ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2016
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Интегро-дифференциальные системы

Представление общего решения уравнения типа Коши–Римана с сингулярной окружностью и особой точкой

А.Б. Расулов, М.А. Бободжанова, Ю.С.Федоров[1]

Аннотация

В теории дифференциальных уравнений в частных производных особое место занимает система уравнений Коши-Римана с регулярными и сингулярными коэффициентами. Уравнения с регулярными коэффициентами достаточно глубоко исследованы, чего нельзя сказать о системе уравнений Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. Применение таких систем во многих прикладных задачах привлекает внимание исследователей к этой теории. Заметим, что в работах многих авторов решения системы Коши-Римана с сингулярной точкой найдены в виде рядов, а компактность основного интегрального оператора доказана только в достаточно малой окрестности сингулярной точки или в условиях типа малости на коэффициенты уравнения. Ранее дифференциальные уравнения с сингулярной точкой и одной сингулярной линией исследовались отдельно. Получение интегральных представлений общего решения уравнений с оператором Коши-Римана с особенностями в коэффициентах по различным многообразиям до сих пор мало исследовано, хотя существует много примеров, подтверждающих прикладное значение таких уравнений. В связи с этим объектом наших исследований являются дифференциальные уравнения с сингулярной точкой и отрезками, или с более сложными сингулярными многообразиями, например, с окружностью. В настоящей работе рассматривается обобщенная система типа Коши-Римана с комплексным сопряжением, коэффициенты которой допускают особенности на окружности и в точке. На основе построенной резольвенты интегрального уравнения найдено интегральное представление общего решения. Во всех этих случаях выделяется особая часть решений, позволяющая детально изучить поведение решений в окрестности сингулярного многообразия. Таким образом, интегральное представление общего решения может быть применимо к исследованию краевых задач.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнение, обобщенная система типа Коши–Римана.

Abstract

In the theory of differential equations in partial derivatives the systems of the Cauchy-Riemann equations with regular and singular coefficients occupy a higly important place. The theory of such equations with regular coefficients was investigated deeply enough. It is not so for the systems of Cauchy-Riemann type with singular coefficients. The applications of such systems in mapy tasks attracts the attention of researches to the theory. Note that in works of many authors solutions of the Cauchy-Riemann system with a singular point were found in the form of a series, and the compactness of the main integral operator was proved only in a small neighborhood of a singular point or on "smallness"conditions on the coefficients. Previously differential equations with a singular point and a singular line were studied separately. So far the obtaining integral representations of the general solution of equations with the Cauchy-Riemann operator with singularities in the coefficients for different varieties is little studied, although there are many examples confirming the importance of the application of such equations. In this connection differential equations with a singular point and segments or more complex singular manifolds (for example a circle) are the object of our research. In this paper we consider the generalized system of Cauchy-Riemann with complex conjugation, whose coefficients have singularities on the circle and in a point. On the basis of the constructed resolvent we found an integral representation of the general solution. In all these cases a special part of a solution is separated that allows us to study the behavior of solutions in a neighborhood of singular manifolds in detail. Thus the integral representation of the general solution may be applied to the study of boundary value problems.

Keywords: singular integral equation, generalized system of Cauchy-type–Riemann.

Введение. В классе эллиптических систем первого порядка особое место занимает обобщенная система Коши-Римана

$$u_{\bar{z}} + a(z)u(z) + b(z)\overline{u} = f(z), \qquad (1_0)$$

где $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y-$ оператор Коши-Римана, $a(z), b(z), f(z)$-заданные в ограниченной области G функции, $U(z)$-неизвестная функция.

Существует несколько различных математических теорий уравнения (1_0), которые обобщают методы теории функций комплексного переменного. В первую очередь следует отметить работу Л.Берса [2], где обобщены операции интегрирования по комплексному переменному для системы (1_0). Такой подход получил известное завершение в теории псевдоаналитических функций. В работах украинского математика Г.Н. Положего была развита теория p-аналитических функций, которая по своим идеям близка к работам Л.Берса. Другое направление, получившее название "Обобщенные аналитические функции", развивалось школой И.Н.Векуа [3] и его последователей (Б.В.Боярский и др.). Здесь на основе использования аппарата функционального анализа развивается идея соответствия между функциями комплексного переменного $\phi(z)$ и решениями системы (1_0).

Теория Векуа построена в предположении, что функции $a(z), b(z), f(z)$ принадлежат пространству $L^p(G), p > 2$. Коэффициенты таких систем могут допускать "слабые" особенности, лимитируемые требованием $p-$ интегрируемости. В частности, если $a(z), b(z)$ обращается в бесконечность в некоторой изолированной особой точке $z = 0$, то порядок этой особенности должен быть строго меньше единицы. Поэтому даже уравнения с такими коэффициентами как $a(z) = 1/z, b(z) = 1/\overline{z},$ не охватываются теорией Векуа.

Исследованию задач для уравнения (1_0) с коэффициентами, имеющими особенности первого порядка в изолированной особой точке или в линии, посвящены работы А.В.Бицадзе [1], Л.Г.Михайлова [4], З.Д. Усманова [5], Н.Р.Раджабова [6] , А. Тунгатарова [7], Бергера Н [8], М.Райссега [9], Meziani A [10], С.Б.Климентова, и др.

Особенность многих из этих работ характеризуется тем, что многообразия решения обобщенной системы Коши–Римана представлены в виде рядов типа Фурье или степенных рядов в окрестности изолированной особой точки.

Заметим, что интерес к этой области дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами не случаен, так как он непосредственно связан не только с развитием принципиально новых методов анализа, но также с их применением к решению задач изгибаний поверхностей и деформации, осесимметрической теории поля, тонких безмоментных оболочек и т.д.(см.[1],

[3]).

1. Постановка задачи. Пусть область G содержит точку $z = 0$ и окружность $L = \{z : |z| = R\}$ и ограничена простым ляпуновским контуром ∂G, ориентированным против часовой стрелки. Удобно положить $G_0 = G \setminus \{0 \bigcup L\}$ и $G_\varepsilon = G \setminus \{g_{0\varepsilon} \bigcup g_{1\varepsilon}\}$ с малым $\varepsilon > 0$, где $g_{0\varepsilon} = \{z : |z| < \varepsilon\}$ и $g_{1\varepsilon} = \{z : R - \varepsilon < |z| < R + \varepsilon\}$. В области G_0 рассмотрим уравнение

$$u_{\overline{z}} - z(|z|(|z| - R))^{-1}a(z)u + |z|^{-m}b(z)\overline{u} = f(z). \tag{1}$$

где $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y,\ \ a, b \in C(\overline{G})$ и правой частью $f \in L^p(G)$, где $0 < m < 1$ и $p > 2$.

В настоящей работе для обобщенной системы типа Коши–Римана с комплексным сопряжением (1), коэффициенты которой допускают особенность в окружности $L = \{z : |z| = R\}$ и слабую особенность в точке $z = 0$, найдено интегральное представление общего решения.

Под обобщенным решением уравнения (1) понимается функция $u \in C(\overline{G}\setminus\{0 \bigcup L\})$, имеющая первую обобщенную производную по $\overline{z}$ принадлежащие классу $L^p(G_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим сначала частный случай уравнения (1) с $b = 0$, т.е. уравнение

$$u_{\overline{z}} - Au = f, \tag{2}$$

где для краткости положено $A(z) = z(|z|(|z| - R))^{-1}a(z),\ \ a(z) \in C(\overline{G})$. В данном случае коэффицент A ограничен в начале координат и имеет неподвижную особенность на окружности L.

В получении общего решения последнего уравнения и его описании существенную роль играет интегральный оператор И.Н. Векуа [3]

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_G \frac{f(\zeta)d_2\zeta}{\zeta - z},$$

с плотностью $f \in L^p(G),\ p > 2$. Здесь и ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади. Хорошо известно, что этот оператор ограничен из $L^p(G)$ в соболевское пространство $W^{1,p}(G)$ и имеет место вложение $W^{1,p}(G) \subseteq C^\alpha(\overline{G})$ с показателем Гельдера $\alpha = (p - 2)/p$. В частности, этот оператор компактен в пространстве $L^p(G)$. В дальнейшем, когда точное значение α несущественно, используем класс $H(\overline{G})$ функций, удовлетворяющих условию Гельдера с некоторым показателем [11]. Аналогичный оператор по области G_ε обозначаем T_ε, он используется по отношению к коэффициенту $f = A$.

Если функции $A, f \in L^p(G)$, то $\Omega_0 = TA \in W^{1,p}(G)$ является решением уравнения $(\Omega_0)_{\bar{z}} - A = 0$. Следовательно, для функции $U_0 = e^{-\Omega_0}U$ имеем соотношение

$$(U_0)_{\bar{z}} = e^{-\Omega_0}U_{\bar{z}} - Ae^{-\Omega_0}U = e^{-\Omega_0}f.$$

В результате приходим к представлению

$$U = e^{\Omega_0}(\phi + T(e^{-\Omega_0}f)]$$

с произвольной аналитической в G функцией $\phi \in C(\overline{G})$. Эта процедура получения общего решения хорошо известна [3].

2. Представление явного решения в случае $b(z) = 0$. В общем случае сингулярного коэффициента A ее также можно применить при условии, что известно некоторое решение уравнения $\Omega_{\bar{z}} = A$ в области G_0. Следующая лемма [12] описывает одно из таких решений.

Лемма 1. *В предположении*

$$A_0(z) = z(a(z) - a(R))(|z|(|z| - R))^{-1} \in L^p(G) \tag{3}$$

сингулярный интеграл

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon \to 0}(T_\varepsilon A)(z), \quad z \neq L,$$

существует и определяет функцию, которая представима в виде

$$\Omega(z) = 2a(R)\ln||z| - R| + h(z);$$

где $h(z) \in H(\overline{G})$ *определяется равенством*

$$h(z) = (TA_0)(z) + \frac{a(R)}{\pi i}\int_{\partial G}\frac{\ln|\rho - R|d\zeta}{\zeta - z}.$$

С помощью леммы 1 по обычной процедуре [3] непосредственно приходим к следующему представлению.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (3) и* $e^{-\Omega}f \in L^p(G)$.

Тогда общее решение уравнения (2) в классе $C(\overline{G}\backslash L)$ *дается формулой*

$$u = e^{\Omega}[\phi + T(e^{-\Omega}f)], \tag{4}$$

где $\phi \in C(\overline{G}\backslash\{L\})$ *аналитична в области* $C(\overline{G}\backslash\{L\})$.

Утверждение показывает, что

$$u = O(1)(||z| - R|^{2a(R)}), \ \ |z| \to R.$$

3. Представление неявного решения в случае $b(z) \neq 0$. Теперь рассмотрим случай, когда коэффициенты $a(z) \neq 0, b(z) \neq 0$ для любого $z \in \overline{G}$. Заметим, что теперь область G содержит сингулярное многообразие, который состоит из двух неподвижных особенностей: точка $z = 0$ и окружность $L = \{z : |z| = R\}$. Используя общее решение уравнения (2) приходим к следующему интегральному уравнению

$$V + T(B\overline{V}) = \phi + F, \tag{5}$$

где $V = e^{-\Omega}u, \ B = |z|^{-m}b(z)e^{-2i\mathrm{Im}\Omega}, \ F = T(e^{-\Omega}f)$, причем значение Ω указан в леммы 1.

В случае отсутствия сингулярности коэффициентов подобное уравнение возникало у И.Н. Векуа [3], где для его обращения он предложил метод последовательных приближений. Однако этот метод применим лишь в предположении, что коэффициент b по модулю достаточно мал. В общем случае необходимо построить в явном виде резольвенту этого уравнения, что и является предметом рассмотрения в следующем пункте.

4. Построение резольвенты интегрального уравнения. Для рассмотрения интегрального уравнения (5) необходимо предварительно изучить действие в различных пространствах интегрального оператора вида

$$(T_0\varphi)(z) = \int_G \frac{\varphi(\zeta)d_2\zeta}{|\zeta|^{\alpha_0}|\zeta - z|^{\alpha_1}}, \quad z \in G, \tag{6}$$

с положительными α_j.

Лемма 2. *Пусть*

$$0 < \alpha_0 < 1 \leq \alpha_1 < 2, \quad \alpha_0 + 2\alpha_1 < 3, \quad p > 2/(3 - \alpha_0 - 2\alpha_1), \tag{7}$$

так что

$$0 < \mu_0 = 3 - \alpha_0 - 2\alpha_1 - 2/p < 1. \tag{8}$$

Тогда оператор T_0 *ограничен* $L^p(G) \to C^\mu(\overline{G})$.

Доказательство. Отметим сначала, что если $0 < \beta_0 < 1 < \beta_1 < 2 - \beta_0$, то имеет место равномерная по $z \in \mathbb{C}$ оценка

$$\int_{|\zeta|\leq 1} \frac{d_2\zeta}{|\zeta + z|^{\beta_0}|\zeta|^{\beta_1}} \leq C_\alpha. \tag{9}$$

Аналогично, при $0 < \beta_0 < 1$, $\beta_2 > 2$ интеграл

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{d_2\zeta}{|\zeta|^{\beta_0}(1+|\zeta|^{\beta_2})} < \infty. \tag{10}$$

Обратимся к интегралу $\psi = T_0\varphi$ в (6). Полагая $\beta_0 = q\alpha_0$, $\beta_1 = q\alpha_1$, на основании неравенства Гельдера можем написать

$$|\psi(z)| \le |\varphi|_{L^p} \left(\int_G \frac{d_2\zeta}{|\zeta)|^{\beta_0}|\zeta - z|^{\beta_1}} \right)^{1/q},$$

так что в силу (9),(10) имеем оценку

$$|\psi(z)| \le C_0|\varphi|_{L^p}. \tag{11}$$

Аналогичным образом для любых точек $z_1, z_2 \in G$ справедливо неравенство

$$|\psi(z_1) - \psi(z_2)| \le \alpha_1 R^{\alpha_1 - 1}|z_1 - z_2| \left(\int_G \frac{d_2\zeta}{|\zeta)|^{\alpha_0 q}|\zeta - z_1|^{\alpha_1 q}|\zeta - z_2|^{\alpha_1 q}} \right)^{1/q} |\varphi|_{L^p},$$

где R есть диаметр области G. Здесь учтено, что $1 - t^\alpha \le \alpha(1-t)$ при $0 < t \le 1 \le \alpha$ и, следовательно,

$$(|u_1|^\alpha - |u_2|^\alpha) \le \alpha|u_1|^{\alpha-1}(|u_1| - |u_2|) \le \alpha|u_1|^{\alpha-1}|u_1 - u_2| \tag{12}$$

при $|u_1| \ge |u_2|$.

Замена $\zeta - z_1 = |z_1 - z_2|\zeta'$ приводит интеграл в правой части этого неравенства к выражению

$$|z_1 - z_2|^{2-(\alpha_0+2\alpha_1)q} \int_{G'} \frac{d_2\zeta}{|\zeta + \zeta_0|^{\alpha_0 q}|\zeta|^{\alpha_1 q}|\zeta - \zeta_1|^{\alpha_1 q}},$$

где G' есть образ G при преобразовании $\zeta \to \zeta'$ и положено $\zeta_0 = z_1/|z_1 - z_2|$, $\zeta_1 = -(z_1 - z_2)/|z_1 - z_2|$. Интеграл здесь разобьем на сумму интегралов по $G_0 = G' \cap \{|\zeta| \le 1/2\}$, $G_2 = G' \cap \{|\zeta - \zeta_1| \le 1/2\}$ и $G_1 = G' \setminus (G_0 \cup G_2)$. Интегралы по G_0 и G_2 равномерно ограничены в силу (9), а интеграл по G_1 обладает аналогичным свойством в силу (10). В результате приходим к оценке

$$|\psi(z_1) - \psi(z_2)| \le C_1|\varphi|_{L^p}|z_1 - z_2|^{1+2/q-\alpha_0-2\alpha_1},$$

которая вместе с (9), (10) и (11) завершает доказательство леммы 2.

Обратимся к уравнению (1) с ненулевым коэффициентом b, предполагая $n > 1$, $0 < m < 1$. Увеличивая несколько m, без ограничения общности можно считать, что функция $b(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to 0$ и, следовательно, в обозначениях теоремы 1

$$b_1(\zeta) = 2^{-m} e^{-2i\mathrm{Im}\,\Omega(\zeta)} b(z) \in C(\overline{G}). \tag{13}$$

Как будет показано ниже, в представлении общего решения этого уравнения важную роль играют $\mathbb{R}-$ линейный интегральный оператор

$$(K\varphi)(z) = \frac{1}{\pi} \int_G \frac{b_1(\zeta)}{|\zeta|^m (\zeta - z)} \overline{\varphi(\zeta)} d_2\zeta, \quad z \in G, \tag{14}$$

и связанное с ним уравнение Фредгольма $\varphi + K\varphi = f$.

Теорема 2. (a) *Однородное уравнение $\varphi + K\varphi = 0$ в классе $C(\overline{G})$ имеет конечное число линейно независимых (над полем $\mathbb{R}$) решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in H(\overline{G})$ и существуют такие линейно независимые суммируемые функции $h_1, \ldots, h_n \in L(G)$, что условия ортогональности*

$$\mathrm{Re} \int_G f(\zeta) h_j(\zeta) d_2\zeta = 0, \quad 1 \le j \le n, \tag{15}$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного уравнения $\varphi + K\varphi = f$.

(b) *Для заданного $1 < \alpha < 2$, которое по отношению к $\alpha_0 = m$ удовлетворяет условиям (7), найдутся такие функции $P_1(z,\zeta), P_2(z,\zeta) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$, что при выполнении условий (15) функция*

$$\varphi(z) = f(z) + (Pf)(z), \quad (Pf)(z) = \frac{1}{\pi} \int_G \frac{[P_1(z,\zeta) f(\zeta) + P_2(z,\zeta) \overline{f(\zeta)}] d_2\zeta}{|\zeta|^m |\zeta - z|^\alpha}, \tag{16}$$

служит одним из решений уравнения $\varphi + K\varphi = f$.

(c) *Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ оператор P ограничен $C(\overline{G}) \to C^\varepsilon(\overline{G})$.*

Доказательство. (a) К оператору K можно применить лемму 2 с $\alpha_0 = m$, $\alpha_1 = 1$, так что $\mu = 2/q - m - 1 = 1 - m - 2/p$. Согласно этой лемме оператор K ограничен $L^p(G) \to C^\mu(\overline{G})$ и, в частности, компактен в пространстве $C(\overline{G})$. На основании теоремы Рисса [15](с.117) отсюда следует, что однородное уравнение $\varphi + K\varphi = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, которые, очевидно, принадлежат $C^\mu(\overline{G})$.

Рассмотрим союзный с K оператор K' относительно билинейной формы $\langle \varphi, \psi \rangle$, определяемой левой частью (15). Другими словами, этот оператор связан с K тождеством

$$\langle K\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, K'\psi\rangle. \tag{17}$$

В явном виде оператор K' действует по формуле

$$(K'\psi)(z) = \frac{\overline{b_1(z)}}{\pi|z|^m}\int_G \frac{\psi(\zeta)d_2\zeta}{\bar z - \bar\zeta}.$$

Выберем $p_0 > 1$ столь близким к 1 и $p_1 > 1$ столь большим, чтобы $|\zeta|^{-m}\psi(\zeta) \in L^{p_0}(G)$ для любой функции $\psi \in L^{p_1}(G)$ (с оценкой соответствующих норм). С другой стороны, интеграл в правой части (14) представляет собой свертку функции $\widetilde{\psi}$, полученной продолжением ψ нулем на всю плоскость, с функцией $\bar\zeta^{-1}$. Поэтому на основании неравенства Юнга для сверток (см., например, [14], С.42) оператор K' ограничен в $L^{p_0}(G)$. Аппроксимируя $\bar\zeta^{-1}$ гладкими срезывающими функциями, убеждаемся, что этот оператор и компактен в данном пространстве.

По теореме Рисса однородное уравнение $\psi + K'\psi = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений $h_j \in L^{p_0}(G)$, $1 \le j \le n'$. Утверждается, что $n' = n$ и условия (15) необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного уравнения $\varphi + K\varphi = f$. В самом деле, по теореме Рисса коядро оператора $1 + K$ в сопряженном пространстве $[C(\overline{G}]^*$ имеет размерность n. В силу (17) условия $\langle f, h_j\rangle = 0$, $1 \le j \le n'$, необходимы для разрешимости уравнения $\varphi + K\varphi = f$. Другими словами, функции h_j входят в коядро оператора $1+K$ и, следовательно, $n' \le n$. В частности, при $n' = n$ условия (15) будут и достаточными для разрешимости этого уравнения. Остается заметить, что аналогичные соображения, примененные к уравнению $\psi + K'\psi = g$ приводят к неравенству $n \le n'$.

(b) Выберем в пространстве $C^\mu(\overline{G})$ системы функций f_j, $1 \le j \le n$, и g_j, $1 \le j \le n$, биортогональные, к соответственно, h_j, $1 \le j \le n$, и φ_j, $1 \le j \le n$, т.е.

$$\langle f_i, h_j\rangle = \langle g_i, \varphi_j\rangle = \delta_{ij}, \tag{18}$$

где δ означает символ Кронекера. Утверждается, что оператор

$$N\varphi = \varphi + K\varphi + 2\sum\nolimits_1^n \langle \varphi, g_j\rangle f_j \tag{19}$$

обратим в пространстве $C(\overline{G})$. В самом деле, в соответствии с теоремой Рисса достаточно убедиться, что его ядро нулевое. Пусть $N\varphi = 0$, тогда $\varphi + K\varphi = -2f$, где f означает сумму в правой части (19), так что f удовлетворяет условиям (15). На основании (18) отсюда $\langle\varphi, g_j\rangle = 0$ для всех j. Поскольку по условию φ есть линейная комбинация функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, в силу (18) функция $\varphi = 0$.

Согласно (19) оператор N действует по формуле

$$(N\varphi)(z) = \varphi(z) + \frac{1}{\pi}\int_G \frac{c(z,\zeta)\varphi(\zeta) + [b_1(\zeta) + \overline{c(z,\zeta)}]\overline{\varphi(\zeta)}}{|\zeta|^m(\zeta - z)} d_2\zeta, \quad z \in G,$$

где положено $c(z,\zeta) = |\zeta|^m(\zeta - z)\mathrm{Re}\sum_1^n f_j(z)g_j(\zeta)$. Переходя от φ к паре $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ вещественных функций $\varphi_1 = \mathrm{Re}\,\varphi$ и $\varphi_2 = \mathrm{Im}\,\varphi$ и полагая

$$c(z,\zeta) = c_1(z,\zeta) + ic_2(z,\zeta),\ b_1(\zeta) = b_{11}(\zeta) + ib_{12}(\zeta),\ \frac{|z-\zeta|^\alpha}{z-\zeta} = d_1(z,\zeta) + id_2(z,\zeta),$$

этот оператор можем записать в форме

$$N\varphi = \varphi + T(q)\varphi, \quad [T(q)\varphi](z) = \int_G \frac{q(z,\zeta)\varphi(\zeta)d_2(\zeta)}{|\zeta|^m|\zeta - z|^\alpha} d_2\zeta, \quad z \in G, \tag{20}$$

где $1 < \alpha < 2$ и q означает $2\times 2-$ матрицу- функцию

$$q(z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} d_1(2c_1 + b_{11}) + d_2 b_{12} & d_1(b_{12} - 2c_2) - d_2 b_{11} \\ -d_2(2c_1 + b_{11}) + d_1 b_{12} & -d_2(b_{12} - 2c_2) - d_1 b_{11} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $c_j \in C^{\varepsilon_1}(\overline{G}\times\overline{G})$, $\varepsilon_1 = \min(m,\mu)$ и $d_j \in C^{\varepsilon_2}(\overline{G}\times\overline{G})$, $\varepsilon_2 = \alpha - 1$. Поэтому функция $q(z,\zeta)$ непрерывна на $\overline{G}\times\overline{G}$ и по переменной z принадлежит $C^\varepsilon(\overline{G})$, $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, равномерно по $\zeta \in G$.

В частности, на основании леммы 2 оператор $T(q)$ указанного вида компактен в пространстве $C(\overline{G})$.

Утверждается, что

$$[1 + T(q)]^{-1} = 1 + T(p) \tag{21}$$

с некоторой матрицей- функцией $p \in C(\overline{G}\times\overline{G})$. При $m = 0$ этот факт установлен в [13], в общем случае действуем по этой же схеме. Именно, введем в классе $C(\overline{G}\times\overline{G})$ билинейную операцию $p * q$ по формуле

$$(p*q)(z,\zeta) = |z-\zeta|^\alpha \int_G \frac{p(z,t)q(t,\zeta)d_2 t}{|t|^m|t-z|^\alpha\,|t-\zeta|^\alpha}, \quad z \neq \zeta.$$

Это определение мотивировано тем, что перестановка повторного интегрирования $T(p)[T(q)\varphi]$ приводит к равенству $T(p)T(q) = T(p*q)$.

Аналогично лемме 2 проверяется, что функция $p * q$ непрерывна и $(p*q)(z,\zeta) = |z-\zeta|^{2-m-\alpha}O(1)$ при $|z-\zeta| \to 0$, причем билинейное отображение $(p,q) \to p*q$ ограничено $C \times C \to C$. Кроме того при фиксированном p линейный оператор $R(p)q = p * q$ компактен в пространстве $C(\overline{G} \times \overline{G})$. Пользуясь этими фактами, совершенно аналогично [13] устанавливается существование ядра $p \in C(\overline{G} \times \overline{G})$ со свойством (20). Возвращаясь от пары $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ вещественных функций к одной комплексной $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, оператор $T(p)f$ можем записать в форме оператора Pf, фигурирующего в (16), где комплексные функции $P_j(z,\zeta)$ обладают тем же свойством, что и матрица- функция $p(z,\zeta)$.

(c) Достаточно показать, что в предыдущих обозначениях оператор $T(p)$ ограничен $C(\overline{G}) \to C^{\varepsilon}(\overline{G})$. Легко видеть, что при $\varepsilon \le 3 - 2\alpha - m$ этот факт будет следовать из оценки

$$|p(z_1,\zeta) - p(z_2,\zeta)| \le C|z_1 - z_2|^{\varepsilon}[|\zeta - z_1|^{-m} + |\zeta - z_2|^{-m}], \tag{22}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от z_j и ζ.

В самом деле, тогда разность $|[T(p)\varphi](z_1) - [T(p)\varphi](z_2)|$ не превосходит

$$C|\varphi|_0 \left[\int_{|\zeta - z_1| \le R} \left(\frac{1}{|\zeta - z_1|^m} + \frac{1}{|\zeta - z_2|^m}\right) \frac{|z_1 - z_2|^{\varepsilon} d_2\zeta}{|\zeta|^m |\zeta - z_1|^{\alpha}} + \int_{\mathbb{C}} \frac{|z_1 - z_2| d_2\zeta}{|\zeta|^m |\zeta - z_1|^{\alpha} |\zeta - z_2|^{\alpha}}\right]$$

с некоторой постоянной C, где R означает диаметр области G. Подстановка $\zeta - z_1 = |z_1 - z_2|t$ преобразует выражение в квадратных скобках к виду

$$|z_1 - z_2|^{\varepsilon + 2 - \alpha - 2m} \int_{|t| \le R} \left(\frac{1}{|t|^m} + \frac{1}{|t - w|^m}\right) \frac{d_2 t}{|t - u|^m |t|^{\alpha}} +$$

$$+ |z_1 - z_2|^{3 - 2\alpha - m} \int_{\mathbb{C}} \frac{d_2 t}{|t - u|^m |t|^{\alpha} |t - w|^{\alpha}},$$

где положено $u = -z_1/|z_1 - z_2|$ и $w = -(z_1 - z_2)/|z_1 - z_2|$. На основании (9), (10) интегралы здесь равномерно ограничены, что и завершит доказательство (c) и теоремы.

Обратимся к обоснованию оценки (22). Равенство (21) влечет соотношение $p + q + q * p = 0$ для операторных ядер. В развернутом виде

$$-p(z,\zeta) = q(z,\zeta) + \int_G \left|\frac{z - \zeta}{(z - t)(\zeta - t)}\right|^{\alpha} \frac{q(z,t)p(t,\zeta)}{|t|^m} d_2 t.$$

Как было отмечено, функция $q(z,t)p(t,\zeta)$ по переменной z принадлежит $C^{\varepsilon}(\overline{G})$ равномерно по $\zeta, t \in G$. Поэтому с учетом (9) оценка (22) вытекает из следующей леммы для функции

$$h(z,\zeta) = \int_G \left| \frac{z-\zeta}{(z-t)(\zeta-t)} \right|^\alpha \frac{d_2 t}{|t|^m}.$$

Лемма 3. *Для любых* $z_1, z_2, \zeta \in G$, $z_j \neq \zeta$, *справедлива оценка*

$$|h(z_1,\zeta) - h(z_2,\zeta)| \le C|z_1 - z_2|^{3-2\alpha-m}[|z_1-\zeta|^{-m} + |z_2-\zeta|^{-m}], \tag{23}$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* z_j *и* ζ.

Доказательство. Поскольку

$$u_j = \frac{z_j - \zeta}{(z_j - t)(\zeta - t)} = \frac{1}{\zeta - t} - \frac{1}{z_j - t}, \quad j = 1, 2,$$

на основании (12) имеем оценку

$$|h(z_1,\zeta) - h(z_2,\zeta)| \le \alpha |z_1 - z_2| \int_{\mathbb{C}} \frac{(|u_1|^{\alpha-1} + |u_2|^{\alpha-1}) d_2 t}{|t|^m |z_1 - t||z_2 - t|},$$

которую можно переписать в форме

$$|h(z_1,\zeta) - h(z_2,\zeta)| \le \alpha |z_1 - z_2|(|z_1-\zeta|^{\alpha-1} I_1 + |z_2-\zeta|^{\alpha-1} I_2), \tag{24}$$

где положено

$$I_1 = \int_{\mathbb{C}} \frac{d_2 t}{|t|^m |z_1 - t|^\alpha |z_2 - t||\zeta - t|^{\alpha-1}}, \quad I_2 = \int_{\mathbb{C}} \frac{d_2 t}{|\mathrm{Im}\, t|^m |z_2 - t|^\alpha |z_1 - t||\zeta - t|^{\alpha-1}}.$$

Замена $t - z_j = |z_1 - z_2| s$ под знаком интеграла I_j преобразует его к виду

$$I_j = |z_1 - z_2|^{2-2\alpha-m} \widetilde{I}_j, \quad \widetilde{I}_j = \int_{\mathbb{C}} \frac{d_2 t}{|t + v_j|^m |t|^\alpha |t - u_j||t - w_j|^{\alpha-1}}, \tag{25}$$

где положено

$$v_j = \frac{z_j}{|z_1 - z_2|},\ u_1 = -u_2 = \frac{z_1 - z_2}{|z_1 - z_2|},\ w_j = \frac{z_j - \zeta}{|z_1 - z_2|}.$$

Рассмотрим зависимость интеграла I_1 от параметров v_1, w_1 и $|u_1| = 1$. Если одновременно $|w| \ge 1/4$ и $|w - u| \ge 1/4$, то как и при доказательстве леммы 2 с помощью оценок (9), (10) убеждаемся, что интеграл $\widetilde{I}_1$ равномерно ограничен по всем трем параметрам. В результате для рассматриваемого случая приходим к справедливости оценки (23) леммы.

Оставшиеся два случая $|w| \le 1/4$ и $|w-u| \le 1/4$ рассмотрим отдельно. Пусть $|w_1| \le 1/4$. Тогда

$$\widetilde{I}_1 \le C\left(\int_{|t|\le 1/2} \frac{d_2t}{|t+v_1|^m|t|^\alpha|t-w_1|^{\alpha-1}} + \int_{|t|\ge 1/2} \frac{d_2t}{|t+v_1|^m|t|^{2\alpha-1}|t-u_1|}\right).$$

Как и выше убеждаемся, что второй интеграл равномерно ограничен, поэтому после переобозначения константы можем написать

$$\widetilde{I}_1 \le C(1+I_1'), \quad I_1' = \int_{|t|\le 1/2} \frac{d_2t}{|t+v_1|^m|t|^\alpha|t-w_1|^{\alpha-1}}.$$

Полагая $t = s|w_1|$, получим

$$I_1' = |w|^{3-2\alpha-m} \int_{|w_1||t|\le 1/2} \frac{d_2t}{|t+v_1'|^m|t|^\alpha|t-w_1'|^{\alpha-1}},$$

где $|w_1'| = 1$. Нетрудно видеть, что с некоторыми константами интеграл здесь оценивается как

$$C_1 + C_2 \int_{2\le|s|\le 1/(2|w_1|)} \frac{d_2t}{|t+v_1'|^m|t|^{2\alpha-1}} \le C_3|w_1|^{2\alpha-3}.$$

Таким образом, имеем оценку $\widetilde{I}_1 \le C|w_1|^{-m}$. Вспоминая выражение для w, совместно с (25)

отсюда приходим к оценке

$$I_1 \le C|z_1-z_2|^{2-2\alpha}|z_1-\zeta|^{-m}. \tag{26}$$

Пусть далее $|w_1-u_1| \le 1/4$. Тогда

$$I_1 \le C\left(\int_{|t-u_1|\le 1/2} \frac{d_2t}{|t+v_1|^m|t-u_1||t-w_1|^{\alpha-1}} + \int_{|t-u_1|\ge 1/2} \frac{d_2t}{|t+v_1|^m|t|^\alpha(1+|t|^\alpha)}\right).$$

Как и в предыдущем случае, второй интеграл равномерно ограничен, так что после переобозначения константы можем написать

$$I_1 \le C(1+I_1'), \quad I_1' = \int_{|t-u_1|\le 1/2} \frac{d_2t}{|t+v_1|^m|t-u_1|t-w_1|^{\alpha-1}}.$$

Полагая $t-u_1 = |u_1-w_1|s$, получим

$$I_1' = |u_1-w_1|^{2-\alpha-m} \int_{|u_1-w_1||t|\le 1/2} \frac{d_2t}{|t+\tilde{v}_1'|^m|t|^\alpha|t-w_1'|},$$

где $|w_1'| = 1$. Как и выше интеграл здесь оценивается как $O(1)|u_1 - w_1|^{\alpha-2}$, так что $I_1' \le C|u_1 - w_1|^{-m}$. Учитывая выражения для w_1 и u_1, совместно с (25) отсюда приходим к оценке

$$I_1 \le C|z_1 - z_2|^{2-2\alpha}|z_2 - \zeta|^{-m}.$$

Объединив ее с (26), можем утверждать, что равномерно по всем трем параметрам

$$I_1 \le C|z_1 - z_2|^{2-2\alpha}[|z_1 - \zeta|^{-m} + |z_2 - \zeta|^{-m}].$$

Совершенно аналогично эта оценка устанавливается и для интеграла I_2, что совместно с (24) приводит к справедливости (23).

5. Представление решения в общем случае. Обратимся к уравнению (5) с ядром $B = |z|^{-m}b(z)e^{-2i\mathrm{Im}\Omega}$, а также с правой частью $\phi + F$, где $F = T(e^{-\Omega}f)$. Заметим, что $\Omega(z)$ согласно леммы 1 определяется равенством:

$$\Omega(z) = 2a(R)\ln||z| - R| + h(z);$$

где

$$h(z) = (TA_0)(z) + \frac{a(R)}{\pi i}\int_{\partial G}\frac{\ln|R-\rho|d\zeta}{\zeta - z},$$

причем $h(z) \in H(\overline{G})$.

Теорема 3. *Пусть* $n > 1, 0 < m < 1$, *выбрано* $1 < \alpha < (3-m)/2$ *и выполнены условия теоремы 1. Пусть* $e^{-\Omega}f \in L^p(G), p > 2$, *так что функция* $F \in H(\overline{G})$. *Тогда в обозначениях теоремы 2 любое решение* u *уравнения (1) в классе* $u \in C(\overline{G}\backslash\{0\bigcup L\})$ *представимо в виде*

$$U = e^{\Omega}\left[\phi + P\phi + F + PF + \sum\nolimits_1^n \xi_j\varphi_j\right] \qquad (27)$$

с произвольными $\xi_j \in \mathbb{R}$, *где интегральный оператор* P *определяется формулой (16), а функция* $\phi(z) \in H(\overline{G})$ *аналитична в областях* G *и удовлетворяет условиям*

$$\mathrm{Re}\int_G(\phi + F)(\zeta)h_j(\zeta)d_2\zeta = 0, \quad 1 \le j \le n.$$

Доказательство. Согласно (5) подстановка $u = e^{\Omega}V$ приводит (1) к уравнению $V_{\bar z} + B\overline{V} = e^{-\Omega}f$ с коэффициентом $B = |z|^{-m}e^{\overline{\Omega}-\Omega}b$. В свою очередь в обозначениях (13),(14) это уравнение в классе $V \in H(\overline{G})$ равносильно интегральному уравнению $V + KV = \phi + F$, где $F = T(e^{-\Omega}f) \in H(\overline{G})$, функция $\phi \in H(\overline{G})$ аналитична в области G. Поэтому остается применить к этому уравнению теорему 2.

Список литературы

[1] **А. В.Бицадзе**, Некоторые классы уравнений в частных производных, Наука, М., 1981.

[2] **Bers L.** Theory of Pseudo Analityc Functions. Lecture Notes. - NewYork. - 1953.

[3] **И.Н.Векуа**, Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959.

[4] **Л. Г. Михайлов**, Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами, ТаджикНИИНТИ, Душанбе, 1963.

[5] **З.Д.Усманов**, Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой, Душанбе, Изд. АН Тадж. ССР, 1993.

[6] **Н. Р.Раджабов**, Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами,Изд.ТГУ, Душанбе, 1992.

[7] **А.Тунгатаров, С. А. Абдыманапов**, Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами, Г– ылым, Алматы, 2005.

[8] **Begehr H, Dao-Qing Dai.** On continuous solutions of a generalized Cauchy-Riemann system with more than one singularity // J. Differential Equations. - 2004. - Vol. 196. - P. 67 - 90.

[9] **Reissig M., Timofeev A.** Dirichlet problems for generalized Cauchy-Riemann systems with singular coefficients // Complex Variables. - 2005. - Vol.50.-№ 7(11). - P. 653 - 672.

[10] **Meziani A.** Representation of solutions of a singular CR equation in the plane // Complex Var. and Elliptic Eq. - 2008. - Vol. 53. - P. 1111 - 1130.

[11] **Н. И.Мусхелишвили**, Сингулярные интегральные уравнения, Наука, М., 1968.

[12] **А.Б.Расулов**, Интегральное представления для обобщенной системы Коши–Римана с сингулярными коэффициентами. Проблем математического анализа,т.80, 2015, 89-95.

[13] **А.П. Солдатов**, Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2009, Т.11,1, 74–78

[14] **И.Стейн, Г.Вейс**, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М., Мир, 1974.

[15] **У.Рудин**, Функциональный анализ, М., Мир, 1975.