



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 1, 2007

Электронный журнал,

рег. № П2375 от 07.03.97

ISSN 1817-2172

<http://www.neva.ru/journal>

e-mail: jodiff@mail.ru

Оптимальное управление

МЕТОД ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ В ЗАДАЧАХ НАВЕДЕНИЯ ДЛЯ АВТОНОМНЫХ КОНФЛИКТНО-УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ¹

Ю.В.Авербух

Россия, 620219, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16,
Институт математики и механики Уральского отделения Российской
академии наук,
e-mail: ayv@immm.uran.ru

Аннотация.

Рассматриваются задачи наведения для дифференциальных игр. Задача наведения автономной конфликтно-управляемой системы на множество в фазовом пространстве “к моменту” сводится к задаче наведения на то же множество “в момент” для “расширенной” системы.

Изучается один из вариантов метода программных итераций. А.Г.Ченцов доказал, что множества-итерации сходятся в этом случае к множеству успешной разрешимости задачи наведения. В работе доказано совпадение соответствующих итераций для двух задач, отсюда следует совпадение множеств успешной разрешимости. Также установлено, что в случае когда исходная система удовлетворяет условию седловой точки в маленькой игре, расширенная система наследует это свойство.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 06-01-00414.

1 Введение

Статья посвящена изучению структуры решения дифференциальной игры наведения в случае, когда целевое множество имеет вид цилиндра в пространстве позиций. Задачи такого вида иногда называется задачами наведения “к моменту”. Структура нелинейной игровой задачи наведения исчерпывающим образом характеризуется теоремой об альтернативе, доказанной Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным [1], [2]; она утверждает существование седловой точки в классе соответствующих позиционных стратегий при выполнении условий информационной согласованности. В случае, если условие информационной согласованности не выполняется, седловая точка существует в классе пар контрстратегия/стратегия [2] (также установлено существование седловой точки в парах стратегия/контрстратегия и смешанная стратегия/смешанная стратегия [2]). Известен вид оптимальной стратегии в задаче наведения [2]: стратегия (в случае невыполнения условия информационной согласованности контрстратегия) строится методом экстремального сдвига на некоторое множество; это множество является максимальным u -стабильным мостом в смысле Н. Н. Красовского. Таким образом, решение игровой задачи наведения сводится к задаче построения максимального u -стабильного моста. Если задача рассматривается в классах смешанная стратегия/смешанная стратегия, стратегия/контрстратегия, то соответствующее оптимальное управление может быть получено методом экстремального сдвига на максимальный \tilde{u} -стабильный, u_* -стабильный мост соответственно [2].

Наряду с задачами наведения в теории дифференциальных игр рассматриваются игровые задачи минимизации функционала. Для этих задач на основе теоремы об альтернативе Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным установлено существование функции цены [2].

Конкретное построение множества позиционного поглощения или функции цены удается провести на основе метода программных итераций, предложенного А.Г. Ченцовым [3]– [6] (см. также [7]– [9]). Из множества рассматриваемых в теории дифференциальных игр задач часто выделяют два важных класса: задачи “в момент” и задачи “к моменту”. Игровая задача наведения называется задачей “в момент”, если требуется привести систему на множество в фазовом пространстве в последний момент времени, и задачей “к моменту”, если требуется привести систему на множество в фазовом пространстве в любой момент времени. В последнем случае целевое множество в игре имеет вид цилиндра в пространстве позиций. Аналогично игровая за-

дача минимизации функционала называется задачей “в момент” если требуется минимизировать значение функционала в последний момент, и задачей “к моменту”, если требуется минимизировать минимальное вдоль по траектории значение функционала. Игровые задачи минимизации функционала “в момент” и “к моменту” могут быть исследованы методами теорий обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби и минимаксных неравенств соответственно, развитых в работах А.И. Субботина [10], [11]. Для случая, обобщающего случай игр с простыми движениями известны явные выражения функции цены как для задачи “в момент” так и для задачи “к моменту” [10]. Отметим, что впервые выражение для функции цены в случае игры с простыми движениями получены в работе [12]. Также известно, что, решение задачи “к моменту” для автономных систем может быть получено из решения уравнения Гамильтона-Якоби с преобразованным гамильтонианом, являющимся минимумом из гамильтониана исходной игры и нуля [13].

Решение целого ряда нерегулярных линейных задач “в момент” получено благодаря методу программных итераций [3], однако решение аналогичных задач “к моменту” представляется более сложным. Один из вариантов представления задачи “к моменту” в терминах задачи “в момент” без преобразования управляемой системы указан в [3, с. 228–231].

В настоящей работе преобразование задач проводится путем своеобразного расширения управляемой системы. Доказано, что для случая автономной конфликтно-управляемой задача наведения “к моменту” эквивалентна задаче наведения расширенной системы “в момент”. Эквивалентность рассмотренных задач следует из того, что совпадают итерации построенные по одному из вариантов метода программных итераций для обоих рассматриваемых задач. Рассмотренный способ преобразования задач может быть применен к игровым задачам минимизации функционала траектории. В частности, из доказанных в настоящей работе утверждений следует, что задача “к моменту” для конфликтно-управляемой линейной системы с постоянными коэффициентами эквивалентна задаче “в момент” для билинейной конфликтно-управляемой системы.

2 Формулировка основного результата

В настоящей работе рассматриваются задачи сближения/уклонения с множеством M внутри множества N автономных конфликтно-управляемых систем

вида:

$$\dot{x} = f(x, u, v), \quad u \in P, v \in Q \quad (1)$$

на промежутке времени $[0, \vartheta]$. Предполагается, что первый игрок, распоряжающийся управлением u , стремится привести систему на множество M внутри множества N , $M \subset N \subset [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, второй игрок, распоряжаясь управлением v , стремится не допустить этого.

Предполагается, что f непрерывна, локально липшицева по фазовой переменной и удовлетворяет условию подлинейного роста, $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$, P и Q – компакты, M, N – замкнуты. Получающуюся дифференциальную игру будем рассматривать в классе контрстратегия/стратегия. То есть мы считаем, что первый игрок (распоряжающийся управлением u) осуществляет свое управление в классе контрстратегий, а второй игрок (распоряжающийся управлением v) в классе чистых позиционных стратегий [2]. Дадим строгое определение контрстратегий, позиционной стратегий и движений для случая автономных игр, следуя определениям введенным в [2] для общего случая.

Контрстратегией первого игрока называется любая функция $U : [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times Q \rightarrow P$, измеримая по третьему аргументу, позиционной стратегией второго игрока называется любая функция $V : [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \rightarrow Q$. Движение, порожденное контрстратегией $U(t, x, v)$ на промежутке $[t_*, t^*]$, выходящее из точки x_* , мы следуя [2], определим как пределы ломаных Эйлера при стремлении мелкости разбиения к нулю. Сами ломаные Эйлера строятся следующим образом. Пусть $\Delta = \{\tau_k\}_{k=0}^r$ – разбиение отрезка $[t_*, t^*]$, $v(\cdot)$ – некоторое управление второго игрока, на каждом промежутке $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ ($k = \overline{1, r}$) определим ломаную Эйлера как решение уравнения:

$$x_k[t] = x_{k-1}[\tau_{k-1}] + \int_{\tau_{k-1}}^t f(x_k[\theta], U(\tau_{k-1}, x_{k-1}[\tau_{k-1}], v(\theta)), v(\theta))d\theta, \quad x_0[\tau_0] \triangleq x_*.$$

При этом второй игрок формирует свое управление по правилу: пусть $\Xi = \{\xi_j\}_{j=0}^m$ – некоторое разбиение отрезка $[t_*, t^*]$, второй игрок выбирает свое управление постоянным на промежутке $[\xi_{j-1}, \xi_j]$, $j = \overline{1, m}$, и равным $V(\xi_{j-1}, x_{j-1})$, где x_{j-1} – положение системы, реализовавшееся к моменту ξ_{j-1} .

В случае выполнения условия Айзекса (условия седловой точки в маленькой игре):

$$\forall s, x \in \mathbb{R}^n \quad \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(x, u, v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle$$

достаточно рассматривать дифференциальную игру в классе позиционных стратегий [2], в этом случае стратегии первого игрока зависят только от реализовавшейся позиции. По теореме об альтернативе [2, Теорема 82.2] решение

задачи сближения/уклонения полностью определяется множеством успешной разрешимости (максимальным u -стабильным мостом) \mathfrak{W} . При этом оптимальная контрстратегия $U(t, x, v)$ строится по правилу экстремального сдвига на \mathfrak{W} [2].

Рассмотрим теперь две дифференциальные игры на отрезке $[0, \vartheta]$ в \mathbb{R}^n :

$$\dot{x} = f_1(x, u, v), \quad u \in P_1, \quad v \in Q_1;$$

$$\dot{x} = f_2(x, u, v), \quad u \in P_2, \quad v \in Q_2.$$

Для каждой системы рассмотрим задачу наведения ее на множества M_1 и M_2 соответственно (множества M_i – замкнуты) внутри множества N . Будем говорить что задачи наведения i -й системы на множество M_i эквивалентны (в смысле Н. Н. Красовского и А. И. Субботина), если множества успешной разрешимости обеих задач \mathfrak{W}_i совпадают.

Основным результатом настоящей работы является сопоставление некоторым дифференциальным играм “к моменту” эквивалентных им дифференциальных игр “в момент”. Рассмотрим задачу наведения системы (1) на цилиндрическое множество $[0, \vartheta] \times F$, где F замкнутое подмножество \mathbb{R}^n такое, что $[0, \vartheta] \times F \subset N$. Как уже говорилось выше, предполагается, что $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$, P и Q – компакты. Эта задача является задачей наведения на F “к моменту”. На выбор функции $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ наложены вышеупомянутые условия.

Для того, чтобы построить эквивалентную игру “в момент” мы расширим возможности первого игрока, формирующего управление u , введя дополнительное управление u_0 , принимающее значение 0 или 1. Рассмотрим конфликтно-управляемую систему

$$\dot{x} = u_0 \cdot f(x, u, v), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u_0 \in \{0, 1\}, \quad u \in P, \quad v \in Q \quad (2)$$

на промежутке $[0, \vartheta]$. В новой системе (2) первый игрок распоряжается управлениями u_0 и u , а второй игрок, как и в системе (1), управлением v . Аналогичные способы преобразования системы рассматривались ранее в классе программных управлений (см. [13], [14]). Поставим задачу наведения на множество $\{\vartheta\} \times F$. Подобная задача является задачей наведения “в момент”. Ниже мы докажем, что рассматриваемые задачи эквивалентны. Более того, мы докажем, что совпадают последовательности, построенные по одному из методов программных итераций (итерации стабильности). Определим сейчас этот вариант метода программных итераций для рассматриваемых систем [15].

В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений:

$$P^{(1)} \triangleq P, \quad P^{(2)} \triangleq \{0, 1\} \times P,$$

$$M^{(1)} \triangleq [0, \vartheta] \times F, \quad M^{(2)} \triangleq \{\vartheta\} \times F;$$

для $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in Q$, $u \in P^{(1)} = P$ положим

$$f^{(1)}(x, u, v) \triangleq f(x, u, v);$$

для $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in Q$, $u \in P^{(2)}$, $u = (u_0, u')$, $u_0 \in \{0, 1\}$, $u' \in P$ положим

$$f^{(2)}(x, u, v) \triangleq u_0 f(x, u', v).$$

Также обозначаем через $\mathfrak{W}^{(1)}$ множество успешной разрешимости задачи наведения системы (1) на $[0, \vartheta] \times F$, через $\mathfrak{W}^{(2)}$ множество успешной разрешимости задачи наведения системы (2) на $\{\vartheta\} \times F$.

Для фиксированного $v \in Q$ мы рассмотрим управляемые v -системы:

$$\dot{x} = f_v^{(i)}(x, u) \triangleq f^{(i)}(x, u, v), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P^{(i)}$$

на промежутке времени $[0, \vartheta]$, ($i = 1, 2$). Введем, следуя [3], [15], множество всех обобщенных программных управлений первого игрока в i -й системе на промежутке времени $[t_*, \vartheta]$ – множество всех мер $[t_*, \vartheta] \times P^{(i)}$, согласованных с мерой Лебега на $[t_*, \vartheta]$. Обозначим эти множества через $\mathcal{R}_{t_*}^{(i)}$. Для каждого обобщенного программного управления $\mu^{(i)} \in \mathcal{R}_{t_*}^{(i)}$ и позиции (t_*, x_*) существует единственное решение уравнения

$$x(t) = x_* + \int_{[t_*, t] \times P^{(i)}} f_v^{(i)}(x(\tau), u) \mu^{(i)}(d(\tau, u)).$$

Обозначим это решение через $\varphi^{(i)}(\cdot, t_*, x_*, \mu^{(i)}, v)$.

Введем один из вариантов метода программных итераций (см. [3, с. 233], [15]). Пусть $E \subset [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, E – замкнуто, положим

$$\begin{aligned} A_v^{(i)}(E) \triangleq \{ & (t_*, x_*) \in E : \exists \mu^{(i)} \in \mathcal{R}_{t_*}^{(i)} : \\ & \exists \tau \in [t_*, \vartheta] : \varphi^{(i)}(\tau, t_*, x_*, \mu^{(i)}, v) \in M^{(i)}[\tau] \& \\ & \forall t \in [t_*, \tau] \varphi^{(i)}(t, t_*, x_*, \mu^{(i)}, v) \in E[t] \}. \end{aligned}$$

Здесь $E[t]$ обозначает сечение множества E , $E[t] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in E\}$. Отметим, что $A_v^{(i)}(E)$ также замкнуто.

Положим,

$$A^{(i)}(E) \triangleq \bigcap_{v \in Q} A_v^{(i)}(E).$$

Оператор $A^{(i)}$ называется оператором программного поглощения [3]. Построим последовательности множеств:

$$W_0^{(i)} \triangleq N, \quad W_k^{(i)} = A^{(i)}(W_{k-1}^{(i)}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Известно [15], что

$$\mathfrak{W}^{(i)} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k^{(i)}. \quad (3)$$

Дадим еще одно определение. Будем называть множество E *невозрастающим по сечениям*, если $E[t^*] \subset E[t_*]$ для всех $t^*, t_* \in [0, \vartheta]$ таких, что $t^* \geq t_*$.

Теорема 1. Пусть N невозрастающее по сечениям множество. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $W_k^{(1)} = W_k^{(2)}$ для всех $k \in \mathbb{N}$;
2. задача наведения системы (1) на цилиндрическое множество $[0, \vartheta] \times F$ эквивалентна задаче наведения системы (2) на множество $\{\vartheta\} \times F$;
3. если система (1) удовлетворяет условию Айзекса, то и система (2) также удовлетворяет условию Айзекса.

Таким образом даже линейная игра “к моменту” эквивалентна билинейной игре “в момент”.

Также полученный результат может быть применен к изучению игр с ограничением на количество переключений управления второго игрока (в промежутках между переключениями управление второго игрока предполагается постоянным). Второй игрок распоряжается назначением момента переключения управления и самим управлением после переключения. Предполагается, что момент переключения выбирается на основе непрерывно поступающей информации о реализовавшейся траектории [15], [16], [17]. При этом предполагается, что первый игрок выбирает свое управление в классе контрстратегий. В случае если число переключений ограничено числом k имеет место альтернативное разбиение и множество успешной разрешимости задачи уклонения в этом случае есть множество N без $k + 1$ итерации построенной по описанному методу программных итераций [17]. Таким образом

из теоремы следует, что совпадают множества успешной разрешимости задачи уклонения от $[0, \vartheta] \times F$ для системы (1) и от $\{\vartheta\} \times F$ для системы (2) при одинаковом ограничении на количество переключений управления второго игрока.

Вернемся теперь к играм без ограничения на количество переключений управлений второго игрока. Понятие эквивалентности естественным образом распространяется на игры в которых игроки стремятся минимизировать/максимизировать функционал платы. Игры с функционалом платы мы будем рассматривать на всем множестве позиций $[0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$. В этом случае будем называть две игры эквивалентными, если у них совпадают функции цены.

Следствие 1. Пусть динамика системы описывается уравнением (1) и первый (второй) игрок стремится минимизировать (максимизировать) функционал платы вида $\min_{t \in [0, \vartheta]} \omega(x(t))$ (предполагается, что функция ω непрерывна и удовлетворяет условию подлинного роста). Тогда эта дифференциальная игра эквивалентна игре, в которой динамика системы описывается уравнением (2), с функционалом платы $\omega(x(\vartheta))$.

3 Некоторые свойства операторов программного поглощения

Утверждение 1. Если E – невозрастающее по сечениям замкнутое множество такое, что $[0, \vartheta] \times F \subset E$, то и $A^{(2)}(E)$ невозрастающее по сечениям множество такое, что $[0, \vartheta] \times F \subset E$.

Доказательство. Пусть $(t^*, x_*) \in A^{(2)}(E)$. Докажем, что $(t_*, x_*) \in A^{(2)}(E)$ для $t_* \leq t^*$. Зафиксируем $v \in Q$. Существует $\mu \in \mathcal{R}_{t^*}^{(2)}$ такое, что $\varphi^{(2)}(\vartheta, t^*, x_*, \mu, v) \in F$ и для всех $t \in [t^*, \vartheta]$ $\varphi^{(2)}(t, t^*, x_*, \mu, v) \in E[t]$.

Определим обобщенное управление σ во второй системе, соответствующее обычному управлению $u_0 = 0$. Пусть $\hat{u} = (0, u_1, \dots, u_p)$, где (u_1, \dots, u_p) произвольный элемент P . Положим для каждого измеримого множества $R \subset [0, \vartheta] \times P$

$$\sigma(R) = \lambda\{t : (t, \hat{u}) \in R\}, \quad (4)$$

где λ – мера Лебега на $[0, \vartheta]$. Определим меру $\hat{\mu}$ на $[t_*, \vartheta] \times P^{(2)}$ по правилу: каждому измеримому $R \subset [t_*, \vartheta] \times P^{(2)}$ сопоставим

$$\hat{\mu}(R) \triangleq \sigma(R \cap ([t_*, t^*] \times P^{(2)})) + \mu(R \cap ([t^*, \vartheta] \times P^{(2)})).$$

Заметим, что $\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \hat{\mu}, v) = x_*$ при $t \in [t_*, t^*]$, и $\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \hat{\mu}, v) = \varphi^{(2)}(t, t^*, x_*, \mu, v)$ при $t \in [t^*, \vartheta]$. Следовательно,

$$\varphi^{(2)}(\vartheta, t_*, x_*, \hat{\mu}, v) = \varphi^{(2)}(\vartheta, t^*, x_*, \mu, v) \in F,$$

$$\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \hat{\mu}, v) = \varphi^{(2)}(t, t^*, x_*, \mu, v) \in E[t] \text{ для } t \in [t^*, \vartheta] \text{ и}$$

$$\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \hat{\mu}, v) = x_* \in E[t^*] \subset E[t] \text{ для } t \in [t_*, t^*],$$

поскольку E невозрастает по сечениям. Таким образом, $(t_*, x_*) \in A_v^{(2)}(E)$ для каждого $v \in Q$. Отсюда имеем, что $(t_*, x_*) \in A^{(2)}(E)$.

Также, если $[0, \vartheta] \times F \subset E$, то и $[0, \vartheta] \times F \subset E^{(2)}$. В самом деле, если $(t_*, x_*) \in [0, \vartheta] \times F$, то для любого $v \in Q$ $\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \sigma, v) = x_* \in F \subset E[t]$. \square

Кроме обобщенных управлений введем и программные управления в i -й системе v -системе на отрезке $[t_*, \vartheta]$ – измеримые функции

$$\mathbf{u}^{(i)} : [t_*, \vartheta] \rightarrow P^{(i)}.$$

Для каждого программного управления $\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)$ и позиции (t_*, x_*) существует единственное решение каждого из уравнений

$$\dot{x} = f_v^{(i)}(x, \mathbf{u}^{(i)}(\cdot))$$

с начальными данными $x(t_*) = x_*$. Обозначим это решение через $x^{(i)}(\cdot, t_*, x_* \mathbf{u}^{(i)}(\cdot), v)$. Заметим, что множество обычных программных управлений вкладывается во множество обобщенных программных управлений оператором ставящим в соответствие $\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)$ обобщенное управление $\mu_{\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)}^{(i)}$ по правилу:

$$\mu_{\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)}^{(i)}(R) \triangleq \lambda\{t : (t, \mathbf{u}^{(i)}(t)) \in R\},$$

где λ мера Лебега на $[0, \vartheta]$.

Из правила экстремального сдвига следует, что для всякого обобщенного управления $\mu^{(i)} \in \mathcal{R}_{t_*}^{(i)}$ и любой позиции (t_*, x_*) существует последовательность кусочно-постоянных непрерывных справа программных управлений $\mathbf{u}_k^{(i)}(\cdot)$ такая, что $x^{(i)}(\cdot, t_*, x_*, \mathbf{u}_k^{(i)}(\cdot), v)$ сходится к $\varphi^{(i)}(\cdot, t_*, x_*, \mu^{(i)}, v)$ равномерно на $[t_*, \vartheta]$ [18].

Пусть $u \in P^{(i)}$ ($i = 1, 2$), $v \in Q$, $\tau \geq 0$, обозначим через $S_{u,v}^{(i),\tau}(x)$ отображение сдвига за время τ по траектории, выходящей из позиции $(0, x)$, порожденной постоянными управлениями u и v в i -й системе,

$$S_{u,v}^{(i),\tau}(x) \triangleq x^{(i)}(\tau, 0, x, u, v).$$

Поскольку рассматриваемые системы автономны имеем, что

$$S_{u,v}^{(i),\tau}(x) = x^{(i)}(\tau + t, t, x, u, v) \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Заметим, что для всех $v \in Q$, $\tau > 0$ справедливы следующие свойства:

S1. если $u \in P^{(2)}$ и $u = (0, u_1, \dots, u_p)$, то

$$S_{u,v}^{(2),\tau} = I,$$

где I – тождественное отображение на \mathbb{R}^n ;

S2. если $u \in P^{(2)}$ и $u = (1, u_1, \dots, u_p)$, то

$$S_{u,v}^{(2),\tau} = S_{u',v}^{(1),\tau},$$

где $u' \triangleq (u_1, \dots, u_p) \in P^{(1)}$.

Зафиксируем $v \in Q$. Пусть $\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)$ – некоторое кусочно-постоянная, непрерывная справа функция из $[t_*, t^*]$ в $P^{(i)}$. Обозначим через Δ набор положительных чисел $\{\delta^k\}_{k=1}^m$ таких, что если $\zeta^0 = t_*$, $\zeta^k = \zeta^{k-1} + \delta^k$, $k = \overline{1, m}$, $\zeta^m = t^*$, то значение $\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)$ на $[\zeta^{k-1}, \zeta^k)$ постоянно и равно u^k . В этом случае для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$x^{(i)}(t^*, t_*, x_0, \mathbf{u}^{(i)}(\cdot), v) = S_{u^m, v}^{(i), \delta^m} \circ \dots \circ S_{u^1, v}^{(i), \delta^1}(x_0). \quad (5)$$

Рассмотрим некоторое кусочно постоянное, непрерывное справа управление во второй системе $\mathbf{u}^{(2)}(\cdot)$. Как и в общем случае через $\Delta = \{\delta^k\}_{k=1}^m$ обозначаем набор положительных чисел таких, что если $\zeta^0 = t_*$, $\zeta^k = \zeta^{k-1} + \delta^k$, $k = \overline{1, m}$, и $\zeta^m = \vartheta$, то $\mathbf{u}^{(2)}(t) = u^k = (u_0^k, u_1^k, \dots, u_m^k)$, $t \in [\zeta^{k-1}, \zeta^k)$, $k = \overline{1, m}$.

Построим управление по заданной функции $\mathbf{u}^{(2)}$ в первой системе следующим образом. Выберем те номера k_j , для которых $u_0^{k_j} = 1$, в результате мы получим набор номеров:

$$J \triangleq \{k \in \Delta : u_0^k = 1\} = \{k_1, \dots, k_r\}.$$

Пусть,

$$\gamma^0 = t_*, \quad \gamma^j = \gamma^{j-1} + \delta^{k_j}, \quad j = \overline{1, r}.$$

Обозначим

$$\tau \triangleq \gamma^{j_r}. \quad (6)$$

Определим функцию

$$\mathbf{u}^{(1)}(t) \triangleq \begin{cases} (u_1^{k_j}, \dots, u_p^{k_j}), & t \in [\gamma^{j-1}, \gamma^j), \\ \tilde{u} & t \in [\tau, \vartheta], \end{cases} \quad (7)$$

где \tilde{u} – произвольный элемент P . Обозначим $\varkappa^j \triangleq (u_1^{k_j}, \dots, u_p^{k_j})$.

Определим отображение $\theta(\cdot) : [t_*, \tau] \rightarrow [t_*, \vartheta]$ по правилу:

$$\theta(t) \triangleq \zeta^{k_j-1} + (t - \gamma^{j-1}), \text{ при } t \in [\gamma^{j-1}, \gamma^j), \theta(\tau) \triangleq \vartheta. \quad (8)$$

Отображение θ “добавляет” те промежутки времени, которые были вырезаны при определении $\mathbf{u}^{(1)}$.

Справедлива следующая

Утверждение 2. Для всех $v \in Q$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $t_* \in [0, \vartheta]$ и кусочно-постоянных непрерывных справа функций $\mathbf{u}^{(2)}(\cdot) : [t_*, \vartheta] \rightarrow P^{(2)}$ справедливо равенство

$$x^{(1)}(t, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(1)}(\cdot), v) = x^{(2)}(\theta(t), t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), v) \quad \forall t \in [t_*, \tau]. \quad (9)$$

Здесь функция $\mathbf{u}^{(1)}(\cdot)$ определена в (7), функция $\theta(\cdot)$ определена в (8).

Доказательство. Зафиксируем $t \in [t_*, \tau]$. Существует j такое, что $t \in [\gamma^{j-1}, \gamma^j)$. Следовательно (см. (8)), $\theta(t) \in [\zeta^{k_j-1}, \zeta^{k_j})$. Управление $\mathbf{u}^{(2)}(\cdot)$ постоянно на полуинтервалах $[\zeta^{l-1}, \zeta^l)$, $l = \overline{1, k_j - 1}$ и полуинтервале $[\zeta^{k_j-1}, \theta(t))$. Тогда имеем (см. (5) для $i = 2$), что

$$x^{(2)}(\theta(t), t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), v) = S_{u^{k_j}, v}^{(2), \theta(t) - \zeta^{k_j-1}} \circ S_{u^{k_j-1}, v}^{(2), \delta^{k_j-1}} \circ \dots \circ S_{u^1, v}^{(2), \delta^1}(x_*).$$

Имеем (см. свойство S1), что $S_{u^l, v}^{(2), \delta^l} = I$ для всех $l \notin J$. Отсюда получаем, что

$$x^{(2)}(\theta(t), t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), v) = S_{u^{k_j}, v}^{(2), \theta(t) - \zeta^{k_j-1}} \circ S_{u^{k_j-1}, v}^{(2), \delta^{k_j-1}} \circ \dots \circ S_{u^{k_1}, v}^{(2), \delta^{k_1}}(x_*).$$

Поскольку $u^{k_j} = (1, u_1^{k_j}, \dots, u_p^{k_j})$ из свойства S2 следует, что

$$x^{(2)}(\theta(t), t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), v) = S_{\varkappa^j, v}^{(1), t - \gamma^{j-1}} \circ S_{\varkappa^{j-1}, v}^{(1), \delta^{k_j-1}} \circ \dots \circ S_{\varkappa^1, v}^{(1), \delta^{k_1}}(x_*).$$

Здесь мы воспользовались равенством $\theta(t) - \zeta^{k_j-1} = t - \gamma^{j-1}$ (см. (8)). Из (5) для $i = 1$ получаем, что

$$x^{(1)}(t, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(1)}(\cdot), v) = S_{\varkappa^j, v}^{(1), t - \gamma^{j-1}} \circ S_{\varkappa^{j-1}, v}^{(1), \delta^{k_j-1}} \circ \dots \circ S_{\varkappa^1, v}^{(1), \delta^{k_1}}(x_*).$$

Отсюда утверждение следует. □

Сравним теперь образы двух рассматриваемых операторов программного поглощения.

Утверждение 3. Пусть E – замкнутое множество, невозрастающее по сечениям, $[0, \vartheta] \times F \subset E$. Тогда $A^{(1)}(E) = A^{(2)}(E)$.

Доказательство. Докажем вначале вложение $A^{(1)}(E) \subset A^{(2)}(E)$. Пусть $(t_*, x_*) \in A^{(1)}(E)$. Тогда для каждого $v \in Q$ существует обобщенное управление $\mu^{(1)} \in \mathcal{R}_{t_*}^{(1)}$ со свойством: существует $\tau \in [t_*, \vartheta]$, что $\varphi^{(1)}(\tau, t_*, x_*, \mu^{(1)}, v) \in F$ и $\varphi^{(1)}(t, t_*, x_*, \mu^{(1)}, v) \in E[t]$ $t \in [t_*, \tau]$. Определим $\mu^{(2)} \in \mathcal{R}_{t_*}^{(2)}$ следующим образом: если $R \subset [t_*, \vartheta] \times P^{(2)} = [t_*, \vartheta] \times \{0, 1\} \times P$

$$\begin{aligned} \mu^{(2)}(R) \triangleq & \mu^{(1)}(\{(t, u') : t \in [t_*, \tau], u' \in P, (t, 1, u') \in R\}) + \\ & + \sigma(R \cap ((\tau, \vartheta] \times \{0, 1\} \times P)). \end{aligned}$$

Мера σ определена в доказательстве утверждения 1 (см. (4)).

Заметим, что

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v) &= \varphi^{(1)}(t, t_*, x_*, \mu^{(1)}, v) \text{ при } t \in [t_*, \tau] \text{ и} \\ \varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v) &= \varphi^{(2)}(\tau, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v) \in F \text{ при } t \in [\tau, \vartheta]. \end{aligned}$$

Следовательно, поскольку $F \subset E[t]$, $t \in [0, \vartheta]$, имеем

$$(t_*, x_*) \in A_v^{(2)}(E).$$

В силу произвольности v имеем, что $(t_*, x_*) \in A^{(2)}(E)$ для всех $(t_*, x_*) \in A^{(1)}(E)$.

Теперь докажем обратное вложение. Пусть $(t_*, x_*) \in A^{(2)}(E)$. Следовательно, для каждого $v \in Q$ существует $\mu^{(2)} \in \mathcal{R}_{t_*}^{(2)}$ со свойством: $\varphi^{(2)}(\vartheta, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v) \in F$ и $\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v) \in E[t]$ для всех $t \in [t_*, \vartheta]$. Пусть $\{\mathbf{u}_k^{(2)}(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность кусочно-постоянных программных управлений, такая что последовательность траекторий $x^{(2)}(\cdot, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), v)$ сходится к $\varphi^{(2)}(\cdot, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v)$. Для каждого k определены моменты τ_k и функции $\mathbf{u}_k^{(1)}(\cdot)$, $\theta_k(\cdot)$ (см. (6), (7), (8)). По определению функций $\theta_k(\cdot)$ и утверждению 2,

$$x^{(1)}(t, t_*, x_*, \mathbf{u}_k^{(1)}(\cdot), v) = x^{(2)}(\theta_k(t), t_*, x_*, \mathbf{u}_k^{(2)}(\cdot), v), \quad t \in [t_*, \tau_k], \quad \text{при этом} \quad (10)$$

$$\theta_k(\tau_k) = \vartheta. \quad (11)$$

Пусть,

$$\varepsilon_k \triangleq \max_{t \in [t_*, \vartheta]} \|x^{(2)}(t, t_*, x_*, \mathbf{u}_k^{(2)}(\cdot), v) - \varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v)\|. \quad (12)$$

Из (10) и (11) следует, что

$$\varepsilon_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(\vartheta, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v) &\in F, \\ \varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v) &\in E[t] \quad \forall t \in [t_*, \vartheta], \end{aligned}$$

и E множество, невозрастающее по сечениям, такое, что $F \subset E[t]$ для всех $t \in [0, \vartheta]$, имеем,

$$d(x^{(1)}(\tau_k, t_*, x_*, \mathbf{u}_k^{(1)}(\cdot), v), F) \leq \varepsilon_k, \quad (14)$$

$$d(x^{(1)}(t, t_*, x_*, \mathbf{u}_k^{(1)}(\cdot), v), E[t]) \leq \varepsilon_k, \quad t \in [t_*, \tau_k]. \quad (15)$$

Здесь $d(x, A)$ – расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $A \subset \mathbb{R}^n$

Существует последовательность $\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$ и $\hat{\tau} \in [t_*, \vartheta]$, что $\{\tau_{k_l}\}$ сходится к $\hat{\tau}$. Без ограничения общности можно считать, что $\{\tau_{k_l}\}$ само сходится к $\hat{\tau}$. Обозначим через $\mu^{(1)}$ – слабый предел некоторой подпоследовательности последовательности $\mu_{\mathbf{u}_k}^{(1)}$. Из (10), (12) (13), (14) и (15) следуют вложения:

$$\varphi^{(1)}(\hat{\tau}, t_*, x_*, \mu^{(1)}, v) \in F, \quad \text{и}$$

$$\varphi^{(1)}(t, t_*, x_*, \mu^{(1)}, v) \in E[t], \quad t \in [t_*, \hat{\tau}].$$

Следовательно, $(t_*, x_*) \in A_v^{(1)}(E)$. Поскольку выбор $v \in Q$ был произвольным имеем, $(t_*, x_*) \in A^{(1)}(E)$ для всех $(t_*, x_*) \in A^{(2)}(E)$. \square

4 Доказательство основного утверждения

Утверждение 1 теоремы следует из утверждений 1 и 3 в силу условий: N – множество невозрастающее по сечениям, $[0, \vartheta] \times F \subset N$. Утверждение 2 теоремы следует из предыдущего в силу (3).

Доказательство утверждения 3 теоремы. По условию для всех $s, x \in \mathbb{R}^n$

$$\max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(x, u, v) \rangle. \quad (16)$$

Докажем, что

$$\max_{v \in Q} \min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle = \min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle. \quad (17)$$

Вначале рассмотрим случай, когда

$$\max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle \leq 0,$$

тогда для всех $v \in Q$

$$\min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle \leq 0,$$

откуда для всех $v \in Q$

$$\min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle = \min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle.$$

Следовательно,

$$\max_{v \in Q} \min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle. \quad (18)$$

$$\max_{v \in Q} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle = \begin{cases} 0, & u_0 = 0; \\ \max_{v \in Q} \langle s, f(x, u, v) \rangle, & u_0 = 1. \end{cases} \quad (19)$$

С учетом условия отрицательности $\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(x, u, v) \rangle$ получаем, что

$$\min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(x, u, v) \rangle. \quad (20)$$

Следовательно, для случая $\max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle \leq 0$ (17) доказано.

Пусть теперь

$$\max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle \geq 0.$$

Для тех v для которых $\min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle \geq 0$

$$\min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle = 0.$$

Отсюда имеем,

$$\max_{v \in Q} \min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle = 0.$$

Также для всех $u \in P$ $\max_{v \in Q} \langle s, f(x, u, v) \rangle \geq 0$. Из представления (19) получаем, что

$$\min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle = 0 = \max_{v \in Q} \min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle.$$

□

Доказательство следствия. Для каждого $c > 0$ рассмотрим множество $F_c \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \omega(x) \leq c\}$. Тогда для каждого $c > 0$ задача наведения системы (1) на множество $[0, \vartheta] \times F_c$ эквивалентна задаче наведения системы (2) на множество $\{\vartheta\} \times F_c$.

Зафиксируем позицию (t_0, x_0) существует $\gamma = \gamma(t_0, x_0)$ – нижняя грань тех c при которых задача наведения (1) на $[0, \vartheta] \times F_c$ разрешима. Из эквивалентности задачи наведения системы (1) на множество $[0, \vartheta] \times F_c$ и задачи наведения системы (2) на множество $\{\vartheta\} \times F_c$ следует, что γ – нижняя грань тех c при которых задача наведения (2) на $\{\vartheta\} \times F_c$ разрешима. Отсюда имеем, что функции цены в обоих задачах совпадают. \square

Список литературы

- [1] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи движения // ПММ, 1970, Т. 34, №6, С. 1005–1022.
- [2] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974;
- [3] Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
- [4] Ченцов А. Г. О структуре одной игровой задачи сближения // ДАН СССР, 1975, Т. 224, №6, С. 1272–1275.
- [5] Ченцов А. Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Матем. сб., 1976, Т. 99, №3, С.394–420.
- [6] Ченцов А. Г. К игровой задаче наведения // ДАН СССР, 1976, Т. 226, №1, С. 73–76.
- [7] Чистяков С. В. К решению игровых задач преследования // ПММ, 1977, Т. 41, № 5, С. 825–832.
- [8] Меликян А. А. Цена игры в линейной дифференциальной игре сближения // ДАН, 1977, Т. 237, №3, С. 521–524.
- [9] Ухоботов В. И. Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // ПММ, 1977, Т. 41, №2, С. 358–364.
- [10] Субботин А. И. Обобщенные решения дифференциальных уравнений 1-го порядка. Ижевск: РХД, 2003.
- [11] Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби, М.: Наука, 1991.
- [12] Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И. О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика, 1970, № 2, С.54-63.
- [13] Mitchel I.M., Bayen A.M., Tomlin C.J. A Time-Depend Hamilton-Jacobi Formulation of Reachable Sets for Continuous Dynamic Games // IEEE Transaction on Automatic Control, 2005, V 50, N 7, Pp 947–957.
- [14] Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005, 392с.

- [15] *Ченцов А. Г.* Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения // Депонировано в ВИНТИ 1933-79Деп, 103 стр.
- [16] *Ченцов А. Г.* О дифференциальных играх с ограничением на число коррекций, I. // Депонировано в ВИНТИ 5272-80Деп, 53 стр.
- [17] *Ченцов А. Г.* О дифференциальных играх с ограничением на число коррекций, II. // Депонировано в ВИНТИ 5406-80Деп, 55 стр.
- [18] *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения-уклонения – I // Изв. АН СССР (Техн. кибернетика), 1973, №2, С. 3–18.