению этой проблемы мы еще вернемся. Соединяющая C^0 лемма для орбит на любых многообразиях верна, хотя доказывается не так просто, как классическая или улучшенная C^0 лемма о замыкании, [140], [141]. Приведем схематично пример Пью [126], показывающий, что соединяющая C^1 лемма для потоков на плоскости, вообще говоря, не верна. Отметим, что для некомпактных многообразий имеются две неэквивалентные топологии: слабая и сильная. Если не оговорено противное, мы всегда будем предполагать сильную топологию Уитни, которая позволяет контролировать возмущение "на бесконечности".

Рассмотрим гладкий поток f^t на плоскости или открытом диске, фазовый портрет которого представлен на рис. 5. Поток f^t имеет два седла, два источника и два стока. В квадрате $ABCD$ траектории потока f^t суть вер-

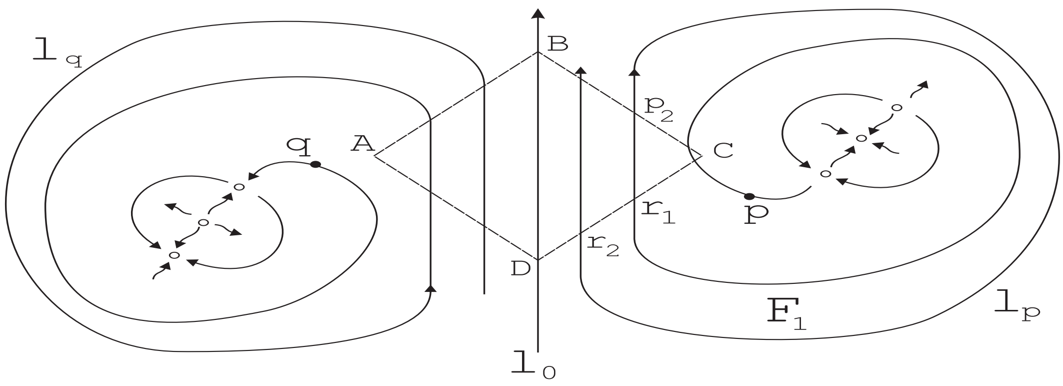


Рис. 5:

тикальные прямые. Точки p, q лежат на сепаратрисах l_p, l_q соответственно таких, что $\omega(l_p)\cap\alpha(l_q) = l_0$, где l_0 – приходящая из бесконечности и уходящая в бесконечность неограниченная траектория такая, что B, $D \in l_0$.

Обозначим через p_1, p_2, ... (соотв. r_0, r_1, ...) последовательные по времени точки пересечения сепаратрисы l_p с отрезком BC (соотв. с CD). Обозначим через F_n потоковый ящик, ограниченный отрезками $[p_n; p_{n+1}] \subset BC$, $[r_n; r_{n+1}] \subset CD$ и дугами $[p_n; r_n] \subset l_p$, $[p_{n+1}; r_{n+1}] \subset l_p$. На рис. 5 изображен F_1. В каждый F_n поместим закупорку, изображенную на рис. 11, и обозначим полученный поток через $\overline{f}^t$.

Тогда на каждом $[p_n; p_{n+1}]$ имеется промежуток W_n^s такой, что любая положительная полутраектория, входящая в F_n через W_n^s, стремится либо к стоку, либо к седлу. Аналогично, на каждом $[r_n; r_{n+1}]$ имеется промежуток W_n^u такой, что любая отрицательная полутраектория, входящая в F_n через W_n^u, стремится (в отрицательном направлении) либо к стоку, либо к седлу.

По построению, отрезок AC (он не изображен на рис. 5, но его легко представить) является отрезком без контакта для f^t. Отрезки ABC и ADC также являются отрезками без контакта в топологическом смысле. Обозначим через π^u отображение последования $ADC \to AC$ вдоль дуг, лежащих в $ABCD$. Другими словами, точке $x \in ADC$ ставится в соответствие первая точка $\pi^u(x)$ пересечения с AC положительной полутраектории, проходящей через $x \in ADC$. Аналогично, обозначим через π^s отображение последования $ABC \to AC$ вдоль дуг, лежащих в $ABCD$, но только в отрицательном направлении. Положим $I_n = \pi^u(W_n^u)$. Обозначим через I'_n открытый интервал между промежутками I_n, I_{n+1}. Далее длина промежутка I обозначается через $|I|$. Возьмем числа a, λ такие, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < a < 1 < \lambda a, \quad \sum_{1}^{\infty}(1 + \frac{1}{\lambda})a^n \le \frac{1}{\sqrt{2}}|AB|.$$

Поток f^t подберем таким образом, чтобы $|I_n| = a^n$, $|I'_n| = \frac{a^n}{\lambda}$. Вышеприведенные неравенства гарантируют, что интервалы I_n, I'_n такой длины можно расположить на AC.

Рассмотрим возмущенный поток $\overline{f}^t$, ε-близкий к f^t. Обозначения для аналогичных объектов, связанных с $\overline{f}^t$, мы будем снабжать чертой сверху. Положим $\overline{I}_n = \overline{\pi}^u(\overline{W}^u_n)$, $\overline{J}_n = \overline{\pi}^s(\overline{W}^s_n)$. Открытый интервал между промежутками $\overline{J}_n, \overline{J}_{n+1}$ обозначим через $\overline{J}'_n$. Напомним, что для некомпактных многообразий близость динамических систем определяется сильной C^1 топологией Уитни. Это позволяет контролировать возмущение потока f^t в "бесконечных" точках, соответствующим в понятном смысле точкам B и D. Поэтому для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ будут выполняться следующие оценки:

$$(1-\varepsilon)a^n \le |\overline{I}_n| \le (1+\varepsilon)a^n, \quad (1-\varepsilon)a^n \le |\overline{J}_n| \le (1+\varepsilon)a^n, \tag{1}$$

$$(1-\varepsilon)\frac{a^n}{\lambda} \le |\overline{I}'_n| \le (1+\varepsilon)\frac{a^n}{\lambda}, \quad (1-\varepsilon)\frac{a^n}{\lambda} \le |\overline{J}'_n| \le (1+\varepsilon)\frac{a^n}{\lambda}. \tag{2}$$

Будем считать, что они имеют место для потока $\overline{f}^t$. Ключевым техническим утверждением (в работе [126] оно формулируется как “Gap-lemma") является следующее: существует $\varepsilon = \varepsilon(a, \lambda) > 0$ такое, что если выполняются соотношения (1), (2) и если для некоторого n промежуток $\overline{I}'_n$ пересекается с $\overline{J}'_n$, то

$$\overline{I}'_{n+1} \subset \overline{J}_{n+1} \cup \overline{J}'_{n+1} \cup \overline{J}_n.$$

Из этого включения вытекает, что сепаратриса $\overline{l}_{\overline{p}}$ потока $\overline{f}^t$ либо пересекает последовательно все интервалы $\overline{I}'_n$ и, следовательно, не может попасть даже в окрестность точки $\overline{q}$, либо попадает для некоторого n в закупорку. В обоих случаях $\overline{l}_{\overline{p}}$ не сливается с $\overline{l}_{\overline{q}}$. Таким образом, соединяющая C^1 лемма неверна, вообще говоря, для некомпактных многообразий.

Как вытекает из следующей теоремы Арно [33], наличие траектории l_0 с пустым предельным множеством в выше приведенном примере Пью оказывается необходимым условием для возможности соединить орбиты.

Теорема 2.1 *Пусть на поверхности M (возможно, некомпактной) задано векторное поле $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \ge 1$, у которого имеются точки p, $q \in M$*

такие, что $\omega(p) \cap \alpha(q) \neq \emptyset$. Предположим, что пересечение $\omega(p) \cap \alpha(q)$ содержит хотя бы одну одномерную непериодическую траекторию с непустым ω- или α-предельным множеством. Тогда для любой окрестности $U(X)$ поля X в $\mathfrak{X}^1(M)$ найдется поле $Y \in U(X) \cap \mathfrak{X}^r(M)$ такое, что Y имеет траекторию, проходящую через точки p, q.

Когда пересечение $\omega(p) \cap \alpha(q)$ может содержать состояния равновесия (наряду с одномерными траекториями с пустыми предельными множествами), то, как показывает следующая теорема из [33], соединяющая C^1 лемма имеет место, если все состояния равновесия гиперболические (отметим, что в этом случае в пересечении $\omega(p) \cap \alpha(q)$ могут быть только гиперболические седла).

Теорема 2.2 *Пусть на поверхности M (возможно, некомпактной) задано векторное поле $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, у которого имеются точки p, $q \in M$ такие, что $\omega(p) \cap \alpha(q) \neq \emptyset$. Пусть все состояния равновесия поля X гиперболические. Предположим, что пересечение $\omega(p) \cap \alpha(q)$ содержит хотя бы одну траекторию (необязательно одномерную) с непустым ω- или α-предельным множеством. Тогда для любой окрестности $U(X)$ поля X в $\mathfrak{X}^1(M)$ найдется поле $Y \in U(X) \cap \mathfrak{X}^r(M)$ такое, что Y имеет траекторию, проходящую через точки p, q.*

Возможный сценарий для соединяющей леммы изображен на рис. 6, (a). Так

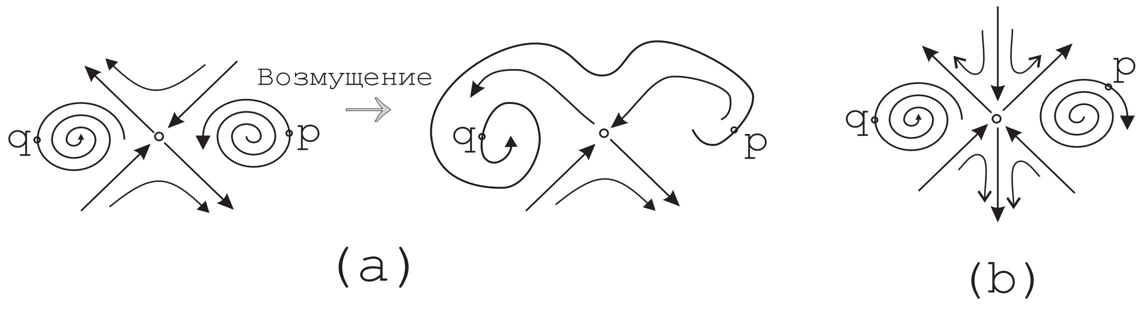


Рис. 6:

как на компактной поверхности любая траектория имеет непустое ω- или α-предельным множество, то из теоремы 2.2 вытекает следующее следствие.

Следствие 2.1 *Пусть на компактной поверхности M задано векторное поле $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, у которого имеются точки p, $q \in M$ такие, что $\omega(p) \cap \alpha(q) \neq \emptyset$. Пусть все состояния равновесия поля X гиперболические. Тогда для любой окрестности $U(X)$ поля X в $\mathfrak{X}^1(M)$ найдется векторное* *поле $Y \in U(X) \cap \mathfrak{X}^r(M)$ такое, что Y имеет траекторию, проходящую через точки p, q.*

Если пересечение $\omega(p) \cap \alpha(q)$ содержит негиперболические точки покоя как на рис. 6), (b), то здесь вопрос остается открытым.

Вернемся к общему случаю. Унифицировав методы работ [128], [84] и [70], Лан Вэн и Жихонг Хиа [156] получили наиболее общий к настоящему времени вариант соединяющей C^1 леммы для орбит. Через $B(z,\delta)$ обозначается (метрический) шар с центром в точке z и радиусом δ.

Теорема 2.3 *Пусть $f : M \to M$ – диффеоморфизм замкнутого многообразия M, и $z \in M$ – непериодическая точка диффеоморфизма f. Тогда для любой окрестности $U(f)$ диффеоморфизма f в пространстве $Diff^1(M)$ существуют числа $\varrho > 1$, $L \in \mathbb{N}$ и $\delta_0 > 0$ со следующим свойством: если для $0 < \delta \leq \delta_0$ точки p, $q \in M$ лежат вне множества*

$$\Delta \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{L} f^{-n}(B(z,\delta))$$

и если строго положительная f-орбита и отрицательная f-орбита точки q пересекают шар $B(z, \frac{\delta}{\varrho})$, то найдется диффеоморфизм $g \in U(f)$ такой, что $g = f$ вне Δ, а точки p, q лежат на одной g-орбите (см. рис. 7).

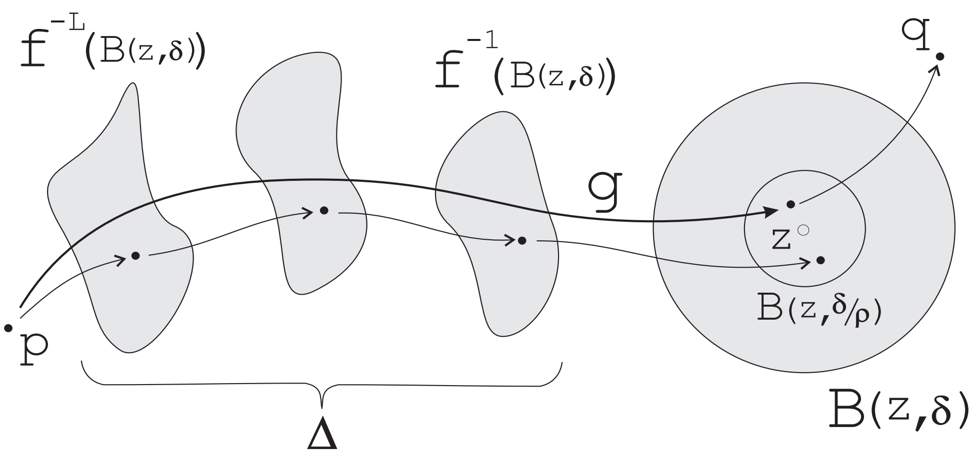


Рис. 7:

Эта теорема справедлива также и для некомпактного M, если только траектория точки $z \in M$ имеет хотя бы одну точку накопления. Непосредственно из теоремы 2.3 вытекает следующий вариант соединяющей C^1 леммы (теорема A [156]) для орбит:

Теорема 2.4 *Пусть $f : M \to M$ – диффеоморфизм замкнутого многообразия M, и точки p, $q \in M$ таковы, что $\omega(p) \cap \alpha(q) \neq \emptyset$. Предположим, что пересечение $\omega(p) \cap \alpha(q)$ содержит непериодическую точку $z \in M$ диффеоморфизма f. Тогда для любой окрестности $U(f)$ диффеоморфизма f в пространстве $Diff^1(M)$ существует диффеоморфизм $g \in U(f)$ такой, что q принадлежит g-орбите точки p. Более того, существует $L \in \mathbb{N}$ такое, что для любого достаточно малого $\delta > 0$ диффеоморфизм $g \in U(f)$ можно взять таким, что $g = f$ вне $\cup_{n=1}^{L} f^{-n}(B(z,\delta))$.*

Таким образом, для полного исследования соединяющей C^1 леммы осталось рассмотреть случай, когда пересечение $\omega(p) \cap \alpha(q)$ состоит из периодических точек.

Доказательство теоремы 2.3 основано на систематическом применении так называемого ε-ядрового перехода фиксированной длины от одной точки к другой. Прежде, чем дать точное определение, напомним, что так же, как и в случае с классической леммой о замыкании, окрестность точки с помощью стандартного отображения $\exp^{-1}$ отождествляется с касательным пространством T_zM, а диффеоморфизм f в линейном приближении можно рассматривать как Df. Это объясняет в некоторой степени почему основные технические утверждения формулируются для изоморфизмов линейных пространств.

Приведем определение ε-ядрового перехода. Пусть имеется конечная последовательность линейных пространств $V_0, \ldots, V_L$ (число $L \in \mathbb{N}$ фиксировано), каждое из которых изоморфно $\mathbb{R}^{\dim M}$, и последовательность линейных преобразований $T_i : V_i \to V_{i-1}$, $1 \leq i \leq L$. Положим $F_j = T_1 \circ \cdots \circ T_j$, $F_0 = id$. Пусть даны точки u, $v \in V_0$, некоторые множества Q, $G \subset V_0$ и шар $B_0 \subset V_0$ такие, что $v \in B_0 \subset Q$ и $B_0 \cap G = \emptyset$. Тогда *ε-ядровым переходом от точки u к v, которое содержится в Q и минует G*, называется набор точек c_i $(0 \leq i \leq L)$ и шаров $B_i \subset V_i$ $(0 \leq i \leq L-1)$ таких, что $c_0 = v$, $c_L = F_L^{-1}(u)$ и

$$c_i \in \varepsilon B_i, \quad T_{i+1}(c_{i+1}) \in \varepsilon B_i, \quad B_i \subset F_i^{-1}(Q), \quad B_i \cap F_i^{-1}(G) = \emptyset, \quad 0 \leq i \leq L-1.$$

Другими словами, ε-ядровый переход есть ε-цепь от c_L к $c_0 = v$ с некоторыми ограничениями на местоположение промежуточных точек, рис. 8.

Два ε-ядровых перехода $\{c_i, B_i\}$, $\{c_i', B_i'\}$ *не пересекаются*, если $B_i \cap B_i' = \emptyset$ для всех $0 \leq i \leq L$. Непересекающиеся ε-ядровые переходы применяются в доказательстве теоремы 2.3 для точек, образующих срезающие пары и одну соединяющую пару. Отметим, что если точка u принадлежит положительной полуорбите точки v, $u = f^k(v)$, причем $k \geq L+1$, то применение ε-ядрового

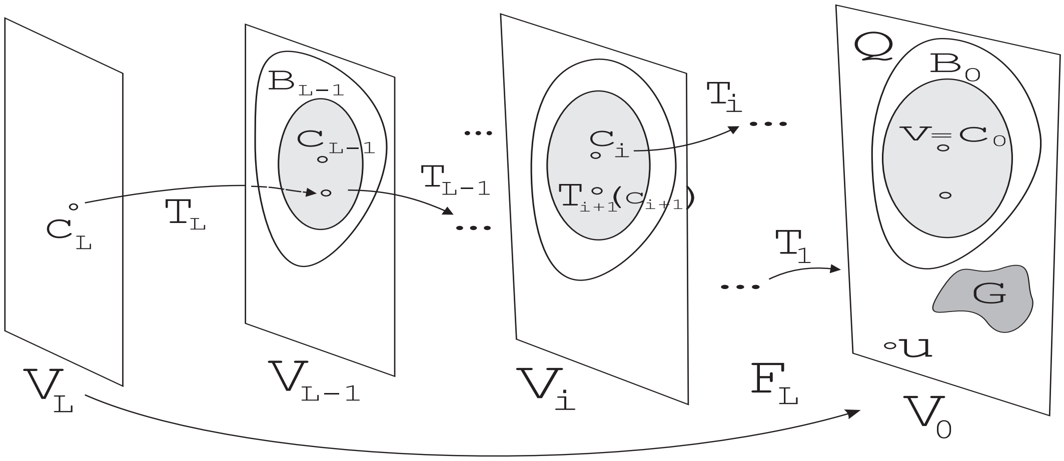


Рис. 8: ε-ядровый переход от $u = F_L(c_L)$ к v.

перехода от u к v дает классическую лемму о замыкании. Когда же u, v образуют срезающую пару, то точка v принадлежит положительной полуорбите точки u, $v = f^k(u)$. После применения ε-ядрового перехода к такой срезающей паре можно позволить себе не обращать внимания на промежуточные точки $f(u)$, ..., $f^{k-1}(u)$, попадающие в область возмущения.

Следующая теорема, которую можно рассматривать как обобщение теоремы 1.1, по существу означает существование оптимального выбора срезающих пар и одной соединяющей пары, а также существованиеε-ядровых переходов между точками выделенных пар. Ниже последовательность точек $\{x\}_1^s$ полезно рассматривать как занумерованную последовательность положительных итераций точки p, попадающих в некоторую малую окрестность точки z, а последовательность $\{y\}_1^t$ – как занумерованную последовательность отрицательных итераций точки q, попадающих в ту же окрестность точки z. Точки p_i, q_i будут прототипами срезающих пар, а пара точек x, y – прототипом соединяющей пары.

Теорема 2.5 *Пусть имеется бесконечная последовательность линейных пространств V_0, ..., V_i, ..., каждое из которых изоморфно $\mathbb{R}^{\dim M}$, и последовательность линейных преобразований $T_i : V_i \to V_{i-1}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\sigma > 1$, $L \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие следующему свойству. Для любых конечных последовательностей точек $\{x\}_1^s$, $\{y\}_1^t$ в V_0 с введенным на их объединении $N \stackrel{\text{def}}{=} \{x\}_1^s \cup \{y\}_1^t$ порядком $>$ вида:*

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_s < y_t < y_{t-1} < \cdots < y_1$$

существуют точки $x \in \{x\}_1^s \cap B(x_s, \sigma|x_s - y_t|)$, $y \in \{y\}_1^t \cap B(x_s, \sigma|x_s - y_t|)$ и k упорядоченных пар $\{p_i, q_i\} \subset N \cap B(x_s, \sigma|x_s - y_t|)$ таких, что

1. *$x_1 \leq p_1 \leq q_1 < p_2 \leq q_2 < \cdots < p_{k'} \leq q_{k'} < x < y < p_{k'+1} \leq q_{k'+1} < \cdots < p_k \leq q_k \leq y_1$;*

2. *Существует ε-ядровый переход от x к y длины L, содержащийся в $B(x_s, \sigma|x_s - y_t|)$;*

3. *Для каждого $i = 1, \ldots, k$ существует ε-ядровый переход от p_i к q_i длины L, содержащийся в $B(x_s, \sigma|x_s - y_t|)$.*

4. *Все ε-ядровые переходы минуют множество $N - [x, y] - [p_1, q_1] - \cdots - [p_k, q_k]$, где $[a, b]$ означает $\{c \in N | a \leq c \leq b\}$.*

5. *Все $k + 1$ ε-ядровые переходы взаимно непересекающиеся.*

Если теперь применить ε-ядровые переходы для всех пар p_i, q_i (от p_i к q_i) и ε-ядровый переход для пары x, y (от x к y), то получим орбиту, соединяющую x_1 с точкой y_1. Доказательство теоремы 2.5 достаточно громоздкое и использует специальное замощение пространства V_0 в окрестности точки x_s $\dim M$-мерными параллелепипедами. Затем в каждом параллелепипеде выбирается максимальная и минимальная точки (в смысле введенного в условии теоремы порядка), и выбираются попарно непересекающиеся интервалы $[x, y]$, $[p_1, q_1]$, ..., $[p_k, q_k]$, содержащие все точки последовательности N, которые лежат во всех параллелепипедах. Отметим, что на самом деле имеются еще некоторые ограничения на ε-ядровые переходы, которые мы опускаем, чтобы не загромождать текст техническими деталями. Аналогично тому, как из теоремы 1.1 следует классическая C^1 лемма о замыкании (см. параграф 1), из теоремы 2.5 можно извлечь теорему 2.3.

Упомянутая в начале параграфа проблема 23 из [110], согласно теореме 2.3, имеет следующее частичное решение: если пересечение топологического замыкания положительной f-орбиты области U_1 с топологическим замыканием отрицательной f-орбиты области U_2 содержит хотя бы одну непериодическую точку, орбита которой имеет точки накопления, то существует диффеоморфизм g, C^1 близкий к f, такой, что положительная g-орбита области U_1 пересекается с отрицательной g-орбитой области U_2.

В работе [152] получен "равномерный" вариант теоремы 2.3. Именно, кроме существования чисел $\varrho > 1$, $L \in \mathbb{N}$ и $\delta_0 > 0$ доказывается существование окрестности $U_1(f) \subset U(f)$ такой, что вывод теоремы 2.3 справедлив не только для f, но и для любого диффеоморфизма f_1 из $U_1(f)$. Развив метод доказательства теоремы 2.3, в работе [46] была доказана следующая теорема.

Теорема 2.6 *Пусть $f : M \to M$ – диффеоморфизм компактного многообразия M, все периодические орбиты которого гиперболические. Предположим, что имеются точки p, $q \in M$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь от p к q. Тогда для любой окрестности U диффеоморфизма f в пространстве $Diff^1(M)$ существует диффеоморфизм $g \in U$, у которого p и q лежат на одной орбите.*

Согласно теореме Купки-Смейла, условию теоремы 2.6 удовлетворяет типичный C^1 диффеоморфизм. Поэтому вышеприведенная теорема существенно используется в описании массивных множеств (см. параграф 7) в пространстве $Diff^1(M)$. Отметим в частности, что из теоремы 2.6 следует, что у типичного диффеоморфизма любая цепно рекуррентная точка переводится в периодическую сколь угодно малым C^1 возмущением.

Используя основной метод своей работы [70], Хаяши доказал усиленный вариант C^1 дихотомии Мане для векторных полей [71]. Прежде, чем сформулировать точный результат, дадим необходимые определения (как обычно, только для диффеоморфизма). Следуя [39], будем называть

$$J_1^+(p) = \{q \in M : \quad \exists\, z_k \to p, \quad \exists\, n_k \to +\infty$$

$$\text{такие, что } f^{n_k}(z_k) \to q \text{ при } k \to +\infty\}$$

пролонгационным ω-предельным множеством первого порядка точки p в смысле Ауслендера. Аналогично можно определить $J_1^+(N)$ для произвольного множества $N \subset M$. Положим $J_m^+(p) = J_1^+(J_{m-1}^+(p))$ для $m \geq 2$. Заменой $n_k \to +\infty$ на $n_k \to -\infty$ определяется *пролонгационное α-предельное множество $J_1^-(p)$ первого порядка точки p в смысле Ауслендера*, и по индукции – множество $J_m^-(p)$ для $m \geq 2$. Точка p называется *пролонгационно рекуррентной в смысле Ауслендера*, если $p \in J_m^+(p) \cup J_m^-(p)$ для некоторого $m \geq 1$. Так как $p \in J_1^+(p)$ тогда и только тогда, когда $p \in J_1^-(p)$, то любая неблуждающая точка является пролонгационно рекуррентной в смысле Ауслендера. Если в улучшенной лемме о замыкании мы заменим условие неблуждаемости на пролонгационную рекуррентность в смысле Ауслендера, то получим более общее утверждение, которое можно было бы назвать *C^r леммой Ауслендера о замыкании.* Такая лемма рассматривалась для векторных полей на плоскости и сфере в [114], [115] для $r \geq 1$, см. 5.

Пролонгационным ω-предельным множеством точки p называется

$$\tilde{\omega}(p) = \{q \in M : \exists\, z_k \to p, \exists\, n_k \to +\infty\, \exists\, f_k \to f$$

$$\text{такие, что } f_k^{n_k}(z_k) \to q \text{ при } k \to +\infty\}.$$

Полностью аналогично определяется пролонгационное α-предельное множество $\tilde{\alpha}(p)$, а также соответствующие понятия для потоков и векторных полей. Ясно, что $J_1^+(p) \subset \tilde{\omega}(p)$, $J_1^-(p) \subset \tilde{\alpha}(p)$. Имеет тесто следующая теорема [71].

Теорема 2.7 *Пусть на замкнутом многообразии M задано C^1 векторное поле $\vec{X} \in \chi^1(M)$, и существуют точки p, $q \in M$ такие, что $\tilde{\omega}_{\vec{X}}(p) \cap \tilde{\alpha}_{\vec{X}}(q) \neq \emptyset$. Тогда для любой окрестности $U(\vec{X}) \subset \chi^1(M)$ поля $\vec{X}$ существует $\vec{Y} \in U(\vec{X})$ такое, что либо точки p, q принадлежат одной траектории векторного поля $\vec{Y}$, либо $\tilde{\omega}_{\vec{Y}}(p) \cap \tilde{\alpha}_{\vec{Y}}(q) = \emptyset$.*

Соединение инвариантных многообразий

Сперва дадим необходимые определения. Пусть f – C^1-гладкий диффеоморфизм замкнутого d-мерного ($d \geq 2$) риманнова многообразия M. Множество $\Lambda \subset M$, инвариантное относительно f, называется *гиперболическим*, если ограничение $T_\Lambda M$ касательного расслоения TM многообразия M на Λ можно представить в виде суммы Уитни $E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$ df-инвариантных подрасслоений E^s_Λ, E^u_Λ ($\dim E^s_x + \dim E^u_x = \dim M$, $x \in \Lambda$), и существуют константы $C_s > 0$, $C_u > 0$, $0 < \lambda < 1$ такие, что

$$\|df^n(v)\| \leq C_s \lambda^n \|v\|, \quad v \in E^s_\Lambda, \quad n > 0,$$

$$\|df^{-n}(v)\| \leq C_u \lambda^n \|v\|, \quad v \in E^u_\Lambda, \quad n > 0.$$

Гиперболическая структура порождает существование так называемых устойчивых и неустойчивых многообразий, которые объединяют точки с одинаковым асимптотическим поведением при положительных и отрицательных соответственно итерациях. Более точно, для любого $x \in \Lambda$ существует инъективная иммерсия $I^s_x : \mathbb{R}^s \to M$, образ которой $W^s(x) = I^s_x(\mathbb{R}^s)$ называется *устойчивым многообразием точки* x, такая, что выполняются следующие свойства: 1) Касательное к $W^s(x)$ пространство в точке x равно E^s_x, $T_x W^s(x) = E^s_x$. 2) Точка $y \in M$ принадлежит $W^s(x)$ тогда и только тогда, когда $d(f^n(x), f^n(y)) \to 0$ при $n \to \infty$. 3)$f(W^s(x)) = W^s(f(x))$. 4)Если $x, y \in \Lambda$, то либо $W^s(x) = W^s(y)$, либо $W^s(x) \cap W^s(y) = \emptyset$. *Неустойчивое многообразие* $W^u(x)$, $x \in \Lambda$, определяется как устойчивое многообразие относительно диффеоморфизма f^{-1}. Неустойчивые многообразия обладают аналогичными свойствами. Учитывая свойство 3), устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными*.

Гиперболическое множество $\Lambda \subset M$ диффеоморфизма $f : M \to M$ называется *изолированным*, если оно имеет компактную окрестность U (так называемая *изолирующая окрестность*) такую, что $\cup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U) = \Lambda$. Известно, что изолированное максимальное гиперболическое множество единственным образом представимо в виде объединения попарно непересекающихся изолированных транзитивных множеств, которые называются базисными. Обозначим через $W^s(\Lambda)$, $W^u(\Lambda)$ устойчивое и неустойчивое многообразие соответственно множества Λ. Точка z называется *гомоклинической точкой, ассоциированной с* Λ, если $z \in W^s(\Lambda) \cap W^u(\Lambda) - \Lambda$. Точка называется *почти гомоклинической точкой, ассоциированной с* Λ, если она лежит в

$$(clos\ W^s(\Lambda) \cap W^u(\Lambda)) \bigcup (W^s(\Lambda) \cap clos\ W^u(\Lambda)) - \Lambda.$$

Пусть C^r диффеоморфизм $f : M \to M$ имеет почти гомоклиническую точку, ассоциированную с изолированным гиперболическим множеством Λ. Следующее утверждение будем называть C^r *леммой о рождении гомоклинической точки*:

для любой окрестности U диффеоморфизма f в пространстве $Diff^r(M)$ существует диффеоморфизм $g \in U$, совпадающий с f в некоторой окрестности множества Λ, такой, что g имеет гомоклиническую точку, ассоциированную с Λ.

Если потребовать, чтобы g имело трансверсальную гомоклиническую точку, то мы получим C^r *лемму о рождении трансверсальной гомоклинической точки*. Эта лемма имеет важное значение, так как практически мало информации о динамике можно извлечь из наличия почти гомоклинических точек. С другой стороны, Смейл [144] доказал, что трансверсальная гомоклиническая точка является точкой накопления инвариантных компактных множеств, на которых диффеоморфизм действует как конечная марковская цепь.

Наличие почти гомоклинической точки, ассоциированной с изолированным гиперболическим множеством Λ, влечет существование почти гомоклинической последовательности. Дадим точное определение. Пусть U – изолирующая окрестность для Λ и пусть $D^s \subset W^s(\Lambda) \cap U$, $D^u \subset W^u(\Lambda) \cap U$ –

фундаментальные области ограничений $f|_{W^s(\Lambda)-\Lambda}$, $f|_{W^u(\Lambda)-\Lambda}$ соответственно, то есть

$$D^s = clos\ \left(W^s_\varepsilon(\Lambda) - f(W^s_\varepsilon(\Lambda))\right), \quad D^u = clos\ \left(W^u_\varepsilon(\Lambda) - f^{-1}(W^u_\varepsilon(\Lambda))\right)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Последовательность конечных орбит $O(x_k) = \{f^i(x_k) : m_k \le i \le n_k \quad x_k \in M\}$ называется *почти гомоклинической последовательностью, ассоциированной с* Λ, если начальные точки $f^{m_k}(x_k)$ стремятся к D^s, а конечные точки $f^{n_k}(x_k)$ – к D^u, при этом хотя бы одна точка из $O(x_k)$ лежит вне U, рис. 9.

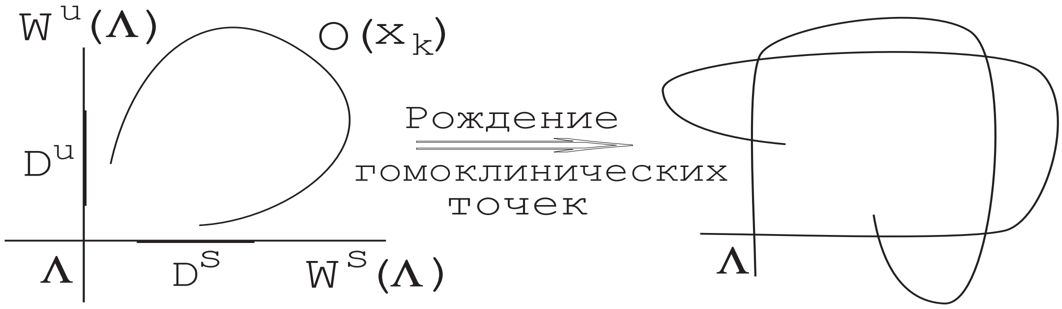


Рис. 9:

В [70] была доказана следующая теорема.

Теорема 2.8 *Пусть диффеоморфизм $f : M \to M$ замкнутого риманова многообразия M имеет изолированное гиперболическое множество Λ и почти гомоклиническую последовательность, ассоциированную с Λ. Тогда для любой окрестности U диффеоморфизма f в пространстве $Diff^1(M)$ существует диффеоморфизм $g \in U$, совпадающий с f в некоторой окрестности множества Λ, такой, что g имеет гомоклиническую точку, ассоциированную с Λ.*

При доказательстве этой теоремы и была использована идея выбора соединяющей и срезающих пар. Как следствие получаем следующее утверждение.

Теорема 2.9 *Пусть диффеоморфизм $f : M \to M$ замкнутого риманова многообразия M имеет изолированное гиперболическое множество Λ и почти гомоклиническую точку, ассоциированную с Λ. Тогда для любой окрестности U диффеоморфизма f в пространстве $Diff^1(M)$ существует диффеоморфизм $g \in U$, совпадающий с f в некоторой окрестности множества Λ, такой, что g имеет гомоклиническую точку, ассоциированную с Λ.*

Приведем две теоремы, которые могут быть выведены из теоремы 2.3 (доказательство см. в [156]).

Теорема 2.10 *Пусть диффеоморфизм $f : M \to M$ замкнутого риманова многообразия M имеет изолированное гиперболическое множество Λ, и предположим, что пересечение $clos\ W^s(\Lambda) \cap clos\ W^u(\Lambda) - \Lambda$ содержит непериодические точки. Тогда для любой окрестности U диффеоморфизма f в пространстве $Diff^1(M)$ существует диффеоморфизм $g \in U$, совпадающий с f в некоторой окрестности множества Λ, такой, что g имеет гомоклиническую точку, ассоциированную с Λ.*

Теорема 2.11 *Пусть диффеоморфизм $f : M \to M$ замкнутого риманова многообразия M имеет изолированное гиперболическое множество Λ, и предположим, что существует семейство периодических орбит, не лежащих в Λ и накапливающихся к Λ. Тогда для любой окрестности U диффеоморфизма f в пространстве $Diff^1(M)$ существует диффеоморфизм $g \in U$, совпадающий с f в некоторой окрестности множества Λ, такой, что g имеет гомоклиническую точку, ассоциированную с Λ.*

В теореме 2.9 не говорится о характере получаемой в результате возмущения гомоклинической точки и об инвариантных многообразиях, пересечение которых образует гомоклиническую точку (ясно только, что можно получить трансверсальную гомоклиническую точку). Для двумерного многообразия в [91] получено следующее уточнение теоремы 2.9.

Теорема 2.12 *Пусть диффеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ замкнутого двумерного риманова многообразия M^2 имеет базисное множество Λ и почти гомоклиническую точку, ассоциированную с Λ. Тогда для любой периодической точки $p \in \Lambda$ выполняется одно из следующих условий:*

- *Вне Λ существует трансверсальная гомоклиническая точка, ассоциированная с p.*
- *Для любой окрестности U диффеоморфизма f в пространстве $Diff^1(M^2)$ существует диффеоморфизм $g \in U$, совпадающий с f в некоторой окрестности множества Λ, такой, что g имеет гомоклиническое касание, ассоциированное с p.*

Таким образом, либо неустойчивое и устойчивое многообразия точки p уже трансверсально пересекаются вне множества Λ и тогда не требуется никаких возмущений для получения гомоклинических точек, либо сколь угодно малым в C^1 топологии возмущением можно добиться того, чтобы неустойчивое и устойчивое многообразия имели точку касания. В наиболее интересном случае, когда Λ имеет почти гомоклиническую точку, но неустойчивое и устойчивое многообразия множества Λ не пересекаются, для каждой периодической точки $p \in \Lambda$ существует сколь угодно малое возмущение, в результате которого неустойчивое и устойчивое многообразия точки p будут иметь точку касания. Отметим, что уже в случае самого "грубого" (квадратичного) касания существуют сколь угодно малые возмущения, приводящие к сложной динамике [14], [15], [101].

3 Задача Пуанкаре о плотности периодических орбит

Напомним сперва основные понятия теории гамильтоновых систем. Кососимметричная 2-форма ω на многообразии называется *симплектической*, если она замкнута, $d\omega = 0$, и невырождена, то есть из $\omega(\vec{X}, \vec{Y}) = 0$ для всех $\vec{Y}$ следует, что $\vec{X} = 0$. Четномерное многообразие $M = M^{2m}$, имеющую симплектическую форму, называется *симплектическим*. В касательном пространстве T_zM любой точки $z \in M^{2m}$ форма ω определяет невырожденное кососимметричное скалярное произведение

$$\omega(\vec{v}, \vec{u}) = \sum_{i,j=1}^{2m} a_{ij} v_i u_j = \vec{v}^T A \vec{u}, \tag{3}$$

где $A = (a_{ij})$ – антисимметричная ($A^T = -A$) невырожденная матрица. В силу невырожденности, ω определяет естественным образом изоморфизм касательного пространства T_zM в кокасательное пространство T_z^*M вида $\vec{u} \mapsto \omega(\cdot, \vec{u})$. Обозначим через J_A обратный изоморфизм $T_z^*M \to T_zM$. Пусть на симплектическом многообразии M задана C^r функция $H : M \to \mathbb{R}$, $r \geq 1$. Тогда $dH \in T^*M$. C^{r-1} векторное поле $\vec{X}_H = J_A(dH)$, определяемое, согласно (3), равенством $\omega(\vec{X}_H, \vec{Y}) = dH(\vec{Y})$, называется *гамильтоновым полем*, ассоциированным с (гамильтонианом) H. Иногда векторное поле $\vec{X}_H$ называют кососимметрическим градиентом функции H. Поток ϕ_H, индуцированный полем $\vec{X}_H$, называется *гамильтоновым потоком.* Пространство гамильтоновых C^r гладких векторных полей обозначим через $\mathcal{H}^r\ (M)$. Если c – регулярное значение гамильтониана H, то $H^{-1}(c)$ называется *энергетическим многообразием.*

Стандартным примером симплектического многообразия является $\mathbb{R}^{2m}$, наделенное симплектической формой (3), где матрица A постоянная. Естественная проекция $\pi : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}/\mathbb{Z}^{2m} \cong T^{2m}$ индуцирует симплектическую структуру на торе T^{2m}. В этом случае

$$\vec{X}_H = J_A \nabla H, \quad J_A = -A^{-1}, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{2m}}\right) \tag{4}$$

Как указывалось ранее, C^1 лемма Пуанкаре о замыкании доказана Пью и Робинсоном [128] (формулировку леммы Пуанкаре см. во введении). На самом деле они доказали более сильный результат, показав, что существует требуемое возмущение, не меняющее энергетического многообразия. Приведем их теорему.

Теорема 3.1 *Пусть точка $x_0 \in M$ лежит на регулярном компактном энергетическом многообразии M_0 C^2-гамильтониана H_0, который определяет гамильтоново C^1 векторное поле $\vec{v}_0 \in \mathcal{H}^1(M)$. Тогда в пространстве $\mathcal{H}^1$ (M) сколь угодно близко к $\vec{v}_0$ существует поле $\vec{w} \in \mathcal{H}^1$ (M), у которого M_0 является энергетическим многообразием и через точку x_0 проходит периодическая траектория поля $\vec{w}$.*

Доказательство проводится по схеме доказательства улучшенной C^1 леммы о замыкании, но дополнительно показывается, что можно исключить возмущение в направлении, перпендикулярном к семейству энергетических многообразий (см. детали в параграфе 9 [128]). Как следствие, получаем ослабленную гипотезу Пуанкаре о плотности периодических траекторий типичной гамильтоновой системы в классе C^1.

Теорема 3.2 *У типичного гамильтонова векторного поля в пространстве $\mathcal{H}^1$ (M) периодические траектории всюду плотны на компактных энергетических многообразиях.*

Приведем пример Эрмана [73], показывающий, что лемма Пуанкаре для достаточно больших r неверна. Пример строится на четномерном торе $\mathbb{T}^{2n+2}$, $n \geq 1$, с координатами $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{2n+2})$. Последнюю координату переобозначим $\theta_{2n+2} = r$.

Сперва напомним некоторые факты из "многомерной" арифметики. Говорят, что вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ *удовлетворяет условию Диофанта с показателем* $\tau \geq 0$, если существует $C > 0$ такое, что для любого $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d - \{0\}$ имеем

$$\left|\sum_{i=1}^{d} k_i \alpha_i\right| \geq C \left(\sum_{i=1}^{d} |k_i|\right)^{-\tau}.$$

Множество таких векторов обозначим через $DC_\tau(\mathbb{R}^d)$. Если $\tau \geq d-1 \geq 1$, то дополнение $\mathbb{R}^d - DC_\tau(\mathbb{R}^d)$ к множеству $DC_\tau(\mathbb{R}^d)$ имеет нулевую Лебегову меру. Более того, для почти всех (в смысле меры Лебега) $s \in \mathbb{R} - \{0\}$ вектор $(1, s\alpha) \in \mathbb{R}^{d+1}$ удовлетворяет условию Диофанта с показателем $\tau_1 = \sup\{\tau, d+0\}$.

Возьмем $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1} \in DC_\tau(\mathbb{R}^{2n+1})$, где $\tau \geq 2n+1 \geq 3$, и числа $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+1}\}$ рационально независимы. Введем на $\mathbb{T}^{2n+2}$ симплектическую структуру вида (3) так, чтобы изоморфизм J_A задавался матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & -0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{2n+1} \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots & -\alpha_{2n+1} & 0 \end{bmatrix}$$

Так как $\det J_A = \alpha_{2n+1}^2 \neq 0$, то матрица A, задающая требуемую симплектическую структуру, существует. Возьмем гамильтониан $H_0(\theta_1, \ldots, \theta_{2n+1}, r) = \sin(2\pi r)$. Нетрудно видеть, что $\nabla H_0 = (0, \ldots, 0, \cos(2\pi r))$, и система (4) примет вид

$$\begin{cases} \dot\theta_1 & = & 2\alpha_1\pi\cos(2\pi r)) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dot\theta_{2n+1} & = & 2\alpha_{2n+1}\pi\cos(2\pi r)) \\ \dot r & = & 0. \end{cases}$$

Ясно, что любое значение $c \in (-1, +1)$ является регулярным для гамильтониана H_0, и энергетическое многообразие H_0^{-1} состоит из двух торов T_{1c}^{2n} и T_{2c}^{2n}, на каждом из которых соответствующий гамильтонов поток минимален, поскольку числа $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+1}\}$ рационально независимы. Для того, чтобы показать, что приведенная система доставляет требуемый пример, Эрман [73] доказывает, что указанные свойства гамильтониана H_0 сохраняются при малых C^r возмущениях, а именно, что для любого $r > \sup\{2\tau_1; \tau + \tau_1 + 1\}$ существует окрестность $U(H_0)$ гамильтониана H_0 в C^r топологии такая, что у произвольного $H \in U(H_0)$ все значения из промежутка $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ регулярны, и для любого такого $c \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ энергетическое многообразие $H^{-1}(c)$ состоит из двух торов, на каждом из которых соответствующий гамильтонов поток сопряжен потоку на торах T^{2n}_{1c}, T^{2n}_{2c} (следовательно, минимален и не имеет периодических орбит). Действительно, для достаточно C^2-близких к H_0 гамильтонианов каждый из двух торов $T_{c,j} \in H^{-1}(c)$ $(j = 1, 2)$ является графиком некоторой C^2 функции $\psi_{c,j} : T^{2n+1} \to \mathbb{R}$: $H(\theta, \psi_{c,j}(\theta)) = c$ для всех $\theta \in T^{2n+1}$. Под действием проекции $T^{2n+2} \to T^{2n+1}$ вида $(\theta, r) \to \theta$ векторное поле $\vec{X}_H|_{T_{c,j}} = J_A \nabla H|_{T_{c,j}}$ проектируется в векторное поле $\vec{Y}_{c,j}$. Рассмотрим его “нормировку":

$$\vec{Z}_{c,j} = \frac{1}{\phi_{c,j}} \vec{Y}_{c,j}, \quad \text{где} \quad \phi_{c,j} = \frac{\partial H}{\partial r}(\cdot, \psi_{c,j}).$$

Нетрудно видеть, что k-ая компонента $(1 \le k \le 2n + 1)$ этого поля равна

$$-\sum_{i=1}^{2n+1} c_{ki} \frac{\partial \psi_{c,j}}{\partial \theta_i} + \alpha_k,$$

где $J_A = (c_{ij})$. Так как $c_{ki} = -c_{ik}$, то

$$\int_{T^{2n+1}} \vec{Z}_{c,j} dm = \alpha_A, \tag{5}$$

где dm – мера Хаара. Немного утрируя, можно сказать, что поле $\vec{Z}_{c,j}$ имеет число вращения α_A. На двумерном торе можно было бы прийти к выводу, что поле $\vec{Z}_{c,j}$ сопряжено линейному, которое в силу рациональной независимости координат вектора α_A, является минимальным векторным полем. Однако, в многомерном случае (тор T^{2n+1}, по крайней мере, трехмерный) сопряженность линейному полю, вообще говоря, не имеет место. Поэтому мы не можем пока утверждать, что векторное поле $\vec{X}_H|_{T_{c,j}}$ не имеет периодических траекторий. Для доказательства сопряженности с линейным полем применяется один тонкий результат Эрмана из [72], в котором требуется чтобы векторное поле было близко к линейному в C^r топологии для достаточно большого r. Приведем этот результат.

Напомним сперва, что если диффеоморфизм $f : T^d \to T^d$ тора T^d сохраняет меру dm и его можно представить в виде $f = Id + \zeta$, где ζ – 1-периодическая по всем аргументам функция, то по аналогии с окружностью $T^1 = S^1$ определяется число вращения

$$\rho_m(f) = \int_{T^d} \zeta dm$$

(точнее, это один из способов ввести характеристику, аналогичную классическому числу вращения Пуанкаре). Обозначим через g_t сдвиг на время t вдоль траекторий векторного поля $\vec{Z}_{c,j}$. В силу (5), $\rho(g_t) = t\alpha_A$. Возьмем $s \in \mathbb{R} - \{0\}$ такое, что вектор $(1, s\alpha_A) \in \mathbb{R}^{2n+2}$ удовлетворяет условию Диофанта с показателем $\tau_1 = \sup\{\tau, 2n + 1 + 0\}$. Теперь применим следующее предложение 2.6.1 из гл. XIII [72]:

Пусть $(1, s\alpha) \in \mathbb{R}^{d+1}$ удовлетворяет условию Диофанта с показателем τ_1, и $r > 2\tau_1$. Тогда в пространстве $Diff^r_m(T^d)$ существует окрестность V сдвига $R_\alpha : T^d \to T^d$ на вектор α такая, что любой диффеоморфизм $g \in V \cap Diff^r_m(T^d)$ с $\rho(g) = \alpha$ $C^{r-\tau_1-0}$ сопряжен с R_α.

Здесь $Diff^r_m(T^d)$ означает пространство диффеоморфизмов $T^d \to T^d$ класса гладкости C^r, сохраняющих меру dm. Таким образом, если гамильтониан H C^{r+1}-близок к гамильтониану H_0, то векторное поле $\vec{Z}_{c,j}$ сопряжено постоянному векторному полю α_A на T^{2n+2}. Отсюда выводится требуемый результат, см. детали в [73].

В [74] показывается, что гладкость C^r понизить, вообще говоря, нельзя. В [74] также построены другие примеры на компактных симплектических многообразиях, не гомологичных тору.

Пусть симплектическая 2-форма ω задает симплектическую структуру на четномерном компактном многообразии M^{2m}. Обозначим через $Diff^r_\omega(M^{2m})$ пространство симплектических C^r диффеоморфизмов многообразия M^{2m}, то есть, диффеоморфизмов, сохраняющих симплектическую (или объемную) форму ω. Для симплектических C^1 диффеоморфизмов имеет место связывающая C^1 лемма для псевдо-орбит (аналог теоремы 2.6) [37], [46], [53].

Теорема 3.3 *Пусть $f \in Diff^1_\omega(M^{2m})$ – симплектический диффеоморфизм компактного многообразия M^{2m} такой, что для любого числа $s \in \mathbb{N}$ множество периодических точек диффеоморфизма f периода s конечно. Предположим, что имеются точки p, $q \in M$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь от p к q. Тогда для любой окрестности U диффеоморфизма f в пространстве $Diff^1_\omega(M^{2m})$ существует диффеоморфизм $g \in U$, у которого p и q лежат на одной орбите.*

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 2.6 с учетом симплектичности диффеоморфизма.

Важную роль леммы о замыкании играют в изучении различных классов голоморфных отображений многомерного комплексного пространства $\mathbb{C}^k$, см. обзор [160], а также [93] (Appendix B), где обсуждается роль классической леммы о замыкании в доказательстве плотности гиперболических отображений в семействах многочленов второй степени. Обозначим через $\mathcal{E}$ пространство голоморфных отображений $\mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах. В работе [56] доказана классическая лемма о замыкании (в указанной топологии пространства $\mathcal{E}$) в классах голоморфных эндоморфизмов, биголоморфных отображений, биголоморфных консервативных (т.е. сохраняющих объем) отображений, биголоморфных симплектоморфизмов $\mathbb{C}^{2k} \to \mathbb{C}^{2k}$, а также голоморфных гамильтонианов на $\mathbb{C}^2$. Доказательства весьма отличаются от рассмотренных нами доказательств, и имеют специфику, характерную для комплексного анализа и комплексной динамики (которая, собственно, и выделяет комплексную динамику в теории динамических систем). Отметим также работы [57], [130], где рассматривались близкие вопросы.

4 Лемма Аносова

Исторически то утверждение, которое сейчас называется леммой Аносова о замыкании, возникло из леммы 13.1 [5] (см. также [3] и [4], где были анонсированы фундаментальные результаты о счетности периодических движений в аносовских системах, и плотности периодических движений в аносовских системах с интегральным инвариантом, которые опирались на лемму 13.1). Речь в этой лемме идет о потоке Аносова[6] f^t на замкнутом многообразии M. Для точки $z \in M$ обозначим через $l(z, f_t z)$ дугу траектории временной длины t с концевыми точками z и $f_t z$. Приведем лемму 13.1 [5].

Лемма 4.1 *Для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ со следующим свойством. Пусть точка $z \in M$ и число $\tau > \epsilon$ таковы, что $d(z, f_\tau z) < \delta$. Тогда существует периодическая траектория l_0 потока f^t такая, что хаусдорфово расстояние между дугой $l(z, f_\tau z)$ и кривой l_0 меньше ϵ.*

Это утверждение является иллюстрацией того, как локальное условие гиперболичности и нелокальное условие возвращаемости дают существование периодического движения в системе. Чтобы продемонстрировать идею использования гиперболичности, рассмотрим ослабленный вариант леммы 4.1, принадлежащий Френксу [58], предложение 1.7 (отметим, что условие леммы 4.1 выполняется в произвольной окрестности неблуждающей точки).

Лемма 4.2 *Пусть $f : M \to M$ – аносовский диффеоморфизм многообразия M. Тогда периодические точки плотны в неблуждающем множестве $NW(f)$.*

[6]Это означает, что все M является равномерным гиперболическим множеством потока f^t

Схема доказательства леммы 4.2. Пусть U – окрестность точки $z \in NW(f)$. Не уменьшая общности можно считать, что U лежит в окрестности со структурой произведения. Далее нам будет удобно обозначить $W_\varepsilon^{u(s)}(p)$ через $W^{u(s)}(p, \varepsilon)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ столь малым, что

$$U_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} W^u(z, \varepsilon) \times W^s(z, \varepsilon) \subset U.$$

Так как z – неблуждающая точка, то существует $z' \in U_{\frac{\varepsilon}{4}}$ такая, что $W^u(z', \frac{\varepsilon}{8}) \subset U_{\frac{\varepsilon}{4}}$ и $f^n(z') \in U_{\frac{\varepsilon}{4}}$. Число n можно считать столь большим, что $C_u \lambda^{-n} > 8$ и $C_s \lambda^n < \frac{1}{8}$, где константы $C_s > 0$, $C_u > 0$, $0 < \lambda < 1$ участвуют в определении гиперболичности, см. параграф 2. Тогда

$$W^u(f^n(z', \frac{\varepsilon}{2}) \subset f^n(W^u(z', \frac{\varepsilon}{8}) \stackrel{\text{def}}{=} D.$$

Обозначим через D_0 компоненту D, содержащую точку $f^n(z')$, см. рис. 10. Определим отображение $h : D_0 \to D_0$ следующим образом: сначала посред-

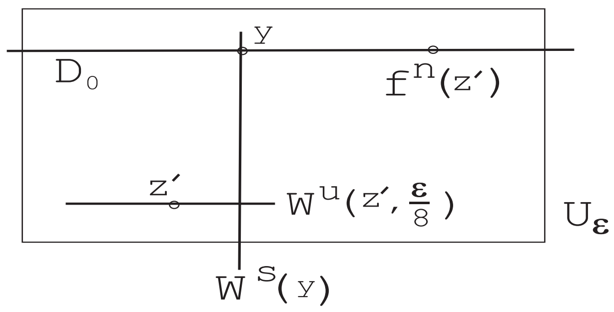


Рис. 10:

ством f^{-n} отобразим D_0 в $W^u(z', \frac{\varepsilon}{8})$, а затем спроектируем $W^u(z', \frac{\varepsilon}{8})$ в D_0 вдоль устойчивых многообразий. Так как f^{-n} на неустойчивых многообразиях действует как сжатие, то h имеет неподвижную точку $y \in D_0$. Очевидно, $f^n(W^s(y)) = W^s(y)$. Положим $D' = W^s(y, \frac{3\varepsilon}{2})$. Тогда

$$f^n(D') \subset W^s(f^n(y), \frac{3\varepsilon}{16}) \subset D'.$$

Поэтому f^n имеет неподвижную точку $x \in U_\varepsilon$. $\square$

Следуя [134], замыкание объединения всех ω- и α-предельных множеств будем называть *предельным множеством гомеоморфизма* f,

$$L(f) = clos \bigcup_{z \in M} (\omega(z) \cup \alpha(z)).$$

Цепно рекуррентное множество гомеоморфизма f обозначается через $\mathfrak{R}(f)$. Очевидно, имеют место соотношения

$$clos\ (Per(f)) \subset L(f) \subset NW(f) \subset \mathfrak{R}(f).$$

В настоящее время под леммой Аносова о замыкании подразумевается следующее утверждение [134].

Теорема 4.1 *Пусть $f : M \to M$ – диффеоморфизм компактного риманова многообразия M. Имеют место следующие утверждения:*

1. *Предположим, что цепно рекуррентное множество $\mathfrak{R}(f)$ диффеоморфизма f имеет гиперболическую структуру. Тогда периодические точки плотны в $\mathfrak{R}(f)$, и*
$$clos\ (Per(f)) = \mathfrak{R}(f) = L(f) = NW(f).$$
2. *Предположим, что предельное множество $L(f)$ диффеоморфизма f имеет гиперболическую структуру. Тогда периодические точки плотны в $L(f)$,*
$$clos\ (Per(f)) = L(f).$$
3. *Предположим, что неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма f имеет гиперболическую структуру. Тогда периодические точки плотны в неблуждающем множестве отображения, которое является ограничением f на $NW(f)$, то есть*
$$clos\ (Per(f)) = NW(f|_{NW(f)}).$$

Доказательство базируется на следующей теореме об отслеживании, которая имеет самостоятельный интерес (см. об отслеживании [117]). Напомним, что точка y *ϵ-отслеживает* δ-цепь $\{x_j\}_{j_1}^{j_2}$, если $d(f^j(y), x_j) < \epsilon$ для всех $j_1 \leq j \leq j_2$. Ниже $U_\eta(N)$ означает η-окрестность множества N.

Теорема 4.2 *Пусть Λ – гиперболическое инвариантное компактное множество. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$, $\eta > 0$ такие, что если $\{x_j\}_{j_1}^{j_2}$ – δ-цепь, лежащая в $U_\eta(\Lambda)$, то существует точка y, которая ε-отслеживает $\{x_j\}_{j_1}^{j_2}$. Если δ-цепь $\{x_j\}_{j_1}^{j_2}$ периодическая, то y также периодическая. Если $j_1 = -\infty$, $j_2 = +\infty$, и Λ изолированное, то $y \in \Lambda$.*

Покажем схематично как используется теорема об отслеживании в доказательстве первого утверждения теоремы 4.1. Возьмем цепно рекуррентную точку $z \in \mathfrak{R}(f)$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдется периодическая δ-цепь $\{x_j\}_{j_1}^{j_2}$ такая $d(z, x_{j_1}) < \delta$. Более того, такую δ-цепь можно подобрать так, чтобы она состояла из цепно рекуррентных точек. Согласно теореме 4.2, существует периодическая точка y, которая ε-отслеживает $\{x_j\}_{j_1}^{j_2}$. Так как $\delta + \varepsilon$

может быть произвольно малым, то получаем, что $z \in clos\,(Per(f))$. Остальные утверждения теоремы 4.1 доказываются в том же духе.

Имеется вариант леммы о замыкании для неравномерно гиперболического множества, доказанный Катком [77]. См. также [78], теорема S.4.13.

5 C^r леммы для $r \geq 2$

Классическая и улучшенная C^r леммы

Как указывалось ранее, имеется немного результатов о классической и улучшенной C^r леммах для $r \geq 2$. Большинство из них относится к гладким преобразованиям окружности и отрезка, а также к потокам на поверхностях.

Отображения окружности и отрезка

Окружность S^1 является первым многообразием, на котором была доказана классическая C^r лемма о замыкании для всех $r \geq 1$, включая C^ω, еще до появления формулировки этой леммы [17]. Схематично приведем доказательство, так как основная идея присутствует в большинстве доказательств лемм о замыкании для $r \geq 2$.

Пусть $x_0 \in S^1$ – нетривиально рекуррентная точка C^r диффеоморфизма $f : S^1 \to S^1$. Возьмем поднятие $\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ относительно универсального накрытия $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$. Обозначим через $\overline{R}_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ сдвиг $x \mapsto x + \lambda$, который является накрывающим для поворота $R_\lambda : S^1 \to S^1$. Зададим $\varepsilon > 0$. Достаточно показать, что существует $|\lambda_0| < \varepsilon$ такое, что $R_{\lambda_0} \circ f$ имеет периодическую точку x_0. Возьмем поднятие $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}$ этой точки. Не уменьшая общности, можно считать $\overline{x}_0 = 0$. Так как точка x_0 нетривиально рекуррентная, то существуют $m \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{N}$ такие, что $m - \frac{\varepsilon}{2} < \overline{f}^k(\overline{x}_0) < m$ или $m < \overline{f}^k(\overline{x}_0) < m + \frac{\varepsilon}{2}$. Для определенности будем считать, что выполняется первое неравенство (для второго – доказательство аналогичное). Ясно, что при $\lambda > 0$, $R_\lambda \circ f > f$ и существует $0 < \lambda_* < \varepsilon$ такое, что $\overline{f}^k(\overline{x}_0) + \lambda_* > m$. Имеем

$$\left(\overline{R}_\lambda \circ \overline{f}\right)^k(\overline{x}_0) = \left(\overline{R}_\lambda \circ \overline{f}\right) \circ \left(\overline{R}_\lambda \circ \overline{f}\right)^{k-1}(\overline{x}_0) \geq \overline{R}_\lambda \circ \overline{f}^k(\overline{x}_0) = \overline{f}^k(\overline{x}_0) + \lambda.$$

Поэтому $\left(\overline{R}_{\lambda_*} \circ \overline{f}\right)^k(\overline{x}_0) > m$. С другой стороны, $\left(\overline{R}_0 \circ \overline{f}\right)^k(\overline{x}_0) = \overline{f}^k(\overline{x}_0) < m$. Поскольку точка $\left(\overline{R}_\lambda \circ \overline{f}\right)^k(\overline{x}_0)$ непрерывно зависит от λ, существует $0 <$

$\lambda_0 < \lambda_* < \varepsilon$ такое, что $\left(\overline{R}_{\lambda_0} \circ \overline{f}\right)^k (\overline{x}_0) = m$. Это означает, что $R_{\lambda_0} \circ f$ имеет периодическую точку x_0. Почти дословно доказывается улучшенная C^r лемма о замыкании.

Приведенное доказательство демонстрирует практически единственный способ, который условно можно назвать "поворотом поля доказательства лемм о замыкании для класса гладкости $r \geq 2$. Если в C^1 лемме бифуркация была сосредоточена в малых шарах, а дозамыкание происходило в δ-ядрах этих шаров (что автоматически увеличивало производные высших порядков), то для $r \geq 2$ используется бифуркация, которая за счет величины области деформации практически не затрагивает производные высших порядков. На окружности "поворот поля" есть просто сдвиг, а для векторных полей он состоит в добавлении постоянного векторного поля, направленного в нужном направлении.

Для диффеоморфизмов окружности оказалось возможным доказать следующую сверх усиленную лемму о замыкании [13].

Теорема 5.1 *Пусть C^r диффеоморфизм $f : S^1 \to S^1$ имеет цепно рекуррентную точку, $r \geq 1$. Тогда для любой окрестности U диффеоморфизма f в пространстве $Diff^r(S^1)$ существует $g \in U$ такой, что все точки диффеоморфизма g периодические.*

Принципиальным является случай когда число вращения $rot(f)$ иррациональное. Отметим, что в этом случае цепно рекуррентная точка может быть блуждающей, но тогда $r = 1$. Согласно замечательному результату Эрмана [72], f аппроксимируется аналитическим диффеоморфизмом g_0, который аналитически сопряжен с поворотом R_α, $g_0 = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$. Ясно, что R_α можно аппроксимировать поворотом $R_{p/q}$, у которого все орбиты периодические. Тогда $g = h^{-1} \circ R_{p/q} \circ h$ есть искомый диффеоморфизм.

Теперь рассмотрим C^r гладкие отображения интервала $I = [0; 1]$ в себя. Обозначим через $End^r_{pm}(I)$ множество C^r гладких (в частности, непрерывных) кусочно монотонных отображений I в себя, которое наделяется естественной метрикой: $d_r(f, g) = \max_{x \in I} \max_{i=0,\ldots,r} |f^{(i)}x - g^{(i)}x|$, если r конечно и $d_\infty(f, g) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \max_{x \in I}\{\min(1, |f^{(i)}x - g^{(i)}x|)\}$. Для $f \in End^r_{pm}(I)$ обозначим через $Rec(f) = \{x \in I : \forall\varepsilon > 0, \exists n > 0 : |f^n x - x| < \varepsilon\}$. Ясно, что $Per(f) \subset Rec(f) \subset NW(f)$. В [161] для любого непрерывного $f \in End^0_{pm}(I)$ было доказано равенство

$$clos\ (Per(f)) = clos\ (Rec(f)), \tag{6}$$

которое можно интерпретировать как аналог леммы Пуанкаре (т.е. ничего не надо возмущать): вблизи любой нетривиально рекуррентной точки проходит периодическая орбита. Отметим, что (6) не верно для произвольного гомеоморфизма окружности S^1. Что касается аппроксимации неблуждающих точек периодическими, то в [161] была доказана следующая теорема.

Теорема 5.2 *Пусть $f \in End^r_{pm}(I)$, $0 \leq r \leq \infty$, имеет неблуждающую точку $x \in NW(f)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует полином g такой, что $d_r(f,g) < \varepsilon$ и x принадлежит замыканию множества периодических точек полинома g, $x \in clos\ (Per(g))$.*

Теорема 5.2 используется для доказательства того, что для типичного $f \in End^r_{pm}(I)$, $2 \leq r \leq \infty$, выполняется равенство $clos\ (Per(f)) = NW(f)$. Это равенство ранее доказал Якобсон [24] для типичного f в пространстве $End^1_{pm}(S^1)$.

Рассмотрим взаимно однозначные отображения окружности $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (которая снабжена положительным направлением) с разрывами. Пусть $A = \{a_i\}^k_{i=1}$, $B = \{b_i\}^k_{i=1}$ – два семейства циклически упорядоченных точек, которые разбивают S^1 на интервалы $I_i = (a_i, a_{i+1})$ и $J_i = (b_i, b_{i+1})$ соответственно, где $a_{k+1} = a_1$, $b_{k+1} = b_1$. Отображение

$$f : S^1 - \cup^k_{i=1} a_i \to S^1 - \cup^k_{i=1} b_i$$

называется *кусочно C^r-диффеоморфным*, $r \geq 0$, если оно взаимно однозначное и ограничение $f|_{I_i}$ есть C^r гладкий диффеоморфизм[7] на $J_{\sigma(i)}$. Введем C^r топологию на множестве таких отображений. Для данного $\varepsilon > 0$ будем считать, что g принадлежит ε-окрестности $U_\varepsilon(f)$ отображения f, если существует ε-близкий к тождественному сохраняющий ориентацию C^r диффеоморфизм $h : S^1 \to S^1$ такой, что $h(clos\ I_i(f)) = clos\ I_i(g)$, $i = 1, \ldots, k$, и $g \circ h$ ε-близок к f в C^r топологии Уитни на каждом $clos\ (I_i(f))$. Пространство кусочно диффеоморфных отображений окружности с фиксированным k, наделенное указанной топологией, обозначим через $\mathcal{M}^{r+0}(k)$.

Возьмем символы $J_1, \ldots, J_k$, $A_1, \ldots, A_k$, и для $x \in S^1$ определим маршрут $i_f(x) = (i_0(x), \ldots, i_n(x), \ldots)$, точки x где $i_n(x) = J_i$, если $f^n(x) \in I_i$, и $i_n(x) = A_i$, если $f^n(x) = a_i$. В последнем случае будем считать $i_m(x) = A_i$ для всех $m \geq n$. Обозначим через $A^\infty = \cup^\infty_{i=0} f^{-i}(A)$ и $B^\infty = \cup^\infty_{i=0} f^i(B)$ соответственно прообразы и "образы" точек разрыва. Если $f^{-i}(a_s) = b_p$ для некоторых $1 \leq$

[7] C^0 диффеоморфизм считается гомеоморфизмом.

$p, s \le k$, $i \ge 1$, то положим $f^{-i-1}(a_s) = f^{-1}(b_p) = \emptyset$. Через $O(x) = \cup_{-\infty}^{+\infty} f^n(x)$ будем обозначать орбиту точки $x \notin A^\infty \cup B^\infty$.

Пусть $x \in I_\nu = [a_\nu, a_{\nu+1}]$ – нетривиально рекуррентная точка ($x \notin A^\infty \cup B^\infty$) и пусть $q_1(r)$ – первая положительная итерация такая, что $f^{q_1(r)}(x) \in (x, a_{\nu+1})$. Определим по индукции $q_n(r)$ как первую итерацию такую, что $f^{q_n(r)}(x) \in (x, f^{q_{n-1}(r)}(x))$. Аналогично определяются числа $q_n(l)$ (например, $q_1(l)$ – первая положительная итерация такая, что $f^{q_1(l)}(x) \in (a_\nu, x)$). Рассмотрим блок $B_n^r = [i_0(x), \dots, i_{q_n(r)}(x)] \subset i_f(x)$ и определим $r_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ как максимальное число повторений блока B_n^r в $i_f(x)$ после символа $i_{q_n(r)}(x)$. Формально, $i_k(x) = i_{k+jq_n(r)}(x)$ для $0 \le j \le r_n$, $0 \le k \le q_n(r)$. Последовательность $R(x) = \{r_1(x), \dots, r_n(x), \dots\}$ называется *правым t-разложением точки* x. Поменяв числа $q_n(r)$ на $q_n(l)$, получим определение *левого t-разложения* x, которое мы обозначим через $L(x)$. Следующая теорема доказана в [16].

Теорема 5.3 *Предположим, что $f \in \mathcal{M}^{r+0}(k)$, $r \ge 1$, возрастает на каждом интервале монотонности. Пусть $x \in S^1$ – нетривиально рекуррентная точка, и $L(x) = \{l_i\}_1^\infty$, $R(x) = \{r_i\}_1^\infty$ – ее левое и правое t-разложения соответственно. Если $\overline{lim}_{n\to\infty} l_n \ge 3$, $\overline{lim}_{n\to\infty} r_n \ge 3$, то для любой окрестности $U(f)$ существует $g \in U(f)$, имеющее периодическую точку x.*

Ниже, описывая результаты для потоков на поверхностях, мы будем приводить другие результаты, относящиеся к одномерной динамике (поскольку между ними имеется близкая связь, если рассматривать отображения, которые индуцирует поток на секущей).

Примеры Гутиерреса и Кэрролл

Уже в 1975 году Пью [124] высказал сомнение о справедливости классической и улучшенной C^r лемм о замыкании при $r \ge 2$ для многообразий размерности большей или равной двум. Для подкрепления своих слов Пью построил поток на торе с пролонгационно рекуррентной точкой первого порядка в смысле Пью, для которого не верна C^2 лемма о замыкании (см. 5). Идея построения легла в основу большинства контр-примеров для различных лемм о замыкании (за исключением леммы Пуанкаре, где используется другая идея). В 1978 году Гутиеррес [64] доказал, что для некомпактных поверхностей классическая (а тем более, улучшенная) C^r лемма о замыкании, вообще говоря, не верна при $r \ge 2$. Более точно, Гутиеррес доказал следующую теорему.

Теорема 5.4 *Пусть $T^2-\{p\}$ – проколотый тор, $p \in T^2$, и пусть для фиксированного $r \geq 2$ существует векторное поле $\vec{X} \in \mathfrak{X}^\infty(T^2)$, имеющее нетривиально рекуррентную траекторию, такое, что в некоторой окрестности U поля $\vec{X}|_{T^2-\{p\}}$ в пространстве $\mathfrak{X}^r(T^2-\{p\})$ любое векторное поле $\vec{Y} \in U$ не имеет периодических траекторий.*

Предполагается, что пространство $\mathfrak{X}^r(T^2-\{p\})$ наделено сильной топологией Уитни. Это значит, что фундаментальная система окрестностей поля $\vec{X}|_{T^2-\{p\}}$ задается следующим образом. Пусть $\{U_i\}$ – локально конечное покрытие множества $T^2-\{p\}$, и $\{\varepsilon_i\}$ – семейство положительных чисел. Тогда фундаментальная система окрестностей порождается открытыми множествами $U(\{U_i\},\{\varepsilon_i\}) = \{\vec{V} \in \mathfrak{X}^r(T^2-\{p\}) : ||\vec{V}|_{U_i} - \vec{X}|_{U_i}||_r < \varepsilon_i\}$. Построение векторного поля $\vec{X} \in \mathfrak{X}^\infty(T^2)$ начинается с гомеоморфизма $f : C \to C$ окружности.Гомеоморфизм f нетранзитивный и имеет иррациональное число вращения $rot\ f = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Существует непрерывное отображение $h : C \to S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, которое полусопрягает f с $R_{rot\ f}$, и отображает каждый вклеенный интервал в соответствующую точку.

Стандартная надстройка $sus\ f$ над f является потоком на T^2 без точек покоя, который индуцирует на нулевом меридиане отображение последования f. Можно считать, что окружность C вложена как нулевой меридиан в T^2, $C \subset T^2$. Траектории потока $sus\ f$, проходящие через интервал $h^{-1}(0)$, образуют так называемую ячейку Данжуа. Если посадить на концах интервала $h^{-1}(0)$ фальшивые седла (то есть седла, у каждого из которых имеется ровно два седловых сектора), то $sus\ f$ становится сглаживаемым [62]. Более точно, $sus\ f$ с фальшивыми седлами топологически эквивалентен C^∞ потоку, причем гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность, можно взять сколь угодно близким к тождественному. Теперь в ячейку Данжуа вблизи специально подобранных интервалов $h^{-1}(R^n_{rot\ f}(0))$, которые накапливаются к $h^{-1}(0)$, вклеим “закупорки изображенные на рис. 11. Каждая закупорка

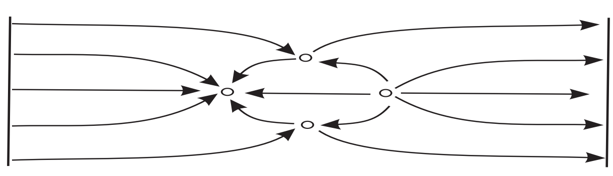


Рис. 11:

содержит один источник, один сток и два седла. Все точки покоя являются грубыми. Далее отрезок $h^{-1}(0)$ удаляется из тора, и полученный разрез стягивается в выколотую точку p. Ясно, что это можно сделать так, что в результате получится C^∞ поток (обозначим его через f^t) на проколотом торе $T^2 - \{p\}$. Более того, векторное поле $X|_{T^2-\{p\}}$, порождающее f^t, можно умножить на гладкую положительную функцию так, чтобы оно продолжалось на выколотую точку p гладким образом до состояния равновесия.

Местоположение специально выбранных интервалов $h^{-1}(R^n_{rot\ f}(0))$, которые теперь скапливаются к проколу, подбирается с учетом разложения числа вращения в непрерывную дробь $rot\ f = [1, \ldots, 1, \ldots]$. Соответствующие им закупорки также скапливаются к проколу, рис. 12. Поскольку пространство $\mathfrak{X}^r(T^2 - \{p\})$ наделено сильной топологией Уитни, то имеются некоторые ограничения на возмущения векторного поля $X|_{T^2-\{p\}}$ вблизи p. Гутиеррес [64] доказал, что у любого достаточно близкого к $X|_{T^2-\{p\}}$ возмущения любая одномерная траектория как в положительном, так и в отрицательном направлениях либо попадает в одну из закупорок и стремится к точке покоя, либо стремится к проколу. Следовательно, все векторные поля в некоторой окрестности поля $X|_{T^2-\{p\}}$ не имеют периодических траекторий.

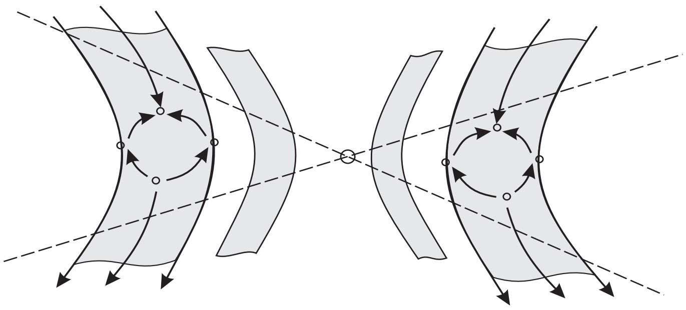


Рис. 12:

Близкая идея была использована Кэрролл [52] при построении C^∞ гладкого векторного поля, для которого никакое достаточно малое C^2 скручивание вдоль замкнутой трансверсали не приводит к появлению периодических траекторий. Дадим точное определение. Пусть C – замкнутая простая трансверсаль некоторого C^∞ векторного поля X на торе T^2. Кривая C имеет цилиндрическую окрестность A, гомеоморфную $C \times (-1; +1)$. Не уменьшая общности, можно считать, что траектории потока f^t пересекают A по отрезкам вида $\{x\} \times (-1; +1)$, и направлены от $C \times \{-1\}$ к $C \times \{+1\}$. Зададим на $C \times \{+1\}$ ориентацию. *C^r скручивание поля X вдоль C* состоит в прибавлении к X векторного C^r поля Y, носитель которого лежит в A, и который "сдвигает" все точки на $C \times \{+1\}$ только в одну сторону: либо в положительном, либо в отрицательном направлении.

Напомним, что топологическое замыкание нетривиально рекуррентной полутраектории называется *квазиминимальным множеством.* На торе у любого потока может быть не более одного квазиминимального множества. Следующая теорема доказана в [52].

Теорема 5.5 *На торе T^2 существует C^∞ векторное поле X с конечным числом состояний равновесия и нигде не плотным квазиминимальным множеством $\Omega(X)$ такое, что выполняются следующие условия:*

1. *X имеет простую замкнутую трансверсаль C, пересекающуюся со всеми нетривиально рекуррентными полутраекториями поля X.*
2. *Любое достаточно малое C^2 скручивание поля X вдоль C приводит к векторному полю, у которого либо имеется квазиминимальное множество, совпадающее с $\Omega(X)$, либо неблуждающее множество состоит из конечного числа состояний равновесия (в частности, нет ни нетривиально рекуррентных полутраекторий, ни периодических траекторий).*

Аналогично вышеприведенной конструкции Гутиерреса, построение поля X начинается с потока Данжуа с числом вращения, непрерывная дробь которого образует ограниченную последовательность. Наряду с местоположением ячейки, в [52] учитывается и скорость уменьшения ее ширины. Это позволяет построить поле с конечным числом состояний равновесия.

Еще более экзотический пример был построен в [68]. Именно, на неориентируемой поверхности рода 4 имеется сверхтранзитивный C^∞ поток f^t Купки-Смейла[8] и семейство потоков $\{f^t_\mu\}_{\mu\geq 0}$, $f^t_0 = f^t$, которые получаются из f^t нетривиальным C^∞ скручиванием, такие, что все потоки $\{f^t_\mu\}_{\mu\geq 0}$ топологически эквивалентны f^t. Построение основано на специальном примере минимального перекладывания пяти промежутков на окружности, причем на двух промежутках преобразование меняет ориентацию (такие промежутки называются флипами).

Потоки на поверхностях: достаточные условия

Первые результаты, касающиеся C^r лемм о замыкании для потоков, были получены Пейкшото [112], [113] при доказательстве того, что структурно устой-

[8]Напомним, что поток называется потоком Купки-Смейла, если он не имеет сепаратрисных связей и все точки покоя гиперболические.

чивые потоки на ориентируемой замкнутой поверхности M^2 совпадают с потоками Морса-Смейла. Пейкшото (лемма 4 [112]) показал, что если через точку $p \in M^2$ C^r гладкого потока проходит нетривиально рекуррентная траектория из минимального множества и данная точка не лежит в предельном множестве никакой сепаратрисы, то существует сколь угодно близкий в C^r топологии поток, у которого через точку p проходит периодическая траектория, $r \geq 1$. Требуемое возмущение строилось поворотом поля вдоль трансверсали (скручиванием). В том случае, когда точка p лежит в предельном множестве сепаратрисы, Пейкшото доказал следующий аналог соединяющей C^r леммы (лемма 5 [112]). Пусть p принадлежит пересечению α-предельному множеству некоторой ω-сепаратрисы и ω-предельному множеству некоторой α-сепаратрисы. Тогда существует сколь угодно близкий в C^r топологии поток, у которого на одну сепаратрисную связь больше, чем у исходного потока. Анализ доказательства показывает, что оба результата справедливы для точки нетривиально рекуррентной траектории, необязательно принадлежащей минимальному множеству. Усовершенствованные доказательства см. в [18], [61]. Эти результаты Пейкшото были распространены в [69] на слоения, которые задаются полями направлений, определяемыми главными кривизнами (так называемые умбилические точки, в которых кривизна равна по всем направлениям, являются особенностями). Аналогичные бифуркации рассматривались Арансоном [10] при изучении потоков первой степени негрубости.

Примеры Гутиерреса [64] и Кэрролл [52] указывают на правдоподобность гипотезы Пью о том, что классическая C^r лемма о замыкании при $r \geq 2$, вообще говоря, неверна даже для векторных полей на компактных поверхностях. Поэтому повышается роль утверждений с достаточными условиями, влекущими такую лемму. Сперва отметим, что из C^r леммы о замыкании для диффеоморфизмов окружности вытекает C^r лемма для векторных полей без состояний равновесия на торе при любом $r \geq 1$. Что касается векторных полей с состояниями равновесия, то для них в полной общности проблема остается открытой (даже если ограничится классом полей с грубыми состояниями равновесия).

Пусть $\alpha = [a_0, \ldots, a_n, \ldots]$ – разложение в непрерывную дробь иррационального числа α (о непрерывных дробях см. [23], [72]). Будем говорить, что α имеет *неограниченный тип*, если $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$. В [63] была доказана следующая замечательная теорема.

Теорема 5.6 *Пусть векторное поле $X \in \mathfrak{X}^r(T^2)$, $r \geq 1$, имеет нетривиально рекуррентную полутраекторию l, проходящую через точку p, и ко-*

нечное число состояний равновесия. Если число вращения $\mathrm{rot}\ X = \alpha$ *векторного поля* X *имеет неограниченный тип, то для любой окрестности* $U(X) \subset \mathfrak{X}^r(T^2)$ *поля* X *в пространстве* $\mathfrak{X}^r(T^2)$ *найдется* $Y \in U(X)$ *такое, что у векторного поля* Y *через* p *проходит периодическая траектория.*

Объясним идею доказательства. Обозначим через $\frac{p_n}{q_n}$ подходящие дроби. Известно, что имеют место соотношения $p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}$, $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$. Так как X имеет нетривиально рекуррентную полутраекторию, то X имеет простую замкнутую трансверсаль T, пересекающуюся со всеми нетривиально рекуррентными полутраекториями. Тогда X индуцирует на некоторой открытой области отображение последования $T \to T$ с числом вращения α. Это отображение последования полусопряжено повороту $R_\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} R$ единичной окружности S^1 на величину α. Рисунок 13 иллюстрирует положение

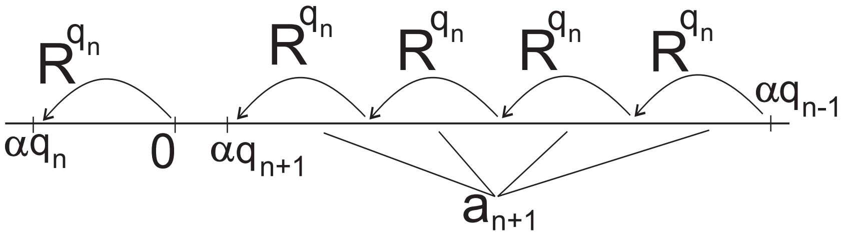


Рис. 13:

первых q_{n+1} точек орбиты $R^n(0) = \alpha n \pmod 1$ вблизи точки 0. Можно показать (и рис. 13 помогает это сделать), что существует промежуток I_n, первые q_{n+1} итераций которого под действием R примыкают друг к другу, но их внутренности попарно не пересекаются.

Так как при полусопряжении сохраняется взаимное расположение точек, то существует кольцо A, ограниченное двумя отрезками трансверсали T и двумя дугами нетривиально рекуррентной полутраектории l, см. рис. 14. Кольцо A разрезается дугами нетривиально рекуррентной полутраектории l на a_{n+1} так называемых восьмерочных потоковых ящиков.

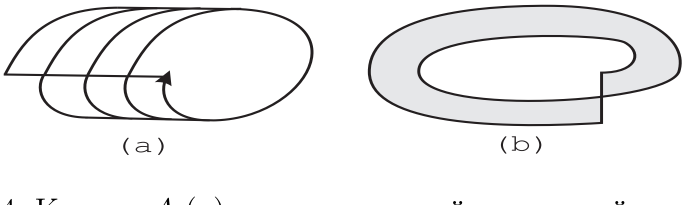
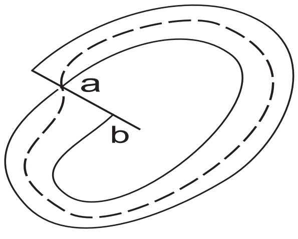


Рис. 14: Кольцо A (a) и восьмерочный потоковый ящик (b).

Так как $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$, то существует потоковый ящик без точек покоя. Теперь в этом ящике можно сделать локальный поворот векторного



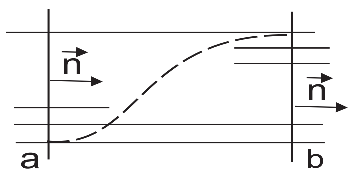


Рис. 15:

поля так, чтобы нетривиально рекуррентная полутраектория, проходящая через угловую точку, превратилась в периодическую траекторию, см. рис. 15.

Известно [23], что иррациональные числа неограниченного типа образуют множество полной меры Лебега. Поэтому теорема 5.6 означает, что для “большинства" C^r гладких векторных полей с нетривиально рекуррентными полутраекториями на торе справедлива классическая C^r лемма о замыкании, $r \geq 1$.

Ллойд [83] рассмотрел случай потоков на торе с иррациональными числами вращения ограниченного типа и доказал, что в этом случае также справедлива C^r лемма о замыкании для всех $r \geq 1$, если все точки покоя гиперболические и в каждом седле дивергенция равна нулю. Последнее условие можно заменить на консервативность потока в окрестности седла плюс возможность C^2 линеаризации. Доказательство основывается на следующей теореме типа Данжуа, которая имеет самостоятельный интерес.

Теорема 5.7 *Пусть $f : S^1 \to S^1$ – сохраняющее ориентацию отображение степени 1 с иррациональным числом вращения $\alpha = [a_0, \dots, a_n, \dots]$, которое, за исключением конечного числа точек имеет гладкость C^1. Предположим, что на множестве $L \subset S^1$, где f имеет положительную производную Df, функция $\log Df$ имеет ограниченную вариацию. Тогда, если f и f^{-1} имеют блуждающие интервалы, то $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.*

Имеется следующее развитие теоремы 5.6, полученное в работе [52]. Пусть векторное поле $X \in \mathfrak{X}^r(T^2)$, $r \geq 1$, имеет иррациональное число вращения $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ с $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq k$. Если X имеет не более, чем $k + 3$ состояний равновесия, то существуют сколь угодно близкие к тождественному C^r скручивания поля X вдоль некоторой простой замкнутой трансверсали C, которые приводят к появлению периодических траекторий.

Основная идея работы [63] была использована в [12] для векторных полей на замкнутой ориентируемой гиперболической поверхности. К тому времени

Арансоном и Гринесом [11] был введен аналог числа вращения Пуанкаре – гомотопический класс вращения. Опишем этот инвариант подробнее.

Пусть Δ – модель Пуанкаре плоскости Лобачевского, то есть Δ – единичный круг на комплексной z-плоскости, наделенный метрикой постоянной отрицательной кривизны. Окружность $S_\infty = \partial\Delta = (|z| = 1)$ называется *абсолютом.* Известно, что для любой ориентируемой замкнутой поверхности M рода ≥ 2 найдется группа Γ изометрий плоскости Δ такая, что $\Delta/\Gamma \cong M$. Обозначим через $\pi : \Delta \to \Delta/\Gamma \cong M$ естественную проекцию, которая является универсальным накрытием. С метрикой, индуцируемой отображением π, M является ориентируемой гиперболической поверхностью.

Пусть $l = \{m(t) \in M : t \geq 0\}$ – полубесконечная непрерывная кривая без самопересечений на M, и $\overline{l} = \{\overline{m}(t) \in \Delta : t \geq 0\}$ – ее поднятие на Δ. Предположим, что $\overline{l}$ стремится в евклидовой метрике на замкнутом диске $\Delta \cup S_\infty$ при $t \to +\infty$ ровно к одной точке $\sigma \in S_\infty$. Будем говорить в этом случае, что *кривая* $\overline{l}$ *имеет асимптотическое направление.*

Арансон и Гринес [11] доказали, что если l – нетривиально рекуррентная полутраектория на M, то любое ее поднятие $\overline{l}$ имеет иррациональное асимптотическое направление. Совокупность $\mu(l)$ асимптотических направлений всевозможных поднятий полутраектории l было названо в [11] *гомотопическим классом вращения* полутраектории l. В работе [12] было введено понятие цепной (или непрерывной) дроби гомотопического класса вращения $\mu(l)$, а также понятие цепной дроби непостоянного типа. Основным результатом работы [12] является следующая теорема.

Теорема 5.8 *Пусть векторное поле $X \in \mathfrak{X}^r(M^2)$, $r \geq 1$, заданное на замкнутой ориентируемой гиперболической поверхности M^2, имеет нетривиально рекуррентную полутраекторию l, проходящую через точку p, и конечное число состояний равновесия. Если гомотопический класс вращения $\mu(l)$ имеет непостоянный тип, то для любой окрестности $U(X) \subset \mathfrak{X}^r(M^2)$ поля X в пространстве $\mathfrak{X}^r(M^2)$ найдется $Y \in U(X)$ такое, что у векторного поля Y через p проходит периодическая траектория.*

В [31] условие на $\mu(l)$ было сформулировано в виде кодировки Кобе-Морса геодезических ([79], [95]), и была доказана следующая теорема.

Теорема 5.9 *Пусть векторное поле $X \in \mathfrak{X}^r(M^2)$, $r \geq 1$, заданное на замкнутой ориентируемой гиперболической поверхности M^2, имеет нетривиально рекуррентную полутраекторию l, проходящую через точку p, и ко-*

нечное число состояний равновесия. Предположим, что код Кобе-Морса соасимптотической геодезической $g(l)$ имеет с-разложения неограниченного типа. Тогда для любой окрестности $U(X)$ векторного поля X в пространстве $\mathfrak{X}^r(M^2)$ найдется $Y \in U(X)$, такое, что у векторного поля Y через p проходит периодическая траектория.

В работе [38] вводится понятие разложения для точки абсолюта, и доказывается аналогичная теорема (включая гиперболические поверхности с краем).

Гутиеррес [65] предложил собственное развитие своей теоремы 5.6 для компактной ориентируемой гиперболической поверхности. Пусть $E : [a, b) \to [a, b)$ – перекладывание интервалов, определенное на промежутке $[a, b) \subset \mathbb{R}$. Отрезок $[s, t] \subset [a, b)$ называется *виртуальным ортогональным ребром* перекладывания E, если ограничение E на $[s, t]$ непрерывно, и $s < E(s) < E^2(s) = t$. Для фиксированного $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathfrak{B}_k$ множество перекладываний $E : [a, b) \to [a, b)$ таких, что для некоторой последовательности точек $b_n \to a$, $a < b_n$, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ перекладывание $E_n : [a, b_n) \to [a, b_n)$, индуцированное перекладыванием E, имеет, по крайней мере, $\chi(M^2) + k + 3$ попарно непересекающихся виртуальных ортогональных ребра, где $\chi(M^2)$ – эйлерова характеристика поверхности M^2. Положим $\mathfrak{B} = \cap_{k \geq 1} \mathfrak{B}_k$. В [65] доказана следующая теорема.

Теорема 5.10 *Пусть векторное поле $X \in \mathfrak{X}^r(M^2)$, $r \geq 1$, заданное на компактной ориентируемой поверхности отрицательной эйлеровой характеристики $\chi(M^2)$, имеет нетривиально рекуррентную полутраекторию l, проходящую через точку p, и конечное число состояний равновесия. Пусть отображение последования, индуцируемое полем X на отрезке без контакта Σ, проходящем через p, полусопряжено перекладыванию интервалов из множества $\mathfrak{B}$. Тогда для любой окрестности $U(X) \subset \mathfrak{X}^r(M^2)$ поля X в пространстве $\mathfrak{X}^r(M^2)$ найдется $Y \in U(X)$ такое, что у векторного поля Y через p проходит периодическая траектория.*

Отметим, что принадлежность перекладывания множеству $\mathfrak{B}$ не зависит от выбора Σ, а является исключительно характеристикой асимптотических свойств полутраектории l.

Идея доказательств теорем 5.8, 5.9 и 5.10 одна и та же: для данной окрестности $U(X) \subset \mathfrak{X}^r(M^2)$ строится сколь угодно близко к точке p восьмерочный потоковый ящик без состояний равновесия такой, что локальный поворот векторного поля X внутри ящика не выводит из $U(X)$ и приводит к образованию периодической траектории.

Отметим работу [66], где многие результаты для потоков на поверхностях сформулированы на языке обобщенных перекладываний промежутков на окружности или отрезке.

Замыкание пролонгационно рекуррентных точек

Следуя [124], точку p будем называть *пролонгационно рекуррентной первого порядка в смысле Пью*, если $\omega(p) \cap \alpha(p) \neq \emptyset$. Точка p называется *пролонгационно рекуррентной n-ого порядка в смысле Пью*, если существуют точки $p_0 = p$, p_1, $\ldots$, $p_n = p$ такие, что

$$\alpha(p_{i+1}) \cap \omega(p_i) \neq \emptyset, \quad 0 \leq i \leq n-1. \tag{7}$$

Непосредственно из теоремы 2.3 вытекает следующая теорема (теорема B [156]).

Теорема 5.11 *Пусть $f : M \to M$ – диффеоморфизм замкнутого многообразия M, и точки p является пролонгационно рекуррентной точкой n-ого порядка в смысле Пью, т.е. существуют точки $p_0 = p$, p_1, $\ldots$, $p_n = p$ такие, что выполняется (7). Предположим, что каждое пересечение $\alpha(p_{i+1}) \cap \omega(p_i)$ содержит непериодическую точку. Тогда для любой окрестности $U(f)$ диффеоморфизма f в пространстве $Diff^1(M)$ существует диффеоморфизм $g \in U(f)$ такой, что p является периодической точкой диффеоморфизма g.*

В общем случае при $r = 1$ лемма о замыкании пролонгационно рекуррентной в смысле Пью точки остается открытой проблемой.

Приведем пример Пью [124], показывающий, что при $r \geq 2$ эта лемма, вообще говоря, не верна. Поскольку пролонгационная рекуррентность в смысле Пью влечет пролонгационную рекуррентность в смысле Ауслендера, то этот же пример означает, что C^2 лемма Ауслендера о замыкании также в общем случае не верна. Основная идея состоит в зажиме пролонгационно рекуррентной траектории областями, которые являются областями притяжения или отталкивания тривиальных стоков или источников соответственно. Тогда возмущение системы приводит к тому, что пролонгационно рекуррентная траектория попадает в одну из областей и, таким образом, не может “замкнуться".

Рассмотрим на торе T^2 поток без точек покоя, имеющий ровно одну периодическую траекторию l_0, на которую наматываются остальные траектории как в положительном, так и в отрицательном направлениях. Траектория

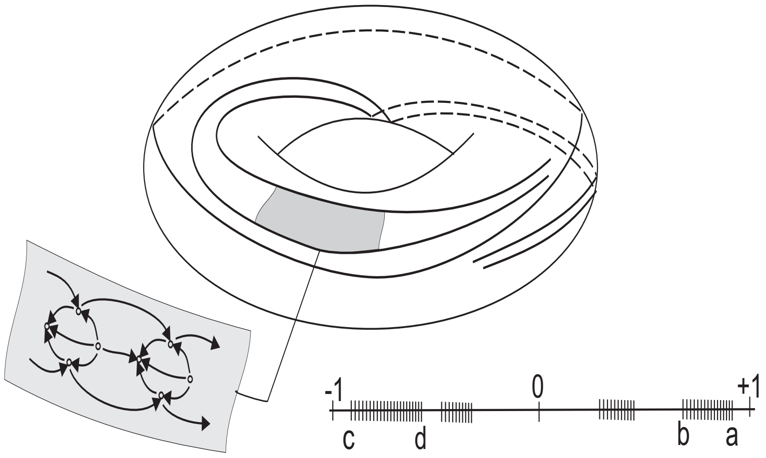


Рис. 16: Закупорка, и расположение точек a, b, c, d на Σ.

l_0 является негрубой двояко-асимптотической траекторией. Возьмем полосу, ограниченную двумя траекториями, и поместим в нее закупорку, содержащую восемь точек покоя, см. рис. 16 (a): два стока, два источника и четыре седла. Обозначим полученный поток через f^t. Можно считать f^t C^r гладким, где $r \geq 2$. Далее свойства f^t будут уточняться.

Проведем через произвольную точку x_0 траектории l_0 отрезок без контакта Σ, наделенный параметризацией $y : \Sigma \to [-1; +1]$ такой, что $y(x_0) = 0$. Поток f^t индуцирует на Σ отображение последования ψ. Для определенности будем считать, что ψ при $y \geq 0$ топологически растягивает от x_0, а при $y \leq 0$ – притягивает к x_0. Другими словами, росток отображения ψ в $y = 0$ имеет вид $y \mapsto y - y^2$. Технически ключевым моментом является следующее утверждение. Для любых точек $0 \leq \psi(a) \leq b \leq a \leq 1$ существует предел

$$\rho(a, b) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(a, b) \quad \text{где} \quad \rho_n(a, b) = \frac{\psi^n(a) - \psi^n(b)}{\psi^n(a) - \psi^{n+1}(a)},$$

непрерывно зависящее от точек a, b. Более того, если два отображения последования ψ, ψ' C^2 близки, то соответствующие им выражения ρ_n, ρ'_n также будут близки для определенных n (отметим, что это не так, если ψ, ψ' только C^1 близки).

Обозначим через l_a, l_b α-сепаратрисы, которые наматываются на l_0 в положительном направлении и которые входят в границу области W^u отталкивания крайнего источника. Точки a, b суть первые точки пересечения l_a, l_b с Σ. Уточним поток f^t, потребовав $\rho(a, b) = \frac{1}{2}$. Таким образом, длина промежутка между двумя последовательными пересечениями W^u с Σ примерно равна длине предыдущего пересечения W^u с Σ.

Обозначим через c, d первые точки пересечения ω-сепаратрис l_c, l_d с Σ, которые наматываются на l_0 в отрицательном направлении, где $0 \geq \psi^{-1}(c) \geq d \geq c \geq -1$, рис. 16 ($b$). Сепаратрисы l_c, l_d входят в границу области W^s притяжения крайнего стока, принадлежащего "закупорке". Поскольку ψ^{-1} на интервале $[-1; 0]$ является притягивающим, то предел

$$\rho(d,c) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(d,c) = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi^{-n}(d) - \psi^{-n}(c)}{\psi^{-n}(d) - \psi^{-n+1}(c)}$$

существует и обладает свойствами, аналогичными $\rho(a,b)$. Уточним поток f^t, потребовав выполнения равенства $\rho(d,c) = \frac{3}{4}$. Таким образом, длина промежутка между двумя последовательными пересечениями W^s с Σ "много больше" длины предыдущего пересечения W^s с Σ.

Любая точка на сепаратрисе l_a, скажем $A_0 \in l_a$, является пролонгационно рекуррентной в смысле Пью. Рассмотрим C^2 возмущение исходного потока, и покажем, что не может появиться периодическая траектория, проходящая через точку A_0. Действительно, такая траектория, очевидно, не может появиться, если у возмущенного потока осталась вблизи l_0 периодическая траектория, гомотопная l_0. Поэтому достаточно рассмотреть возмущение, при котором l_0 исчезает. Но тогда, в силу приближенных равенств $\rho'(a',b') \approx \frac{1}{2}$, $\rho'(d',c') \approx \frac{3}{4}$, траектория возмущенного потока, проходящая через A_0, должна попасть в область притяжения одного из стоков.

Перейдем к векторным полям, для которых удается доказать C^r лемму Ауслендера о замыкании при $r \geq 2$. Напомним определение ε-цепи длины n для векторных полей. Пусть задано векторное поле $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, порождающее поток f^t на многообразии M. Будем говорить, что дуга траектории имеет временную протяженность T, если одна концевая точка дуги переходит в другую концевую точку сдвигом по времени вдоль траектории на величину T. Пусть $\varepsilon = \varepsilon(x)$ и $T = T(x)$ – положительные непрерывные функции, заданные на многообразии M. Если M компактное, то ε и T считаются постоянными положительными величинами. (ε, T)-*цепью* от точки $p \in M$ к точке $q \in M$ называется последовательность дуг $[x_1, y_1]$, ..., $[x_n, y_n]$ таких, что $[x_i, y_i]$ имеет временную протяженность $\geq T(x_i)$ и $d(x_i, y_{i+1}) < \varepsilon(y_i)$ для всех $1 \leq i \leq n$, где $p = x_1$, $q = x_{n+1}$.

Говорят, что (ε, T)-цепь δ-*отслеживается* дугой траектории, если цепь лежит в δ-окрестности дуги, и обратно. Следуя [114], будем говорить, что состояние равновесия s *удовлетворяет свойству отслеживания*, если s имеет окрестность $U(s)$ такую, что любая $(\varepsilon, 1)$-цепь в $U(s)$ δ-отслеживается дугой траектории, и при этом $\delta \to 0$ равномерно, когда $\varepsilon \to 0$. Используя теорему Гробмана-Хартмана, нетрудно показать, что гиперболические состояния равновесия удовлетворяет свойству отслеживания.

Рассмотрим векторное поле X на плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть s – состояние равновесия, и $J(s)$ – якобиан поля X в s. Изолированное состояние равновесия s называется *полугиперболическим*, если $J(s) = 0$ и след якобиана не равен нулю, $\sigma(s) \neq 0$. Топологическая структура такого состояния равновесия поддается описанию. Можно считать, что s расположено в начале координат $(0, 0)$. Тогда с помощью невырожденной линейной замены координат в окрестности s поле X можно привести к виду $\dot{x} = P_2(x, y)$, $\dot{y} = y + Q_2(x, y)$, где функции $P_2(x, y)$, $Q_2(x, y)$ такие, что их разложения в ряд в начале координат начинаются с членов не ниже второго порядка. Тогда известно (см. теорему 65 [1]), что s локально топологически эквивалентно либо седло-узлу, либо гиперболическому седлу, либо гиперболическому узлу.

В работе [114] доказана следующая C^r лемма Ауслендера о замыкании для векторных полей на плоскости.

Теорема 5.12 *Пусть p – пролонгационно рекуррентная в смысле Ауслендера точка векторного поля $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^2)$, $r \geq 1$. Предположим, что каждое состояние равновесия поля X полугиперболическое или удовлетворяет свойству отслеживания. Тогда для любой окрестности $U(X)$ поля X в $\mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^2)$ найдется поле $Y \in U(X)$ такое, что Y имеет периодическую траекторию, проходящую через p.*

Отметим, что если векторное поле на плоскости не имеет состояний равновесия, то оно не имеет неблуждающих и пролонгационно рекуррентных точек. Основная конструкция доказательства теоремы 5.12 состоит в построении цепи потоковых ящиков и дуг траекторий, которые соединяют центры этих ящиков. Затем строится требуемое возмущение (функциональный поворот поля) в потоковых ящиках.

В работе [115] было ослаблено условие на тип возвращаемости, но усилено условие на тип состояний равновесия. Именно, в [115] была доказана следующая теорема.

Теорема 5.13 *Пусть p – цепно рекуррентная точка векторного поля $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^2)$, $r \geq 1$, и пусть X имеет только гиперболические состояния равновесия. Тогда для любой окрестности $U(X)$ поля X в $\mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^2)$ найдется поле $Y \in U(X)$ такое, что Y имеет периодическую траекторию, проходящую через p.*

Как указано в [115], требование гиперболичности всех состояний равновесия в

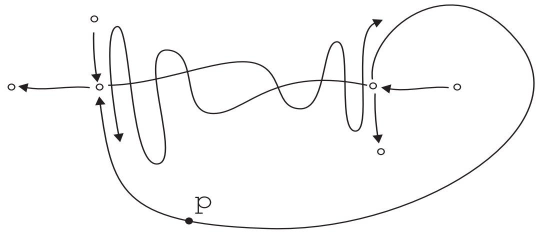


Рис. 17:

теореме 5.13 может быть ослаблено до следующего условия: каждое состояние равновесия должно иметь окрестность, в которой любая ε-орбита δ-отслеживается дугой траектории, и при этом $\delta \to 0$ равномерно, когда $\varepsilon \to 0$. ε-орбитой называется такая C^1 гладкая ориентированная кривая, у которой в каждой точке касательный вектор ε-близок вектору поля X в той же точке.

6 Специальные случаи

Рассмотрим леммы о замыкании для специальных динамических систем и слоений, у которых орбиты или слои имеют некоторые ограничения (например, на тип возвращаемости).

Почти блуждающие точки

Неблуждающая точка $p \in NW(f)$ называется *почти блуждающей*, если существуют окрестность $U(p)$ этой точки и натуральное N такие, что орбита $O(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ любой точки $x \in M$ пересекается с $U(p)$ в не более, чем N точках. Приведем пример диффеоморфизма с такой точкой. На рисунке 17 изображены устойчивые и неустойчивые многообразия седловых неподвижных точек диффеоморфизма двумерной сферы. Кроме двух седловых точек имеются два источника и два стока. Точка p, в силу наличия гетероклинической орбиты, является неблуждающей. С другой стороны, p – почти блуждающая, поскольку существует окрестность $U(p)$, с которой любая орбита пересекается не более, чем в двух точках. Приведенный пример и следующие теоремы 6.1, 6.2 принадлежат Пью [125].

Теорема 6.1 *Если $p \in NW(f)$ – почти блуждающая точка C^r диффеоморфизма $f : M \to M$, $r \geq 1$, то для любой окрестности U диффеоморфизма f в пространстве $Diff^r\ M$ существует $g \in U$ с периодической точкой p.*

Доказательство основано на том, что, в силу почти блуждаемости, у p есть окрестность U_0 и последовательность точек $p_k \to p$, которые при положительных итерациях сперва покидают U_0, и затем попадают в U_0 так, что $f^{n_k}(p_k) \to p$, $f^n(p_k) \notin U_0$, $0 < n < n_k$. Очевидно, существуют C^r диффеоморфизмы $g_k, h_k : M \to M$ такие, что $g_k = h_k = id$ вне U_0, $g_k(p) = p_k$ и $h_k(f^{n_k}(p_k)) = p$. Для любой окрестности U найдется такое k, что $h_k \circ f \circ g_k \in U$. Нетрудно проверить, что $g = h_k \circ f \circ g_k$ является искомым диффеоморфизмом.

Следующая теорема относится к двумерному тору T^2. Касательное пространство в каждой точке тора каноническим образом отождествляется с плоскостью $\mathbb{R}^2$, поскольку тор является плоским однородным римановым многообразием с транзитивной группой изометрий. Диффеоморфизм $f : T^2 \to T^2$ называется *непереворачивающим*, если для каждого ненулевого вектора $\vec{v} \in T_x(T^2) \cong \mathbb{R}^2$ существует полуплоскость $H_v \subset \mathbb{R}^2$ такая, что 1) $df^n(\vec{v}) \in H_v$, $\forall n \geq 0$, $\forall x \in T^2$; 2) $\angle(\vec{v}, \partial H_v) \geq \beta > 0$, где β не зависит от $\vec{v}$. Примером непереворачивающего диффеоморфизма является жесткий сдвиг тора.

Теорема 6.2 *Пусть $f : T^2 \to T^2$ – непереворачивающий C^r диффеоморфизм, $r \geq 1$, и p – нетривиально рекуррентная точка диффеоморфизма f. Тогда для любой окрестности U диффеоморфизма f в пространстве $Diff^r\ M$ существует $g \in U$ с периодической точкой p.*

В [125] понятие непереворачивающего диффеоморфизма переносится на произвольное многообразие, и доказывается теорема, аналогичная теореме 6.2.

Упомянем работу Хирша [75], в которой рассматривались так называемые кооперативные и конкурирующие векторные поля в пространстве $\mathbb{R}^3$. Напомним, что векторное поле $\vec{F}$ называется *кооперативным* (соотв., *конкурирующим*), если все недиагональные элементы якобиана $D\vec{F}(\vec{x})$ неотрицательны (соотв., неположительны) в каждой точке $\vec{x}$. $\vec{F}$ называется *неприводимым*, если все матрицы $D\vec{F}(\vec{x})$ неприводимы, где $\vec{x}$ принадлежит области определения $X \subset \mathbb{R}^3$. Область X называется *p-выпуклой*, если с любыми двумя точками $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ такими, что $u_i \leq v_i$ в X лежит весь отрезок, соединяющий $\vec{u}$, $\vec{v}$. Для кооперативной неприводимой системы, решения которой определены для всех $t \geq 0$ в некоторой p-выпуклой открытой области X, в [75] доказана улучшенная C^r лемма о замыкании для всех $r \geq 1$. Одним из основных шагов в доказательстве служит утверждение о том, что неблуждающая точка $p \in X$ является строго неблуждающей (это означает, что через p можно провести трансверсальную поверхность S такую, что последовательные пересечения положительной полутраектории, проходящей через p, образуют последовательность точек, сходящуюся к p). Далее применяются рассуждения, напоминающие рассуждения в доказательстве теоремы 6.1. В [75] также доказана улучшенная C^r лемма о замыкании для конкурирующей системы, удовлетворяющей некоторым ограничениям.

Отображения кольца

Напомним, что для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности лемма о замыкании справедлива даже в аналитическом классе, поскольку "замыкание" производится с помощью жесткого сдвига. В [49] получено следующее обобщение этого результата.

Теорема 6.3 *Пусть $f : A \to A$ – скручивающий диффеоморфизм кольца $A = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Если f имеет неблуждающую точку, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ такое, что отображение*

$$(x, y) \mapsto f(x, y) + (0, \alpha)$$

имеет периодическую орбиту.

Аналогичная теорема доказана в [49] для скручивающего диффеоморфизма двумерного тора, гомотопного отображению $(x, y) \mapsto (x + y, y)$.

Слоения и действия групп

Обозначим через $\mathcal{FOL}^{l,k}(M)$, $1 \leq k \leq l$, пространство C^l слоений коразмерности один, наделенное C^k-топологией, на многообразии M размерности $d = \dim M$. C^k-топология на этом пространстве вводится через C^{k-1}-топологию на множестве полей касательных $(d-1)$-плоскостей следующим образом. Множество касательных $(d-1)$-плоскостей образует расслоение Грассмана над M гладкости класса C^{l-1}. Каждому слоению $\mathcal{F}$ соответствует поле касательных $(d-1)$-плоскостей $P\mathcal{F}$, которое является сечением в расслоении Грассмана. Близость слоений $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in \mathcal{FOL}^{l,k}(M)$ означает близость полей $P\mathcal{F}$, $P\mathcal{G}$ в C^{k-1} топологии Уитни.

Пусть слоение $\mathcal{F}$ задается действием группы $\mathbb{R}^{d-1}$ на M. Если это действие невырожденное и ориентируемое, то каждый слои гомеоморфен одному из многообразий вида $\mathbb{T}^i \times \mathbb{R}^{d-i-1}$, $0 \leq i \leq d-1$, где $\mathbb{T}^i$ – i-мерный тор. В [138] доказана следующая теорема.

Теорема 6.4 *Пусть на замкнутом 3-многообразии M задано слоение $\mathcal{F} \in \mathcal{FOL}^{l,2}(M)$, $l \geq 2$, определяемое невырожденным ориентируемым действием группы $\mathbb{R}^2$. Если $\mathcal{F}$ не имеет слоев, гомеоморфных $\mathbb{R}^2$, то для любой окрестности $U(\mathcal{F})$ слоения $\mathcal{F}$ в $\mathcal{FOL}^{l,2}(M)$ существует слоение $\mathcal{G} \in U(\mathcal{F})$, определяемое невырожденным ориентируемым действием группы $\mathbb{R}^2$, такое, что $\mathcal{G}$ имеет компактный слой (двумерный тор).*

Если предположить, что в условиях теоремы 6.4, $\mathcal{F}$ не имеет компактных слоев, то каждый слой гомеоморфен цилиндру и всюду плотен на M (т.е. слоение $\mathcal{F}$ минимальное). В этом случае, как показано в [138], любой слой можно "дозамкнуть" в компактный 2-тор.

Для слоения коразмерности один с тривиальной группой голономии на $\mathbb{T}^3$ в [137] был введен инвариант топологической эквивалентности, аналогичный числу вращения Пуанкаре (см. также [136]). Инвариант, который авторы назвали функционалом вращения, представляет собой пару чисел (λ, μ), описывающих асимптотическое поведение слоев. Если числа λ, μ рациональные, то все слои компактные (торы). Если числа λ, μ иррациональные и рационально независимые, то слои суть плоскости. Если хотя бы одно из чисел λ, μ иррациональное, и эти числа рационально зависимы, то слои суть цилиндры. Можно показать, что если слоение на $\mathbb{T}^3$ не имеет компактных слоев, то оно имеет тривиальную группу голономии и, следовательно, хотя бы одно из чисел функционала вращения иррациональное.

В [30] доказана следующая теорема, дополняющая теорему 6.4.

Теорема 6.5 *Пусть на $\mathbb{T}^3$ задано слоение $\mathcal{F} \in \mathcal{FOL}^{l,r}(\mathbb{T}^3)$, $1 \leq k \leq l \leq \infty$, без компактных слоев. Предположим, что одно из чисел функционала вращения слоения $\mathcal{F}$ удовлетворяет Диофантову условию с некоторым положительным показателем. Тогда для любой окрестности $U(\mathcal{F})$ слоения $\mathcal{F}$ в $\mathcal{FOL}^{l,r}(\mathbb{T}^3)$ существует слоение $\mathcal{G} \in U(\mathcal{F})$ такое, что все слои слоения $\mathcal{G}$ компактны (2-торы).*

Напомним, что C^r-действием группы $\mathbb{Z}^k$ на S^1 называется гомоморфизм $\rho : \mathbb{Z}^k \to \mathrm{Diff}^{\mathrm{r}}(\mathrm{S}^1)$ такой, что отображение $(\gamma, x) \to \rho(\gamma)(x)$, $x \in S^1$, является C^r-гладким для любого $\gamma \in \mathbb{Z}^k$. Пространство $G^r(\mathbb{Z}^k, S^1)$, $0 \leq r \leq \infty$, таких действий наделяется естественной C^r-топологией, и даже допускает полную метрику при конечном r. Следующая усиленная лемма о замыкании доказана в [30].

Теорема 6.6 *Если число вращения одного из отображений $\rho(\gamma)$ действия $\rho \in G^\infty(\mathbb{Z}^k, S^1)$ иррационально и удовлетворяет Диофантову условию с некоторым положительным показателем, то для любого $\epsilon > 0$ и любого конечного $r \in \mathbb{N}$ существует $\rho_c \in G^\infty(\mathbb{Z}^k, S^1)$, ϵ-близкое к ρ в пространстве $G^r(\mathbb{Z}^k, S^1)$ такое, что все орбиты ρ_c компактны.*

Эргодическая лемма о замыкании

Эта лемма была введена Рикардо Мане [88] при изучении необходимых условий структурной устойчивости динамических систем. Мане рассматривал диффеоморфизм, в некоторой окрестности которого любой диффеоморфизм имеет только гиперболические периодические точки. Требовалось доказать, что все неблуждающие точки исходного диффеоморфизма гиперболические. Предположение от противного означает существование неблуждающей непериодической и негиперболической точки. Естественно попытаться возмутить диффеоморфизм так, чтобы получить негиперболическую периодическую точку. Требуемое малое C^1 возмущение могла бы дать улучшенная C^1 лемма о замыкании, но к сожалению, эта лемма не содержит информации о близости периодической и исходной орбит. Поэтому Мане предложил следующее усиление улучшенной леммы о замыкании, которое мы назовем C^r *леммой Мане о замыкании*:

Пусть диффеоморфизм $f \in Diff^r\ M$ имеет неблуждающую непериодическую точку $x_0 \in M$. Тогда для любой ε-окрестности $U_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 и любой окрестности U диффеоморфизма f в пространстве $Diff^r\ M$ существует диффеоморфизм $g \in U$ такой, что g имеет в $U_\varepsilon(x_0)$ периодическую точку y, и выполняются неравенства $d(f^i(x_0), g^i(y)) < \varepsilon$ для всех $0 \le i \le m$, где m – минимальный период точки y.

Как видим, формулировка C^r леммы Мане о замыкании никак не связана с понятиями эргодической теории. Однако, соответствующий результат, полученный Мане при исследовании данного вопроса, использует инвариантную меру, и поэтому Мане назвал его эргодической леммой о замыкании. Напомним, что подмножество $N \subset M$ (M считается компактным) называется *множеством полной меры* (относительно μ), если $\mu(N) = 1$ для нормированной меры μ. Заметим, что так как любая f-инвариантная мера "живет" на неблуждающем множестве, то можно считать, что множество полной меры состоит из неблуждающих точек (но необязательно совпадает с неблуждающим множеством). Поэтому естественно рассмотреть вопрос о том, насколько "большое" с точки зрения инвариантной меры множество тех неблуждающих точек, для которых справедлива C^r лемма Мане о замыкании.

Для фиксированного числа $\varepsilon > 0$ и точки $x \in M$ обозначим через $O_\varepsilon(x)$ ε-окрестность орбиты точки x. Обозначим через $\Sigma_r(f)$ множество точек $x \in M$, для которых выполняется выше приведенная C^r лемма Мане о замыкании с дополнительным предположением, что для всех $\varepsilon > 0$ выполняется равенство $f = g$ на $M - O_\varepsilon(x)$. В [88] доказана следующая теорема.

Теорема 6.7 $\Sigma_1(f)$ *является множеством полной меры.*

Ясно, что теорему 6.7 можно переформулировать в виде: $\mu\left(M - \Sigma_1(f)\right) = 0$, где μ – произвольная f-инвариантная мера. Теорема 6.7 обобщена в [32] на некомпактное M, и имеет вид $\mu\left(Rec(f) - \Sigma_1(f)\right) = 0$, где $Rec(f)$ означает множество рекуррентных точек.

7 Применения к описанию типичных систем

Леммы о замыканиях применялись в основном в двух направлениях: при исследовании структурной устойчивости (см., например, [5], [6], [17], [58], [70], [88], [90], [112], [120]) и доказательстве массивности того или иного класса динамических систем в пространстве динамических систем. В этом параграфе мы уделим внимание последнему аспекту, ограничиваясь при этом динамическими системами на компактных многообразиях.

Первым значительным результатом, существенно использующим улучшенную C^1 лемму о замыкании, была следующая так называемая *общая теорема о плотности*, принадлежащая Пью [122].

Теорема 7.1 *Пусть M – компактное многообразие. Тогда диффеоморфизмы, у которых неблуждающее множество совпадает с топологическим замыканием множества гиперболических периодических точек, образуют массивное множество в пространстве $Diff^1(M)$.*

Метод доказательства стал основным для подобного рода утверждений. Обозначим через $\mathcal{C}_M$ семейство компактных подмножеств многообразия M. Рассмотрим отображение $\Gamma : Diff^1(M) \to \mathcal{C}_M$, которое диффеоморфизму $f \in Diff^1(M)$ ставит в соответствие множество $clos\ Per_h(f)$, где $Per_h(f)$ – множество гиперболических периодических точек диффеоморфизма f. В силу устойчивости гиперболической периодической точки относительно возмущения, отображение Γ полу-непрерывно снизу, то есть

$$clos\ Per_h(f) \subset \liminf_{k\to\infty} clos\ Per_h(f_k)$$

для любой последовательности $f_k \to f$.[9] Хаусдорфова метрика наделяет $\mathcal{C}_M$ структурой топологического пространства. Поэтому можно говорить о точках непрерывности отображения Γ. Известный факт из общей топологии гласит, что *точки непрерывности полу-непрерывного снизу отображения образуют массивное множество.* Обозначим через $\mathcal{G}$ множество точек непрерывности отображения Γ. Тогда $\mathcal{G}$ удовлетворяет теореме 7.1. Действительно, если бы $f \in \mathcal{G}$ имел неблуждающую точку x_0, вблизи которой не было бы периодических орбит, то это противоречило бы непрерывности Γ в f, так как согласно улучшенной лемме о замыкании, диффеоморфизм f аппроксимируется диффеоморфизмами с гиперболической периодической точкой x_0.

Отметим, что в [122] теорема 7.1 сформулирована для векторных полей в более общем виде с учетом второй части теоремы Купки-Смейла о том, что устойчивые и неустойчивые многообразия периодических траекторий пересекаются трансверсально. Основные формулировки мы будем давать для диффеоморфизмов, делая замечания о векторных полях в случае существенных различий.

Поскольку $\omega(\alpha)$-предельное множество произвольной точки лежит в неблуждающем множестве, то как добавление к теореме 7.1 можно рассматривать следующий результат из [36]: у типичного диффеоморфизма в пространстве $Diff^1(M)$ любое $\omega(\alpha)$-предельное множество любой точки аппроксимируется с точки зрения хаусдорфовой метрики периодическими орбитами.

Напомним, что до появления теоремы 7.1 была доказана массивность множества диффеоморфизмов Купки-Смейла в пространстве $Diff^r(M)$ для любого $1 \le r \le \infty$ [80], [143]. Таким образом, учитывая теорему 7.1, можно выделить следующее массивное множество, которое состоит из диффеоморфизмов f, удовлетворяющих следующим условиям: 1) все периодические точки f гиперболические; 2) инвариантные многообразия периодических точек пересекаются трансверсально; 3) периодические точки плотны в неблуждающем множестве $NW(f)$. В связи с доказательством соединяющей леммы и ее обобщением (см. теорему 2.6, из которой вытекает, что любая цепно рекуррентная точка может быть переведена сколь угодно малым C^1 возмуще-

[9] Нижний предел $\liminf A_k$ последовательности множеств $A_k \in \mathcal{C}_M$ определяется как семейство точек $x \in M$ таких, что $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ для некоторых $x_k \in A_k$.

нием в периодическую точку) последнее условие может быть усилено. Полностью аналогично доказательству теоремы 7.1 показывается, что у типичного f любая цепно рекуррентная точка аппроксимируется периодическими точками. Резюмируя сказанное, получаем, что имеется массивное множество $KSP(M) \subset Diff^1(M)$[10] диффеоморфизмов $f \in KSP(M)$ со следующими свойствами:

- Все периодические точки диффеоморфизма f гиперболические.
- Инвариантные многообразия периодических точек пересекаются трансверсально.
- Периодические точки плотны в цепно рекуррентном множестве $\mathfrak{R}(f)$ диффеоморфизма f, то есть справедливы равенства:

$$clos\ (Per(f)) = L(f) = NW(f) = \mathfrak{R}(f), \tag{8}$$

где $L(f) = clos \cup_{z \in M} \omega(\alpha)(z)$ – замыкание объединения всех $\omega(\alpha)$-предельных множеств диффеоморфизма f.

Для пространства $Diff^1(S^1)$ диффеоморфизмов окружности S^1 и для пространства векторных полей $\chi^1(M^2)$ на ориентируемой компактной поверхности M^2 удалось существенно конкретизировать условие (8): цепно рекуррентное множество состоит из конечного числа периодических орбит. Таким образом, в $Diff^1(S^1)$ и $\chi^1(M^2)$ типичны системы Морса-Смейла (более того, они образуют открытое плотное множество). Известно, что системы Морса-Смейла структурно устойчивы [105], [111], и в пространствах $Diff^1(S^1)$, $\chi^1(M^2)$ они классифицируются с помощью конечных и наглядных инвариантов [17], [112]. Однако, начиная с пространств $Diff^1(M^n)$ для $n \geq 2$ и $\chi^1(M^n)$ для $n \geq 3$ ситуация усложняется. Фактически, в этих пространствах нет массивных множеств со столь же наглядной динамикой, допускающей классификацию с помощью конструктивных и конечных инвариантов. В качестве иллюстрации приведем три результата.

Пусть T^n – n-мерный тор, и пусть $T^2 \sharp T^2$ – связная сумма двух торов (т.е., ориентируемая замкнутая поверхность рода два). На T^2 существуют ДА-диффеоморфизмы с одномерным растягивающимся аттрактором и сжимающимся репеллером [146]. Используя эти диффеоморфизмы, Робинсон и Вильямс [135] построили диффеоморфизм $f_0 \in Diff^r(T^2 \sharp T^2)$, $r \geq 1$, неблуждающее множество которого состоит ровно из одного растягивающего аттрактора и сжимающего репеллера, со следующим свойством: для любого

[10] Аббревиатура KSP образована первыми буквами фамилий Kupka, Smale, Pugh.

конечно параметрического семейства $\mathcal{S} \subset Diff^r(T^2 \sharp T^2)$ диффеоморфизмов, содержащего f_0, существует сколь угодно близкий к f_0 в пространстве $Diff^r(T^2 \sharp T^2)$ диффеоморфизм, который имеет то же самое неблуждающее множество, но который не сопряжен ни с каким диффеоморфизмом из семейства $\mathcal{S}$. Идея примера состоит в наличии неустранимых касаний устойчивых и неустойчивых многообразий точек из растягивающего аттрактора и сжимающего репеллера соответственно. Второй результат принадлежит Симону [142], который доказал, что в любом массивном множестве пространства $Diff^r(T^3)$, $r \geq 1$, имеется несчетное семейство классов сопряженности (даже Ω-сопряженности). Идея всех построений хорошо иллюстрируется на следующем самом "маломерном" примере Вильямса [157], см. рис. 18. Возьмем на T^2 модифицированный ДА-диффеоморфизм с одномерным растягивающимся аттрактором Ω, который отличается от классического ДА-диффеоморфизма тем, что вместо одного источника в области $T^2 - \Omega$ имеется два источника и седло s, рис. 18, (a). Обе неустойчивые сепаратрисы седла s совпадают с сепаратрисами двух седел, скажем s_1, s_2, принадлежащих Ω. Стандартное возмущение (кроме оригинальной статьи [157], описание этого возмущения см. в книге [134], теорема 5.1) диффеоморфизма приводит к возникновению гетероклинических трансверсальных пересечений сепаратрис седла s с сепаратрисами седел s_1, s_2, рис. 18, (b). Нетрудно видеть, что сепаратриса седла

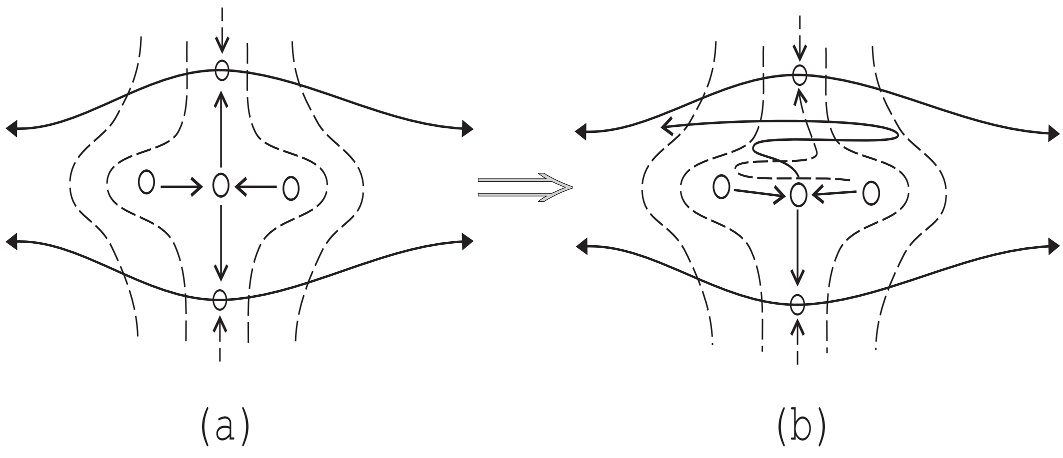


Рис. 18: Модифицированный ДА диффеоморфизм (a), и его возмущение (b).

s будет иметь гетероклинические касания с устойчивыми многообразиями точек множества Ω.

Приведем один в некотором смысле положительный результат Мане [88], вытекающий из его эргодической леммы о замыкании (теорема 6.7).

Теорема 7.2 *В пространстве $Diff^1(M^2)$, где M^2 – компактное двумерное многообразие, существует массивное множество $\mathfrak{G}$ такое, что для $f \in \mathfrak{G}$ выполняется одна из следующих возможностей:*

1. *f имеет бесконечно много стоков или бесконечно много источников.*
2. *f Ω-устойчивый.*

Эта теорема не обобщается на многообразия размерности ≥ 3, поскольку имеются робустно транзитивные диффеоморфизмы, не имеющие гиперболической структуры на всем многообразии (робустная транзитивность означает, что в некоторой окрестности данного диффеоморфизма все диффеоморфизмы транзитивные). Следовательно, эти диффеоморфизмы не являются Ω-устойчивыми, так как согласно [106], Ω-устойчивый диффеоморфизм должен иметь гиперболическое неблуждающее множество.

Первый пример робустно транзитивного диффеоморфизма, не допускающего гиперболической структуры на всем многообразии, построил Шуб [139] на четырехмерном торе $T^4 = T^2 \times T^2$. Немного утрируя, можно сказать, что пример Шуба есть косое произведение диффеоморфизма Аносова $T^2 \times \{\cdot\} \to T^2 \times \{\cdot\}$ и ДА-диффеоморфизма $\{\cdot\} \times T^2 \to \{\cdot\} \times T^2$. Мане [87] доказал существование открытой области $U \subset Diff^1(T^3)$ такой, что любой $f \in U$ перемешивает (следовательно, робустно транзитивный), но не является диффеоморфизмом Аносова. Отправной точкой был диффеоморфизм $f_0 : T^3 \to T^3$ Аносова с двумерным растягивающимся расслоением и одномерным сжимающимся расслоением. Далее к f_0 применяется аналог хирургии Смейла [146] для построения ДА-диффеоморфизма (хирургию Смейла можно представить как двойную бифуркацию "седло $\to$ седло + седло-узел $\to$ седло + узел + седло"), но хирургия производится не в стандартном направлении одномерного сжимающего направления (тогда бы мы получили двумерный растягивающийся аттрактор Вильямса [158]), а в направлении "наислабейшего" одномерного растягивающего расслоения. В результате получается диффеоморфизм, который не является аносовским, но который сохраняет перемешиваемость, присущую f_0. Имеются другие примеры, см. [42], [45].

Теорема 7.2 также не обобщается на потоки на трехмерных многообразиях. Моралес [94] доказал, что для любого замкнутого ориентируемого 3-многообразия M^3 в пространстве $\chi^1(M^3)$ существует область, состоящая из векторных полей, у которых нет ни гиперболических аттракторов, ни гиперболических репеллеров. Основным элементом доказательства был пример векторного поля на шаре с ручками (число ручек произвольное, но ≥ 2), который представлял собой обобщенную геометрическую модель аттрактора Лоренца (классическая модель реализуется на шаре с двумя ручками). Векторное поле имеет так называемый сингулярно-гиперболический аттрактор и трансверсально границе. Обратив время, получим векторное поле с сингулярно-гиперболическим репеллером. Теперь можно склеить полученные векторные поля, получив поток на замкнутом 3-многообразии. Используя разложение Хегора, такой поток можно построить на любом замкнутом ориентируемом 3-многообразии M^3. Отметим, что аттрактор и репеллер в примере Моралеса частично-гиперболические. Поскольку, как доказал Хаяши [70], Ω-устойчивый поток имеет гиперболическое неблуждающее множество, поток в примере Моралеса не является Ω-устойчивым.

Учитывая сказанное выше и результаты Ньюхауса [98], [101], было понятно почему надежна на существование массивного множества в пространствах $Diff^1(M^n)$ для $n \geq 2$ и $\chi^1(M^n)$ для $n \geq 3$ с динамикой, описываемой конечным набором конструктивных инвариантов, угасла в начале 70-х годов 20-ого века. Тем не менее, в связи с достижениями в исследовании лемм о замыкании, наметился некоторый прогресс в понимании того, какие классы динамических систем с достаточно ясным описанием могут образовывать массивные множества. Несомненным толчком к описанию и поискам массивных множеств была программная статья Палиса [107] (и последующие за ней статьи [108], [109]), в которой сформулировано несколько гипотез, касающихся всюду плотных множеств в пространствах динамических систем (напомним, что в пространстве Бэра массивное множество является плотным).

Рассмотрим программу Палиса подробнее. Основная гипотеза предполагает существование плотного множества $\mathbb{D}$ в пространстве динамических систем (под этим пространством подразумевается множество векторных полей, диффеоморфизмов или преобразований замкнутого гладкого многообразия, наделенное равномерной C^r топологией $r \geq 1$) такого, что каждый элемент из $\mathbb{D}$ имеет только конечное число аттракторов, область притяжения которых имеет полную меру, причем на каждом аттракторе существует мера Синая-Рюэля-Боуэна. Более того, предполагается, что картина не меняется при типичных конечно параметрических и достаточно малых бифуркациях. Как видим, основная гипотеза носит в некотором смысле эргодический характер. Однако, учитывая положительные результаты Синая [22], Боуэна [47] и Боуэна-Рюэля [48] для динамических систем с равномерной гиперболической структурой на неблуждающем множестве, Палис предложил вспомогательные гипотезы в направлении доказательства основной гипотезы, которые уже имеют "динамический" характер. Мы отметим две из них:

- **Сильная гипотеза.** Любая динамическая система C^r аппроксимируется гиперболической системой или системой, имеющей гомоклиническое касание или гетеромерный цикл.
- **Слабая гипотеза.** Любой диффеоморфизм C^r аппроксимируется диффеоморфизмом Морса-Смейла или диффеоморфизмом с трансверсальной гомоклинической орбитой.

Напомним, что диффеоморфизм f имеет *гетеромерный цикл*, рис. 19, если существуют периодические седловые точки p, q с устойчивыми (и, следовательно, неустойчивыми) многообразиями разной размерности,

$$W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset, \quad W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset, \quad \dim W^u(p) \neq \dim W^u(q).$$

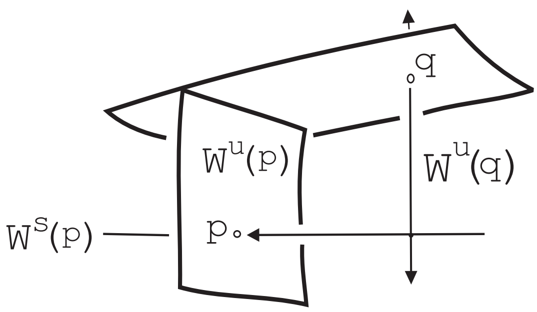


Рис. 19: Гетеромерный цикл (многообразия $W^s(p)$, $W^u(q)$ пересекаются).

Заметим, что Палис не дает (сознательно) строгого определения гиперболичности диффеоморфизма (см. [108], стр. 8-9). Иногда это означает равномерную гиперболическую структуру на предельном множестве (тогда, согласно лемме Аносова о замыкании, предельное множество есть замыкание периодических точек), иногда – выполнение аксиомы А[11], иногда – Ω- устойчивость, и наконец, иногда – равномерную гиперболическую структуру на цепно рекуррентном множестве (тогда, согласно лемме Аносова о замыкании, цепно рекуррентное множество есть замыкание периодических точек, и оно совпадает с предельным и неблуждающим множествами). Однако, учитывая равенство (8) для массивного множества $KSP(M)$, такая неопределенность не принципиальна.

[11]Напомним, что аксиома А Смейла означает, что неблуждающее множество гиперболическое и в нем плотны периодические орбиты.

При всех определениях гиперболичности смысл сильной гипотезы Палиса состоит в том, что негиперболичность почти любой системы всегда есть следствие неустранимых нетрансверсальных пересечений инвариантных многообразий точек системы. Именно так дело обстоит в примерах Абрахама-Смейла [28], Ньюхауса [96], [101], Вильямса [157], Симона [142], Робинсона-Вильямса [135] и Диаса [55]. Можно показать, что сильная гипотеза влечет слабую.

Сильная C^1 гипотеза Палиса для двумерных компактных многообразий была доказана в следующей теореме в работе [129] (заметим, что на двумерных многообразиях нет гетеромерных циклов).

Теорема 7.3 *Пусть M^2 – двумерное компактное многообразие и $f \in Diff^1(M^2)$. Тогда f может быть C^1-аппроксимирован A-диффеоморфизмами или диффеоморфизмами с гомоклиническими касаниями.*

Сперва показывается, что если диффеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ не имеет гомоклинических касаний, то угол между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями гиперболических периодических точек в точках их пересечения отделен от нуля положительной константой. Отсюда вытекает наличие на замыкании множества периодических точек так называемого доминирующего расщепления, которое является обобщением гиперболической структуры. Дадим определение (вероятно, определение доминирующего расщепления впервые формально дал Мане [90], однако близкие конструкции рассматривались еще в [21], [82]) для произвольной размерности $n = \dim M$.

Пусть f – диффеоморфизм замкнутого n-мерного многообразия M^n, снабженного некоторой римановой метрикой. Множество $\Lambda \subset M^n$, инвариантное относительно f, допускает *доминирующее расщепление*, если ограничение $T_\Lambda M^n$ касательного расслоения TM^n многообразия M^n на Λ можно представить в виде суммы Уитни $E \oplus F$ Df-инвариантных подрасслоений E, F таких, что 1) $\dim E(x) + \dim F(x) = n$, $\forall x \in \Lambda$; 2) размерности $\dim E(x)$, $\dim F(x)$ не зависят от $x \in \Lambda$; 3) существуют $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ такие, что

$$\frac{||Df^k(v)||}{||Df^k(u)||} \leq C\lambda^k \frac{||v||}{||u||},$$

где $v \in E(x)$ $u \in F(x)$, $x \in \Lambda$, $k \geq 1$. Геометрически доминирующее расщепление означает, что угол между направлением, определяемым вектором $Df^k(v, u)$, и F экспоненциально стремится к нулю при $k \to +\infty$, рис. 20. Грубо говоря, растяжение в направлении F сильнее, чем в направлении E, или сжатие в направлении E сильнее, чем в направлении F.

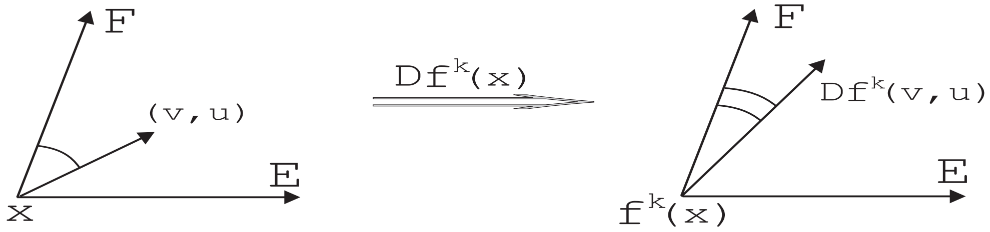


Рис. 20: Доминирующее расщепление $E \oplus F$.

Ключевым моментом доказательства теоремы 7.3 является доказательство того, что если компактное инвариантное множество, не содержащее источников и стоков, но допускающее доминирующее расщепление, негиперболическое, то оно представляет собой конечное семейство нормально гиперболических окружностей. Используя рассуждения типа Данжуа, показывается, что ограничение некоторой степени диффеоморфизма на любую такую окружность сопряжено повороту с иррациональным числом вращения. Теперь нетрудно сколь угодно малым возмущением "уничтожить" негиперболическую часть и получить гиперболический диффеоморфизм, сколь угодно близкий к исходному диффеоморфизму f.

На поверхности А-диффеоморфизм, не являющийся диффеоморфизмом Морса-Смейла, необходимо имеет гомоклинические орбиты или гетероклинические касания. Поэтому, как следствие теоремы 7.3, в [129] получен следующий результат. Обозначим через $MS(M^2)$ множество диффеоморфизмов Морса-Смейла на компактной поверхности M^2.

Теорема 7.4 *В множестве* $\mathcal{U} = Diff^1(M^2) - clos\ MS(M^2)$ *существует открытое и плотное в* $\mathcal{U}$ *множество* $\mathcal{R}$ *такое, что любой диффеоморфизм* $f \in \mathcal{R}$ *имеет трансверсальную гомоклиническую орбиту.*

Учитывая результат Катка [77], получаем, что замыкание внутренности множества диффеоморфизмов с нулевой энтропией равно замыканию множества диффеоморфизмов Морса-Смейла $clos\ MS(M^2)$. Уточнение этого факта см. в [59].

На многообразиях размерности ≥ 3 уже могут быть гетеромерные циклы, и на таких многообразиях существуют диффеоморфизмы, которые не аппроксимируются ни гиперболическими диффеоморфизмами, ни диффеоморфизмами с гомоклиническими касаниями. К таковым относятся, например, упомянутые выше робустно транзитивные диффеоморфизмы Шуба [139] и Мане [87]. Сильная гипотеза Палиса утверждает, в частности, что эти диффеоморфизмы аппроксимируются диффеоморфизмами с гетеромерными циклами. Лан Вен [154], используя наличие доминирующего расщепления [153], получил некоторое описание негиперболических инвариантных множеств для C^1 типичного диффеоморфизма, который не является гиперболическим и который не аппроксимируются ни диффеоморфизмами с гомоклиническими касаниями, ни диффеоморфизмами с гетеромерными циклами. Применяя эти результаты, а также весьма тонкую технику, развитую в [76], о существовании так называемого центрального поля касательных плоскостей, Кровисьер [54] доказал слабую C^1 гипотезу Палиса для компактных n-многообразий ($n \geq 3$):

Теорема 7.5 *Любой диффеоморфизм компактного многообразия можно C^1 аппроксимировать диффеоморфизмом Морса-Смейла или диффеоморфизмом с трансверсальной гомоклинической орбитой.*

В направлении доказательства сильной гипотезы Палиса в работе [25] была получена следующая теорема, существенно использующая C^1 лемму о соединении многообразий.

Теорема 7.6 *В пространстве $Diff^1(M)$, где M – компактное многообразие, существует массивное множество $\mathfrak{R}$ такое, что если Λ – транзитивное и изолированное в $NW(f)$ множество диффеоморфизма $f \in \mathfrak{R}$, то выполняется одна из следующих возможностей:*

1. *Множество Λ гиперболическое.*
2. *Множество Λ негиперболическое, и f C^1-аппроксимируется диффеоморфизмами, которые имеют гетеромерный цикл.*

Ниже мы приведем еще один результат, касающийся гипотезы Палиса.

В работе [26] был получен многомерный аналог теоремы 7.2. Понятно, что для этого необходимо ослабить требование Ω-устойчивости, которое эквивалентно аксиоме A (наличию гиперболической структуры и плотности периодических орбит в неблуждающем множестве) и отсутствию циклов в семействе базисных множеств. Напомним, что неблуждающее множество Ω-устойчивого диффеоморфизма разбивается на попарно непересекающиеся замкнутые инвариантные и транзитивные подмножества, которые называются *базисными* [146]. Такое представление неблуждающего множества называется *спектральным разложением.* Для произвольного диффеоморфизма этот результат берется в качестве определения, то есть под *спектральным разложением любого диффеоморфизма* понимается представление неблуждающего множества в виде объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных и транзитивных подмножеств. Эти подмножества можно независимо ввести различными способами. Один из плодотворных подходов, восходящем к Смейлу [146] и Ньюхаусу [102], состоит в непосредственном повторении определения базисного множества в теории Смейла, как гомоклинического класса (см. тщательное и аккуратное изложение в [134], стр. 240-244). Для формулировок последующих результатов, дадим необходимые определения.

Пусть p – седловая периодическая точка диффеоморфизма f. *Седловым гомоклиническим классом*, связанным с p, называется множество

$$H(p, f) = clos\ \left(W^s(p) \pitchfork W^u(p)\right),$$

где $\pitchfork$ означает трансверсальное пересечение. Если p – узловая периодическая точка (изолированная притягивающая или отталкивающая периодическая точка), то под *гомоклиническим классом* $H(p, f)$ понимается ее орбита $O(p)$. Гомоклинический класс произвольного диффеоморфизма суть замкнутое инвариантное и транзитивное множество. В гиперболической теории гомоклинические классы являются базисными множествами. В общем случае гомоклинические классы не изолированы и могут пересекаться. Однако у типичного диффеоморфизма гомоклинические классы либо совпадают, либо не пересекаются [26], [51]. В [26] доказано, что наличие спектрального разложения у типичного диффеоморфизма эквивалентно конечности числа гомоклинических классов, при этом на неблуждающем множестве существует доминирующее расщепление.

Доминирующее расщепление $NW(f) = H(p_1, f) \cup \ldots \cup H(p_m, f)$ на неблуждающем множестве диффеоморфизма f называется *R-робустным*, если существует массивное множество $R \subset Diff^1(M)$, содержащее f такое, что любой достаточно близкий к f диффеоморфизм $g \in R$ имеет доминирующее расщепление $NW(g) = H(\bar{p}_1, g) \cup \ldots \cup H(\bar{p}_m, g)$ того же типа. При этом, если $g_i \to f$ $(g_i \in R)$ при $i \to \infty$ в C^1 топологии, то $H(\bar{p}_j, g_i) \to H(p_j, f)$ в хаусдорфовой метрике на компактных множествах для всех $j = 1, \ldots, m$. Следующая теорема, доказанная в [26], является многомерным аналогом теоремы 7.2.

Теорема 7.7 *В пространстве $Diff^1(M^n)$, $n \geq 3$, существует массивное множество $\mathfrak{G}$ такое, что для $f \in \mathfrak{G}$ выполняется одна из следующих возможностей:*

1. *f имеет бесконечно много стоков или источников.*

2. *f имеет конечное число источников и стоков, но бесконечно много седловых гомоклинических классов.*

3. *f имеет конечное число гомоклинических классов и неблуждающее множество $NW(f)$ допускает $\mathfrak{G}$-робустное доминирующее расщепление.*

В первых двух случаях неблуждающее множество $NW(f)$ не допускает доминирующего расщепления. В [44] предложено в этих случаях называть динамику диффеоморфизма f *дикой*. В последнем третьем случае динамика называется *ручной*. Отметим, что все три случая реализуются. В [43] и [50] построены примеры, реализующие первые два случая. Последний случай соответствует Ω-устойчивости и, разумеется, также реализуется.

В [26] была доказана следующая теорема.

Теорема 7.8 *В пространстве $Diff^1(M)$, где M – компактное многообразие, существует массивное множество $\mathfrak{R}$ такое, что если $f \in \mathfrak{R}$ имеет конечное число гомоклинических классов, то выполняется ровно одна из следующих возможностей:*

1. *f Ω-устойчивый.*

2. *f не является A-диффеоморфизмом и C^1-аппроксимируется диффеоморфизмами, которые имеют гетеромерный цикл.*

Таким образом, в многомерном случае для ручных диффеоморфизмов из некоторого массивного множества доказана сильная гипотеза Палиса. Отметим, что пункт об аппроксимации A-диффеоморфизмами заменен пунктом об Ω-устойчивости, а как известно, Ω-устойчивый диффеоморфизм является A-диффеоморфизмом.

Понятно, что соединяющая лемма для инвариантных многообразий применялась для получения гомоклинических точек из почти гомоклинических. Из теоремы 2.9 вытекает следующая теорема (в [70] она сформулирована как следствие 2).

Теорема 7.9 *Для C^1 типичного диффеоморфизма $f : M \to M$ замкнутого многообразия M множество трансверсальных гомоклинических точек, ассоциированных с неподвижной гиперболической точкой, всюду плотно в множестве почти гомоклинических точек (ассоциированных с той же самой гиперболической точкой).*

В [71] этот результат обобщен: доказана всюду плотность в множестве пролонгационно гомоклинических точек (ассоциированных с тем же самым гиперболическим множеством).

Коснемся вкратце вопроса о типичных симплектических системах (имеется замечательный обзор [53], касающийся в основном диффеоморфизмов двумерных многообразий. Относительно многообразий произвольной размерности см. [37]). Напомним, что через $Diff^r_\omega(M^d)$ обозначается пространство C^r диффеоморфизмов компактного d-многообразия M^d, $d \geq 2$, сохраняющих симплектическую или объемную форму ω на M^d. Напомним также (см. параграф 3), что теорема 3.1 влечет слабую гипотезу Пуанкаре о плотности периодических траекторий типичной гамильтоновой системы в классе C^1, теорема 3.2.

Рассмотрим сперва симплектические диффеоморфизмы на двумерных компактных ориентируемых многообразиях M^2. На таких многообразиях понятия симплектичности и сохранения площади совпадают. Следуя Такенсу [148], будем называть такие диффеоморфизмы *консервативными*. Напомним, что периодическая точка p диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ двумерного многообразия M^2 называется *эллиптической*, если собственные числа $Df^s(p)$ не являются действительными числами[12], где s – период точки p. Для типичных консервативных диффеоморфизмов $M^2 \to M^2$ имеет место следующая теорема.

Теорема 7.10 *Типичный консервативный диффеоморфизм $f \in Diff^1_\omega(M^2)$ обладает следующими свойствами:*

1. *f транзитивный (то есть, существует всюду плотная в M^2 орбита).*
2. *Седловые гиперболические периодические точки f всюду плотны в M^2.*
3. *Если f не сопряжен диффеоморфизму Аносова, то в M^2 всюду плотны эллиптические периодические точки.*
4. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует периодическая ε-плотная точка.*

Типичность свойств 1) и 4) вытекает из теоремы 3.3 и теоремы Пуанкаре о возвращаемости. Типичность свойства 2) следует из работ [132], [162]. Типичность свойства 3) является одним из основных результатов работы [100]. Теперь утверждения теоремы следуют из того простого замечания, что пересечение конечного (даже счетного) числа массивных множеств, является

[12]В этом случае собственные числа комплексно-сопряженные и по модулю равны единице.

массивным множеством. Свойство 1) доказано в [37] для многообразий произвольной размерности.

Для четырехмерного симплектического многообразия в [35] доказана следующая теорема.

Теорема 7.11 *В пространстве $Diff^1_\omega(M^4)$ существуют три открытых множества U_1, U_2, U_3 такие, что*

1. *Объединение $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ плотно в $Diff^1_\omega(M^4)$.*
2. *$f \in U_1$, если и только если f аносовский и транзитивный.*
3. *$f \in U_2$, если и только если f частично гиперболический.*
4. *$f \in U_3$, если и только если f имеет устойчивую вполне эллиптическую периодическую точку.*

Напомним, что периодическая точка p периода k называется *вполне эллиптической*, если собственные значения $Df^k(p)$ по модулю равны 1 и все различны.

В симплектической динамике большую роль играют гомоклинические точки, открытые Пуанкаре [119] при исследовании проблемы трех тел в небесной механике. Пуанкаре предполагал, что гомоклинические точки типичной гамильтоновой системы плотны на устойчивых и неустойчивых многообразиях. Используя метод доказательства теоремы 2.3, в [159] доказана следующая теорема, которая обобщает соответствующий результат Такенса [148] для двумерных многообразий.

Теорема 7.12 *Пусть $p \in M^d$ – гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма $f \in Diff^1_\omega\,(M^d)$. Тогда для любой точки $q \in W^u(p) \cup W^s(p)$, любой ее окрестности $U(q)$, и произвольной окрестности $V(f)$ диффеоморфизма f в $Diff^1_\omega\,(M^d)$ существует $g \in V(f)$, совпадающий с f в некоторой окрестности точки p, такой, что g имеет гомоклиническую точку в $U(q)$, ассоциированную с p. Более того, существует массивное подмножество $\mathfrak{B} \subset Diff^1_\omega\,(M^d)$ такое, что если $f \in \mathfrak{B}$, и p – гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма f, то пересечение $W^u(p) \cap W^s(p)$ всюду плотно как в $W^u(p)$, так и в $W^s(p)$.*

Вернемся к двумерным замкнутым ориентируемым многообразиям и рассмотрим в заключении применения лемм о соединении инвариантных многообразий для консервативных диффеоморфизмов. Гиперболическая периодическая точка консервативного диффеоморфизма на поверхности M^2 имеет одномерные инвариантные многообразия (т.е. является периодической седловой точкой). Каждое из инвариантных многообразий разбивается периодической точкой на две компоненты, которые мы будем называть сепаратрисами. Инъективная иммерсия полупрямой $[0; +\infty)$ на сепаратрису наделяет последнюю параметризацией так, что 0 соответствует периодической точке. Поэтому можно стандартным образом определить предельное множество сепаратрисы L, которое обозначается через $\omega(L)$. Известно [103], что если L, K – любые сепаратрисы (возможно, $L = K$), то либо $K \cap \omega(L) = \emptyset$, либо $K \subset \omega(L)$. Последнее свойство типично в классе гладкости C^r для любого $1 \leq r \leq \infty$. В частности, у типичного консервативного диффеоморфизма замкнутой ориентируемой поверхности все сепаратрисы периодических седловых точек нетривиально рекуррентные. Используя этот факт, Пикстон [116] и Оливейра [103] для типичного консервативного диффеоморфизма сферы и тора соответственно доказали, что каждая гиперболическая периодическая точка имеет трансверсальную гомоклиническую точку в классе гладкости C^r, $1 \leq r \leq \infty$ (для произвольной компактной поверхности Такенс [148] доказал этот факт в классе гладкости C^1).

Пусть $f : M^2 \to M^2$ – консервативный диффеоморфизм ориентируемой замкнутой поверхности M^2 рода ≥ 2. Обозначим через $f_* : H_1(M^2) \to H_1(M^2)$ автоморфизм, индуцируемый f в группе гомологий $H_1(M^2)$. Автоморфизм f_* называется *неприводимым*, если характеристический многочлен f_* неприводим над $\mathbb{Z}$. Обозначим через $\mathfrak{I}$ множество диффеоморфизмов $f \in Diff^r_\omega(M^2)$, $1 \leq r \leq \infty$, которые индуцируют неприводимые автоморфизмы в группе $H_1(M^2)$. В [104] доказано, что в $\mathfrak{I}$ существует массивное множество $\mathfrak{R}$ такое, что любой диффеоморфизм $f \in \mathfrak{R}$ имеет трансверсальные гомоклинические точки.

Мезер [92] доказал, что у типичного симплектического C^r $(r \geq 4)$ диффеоморфизма компактной поверхности топологические замыкания сепаратрис гиперболической периодической точки совпадают. В [150] этот результат обобщен для любого $r \geq 1$ и любой поверхности (которая может быть некомпактной и неориентируемой).

Список литературы

[1] **Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.** *Качественная теория динамических систем второго порядка.* Москва, Наука, **1966**.

[2] **Андронов А.А., Понтрягин Л.С.** Грубые системы. *Доклады АН СССР,* **14**(1937), 5, 247-250.

[3] **Аносов Д.В.** Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны. *Доклады АН СССР*, **145**(1962), 4, 707-709.

[4] **Аносов Д.В.** Эргодические свойства геодезических потоков на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. *Доклады АН СССР*, **151**(1963), 6, 1250-1252.

[5] **Аносов Д.В.** *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны.* Москва, Наука, **1967** (Труды МИАН СССР, **90**), 210 стр.

[6] **Аносов Д.В.** Грубые системы. *Труды МИАН СССР*, **169**(1985), 59-93.

[7] **Аносов Д.В.** Динамические системы в 60-е гг.: гиперболическая революция. *Препринт*, МИАН, **2000**.

[8] **Аносов Д.В., Жужома Е.В.** Асимптотическое поведение накрывающих кривых на универсальных накрытиях поверхностей. *Труды МИРАН*, **238**(2002), 5-54.

[9] **Аносов Д.В., Жужома Е.В.** *Нелокальное асимптотическое поведение кривых и слоев ламинаций на универсальных накрывающих.* Москва, Наука, **2005** (Труды МИАН, **249**), 239 стр.

[10] **Арансон С.Х.** Об отсутствии незамкнутых устойчивых по Пуассону полутраекторий и траекторий, двоякоасимптотических к двойному предельному циклу, у динамических систем первой степени негрубости на ориентируемых двумерных многообразиях. *Матем. сб.*, **76**(1968), 2, 214-230.

[11] **Арансон С.Х., Гринес В.З.** О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных динамических систем). *Мат. сборник*, **90**(1973), 3, 372-402.

[12] **Арансон С.Х., Жужома Е.В.** О C^r-лемме о замыкании на поверхностях. *Успехи Мат. Наук*, **43**(1988), 5, 173-174.

[13] **Арансон С. Х., Жужома Е. В., Медведев В. С.** Усиленная C^r-лемма о замыкании для динамических систем и слоений на торе. *Мат. Заметки*, **61**(1997), 3, 323-331.

[14] **Гаврилов Н.К., Шильников Л.П.** О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой, I, II. *Матем. сб.*, **88**(1972), 475-492; **90**(1973), 139-157.

[15] **Гонченко С.В., Гонченко В.С.** О бифуркациях рождения замкнутой инвариантной кривой в случае двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием. *Труды МИАН*, **244**(2004), 86-93.

[16] **Жужома Е. В., Медведев В. С.** Лемма о замыкании для кусочно диффеоморфных отображений окружности. *Матем. Заметки*, **69**(2001), 2, 310-312.

[17] **Майер А. Г.** Грубое преобразование окружности в окружность. *Ученые записки Горьк. госуниверситета*, **1939**, 12, 215-229.

[18] **Палис Ж., Ди Мелу В.** *Геометрическая Теория Динамических Систем. Введение* Москва, Мир, **1986**.

[19] **Плисс В. А.** О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе. *Вестник ЛГУ*, сер. матем. **13**(1960), 3, 15-23.

[20] **Плисс В. А.** Один вариант леммы о замыкании. *Дифференц. Уравн.*, **7**(1971), 5, 840-850.

[21] **Плисс В. А.** Анализ необходимости условий грубости Смейла и Роббина для периодических систем дифференциальных уравнений. *Дифференц. Уравн.*, **8**(1972), 6, 972-983.

[22] **Синай Я.Г.** Гиббсовские меры в эргодической теории. *Успехи Матем. Наук*, **27**(1972), 4, 21-64.

[23] **Хинчин А.Я.** *Цепные дроби.* М., Наука, **1978**.

[24] **Якобсон М.В.** О гладких отображениях окружности в себя. *Матем. сборник*, **85**(1971), 183-188.

[25] **Abdenur F.** Attractors of generic diffeomorphisms are persistnt. *Nonlinearity*, **16**(2003), 301-311.

[26] **Abdenur F.** Generic robustness of spectral decompositions. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, **36**(2003), 213-224.

[27] **Abdenur F., Bonatti Ch., Crovisier S., Diaz L., Wen L.** Periodic points and homoclinic classes. *Ergod. Th. and Dyn. Syst.*, **27**(2007), 1-22.

[28] **Abraham R., Smale S.** Nongeneracity of Ω-stability. *Global Analysis. Proc. Sympos. Pure Math.*, **14**(1970), 5-8.

[29] **Aranson S., Belitsky G., Zhuzhoma E.** *Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces.* Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc., **153**(1996).

[30] **Aranson S., Malkin M., Medvedev V., Zhuzhoma E.** Versions of the closing lemma for certain dynamical systems on tori. *Qualitative Theory of Dyn. Syst.*, **4**(2003), 1-16.

[31] **Aranson S., Zhuzhoma E.** On the C^r-closing lemma and the Koebe-Morse coding of geodesics on surfaces. *Journ. Dyn. Contr. Syst.*, **7**(2001), no 1, 15-48.

[32] **Arnaud M.-C.** *Le "Closing lemma"en topologie* C^1. Mémoires de la Soc. Math. de France, no 74, **1998**.

[33] **Arnaud M.-C.** Création de connexions en topologie C^1 pour les flots des surfaces. *Bol. Soc. Mat.*, **30**(1999), no 3, 315-366.

[34] **Arnaud M.-C.** Création de connexions en topologie C^1. *Ergod. Th. Dyn. Syst.*, **21**(2001), 1-43.

[35] **Arnaud M.-C.** The generic symplectic C^1 diffeomorphisms of four-dimensional symplectic manifolds are hyperbolic, partially hyperbolic or have a completely elliptic periodic point. *Ergod. Th. Dyn. Syst.*, **22**(2002), 1621-1639.

[36] **Arnaud M.-C.** Approximation des ensembles ω-limites des difféomorphismes par des orbites périodiques. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, **36**(2003), 173-190.

[37] **Arnaud M.-C., Bonatti Ch., Crovisier S.** Dynamiques symplectiques gńériques. *Preprint* IMB, **363**(2004); *Ergod. Th. Dyn. Syst.*, **25**(2005), 1401-1436.

[38] **Arnoux P., Malkin M., Zhuzhoma E.** On the C^r-closing lemma for surface flows and expansions of points of the circle at infinity. *Preprint.* Institut de Mathématiques de Luminy, CNRS, **2001**, no 37, p. 37.

[39] **Auslander J.** Generalized recurrence in dynamical systems. *Contributions to Diff. Equat.*, **3**(1964), 65-74.

[40] **Bendixson I.** Sur les courbes définiés par les equations différentielles. *Acta Math.*, **24**(1901), 1-88.

[41] **Birman J., Series C.** Geodesics with bounded intersection number on surfaces are sparsely distributed. *Topology*, **24**(1985), 217-225.

[42] **Bonatti Ch., Diaz L.J.** Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphisms. *Annals of Math.*, **143**(1995), 357-396.

[43] **Bonatti Ch., Diaz L.J.** Connexion hétéroclines et généricité d'une infinité de puits et de sources. *Ann. Scient. Éc. Norm.*, **32**(1999), 135-150.

[44] **Bonnatti Ch., Diaz L.J., Viana M.***Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity: a Global Geometric and Probabilistic Approach.* Preliminary version. **2003**.

[45] **Bonatti Ch., Viana M.** SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting. *Israel Jour. Math.*, **115**(2000), 157-193.

[46] **Bonatti Ch., Crovisier S.** Récurrence et généricité. *arXiv: math. DS/0306383*, **2003**, p. 58; *Invent. Math.*, **158**(2004), 33-104.

[47] **Bowen R.** Equilibrium states and the Ergodic Theory of Anosov diffeomorphisms. *Lect. Notes Math.*, **470**(1975), 108 pp.

[48] **Bowen R., Ruelle D.** The Ergodic Theory of axiom A flows. *Invent. Math.*, **29**(1975), 181-202.

[49] **Le Calvez P.** Construction d'orbites périodiques par pertubation d'un difféomorphisme de l'anneau déviant la verticale. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **321**(1995), ser. 1, 463-468.

[50] **Carballo C.M., Morales C.A.** Homoclinic classes and finitude of attractors for vector fields on n-manifolds. *IMPA-Preprints*, **2001**.

[51] **Carballo C.M., Morales C.A., Pacifico M.J.** Homoclinic classes for generic C^1 vector fields. *IMPA-Preprints*, A-205, **2003**.

[52] **Carroll C. R.** Rokhlin towers and C^r closing for flows on T^2. *Ergodic Th. and Dynam. Sys.* **12**(1992), 683-706.

[53] **Crovisier S.** Perturbation of C^1 diffeomorphisms and generic conservative dynamics on surfaces. *Panoramas and Synthèses*, **21**(2006), 1-33.

[54] **Crovisier S.** Birth of homoclinic intersections: a model for the central dynamics of partially hyperbolic systems. *Arxiv: math.DS/0605387v1*, **2006**, p. 30.

[55] **Diaz L.J.** Robust nonhyperbolic dynamics and heterodimensional cycles. *Ergod. Th. and Dyn. Syst.*, **15**(1995), 291-315.

[56] **Fornaess J., Sibony N.** The closing lemma for holomorphic maps. *Ergod. Th. and Dyn. Syst.*, **17**(1997), 821-837.

[57] **Fornaess J., Sibony N.** Closing lemma for holomorphic functions in $\mathbb{C}$. *Ergod. Th. and Dyn. Syst.*, **18**(1998), 153-170.

[58] **Franks J.** Anosov diffeomorphisms. *Global Analisys. Proc. Symp. in Pure Math., Amer. Math. Soc.* **14**(1970), 61-94 (имеется перевод в сб. Гладкие динамические системы, под. ред. Д. В. Аносова, М., 1977, 32-86).

[59] **Shaobo Gan.** Horseshoe and entropy for C^1 surface diffeomorphisms. *Nonlinearity*, **15**(2002), 841-848.

[60] **Shaobo Gan, Lan Wen.** Heteroclinic cycles and homoclinic closures for generic diffeomorphisms. *Journ. Diff. Equat.*, **15**(2003), no 213, 451-471.

[61] **Gutierrez C.** Structural stability for flows on the torus with a cross-cap. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **241**(1978), 311-320.

[62] **Gutierrez C.** Smoothing continuous flows on 2-manifolds and recurrences. *Ergod. Th. and Dyn. Sys.* **6**(1986), 17-44.

[63] **Gutierrez C.** On the C^r-closing lemma for flows on the torus T^2. *Ergodic Th. and Dynam. Sys.* **6**(1986), 45-56.

[64] **Gutierrez C.** A counter-example to a C^2-closing. *Ergodic Th. and Dynam. Sys.* **7**(1987), 509-530.

[65] **Gutierrez C.** On C^r-closing for flows on 2-manifolds. *Nonlinearity*, **13**(2000), 1883-1888.

[66] **Gutierrez C.** On the C^r-Closing lemma. *Comp. and Appl. Math.*, **20**(2001), 1-2, 179-186.

[67] **Gutierrez C.** Personal communication.

[68] **Gutierrez C., Pires B.** On Peixoto's conjecture for flows on non-orintable 2-manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**, 4,1063-1074.

[69] **Gutierrez C., Sotomayor J.** *Structurally Stable Configurations of Lines of Curvature and Umbilic Points on Surfaces.* Monografias del IMCA, Peru, **1998**.

[70] **Hayashi S.** Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability and Ω-stability conjectures for flows. *Annals of Math.*, **145**(1997), 81-137; Correction *Annals of Math.*, **150**(1999), 353-356.

[71] **Hayashi S.** A C^1 make or break lemma. *Bol. Soc. Mat.*, **31**(2000), no 3, 337-350.

[72] **Hermann M. R.** Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Publ. Math. IHES* **49**(1979), 2-233.

[73] **Hermann M. R.** Examples de flots hamiltoniens dont aucune perturbation en topologie C^∞ n'a d'orbites périodiques sur un ouvert de surfaces d'énergies. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **312**(1991), ser. 1, 989-994.

[74] **Hermann M. R.** Differentiabilité optimale et contre-examples à la fermeture en topologie C^∞ des orbites récurrentes de flots hamiltoniens. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **313**(1991), ser. 1, 49-52.

[75] **Hirsch M.** Systems of diffrential equations that are competitive and cooperative. YI: A local C^r closing lemma for 3-dimensional systems. *Ergod. Th. and Dyn. Syst.*, **11**(1991), no 3, 443-454.

[76] **Hirsch M., Pugh C., Shub M.** *Invariant Manifolds* Springer-Verlag (*Lect. Nots Math.*), **1977**.

[77] **Katok A.** Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Publ. Math.*, IHES, **51**(1980), 137-173.

[78] **Katok A., Hasselblatt B.** *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.* Encyclopedia of Math. and its Appl., Cambridge Univ. Press, **1994**.

[79] **Koebe P.** Riemannische Manigfaltigkeiten und nichteuklidiche Raumformen, IY. *Sitzung. der Preuss. Akad. der Wissenchaften*, **1929**, 414-457.

[80] **Kupka I.** Contribution à la théorie des champs génériques. *Contrib. Diff. Equat.*, **2**(1963), 457-484.

[81] **Liao S.** An extension of the C^1 closing lemma. *Acta Sci. Natur. Univ. Pekin.*, 2, **1979**, 1-41 (Chinese) MR **81m:**58066.

[82] **Liao S.** On the stability conjecture. *Chinese Ann. Math.*, **1**(1980), 9-30.

[83] **Lloyd S.** On the Closing Lemma problem for the torus. *Discrete and Continuous Dynam. Syst.*, Ser. A, **25**(2009), no 3, 951 - 962.

[84] **Jiehua Mai.** A simpler proof of C^1 closing lemma. *Scienta Sinica* (ser. A), **29**(1986), 1021-1031.

[85] **Jiehua Mai.** A simpler proof of the extended C^1 closing lemma. *Chinese Sci. Bull.*, **34**(1989), no 3, 180-184.

[86] **Jiehua Mai.** Personal communication.

[87] **Mané R.** Contributions to the stability conjecture. *Topology*, **17**(1978), 383-396.-

[88] **Mané R.** An ergodic closing lemma. *Annals of Math.*, **116**(1982), 503-540.

[89] **Mané R.** On the creation of homoclinic points. *Publ. Math. IHES*, **66**(1988), 139-159.

[90] **Mañé R.** A proof of C^1 stability conjecture. *Publ. Math. IHES* **66**(1988), 161-210.

[91] **Martin J.C., Mora L.** A complement to the connecting lemma of Hayashi. *Arxiv:* mathDS/0109143, **2001**.

[92] **Mather J. N.** Invariant subsets for area-preserving homeomorphisms of surfaces. *Math. Analysis and Appl.*, Part B, **7**.

[93] **McMullen C.T.** *Complex Dynamics and Renormalization.* Princeton Univ. Press, Princeton, **1994**.

[94] **Morales C.A.** Singular-hyperbolic attractors with handlebody basins. *IMPA-Preprints*, A-254, **2003**.

[95] **Morse M.** A one-to-one representation of geodesics on a surface of negative curvature. *Amer. J. Math.* **43**(1921), 33-51; Symbolic dynamics. *Institute of Advanced Study Notes*, Princeton, 1966 (unpublished).

[96] **Newhouse S.** Nondensity of Axiom A(a) on S^2. *Global Analysis. Proc. Sympos. Pure Math.*, **14**(1970), 191-202.

[97] **Newhouse S.** Hyperbolic limit sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **167**(1972), 125-150.

[98] **Newhouse S.** Diffeomorphisms with infinitely many sinks. *Topology*, **13**(1974), 9-18.

[99] **Newhouse S.** On homoclinic points. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **60**(1976), no 1, 221-224.

[100] **Newhouse S.** Quasi-elliptic periodic points in conservative dynamical systems. *Amer. Journ. Math.*, **99**(1977), 1061-1087.

[101] **Newhouse S.** The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. *Publ. Math. IHES*, **50**(1979), 101-151.

[102] **Newhouse S.** *Lectures on Dynamical Systems.* Progress in Math., **8**(1980), Birkhauser, Boston, Stuttgart, 1-114.

[103] **Oliveira F.** On the generic existence of homoclinic points. *Ergod. Th. Dyn. Syst.*, **7**(1987), 567-595.

[104] **Oliveira F.** On the genericity of homoclinic orbits. *Nonlinearity*, **13**(2000), 653-662.

[105] **Palis J.** On Morse-Smale dynamical systems. *Topology*, **8**(1969), no 4, 385-404.

[106] **Palis J.** On the C^1 Ω-stability conjecture. *Publ. IHES*, **66**(1988), 211-215.

[107] **Palis J.** A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors. *Astérisque*, **261**(2000), 335-347.

[108] **Palis J.** A global perspective for non-consrvative dynamics. *Ann. Inst. H.Poincaré - Anal. Non. Linéare*, **22**(2005), 485-507.

[109] **Palis J.** Open questions leading to a global perspective in dynamics. *Nonlinearity*, **21**(2008), 37-43.

[110] **Palis J, Pugh C.** Fifty problems in dynamical systems. *Lect. Notes in Math.*, **468**(1975), 345-353.

[111] **Palis J., Smale S.** Structural stability theorems. *Global Analysis*, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **14**(1970), 223-231.

[112] **Peixoto M.** Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology*, **1**(1962), 101-120.

[113] **Peixoto M.** A further remark. *Topology* **2**(1963), 179-180.

[114] **Peixoto M. L. A.** The closing lemma for generalized recurrence in the plane. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **308**(1988), 143-158.

[115] **Peixoto M. L. A., Pugh C.** The planar closing lemma for chain recurrence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **341**(1994), 173-192.

[116] **Pixton D.** Planar homoclinic points. *Journ. Diff. Equat.*, **44**(1982), 365-382.

[117] **Pilyugin S.Yu.** *Shadowing in Dynamical Systems. Lect. Notes in Math.*, **1706**(1999), Springer-Verlag.

[118] **Poincare H.** Sur les courbes définies par les equations differentielles. *J. Math. Pures Appl.* **2**(1886), 151-217. Имеется перевод: **А. Пуанкаре.** *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.* Серия “Классики естествознания". М-Л., ОГИЗ, **1947**.

[119] **Poincare H.** Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. I (**1892**), II, III (**1899**), Guathier-Villars, Paris. Имеется перевод: **А. Пуанкаре.** *Избранные труды* в трех томах. Серия "Классики науки Академия наук Союза ССР, Москва, **1971**.

[120] **Pugh C.** The Closing Lemma and structural stability. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70**(1964), 584-587.

[121] **Pugh C.** The Closing lemma. *Amer. J. Math.* **89**(1967), 956-1009.

[122] **Pugh C.** An improved Closing lemma and a General Density Theorem. *Amer. J. Math.* **89**(1967), 1010-1021.

[123] **Pugh C.** An arbitrary sequences of isomorphisms in $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **184**(1973), 387-400.

[124] **Pugh C.** Against the C^2 Closing lemma. *Journ. Diff. Equat.*, **17**(1975), no 2, 435-443.

[125] **Pugh C.** Special C^r closing lemma. *Lect. Notes in Math.*, **1007**(1999), 636-650.

[126] **Pugh C.** The C^1 Connecting lemma. *Journ. Diff. Equat.*, **4**(1992), no 4, 545-553.

[127] **Pugh C.** The Closing lemma in retrospect. *Dynamics, Games and Science*, DYNA 2008, Editors: M.Peixoto, A.Pinto, D.Rand, **2010**, 551-567.

[128] **Pugh C., Robinson C.** The C^1 Closing lemma, including Hamiltonians. *Ergodic Th. and Dynam. Sys.* **3**(1983), 261-313.

[129] **Pujals E., Sambarino M.** Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms. *Annals of Math.*, **151**(2000), 961-1023.

[130] **Rivera-Letelier J.** A connecting lemma for rational maps satisfying a no-growth condition. *Ergod. Th. and Dyn. Syst.*, **27**(2007), 595-636.

[131] **Robinson C.** Closing stable and unstable manifolds on the two sphere. *Proc. of Amer. Math. Soc.*, **41**(1973), no 1, 299-303.

[132] **Robinson C.** Generic properties of conservative systems I, II. *Amer. Journ. Math.*, **92**(1973), 562-603; 879-906.

[133] **Robinson C.** Introduction in the Closing lemma. *Lect. Notes in Math.*, **668**(1978), 225-230.

[134] **Robinson C.** *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos.* Studies in Adv. Math., Sec. edition, CRC Press, **1999**.

[135] **Robinson C., Williams R.** Finite stability is not generic. *Proceedings* of Salvador Symposium on Dynamical Systems (Brasil, 1971), *Dynamical Systems*, Acad. Press, NY and London, **1973**, 451-462.

[136] **Rosenberg H., Roussarie R.** Topological equivalence of Reeb foliations. *Topology*, **9**(1970), 3, 231-242.

[137] **Rosenberg H., Roussarie R.** Reeb foliations. *Ann. of Math.*, **91**(1970), 1, 1-24.

[138] **Roussarie R., Weil D.** Extension du “Closing Lemma"aux action de $\mathbb{R}^2$ sur les variétés de dim = 3. *Journ. Diff. Equat.*, **8**(1970), 202-228.

[139] **Shub M.** Topologically transitive diffeomorphisms on T^4. *Lect. Notes Math.*, **206**(1971), 31.

[140] **Shub M.** *Global Stability of Dynamical Systems.* Springer-Verlag, **1987**.

[141] **Shub M., Smale S.** Beyond hyperbolicity. *Annals Math.*, **96**(1972), 587-591.

[142] **Simon C.** On a classification of a Baire set of diffeomorphisms. *Bulletin of Amer. Math. Soc.*, **77**(1971), 783-787.

[143] **Smale S.** Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms. *Ann. Scuola Norm. Pisa*, **18**(1963), 97-116.

[144] **Smale S.** Diffeomorphisms with many periodic points. *Differential and Combinatorial Topology*, **1965**, Princeton, NJ, 63-80.

[145] **Smale S.** Structurally stable systems are not dense. *Amer. Journ. Math.*, **88**(1966), 491-496.

[146] **Smale S.** Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**(1967), 1, 741-817. Имеется первод: *Успехи мат. наук* **25**(1970), 113-185.

[147] **Smale S.** Mathematical problems for the next century. *The Mathematical Intelligencer*, **20**(1998), no 2, 7-15.

[148] **Takens F.** Homoclinic points in conservative systems. *Invent. Math.*, **18**(1972), 267-292 (имеется перевод в сб. *Гладкие динамические системы*, под. ред. Д.В. Аносова, М., **1977**, 204-241).

[149] **Thom R.** Les intégrales premières d’un système différentiel sur une variété compacte. *Preprint*, **1960**.

[150] **Treschev D.** Closures of asymptotic curves in a two-dimensional symlectic map. *Journ. Dyn. and Control Syst.*, **4**(1998), no 3, 305-314.

[151] **Lan Wen.** The C^1 closing lemma for non-singular endomorphisms. *Ergodic Th. and Dynam. Sys.* **11**(1991), 393-412.

[152] **Lan Wen.** A uniform C^1 connecting lemma. *Discr. and Cont. Dyn. Syst.*, **8**(2002), 257-265.

[153] **Lan Wen.** Homoclinic tangencies and dominating splitings. *Nonlinearity*, **15**(2002), 1445-1469.

[154] **Lan Wen.** Generic diffeomorphisms away from homoclinic tangencies and heterodimensional cycles. *Bull. Braz. Math. Soc.*, **35**(2004), 419-452.

[155] **Lan Wen, Zhihong Xia.** A basic C^1 perturbation theorem. *Journ. Diff. Equat.*, **154**(1999), 267-283.

[156] **Lan Wen, Zhihong Xia.** C^1 connecting lemmas. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**(2000), no 11, 5213-5230.

[157] **Williams R.** The DA maps of Smale and structural stability. *Global Analisys. Proc. Symp. in Pure Math., Amer. Math. Soc.* **14**(1970), 329-334.

[158] **Williams R.** Expanding attractors. *Publ. Math. IHES*, **43**(1974), 169-203.

[159] **Zhihong Xia.** Homoclinic points in symplectic and volume-preserving diffeomorphisms. *Commun. Math. Phys.*, **177**(1996), 435-449.

[160] **Yoccoz J.-Ch.** Travaux de Herman sur les tores invariants. *Asterisque* **206**(1992), 311-344.

[161] **Lai-Sang Young.** A closing lemma on the interval. *Invent. Math.*, **54**(1979), 179-187.

[162] **Zehnder E.** Homoclinic points near elliptic fixed points. *Comm Pure Appl. Math.*, **26**(1973), 131-182.