ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2008
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАССЛОЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА ОДНОЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ [1]

А. А. Боголюбов, Ю. А. Ильин [2]

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x) + Q(x,\varphi), \\ \dot{\varphi} &= a(x,\varphi), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $\varphi \in R^m$, вектор-функции P, Q и a непрерывно дифференцируемы по своим аргументам, Q и a 2π-периодичны по φ_j, $j = 1, ..., m$, где $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$. Также предположим, что

$$P(0) = 0, \tag{2}$$

$$\gamma^*(P'_x(x)) \leqslant -\lambda ||x||^k, \tag{3}$$

$$||Q'_x, \varphi(x,\varphi)|| \leqslant l||x||^k + 1, \tag{4}$$

$$||a'_x, \varphi(x,\varphi)|| \leqslant l||x||^k + 1, \tag{5}$$

где $\lambda > 0$, $l > 0$, $k \geqslant 0$, $||x||$ и $||\varphi||$ — произвольные нормы в R^n и R^m, $||(x,\varphi)|| \stackrel{def}{=} \max(||x||, ||\varphi||)$, матричные нормы понимаются как операторные.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ (НШ-2271.2003.1, НШ-4609.2006.1), НИИММ им. акад. В.И.Смирнова СПбГУ.

Через $\gamma^*(A)$ для $(n \times n)$ матрицы A обозначается верхняя норма Лозинского [6], т.е.

$$\gamma^*_{\|\cdot\|}(A) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h}(\|E + hA\| - 1),$$

где E — единичная матрица.

При сделанных предположениях в работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если выполнено неравенство $2l < \lambda$, то система (1) имеет единственный инвариантный тор, представимый в виде

$$x = u(\varphi),$$

где функция $u(\varphi)$ 2π-периодична по φ_j и удовлетворяет неравенству

$$||u(\varphi_1) - u(\varphi_2)|| \leqslant L^*||\varphi_1 - \varphi_2|| \tag{6}$$

с константой $L^* = \dfrac{2l}{\lambda - l}$. Этот тор устойчив в том смысле, что всякое решение начинающееся в некоторой его окрестности, стремится к нему при $t \to +\infty$.

В данной работе доказывается существование инвариантного расслоения в некоторой окрестности инвариантного тора. Это означает, что у тора существует окрестность, представимая в виде объединения непересекающихся локально-инвариантных для системы (1) поверхностей, причем каждое решение, начинающееся на такой поверхности, стремится к определенному решению на торе и решения, лежащие на одной поверхности, стремятся к одному и тому же решению на торе. Доказательство существования такого расслоения является первым шагом в доказательстве топологической сопряженности между системой (1) и "невозмущенной"системой $\dot{x} = P(x),\ \dot{\varphi} = a(0, \varphi)$.

Замечание 1. Из периодичности и непрерывности Q следует, что существует число $M > 0$ такое что

$$||Q(0, \varphi)|| \leqslant M. \tag{7}$$

Для того, чтобы доказать существование расслоения, достаточно доказать следующие три утверждения.

Утверждение 1. Для любого решения на торе $x = u(\varphi)$ существует локально-интегральная поверхность, содержащая это решение такая, что любое решение на этой поверхности стремится к данному решению на торе при $t \longrightarrow +\infty$.

Утверждение 2. Поверхности, построенные для различных решений на торе, не пересекаются.

Утверждение 3. Через любую точку, находящуюся в достаточно малой окрестности тора, проходит одна из локально-интегральных поверхностей, описанных в утверждении 1.

Для того, чтобы доказать существование расслоения, дополнительно предположим, что система (1) удовлетворяет следующему условию:

Условие А. *Пусть* $(x_i(t), \varphi_i(t))$ *— два решения системы* (1) *такие, что* $||x_i(t_0)|| \leqslant \varepsilon_0$. *Существует такая функция* $\alpha(t)$, *не зависящая ни от* t_0, *ни от* $x_i(t_0)$, *что*

$$||a(x_1(t), \varphi_1(t)) - a(x_2(t), \varphi_2(t))|| \leqslant \alpha(t)||\Delta z(t)|| \tag{8}$$

для тех $t \geqslant t_0$, *при которых* $||x_i(t)|| \leqslant \varepsilon_0$, *где* $z_i(t) = (x_i(t), \varphi_i(t))$, $\Delta z(t) = z_1(t) - z_2(t)$, $||\Delta z|| = \max\ ||\Delta x||, ||\Delta\varphi||$, *причем*

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \alpha(t)dt \leqslant C_\alpha < \infty.$$

Замечание 2. Можно показать, что условие А выполнено при $Q(0, \varphi) = 0$.

Основная теорема. *Пусть система* (1) *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и условию А. Тогда при достаточно малом* M *у системы* (1) *существует инвариантное расслоение с указанными свойствами.*

2. Вспомогательные результаты

Прежде всего приведем без доказательства два свойства логарифмических норм Лозинского .

Лемма 1 [4]. Пусть непрерывные матричные функции $A(\theta)$ и $B(\theta)$ заданы на конечном промежутке $\langle a, b\rangle$, и пусть на этом промежутке $\gamma^*(A(\theta)) \leqslant 0$, $\gamma_*(B(\theta)) \geqslant 0$. Тогда

$$\gamma^*(\int_a^b A(\theta)\, d\theta) \leqslant \int_a^b \gamma^*(A(\theta))\, d\theta, \qquad \gamma_*(\int_a^b B(\theta)\, d\theta) \geqslant \int_a^b \gamma_*(B(\theta))\, d\theta. \tag{9}$$

(интегрирование матрицы означает ее поэлементное интегрирование), где $\gamma_*(A) = -\gamma^*(-A)$ есть нижняя норма Лозинского.

Теорема 2 [4]. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, записанную в виде

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(t, x)x + \Psi(t, x), \tag{10}$$

где Φ есть непрерывная $(n \times n)$ — матричная, а Ψ — непрерывная векторная функции, определенные при всех t и x. Пусть $x(t)$ есть некоторое ее решение, и пусть $\|\cdot\|$ есть произвольная векторная норма. Тогда справедливо двойное неравенство

$$\gamma_*(\Phi(t,x(t)))\|x(t)\| - \|\Psi(t,x(t))\| \leqslant \frac{d_+\|x(t)\|}{dt} \leqslant \quad (\Phi(t,x(t)))\|x(t)\|$$

$$(\Phi(t,x(t)))\|x(t)\| \leqslant \gamma^*(\Phi(t,x(t)))\|x(t)\| + \|\Psi(t,x(t))\|. \tag{11}$$

Запись вида (10) не является ограничением, так как любую нелинейную систему $\dot{x} = F(t,x)$, где $F \in \mathbf{C_t}, \mathbf{x^0}, \mathbf{1}$, можно записать в виде (10), применив формулу конечных приращений к функции $F(t,x)$.

В дальнейшем нам понадобится следующая оценка.

Лемма 2. Пусть $y_1(t), y_2(t)$ — векторно-значные функции, действующие из R в R^n. Справедливо неравенство

$$\int_0^1 ||y_1(t)\theta + y_2(t)(1-\theta)||^k d\theta \geqslant d \max\{|||y_1(t)||^k, ||y_2(t)||^k\}, \tag{12}$$

где

$$d = \min_{||s_1|| \leqslant 1, ||s_2||=1} \int_0^1 ||s_1\theta + s_2(1-\theta)||^k d\theta. \tag{13}$$

Доказательство леммы 2 элементарно и здесь опускается.

В доказательстве существования слоения, которое приводится ниже, существенно используется то, что тор содержится в множестве

$$H_0 = \{(x,\varphi) : ||x|| \leqslant \frac{\lambda d(k+1)}{2l}, \varphi \in R^m\},$$

где d определяется равенством (13). При этом окрестность тора, в которой строится расслоение, тоже содержится в множестве H_0. Поэтому найдем условия, при которых тор $x = u(\varphi)$ будет лежать в H_0.

Лемма 3. Для любого ε можно найти $M = M(\varepsilon)$ такое, что если $||Q(0,\varphi)|| \leqslant M$, то тор $x = u(\varphi)$ содержится в множестве $H(\varepsilon) = \{(x,\varphi) : ||x|| \leqslant \varepsilon, \varphi \in R^m.\}$

Доказательство леммы 3. В работе [1] показано, что тор находится в множестве $H(\varepsilon)$, если граница $\partial H(\varepsilon)$ является множеством точек строгого входа в $H(\varepsilon)$, т.е. если выполняется неравенство

$$\frac{d_+||x||}{dt}\Big|_{\partial H(\varepsilon)} < 0. \tag{14}$$

Применяя теорему 2 и условия (2), (3), (4) и неравенство (7), имеем

$$\frac{d_+||x||}{dt} \leqslant \int\limits_0^1 \gamma^*(P'_x(\theta x))d\theta||x|| + \int\limits_0^1 ||Q'_{x,\varphi}(\theta x,\varphi)||d\theta||x|| +$$
$$+||Q(0,\varphi)|| \leqslant -\frac{\lambda - l||x||}{k+1}||x||^{k+1} + M.$$

Так как для $x \in \partial H(\varepsilon)$ $||x|| = \varepsilon$, то при $M < \dfrac{\lambda - l\varepsilon}{k+1}\varepsilon^{k+1}$ неравенство (14) выполнено. Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 следует, что при

$$M < \frac{\lambda - \dfrac{\lambda d(k+1)}{2}}{k+1}\left(\frac{\lambda d(k+1)}{2l}\right)^{k+1} \qquad (15)$$

тор $x = u(\varphi)$ содержится в множестве H_0. Так как $d = \dfrac{1}{k+1}$, то $\lambda - \dfrac{\lambda d(k+1)}{2} \geqslant \dfrac{\lambda}{2} > 0$. Следовательно, такое положительное M можно подобрать.

3. Доказательство утверждения 1

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть для системы (1) выполняются все условия теоремы 1 и условие A. Предположим, что M удовлетворяет неравенству (15). Тогда при $\varepsilon_0 < \dfrac{\lambda d(k+1)}{2l}$ для любого решения $z_0(t) = (u(\varphi_0(t)), \varphi_0(t))$ на торе $x = u(\varphi)$ существует локально-интегральная поверхность T_{z_0}, задаваемая уравнением

$$\varphi = h_{z_0}(x,t), \qquad (16)$$

где $h_{z_0} : \{(x,t) : ||x|| \leqslant \varepsilon_0, t \in R\} \to R^m$, есть непрерывная по своим аргументам вектор-функция такая, что для любого $t \in R$ и всех x_1 и x_2 из области определения h выполняется

$$h_{z_0}(u(\varphi_0),t) = \varphi_0, \qquad ||h_{z_0}(x_1,t) - h_{z_0}(x_2,t)|| \leqslant ||x_1 - x_2||.$$

Более того для любого $L \in (0,1]$ можно указать такие $M = M(L)$ и $\varepsilon_x(L) > 0$, что если $||x_1||, ||x_2|| < \varepsilon_x(L)$, то

$$||h_{z_0}(x_1,t) - h_{z_0}(x_2,t)|| \leqslant L||x_1 - x_2||.$$

Любое решение $z(t)$, начинающееся на этой поверхности стремится к решению $z_0(t)$ при $t \longrightarrow +\infty$ так, что справедлива оценка

$$||z(t) - z_0(t)|| \leqslant ||z(t_0) - z_0(t_0)||\Big[1 + \frac{k}{2^k}(\lambda d - \frac{l\varepsilon_0}{k+1})||z(t_0) - z_0(t_0)||^k(t - t_0)\Big]^{-\frac{1}{k}}, \quad t \geqslant t_0.$$

Замечание 3. В приведенном ниже доказательстве того, что функция h_{z_0} удовлетворяет условию Липшица с константой $L < 1$, существенно используется то, что тор содержится в множестве

$$H(\varepsilon_x(L)) = \{(x,\varphi) : ||x|| \leqslant \varepsilon_x(L), \varphi \in R^m\},$$

где $\varepsilon_x(L) < \dfrac{L\lambda}{(L+1)l}$.

В силу леммы 3 этого можно добиться, уменьшая M. Для этого достаточно взять

$$M(\varepsilon_x(L)) < \frac{\lambda - l||x||}{k+1}||x||^{k+1}\Bigg|_{||x||} = \varepsilon_x(L) = \frac{\lambda}{(k+1)(L+1)}\left(\frac{L\lambda}{(L+1)l}\right)^{k+1}.$$

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим произвольное решение $z_0(t) = (u(\varphi_0(t)), \varphi_0(t))$ на торе $x = u(\varphi)$. Сделаем в системе (1) замену переменных $y(t) = x(t) - u(\varphi_0(t))$, $\psi(t) = \varphi(t) - \varphi_0(t)$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = P(y + u(\varphi_0(t))) - P(u(\varphi_0(t))) + H(y,\psi), \\ \dfrac{d\psi}{dt} = b(y,\psi), \end{cases} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} H(y,\psi) &= Q(y + u(\varphi_0), \psi + \varphi_0) - Q(u(\varphi_0), \varphi_0), \\ b(y,\psi) &= a(y + u(\varphi_0), \psi + \varphi_0) - a(u(\varphi_0), \varphi_0). \end{aligned} \tag{18}$$

Делая в системе (17) замену времени $\tau = -t$ и используя формулу конечных приращений, получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\tau} = -(\int\limits_0^1 P'_y(u(\varphi_0) + \theta y)d\theta)y - H(y,\psi), \\ \dfrac{d\psi}{d\tau} = -b(y,\psi). \end{cases} \tag{19}$$

Замечание 4. Как уже было упомянуто, расслоение будет строится в окрестности тора, которая содержится в множестве H_0. Поэтому нас будут интересовать только те решения системы (1), которые лежат в H_0. В замечании 3 сказано, что для того чтобы функция $h_{z_0}(x,t)$ из теоремы 3 имела константу Липшица $L < 1$ необходимо, чтобы тор содержался в множестве H(L). Выберем такое $\varepsilon_1 > 0$, что $\varepsilon_1 + \max\limits_{\varphi}||u(\varphi)|| \leqslant \varepsilon_0$. Предполагая, что

$M = M(L)$ достаточно малое (M взято из (7)), выберем такое $\varepsilon(L) > 0$, что $\varepsilon(L) + \max_{\varphi} ||u(\varphi)|| \leqslant \varepsilon_x(L)$.

Чтобы доказать теорему 3 достаточно, находясь в ее условиях, доказать следующую теорему.

Теорема 4. Система (19) имеет единственную локально-интегральную поверхность, представимую в виде

$$\psi = h(y, \tau), \tag{20}$$

где $h : \{(y, \tau) : ||y|| \leqslant \varepsilon_1, \tau \in R\} \longrightarrow R^m$ есть непрерывная по своим аргументам вектор-функция такая,что для любого $\tau \in R$ и всех y_1 и y_2 из области определения h выполняется

$$h(0, \tau) = 0, \tag{21}$$

$$||h(y_1, \tau) - h(y_2, \tau)|| \leqslant ||y_1 - y_2||. \tag{22}$$

Более того для любого $L \in (0, 1]$ можно указать такое $\varepsilon(L) > 0$, что если $y_1, y_2 \leqslant \varepsilon(L)$, то

$$||h(y_1, \tau) - h(y_2, \tau)|| \leqslant L||y_1 - y_2||. \tag{23}$$

Любое решение $z(\tau) = (y(\tau), \psi(\tau))$ системы (19), расположенное на h, при $\tau \to -\infty$ стремится к началу координат так, что справедлива оценка

$$||z(\tau)|| \leqslant ||z(\tau_0)|| \Big[1 - \frac{k}{2^k}\Big(\lambda d - \tfrac{l\varepsilon_0}{k+1}\Big)||z(\tau_0)||^k(\tau - \tau_0)\Big]^{-\frac{1}{k}}, \quad \tau \leqslant \tau_0, \tag{24}$$

где $||z(t)|| = \max(||y(\tau)||, ||\psi(\tau)||)$.

Доказательство теоремы 4. Для доказательтва теоремы будем применять ту же технику, что и в работе [2]. Найдем оценки для $\frac{d_+||\psi||}{d\tau}$ и $\frac{d_+||y||}{d\tau}$. Пользуясь определением функции $b(y, \psi)$ (см. (18)) и неравенством (5), получаем

$$\frac{d_+||\psi||}{d\tau} \leqslant ||b(y, \psi)|| \leqslant \int_0^1 ||b'_z(\theta z)||d\theta||z|| \leqslant \frac{l}{k+1}\,||y + u(\varphi_0)||^{k+1}||z||. \tag{25}$$

Применяя теорему 2, получаем

$$\frac{d_+||y||}{d\tau} \geqslant \gamma_*(-\int_0^1 P'_y(u(\varphi_0) + \theta y)d\theta)||y|| - ||H(y, \psi)||.$$

В силу лемм $1, 2$ и условия (3) имеем

$$\gamma_*(-\int\limits_0^1 P'_y(u(\varphi_0)+\theta y)d\theta) \geqslant -\int\limits_0^1 \gamma^*(P'_y(u(\varphi_0)+\theta y))d\theta \geqslant \\ \geqslant \lambda d\max\{||u(\varphi_0)+y||^k, ||u(\varphi_0)||^k\}, \tag{26}$$

где d определяется равенством (13). Пользуясь определением функции H (см. (18)) и условием (4), получаем

$$||H(y,\psi)|| \leqslant \int\limits_0^1 ||H'_z(\theta z)||d\theta||z|| \leqslant \frac{l}{k+1}||y+u(\varphi_0)||^{k+1}||z||. \tag{27}$$

Таким образом,

$$\frac{d_+||y||}{d\tau} \geqslant \lambda d\max|||u(\varphi_0)+y||^k, ||u(\varphi_0)||^k\ ||y|| - \frac{l}{k+1}||y+u(\varphi_0)||^{k+1}||z||. \tag{28}$$

Определим множество $G(\varepsilon) = \{(\psi, y, \tau) : 0 < ||\psi|| \leqslant ||y|| \leqslant \varepsilon, \tau \in R\}$ и поверхность $K(\varepsilon) = \{(\psi, y, \tau) : 0 < ||\psi|| = ||y|| \leqslant \varepsilon, \tau \in R\}$.

Лемма 4. При $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ поверхность $K(\varepsilon)$ есть множество точек строгого входа в $G(\varepsilon)$.

Доказательство леммы 4. Рассмотрим функцию $W(z) = ||\psi|| - ||y||$. Ясно, что $W|_K(\varepsilon) = 0$, $W|_G(\varepsilon) \leqslant 0$. Достаточно показать, что $\left.\frac{d_+W(\tau)}{d\tau}\right|_{K(\varepsilon)} < 0$. В силу неравенств (25) и (28) и того, что $||z| = ||y||$ на $K(\varepsilon)$, имеем

$$\left.\frac{d_+W(\tau)}{d\tau}\right|_K(\varepsilon) = \left.\left(\frac{d_+||\psi||}{d\tau} - \frac{d_+||y||}{d\tau}\right)\right|_{K(\varepsilon)} \leqslant \\ \leqslant \left(\frac{2l}{k+1}||y+u(\varphi_0)|| - \lambda d\right)||y+u(\varphi_0)||^k||y||.$$

Так как $||y|| \leqslant \varepsilon_1$, то в силу выбора ε_1 (см. замечание 4) $||y+u(\varphi_0)|| \leqslant \varepsilon_1 + ||u(\varphi_0)|| \leqslant \varepsilon_0 < \frac{\lambda d(k+1)}{2l}$. Следовательно,

$$\left(\frac{2l}{k+1}||y+u(\varphi_0)|| - \lambda d\right) \leqslant \left(\frac{2l}{k+1}\varepsilon_0 - \lambda d\right) < 0.$$

Лемма 4 доказана.

Рассмотрим пару решений системы (19)

$$z_i(\tau) = (\psi_i, y_i)(\tau) = (\psi, y)(\tau, \tau_0, \xi_i, \eta_i), \quad i = 1, 2.$$

Обозначим через $(\Delta\psi, \Delta y)(\tau) = (\psi_1, y_1)(\tau) - (\psi_2, y_2)(\tau)$, $\Delta z(\tau) = (\Delta\psi, \Delta y)(\tau)$.

Лемма 5. Для любого $L \in [0, 1)$ существуют $M = M(L)$ и $\varepsilon(L)$, такие, что если $(z_i(\tau_0), \tau_0) \in G(\varepsilon(L))$ $i = 1, 2$ и $||\Delta\psi(\tau_0)|| \leqslant L||\Delta y(\tau_0)||$, то

$$||\Delta\psi(\tau)|| \leqslant L||\Delta y(\tau)|| \tag{29}$$

для тех $\tau \geqslant \tau_0$, при которых $(z_i(\tau), \tau) \in G(\varepsilon(L))$, $i = 1, 2$.

Доказательство леммы 5. При $\tau = \tau_0$ неравенство (29) выполнено. Предположим противное утверждению леммы. Тогда существует такой момент времени $\tau_1 \geqslant \tau_0$, что

$$||\Delta\psi(\tau_1)|| = L||\Delta y(\tau_1)||, \quad \frac{d_+||\Delta\psi(\tau)||}{d\tau}\Big|_{\tau} = \tau_1 \geqslant L\frac{d_+||\Delta y(\tau)||}{d\tau}\Big|_{\tau} = \tau_1. \tag{30}$$

Так как

$$\frac{d_+\Delta\psi(\tau)}{d\tau} = -b(y_1, \psi_1) + b(y_2, \psi_2) = -(\int\limits_0^1 b'_z(z_2 + \theta\Delta z)d\theta)\Delta z,$$

то в силу теоремы 2 и неравенства (5) имеем

$$\frac{d_+||\Delta\psi(\tau)||}{d\tau} \leqslant (\int\limits_0^1 ||b'_z(z_2 + \theta\Delta z)||d\theta)||\Delta z|| \leqslant (\int\limits_0^1 l||y_2 + \theta\Delta y + u(\varphi_0))||^{k+1}d\theta)||\Delta z||.$$

Действуя аналогично, имеем

$$\tfrac{d_+\Delta y(\tau)}{d\tau} = (-\int\limits_0^1 P'_y(y_2 + \theta\Delta y + u(\varphi_0))d\theta)\Delta y - (\int\limits_0^1 H'_z(z_2 + \theta\Delta z)d\theta)\Delta z,$$

Тогда в силу теоремы 2, леммы 1, определения функции H (см. (18)) и условий (3), (4) имеем

$$\frac{d_+||\Delta y(\tau)||}{d\tau} \geqslant (\int\limits_0^1 \gamma_*(-P'_y(y_2 + \theta\Delta y + u(\varphi_0)))d\theta)||\Delta y|| -$$
$$-(\int\limits_0^1 ||H'_z(z_2 + \theta\Delta z)||d\theta)||\Delta z|| \geqslant (\int\limits_0^1 \lambda||y_2 + \theta\Delta y + u(\varphi_0)||^k d\theta)||\Delta y|| -$$
$$-(\int\limits_0^1 l||y_2 + \theta\Delta y + u(\varphi_0)||^{k+1}d\theta)||\Delta z||.$$

Так как $||\Delta\psi(\tau_1)|| \leqslant ||\Delta y(\tau_1)||$, то $||\Delta z(\tau_1)|| = ||\Delta y(\tau_1)||$. Таким образом,

$$\left(\frac{d_+||\Delta\psi(\tau)||}{d\tau} - L\frac{d_+||\Delta y(\tau)||}{d\tau}\right)\Big|_\tau = \tau_1 \leqslant$$

$$\leqslant \left[l\int_0^1 ||y_2+\theta\Delta y + u(\varphi_0)||^{k+1} d\theta ||\Delta y|| - \lambda L\int_0^1 ||y_2+\theta\Delta y+u(\varphi_0)||^k d\theta||\Delta y|| + \right.$$

$$\left. + lL\int_0^1 ||y_2+\theta\Delta y+u(\varphi_0)||^{k+1}d\theta||\Delta y||\right]\Big|_\tau = \tau_1$$

Возьмем такое $\varepsilon_x(L)$, что $\varepsilon_x(L) < \dfrac{L}{(L+1)}l\lambda$. Учитывая замечание 3, выберем такое M, что $\max\limits_{\varphi}||u(\varphi)|| \leqslant \varepsilon_x(L)$. Так как $(z_i(\tau),\tau) \in G(\varepsilon(L))$ при $i=1,2$, то в силу выбора $\varepsilon(L)$ (см. замечание 4) имеем

$$||y_2+\theta\Delta y+u(\varphi_0)|| \leqslant \max\{||y_1+u(\varphi_0)||, ||y_2+u(\varphi_0)||\} \leqslant \varepsilon_x(L).$$

Следовательно,

$$\left[\frac{d_+||\Delta\psi(\tau)||}{d}\tau - L\frac{d_+||\Delta y(\tau)||}{d\tau}\right]\Bigg|_\tau = \tau_1 \leqslant$$

$$\left[(l(L+1)\varepsilon_x(L) - \lambda L)\int_0^1 ||y_2+\theta\Delta y+u(\varphi_0))||^k d\theta\Delta||y||\right]\Bigg|_\tau = \tau_1 < 0,$$

что противоречит неравенству (30). Лемма 5 доказана.

Замечание 5. Так как $d < \dfrac{1}{k+1}$, то $\varepsilon_0 < \dfrac{\lambda d(k+1)}{2l} < \dfrac{\lambda}{2l}$. Следовательно, если M удовлетворяет неравенству (15) (тор находится в множестве H_0), то утверждение леммы 5 верно для $L=1$.

Лемма 6. $||y(\tau)||$ возрастает вдоль траекторий в $G(\varepsilon_1)$.

Доказательство леммы 6. Так как $||\Delta z(\tau)|| = ||\Delta y(\tau)||$ и $||y|| \leqslant \varepsilon_1$, то в силу неравенства (28) и замечания 4 имеем

$$\frac{d_+||y||}{d\tau} \geqslant \left(\lambda d - \frac{lk+1}{||y+u(\varphi_0)||}\right)||y+u(\varphi_0)||^k||y|| > 0. \tag{31}$$

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Если решение $z(\tau) = z(\tau,\tau_0,z_0)$ с $||z_0|| \leqslant \varepsilon_1$ таково, что для любого $\tau \leqslant \tau_0$ $||\psi(\tau)|| \leqslant ||y(\tau)||$, то это решение с убыванием τ монотонно стремится к началу координат так, что справедлива оценка

$$||z(\tau)|| \leqslant ||z(\tau_0)||\left[1 - \frac{k}{2^k}(\lambda d - \tfrac{l}{\varepsilon_0 k+1})||z(\tau_0)||^k(\tau-\tau_0)\right]^{-\frac{1}{k}}, \qquad \tau \leqslant \tau_0. \tag{32}$$

Доказательство леммы 7. Вернемся к системе (17) с исходным временем t. Перепишем её в более удобном виде

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = (\int\limits_0^1 P_y'(u(\varphi_0) + \theta y) d\theta) y + H(y, \psi), \\ \dfrac{d\psi}{dt} = b(y, \psi). \end{cases} \qquad (17')$$

Пользуясь леммой 1, неравенствами (26),(27) и тем, что $||z(\tau)|| = ||y(\tau)||$, получаем

$$\frac{d_+||y||}{dt} \leqslant \gamma^*(\int\limits_0^1 P_y'(u(\varphi_0) + \theta y) d\theta)||y|| + ||H(y,\psi)|| \leqslant$$
$$\leqslant (-\lambda d + \frac{l_1 k + 1}{||y + u(\varphi_0)||}) \max |||u(\varphi_0) + y||^k, ||u(\varphi_0)||^k \; ||y||.$$

Ясно, что

$$\max |||u(\varphi_0) + y||, ||u(\varphi_0)|| \; \geqslant \frac{1}{2}[||u(\varphi_0) + y|| + ||u(\varphi_0)||] \geqslant \frac{1}{2}||y||.$$

Так как $||y|| \leqslant \varepsilon_1$, то, в силу выбора ε_1(см. замечание 4) и ε_0, имеем

$$-\lambda d + \frac{lk+1}{||y + u(\varphi_0)||} \leqslant -\lambda d + \frac{lk+1}{\varepsilon_0} < 0.$$

Таким образом, учитывая, что $||y + u(\varphi_0)|| \leqslant \varepsilon_0$, получаем

$$\frac{d_+||y||}{dt} \leqslant \frac{1}{2^k}(-\lambda d + \frac{l}{\varepsilon_0 k + 1})||y||^k + 1.$$

Применяя теорему сравнения, получаем

$$||y(t)|| \leqslant ||y(t_0)||[1 + \frac{k}{2^k}(\lambda d - \frac{l}{\varepsilon_0 k + 1})||y(t_0)||^k (t - t_0)]^{-\frac{1}{k}}, \quad t \geqslant t_0.$$

Следовательно,

$$||y(\tau)|| \leqslant ||y(\tau_0)||[1 - \tfrac{k}{2^k}(\lambda d - \tfrac{l}{\varepsilon_0 k+1})||y(\tau_0)||^k (\tau - \tau_0)]^{-\frac{1}{k}}, \quad \tau \leqslant \tau_0.$$

Пользуясь тем, что $||y(\tau)|| = ||z(\tau)||$, получаем (32). Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Пусть два решения $z_i(\tau) = z(\tau, \tau_0, \psi_i, y_0)$ системы (19) таковы, что $(z_i(\tau_0), \tau_0) \in G(\varepsilon_1)$. Существует такая постоянная $A > 0$, не зависящая ни от τ_0, ни от $z_i(\tau_0)$, что если $||\psi_1 - \psi_2|| = ||\Delta\psi(\tau_0)|| > 0$, то

$$||\Delta\psi(\tau)|| \geqslant A||\Delta\psi(\tau_0)|| \qquad (33)$$

для тех $\tau \leqslant \tau_0$, для которых $(z_i(\tau), \tau) \in G(\varepsilon_1)$.

Доказательство леммы 8. Рассмотрим систему (17′). Обозначим через $t_0 = \tau_0$. Так как $0 = ||\Delta y(t_0)|| \leqslant ||\Delta\psi(t_0)||$, то

$$||\Delta y(t)|| \leqslant ||\Delta\psi(t)||, \quad t \geqslant t_0. \tag{34}$$

Действительно, для системы (19) это означает, что если $||\Delta y(\tau_0)|| \leqslant ||\Delta\psi(\tau_0)||$ в некоторый момент τ_0, то $||\Delta y(\tau)|| \leqslant ||\Delta\psi(\tau)||$ при всех $\tau \leqslant \tau_0$. Если допустить, что существует такое $\tau^* < \tau_0$, что $||\Delta y(\tau^*)|| \geqslant ||\Delta\psi(\tau^*)||$, то из леммы 8 заключаем, что при $\tau_0 > \tau^*$ $||\Delta y(\tau_0)|| \geqslant ||\Delta\psi(\tau_0)||$. Но по условию леммы 5 $||\Delta y(\tau_0)|| = 0$, а $||\Delta\psi(\tau_0)|| > 0$; следовательно, приходим к противоречию, тем самым доказывая (34). Отсюда, в частности, следует, что

$$||\Delta z(\tau)|| = ||\Delta\psi(\tau)||, \quad \tau \leqslant \tau_0.$$

Заметим, что $||\Delta\psi(t)|| = ||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)||$, $||\Delta y(t)|| = ||x_1(t) - x_2(t)||$, где $(x_1(t), \varphi_1(t)), (x_2(t), \varphi_2(t))$ — решения системы (1). Следовательно, используя (34), имеем

$$||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|| \geqslant ||x_1(t) - x_2(t)|| \qquad t \geqslant t_0.$$

Так как по условию леммы $||y_i|| \leqslant \varepsilon_1$, то $||x_i|| \leqslant \varepsilon_0$. Следовательно, применяя теорему 2 и условие A, получаем

$$\frac{d_+||\Delta\psi(t)||}{dt} = \frac{d_+||\Delta\varphi(t)||}{dt} \geqslant -||a(x_1, \varphi_1) - a(x_2, \varphi_2)|| \geqslant$$
$$\geqslant -\alpha(t)||(\Delta x, \Delta\varphi)|| = -\alpha(t)||\Delta\varphi|| = -\alpha(t)||\Delta\psi||,$$

где $x_i = y_i + u(\varphi_0)$, $\Delta x = x_1 - x_2$, $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Следовательно применяя теорему сравнения, получаем

$$||\Delta\psi(t)|| \geqslant ||\Delta\psi(t_0)|| \exp\Big(-\int\limits_{t_0}^{t} \alpha(t)dt\Big) \qquad t \geqslant t_0.$$

Из условия A следует, что $\int\limits_{t_0}^{\infty} \alpha(t)dt \leqslant C_\alpha < \infty$. Следовательно, $||\Delta\psi(t)|| \geqslant ||\Delta\psi(t_0)|| \exp\Big(-C_\alpha\Big)$ для $t \geqslant t_0$. Положим $A = \exp\Big(-C_\alpha\Big)$. Таким образом, $||\Delta\psi(t)|| \geqslant A||\Delta\psi(t_0)||$ для $t \geqslant t_0$. Следовательно, $||\Delta\psi(\tau)|| \geqslant A||\Delta\psi(\tau_0)||$ для $\tau \leqslant \tau_0$. Лемма 8 доказана.

Определим следующее пространство непрерывных функций

$$K(L) = \{h : \ ||y|| \leqslant \varepsilon(L)\} \to R^m_\psi \mid h(0) = 0, \ ||h(y_1) - h(y_2)|| \leqslant L||y_1 - y_2||, \tag{35}$$

где $L \in (0,1]$. Зададим на нем метрику по формуле

$$\rho(h_1,h_2) = \max_{||y|| \leqslant \varepsilon(L)} ||h(y_1) - h(y_2)||. \tag{36}$$

Нетрудно показать, что $(K(L), \rho)$ является полным и компактным пространством. Из определения $K(L)$ следует, что $(h(y), y, \tau) \in G(\varepsilon(L))$ для $h \in K(L)$.

Зададим на $K(L)$ для произвольных $\tau \geqslant \tau_0$ оператор $F_{\tau_0,\tau}$, сопоставляя каждой функции $h \in K(L)$ следующее множество

$$\{(\overline{\psi}, \overline{y}) : (\overline{\psi}, \overline{y}) = (\psi, y)(\tau, \tau_0, h(\eta), \eta), (z(\tau), \tau) \in G(\varepsilon(L)), \tau \in [\tau_0, \tau]\},$$

т. е. через поверхность $\psi = h(y)$ при $\tau = \tau_0$ проводятся всевозможные решения на время $\tau > \tau_0$: если решение покидает $G(\varepsilon(L))$, то о нем "забывают"; решения, остающиеся в $G(\varepsilon(L))$ на всем промежутке $[\tau_0, \tau]$, в момент времени τ образуют некоторое множество, которое и сопоставляется функции h.

Лемма 9. Оператор $F_{\tau_0,\tau}$ действует из $K(L)$ в $K(L)$. При этом он непрерывен и непрерывно зависит от τ и τ_0.

Доказательство леммы 9. Покажем, что $F(K(L))$ есть график некоторой функции, принадлежащей $K(L)$. Для этого проверим, во-первых, что любые две точки $(\overline{\psi}_1, \overline{y}_1)$, $(\overline{\psi}_2, \overline{y}_2)$ этого множества подчинены неравенству

$$||\overline{\psi}_1 - \overline{\psi}_2|| \leqslant L||\overline{y}_1 - \overline{y}_2||. \tag{37}$$

Чтобы убедиться в этом, выпустим из этих точек решения в обратную сторону. Тогда через время $\tau_0 - \tau$, эти решения попадут на поверхность $\psi = h(y)$, где указаннное неравенство выполнено по определению (35). Возвращаясь обратно и применяя лемму 5, получим неравенство (37). Из этого неравенства и теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных следует, что множество $F_{\tau_0,\tau}h$ есть график некоторой функции, удовлетворяющей условию Липшица с константой L. Из леммы 6 вытекает, что область определения этой функции есть весь шар $||\overline{y}|| \leqslant \varepsilon(L)$. Таким образом оператор $F_{\tau_0,\tau}$ действует из $K(L)$ в $K(L)$.

Из теоремы об интегральной непрерывности следует, что оператор $F_{\tau_0,\tau}$ непрерывен и непрерывно зависит от τ_0 и τ в метрике

$$\rho_F(F_1, F_2) = \max_{h \in K(L)} \rho(F_1 h, F_2 h)$$

(максимум достигается, так как $K(L)$ компактно). Лемма 9 доказана.

Лемма 10. Пусть h есть произвольная вектор-функция из $K(L)$. При любом фиксированном τ существует предел последовательности $F_{-n,\tau}h$ при $n \to \infty$ в смысле метрики пространства $(K(L), \rho)$.

Доказательство леммы 10. Так как пространство $(K(L), \rho)$ полно, то достаточно доказать, что последовательность $F_{-n,\tau}h$ сходится в себе, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N > 0$, что для любых $n, m \geqslant N$ выполняется неравенство

$$\rho(F_{-n,\tau}h, F_{-m,\tau}h) \leqslant \varepsilon. \tag{38}$$

Допустим противное, что существуют такие $T > 0$ и $\varepsilon^* > 0$, что по любому $N > 0$ можно указать $n_1, n_2 \geqslant N$, для которых

$$\rho(F_{-n_1,\tau}h, F_{-n_2,\tau}h) \geqslant \varepsilon^*. \tag{39}$$

Из леммы 7 следует, что

$$||y(T-\tau^*)|| \leqslant ||y(T)|| \left[1 + \frac{k}{2^k}(\lambda d - \frac{l}{\varepsilon_0 k + 1})||y(T)||^k \tau^*)\right]^{-\frac{1}{k}}.$$

Следовательно, можно подобрать такое τ^*, что если решение $z(\tau)$ системы (19) остается в $G(\varepsilon(L))$ при $\tau \in [T-\tau^*, T]$, то

$$||y(T-\tau^*)|| < \frac{1}{2}A\varepsilon^*,$$

где A — постоянная из леммы 8. Выберем $N > \tau^* - T$. Неравенство (39) по определению метрики ρ означает, что существует y_N такое, что $||y_N|| \leqslant \varepsilon(L)$ и

$$||F_{-n_1,T}\ h(y_N) - F_{-n_2,T}\ h(y_N)|| \geqslant \varepsilon^*.$$

Заметим, что $(F_{-n_i,T}\ h(y_N), y_N, T) \in G(\varepsilon(L))$, $i = 1, 2$. Рассмотрим два следующих решения системы (19): $z_i = z(\tau, T, F_{-n_i,T}\ h(y_N), y_N)$, $i = 1, 2$. По определению оператора $F_{-n_i,T}$ при всех $\tau \in [-N, T] \in [-n_i, T]$ должно выполняться включение $(z_i(\tau), \tau) \in G(\varepsilon(L))$, $i = 1, 2$. Тогда на основании леммы 8 при всех $\tau \in [-N, T]$ имеем

$$||\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)|| \geqslant A\varepsilon^*.$$

В частности,

$$||\psi_1(T-\tau^*) - \psi_2(T-\tau^*)|| \geqslant A\varepsilon^*.$$

Следовательно, либо $||\psi_1(T-\tau^*)|| \geqslant \frac{1}{2}A\varepsilon^*$, либо $||\psi_2(T-\tau^*)|| \geqslant \frac{1}{2}A\varepsilon^*$. Однако τ^* выбиралось таким, чтобы

$$||y_i(T-\tau^*)|| < \frac{1}{2}A\varepsilon^*, \qquad i = 1, 2.$$

Поэтому либо $||\psi_1(T-\tau^*)|| > ||y_1(T-\tau^*)||$, либо $||\psi_2(T-\tau^*)|| > ||y_2(T-\tau^*)||$. Следовательно, одно из решений $z_i(\tau)$ в момент $T-\tau^*$ должно покинуть $G(\varepsilon(L))$, а это невозможно. Лемма 10 доказана.

Зададим вектор-функцию

$$h(y,\tau) = \lim_{n\to\infty} F_{-n,\tau}\, h_0(y),$$

где h_0 — произвольный элемент из $K(L)$. При каждом фиксированном τ $h(y,\tau) \in K(L)$ и поэтому, удовлетворяет условию Липшица с константой L. Справедливы равенства

$$h(y,\tau_2) = \lim_{n\to\infty} F_{-n,\tau_2}\, h_0(y) = F_{\tau_1,\tau_2} \lim_{n\to\infty} F_{-n,\tau_1}\, h_0(y) = F_{\tau_1,\tau_2}\, h(y,\tau_1), \quad \tau_2 > \tau_1.$$

Отсюда следует, что поверхность $\psi = h(y,\tau)$ — локально-интегральная для системы (19). Из равномерной относительно τ непрерывности по y и непрерывности по τ следует, что $h(y,\tau)$ непрерывна по совокупности аргументов. Тем самым доказано существование локально-интегральной поверхности со сколь угодно малой константой Липшица L. Любое решение, расположенное на поверхности, остается при всех $\tau \leqslant \tau_0$ в секторе $G(\varepsilon(L))$, так как не может покинуть его ни через границу $||y|| = \varepsilon(L)$ в силу леммы 6, ни через границу $||y|| = ||\psi||$ в силу условия Липшица. Следовательно, оно удовлетворяет условию леммы 7, откуда следует (24).

Докажем единственность данной поверхности. Допустим, что наряду с $\psi = h(y,\tau)$ существует поверхность $\psi = \widehat{h}(y,\tau)$. Возьмем такие y_0 и τ_0, что $h(y_0,\tau_0) \neq \widehat{h}(y_0,\tau_0)$. Рассмотрим два решения системы (19): $z_1(\tau) = z(\tau,\tau_0,h(y_0,\tau_0),y_0)$ и $z_2(\tau) = z(\tau,\tau_0,\widehat{h}(y_0,\tau_0),y_0)$. Так как оба эти решения остаются в $G(\varepsilon(L))$ при $\tau \leqslant \tau_0$, то на основании леммы 7 $||\Delta z(\tau)|| \to 0$ при $\tau \to -\infty$. Следовательно, $||\Delta\psi(\tau)|| \to 0$ при $\tau \to -\infty$. С другой стороны из леммы 8 следует, что $||\Delta\psi(\tau)|| \geqslant A||\Delta\psi(\tau_0)||$ при $\tau \leqslant \tau_0$, и мы приходим к противоречию. Единственность поверхности доказана.

В качестве искомой возьмем поверхность $\psi = h(y,\tau)$, найденную для $L = 1$. Она удовлетворяет всем утверждениям теоремы 4, кроме (23). Докажем (23). Система (19) имеет локально-интегральные поверхности со сколь угодно малой константой Липшица, определенные в достаточно малых окрестностях решения $z \equiv 0$. С другой стороны, в этих окрестностях определена и h. В силу единственности они должны совпадать с h. Отсюда следует, что h имеет сколь угодно малую константу Липшица при $||y|| \leqslant \varepsilon(L)$. Теорема 4, а с ней и теорема 3 доказаны.

4. Доказательство утверждения 2

Теорема 5. Пусть $z_1(t) = (u(\varphi_1(t)), \varphi_1(t))$ и $z_2(t) = (u(\varphi_2(t)), \varphi_2(t))$ — различные решения системы (1) на торе $x = u(\varphi)$. Тогда поверхности T_{z_1} и T_{z_2}, построенные для решений $z_1(t)$ и $z_2(t)$ соответственно, не пересекаются.

Доказательство теоремы 5. Предположим противное утверждению теоремы. Так как поверхности T_{z_1} и T_{z_2} инвариантны, то их пересечение инвариантно. Пусть решение $z(t) = (u(\varphi(t)), \varphi(t))$ содержится в пересечении T_{z_1} и T_{z_2}. Обозначим через $\psi_1(t) = \varphi(t) - \varphi_1(t),\ \psi_1(t) = \varphi(t) - \varphi_1(t), \Delta\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t),\ \Delta\psi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t), \Delta z(t) = z_1(t) - z_2(t)$. В силу теоремы 1 $||u(\varphi_1) - u(\varphi_2)|| \leqslant L^*||\varphi_1 - \varphi_2||$, где $L^* = \dfrac{2l}{\lambda - l}$. Следовательно,

$$||\Delta z|| = \max\ ||\varphi_1 - \varphi_2||, ||u(\varphi_1) - u(\varphi_2)||\ \leqslant \mu||\varphi_1 - \varphi_2||,$$

где $\mu = \max\{1, L^*\}$. Так как $z_i(t)$ — решения на торе, то $||x_i(t)|| \leqslant \varepsilon_0$ для любого $t \in R$. Тогда, пользуясь условием A, имеем

$$\frac{d_+||\Delta\varphi(t)||}{dt} \geqslant -||a(u(\varphi_1), \varphi_1) - a(u(\varphi_2), \varphi_2)|| \geqslant -\alpha(t)||\Delta z|| \geqslant -\mu\alpha(t)||\Delta\varphi||.$$

Действуя так же, как и при доказательстве леммы 8, получаем

$$||\Delta\varphi(t)|| \geqslant A||\Delta\varphi(t_0)|| \qquad t \geqslant t_0,$$

где $A = exp(-C_\alpha\mu)$. Из теоремы 4 следует, что $||z(t) - z_1(t)|| \to 0$ и $||z(t) - z_2(t)|| \to 0$ при $t \to \infty$. Выберем такое $t^* \geqslant t_0$, что

$$||z(t^*) - z_i(t^*)|| < \frac{A}{2}||\Delta\varphi(t_0)|| \qquad i = 1, 2.$$

Тогда $||\Delta z(t^*)|| \leqslant ||z(t^*) - z_1(t^*)|| + ||z(t^*) - z_2(t^*)|| < A||\Delta\varphi(t_0)||$, но с другой стороны $||\Delta z(t^*)|| = ||\Delta\varphi(t^*)|| \geqslant A||\Delta\varphi(t_0)||$. Приходим к противоречию. Теорема 5 доказана.

5. Доказательство утверждения 3

Теорема 6. При достаточно малых M и ε для любой точки z_0, находящейся в ε-окрестности тора, существует такая поверхность T_{z_0} из теоремы 3, что решение $z(t) = z(t, t_0, z_0)$ лежит на поверхности T_{z_0}.

Доказательство теоремы 6. Для доказательства теоремы будем применять ту же технику, что и в работе [3]. Возьмем точку $z_0 = (x_0, \varphi_0)$ такую, что $||x_0 - u(\varphi_0)|| \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, где ε_1 взято из теоремы 4.

Пусть $z(t, t_0, z_0) = (x(t, t_0, x_0), \varphi(t, t_0, \varphi_0))$ — решение системы (1), $z(t, t_0, \alpha) = (\chi(t, t_0, \alpha), \xi(t, t_0, \alpha))$ — решение системы (1) на торе $x = u(\varphi)$, где α — m-мерный вектор, лежащий на торе $x = u(\varphi)$. Решение $z(t, t_0, \alpha)$ будет иметь начальные данные $\chi(t_0, t_0, \alpha) = u(\alpha)$, $\xi(t_0, t_0, \alpha) = \alpha$.

Покажем, что при фиксированном t_0 каждому $(n+m)$-мерному вектору z_0 соответствует m-мерный вектор α такой, что решение $z(t, t_0, z_0)$ принадлежит поверхности T_α, построенной по решению $z(t, t_0, \alpha)$.

Сделаем в системе (1) замену переменных $\psi(t) = \varphi(t) - \xi(t, t_0, \alpha)$, $y(t) = x(t) - \chi(t, t_0, \alpha)$. Получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = (\int\limits_0^1 P'_y(\chi(t, t_0, \alpha) + \theta y) d\theta) y + H(y, \psi), \\ \dfrac{d\psi}{dt} = b(y, \psi), \end{cases} \tag{40}$$

где

$$\begin{aligned} H(y, \psi) &= Q(y + \chi(t, t_0, \alpha), \psi + \xi(t, t_0, \alpha)) - Q(\chi(t, t_0, \alpha), \xi(t, t_0, \alpha)), \\ b(y, \psi) &= a(y + \chi(t, t_0, \alpha), \psi + \xi(t, t_0, \alpha)) - a(\chi(t, t_0, \alpha), \xi(t, t_0, \alpha)). \end{aligned} \tag{41}$$

По теореме 4 существует инвариантная поверхность T_α, представимая в виде

$$\psi = h(t, y, \alpha), \tag{42}$$

причем

$$h(0, t, \alpha) = 0, \ ||h(y, t, \alpha) - h(\overline{y}, t, \alpha)|| \leqslant L||y - \overline{y}||. \tag{43}$$

Очевидно, что любое решение $(y(t), \psi(t))$ с начальными данными

$$t = t_0, \ y = y_0, \ \psi = h(y_0, t_0, \alpha)$$

лежит на поверхности T_α.

Для того. чтобы доказать, что для некоторого α решение $z(t, t_0, z_0)$ лежит на поверхности T_α, достаточно показать, что для всех t выполняются равенства

$$\begin{cases} \psi(t) = \varphi(t, t_0, \varphi_0) - \xi(t, t_0, \alpha), \\ y(t) = x(t, t_0, x_0) - \chi(t, t_0, \alpha). \end{cases} \tag{44}$$

По теореме единственности, если равенства (44) соблюдаются при $t = t_0$, то они соблюдаются и при всех t. При $t = t_0$ равенства (44) имеют вид

$$\begin{cases} h(y_0, t_0, \alpha) = \varphi_0 - \alpha \\ y_0 = x_0 - u(\alpha). \end{cases} \tag{45}$$

Будем рассматривать равенства (45) как систему уравнений относительно y_0 и α. Подставляя значение y_0 из второго уравнения в первое, получаем

$$\alpha = \varphi_0 - h(x_0 - u(\alpha), t_0, \alpha). \tag{46}$$

Покажем, что уравнение (46) имеет решение при любых φ_0,x_0. Используя равенства (6) и (43), получаем

$$||\alpha-\varphi_0||=||h(x_0-u(\alpha),t_0,\alpha)||\leqslant L||x_0-u(\alpha)||\leqslant$$

$$\leqslant L||x_0-u(\varphi_0)||+L||u(\alpha)-u(\varphi_0)||\leqslant L||x_0-u(\varphi_0)||+LL^*||\alpha-\varphi_0||$$

или

$$||\alpha-\varphi_0||\leqslant\frac{L}{1-L}L^*||x_0-u(\varphi_0)||, \tag{47}$$

где $L^*=\dfrac{2l}{\lambda-l}$. В силу теоремы 4, уменьшая M и ε, можно добиться того, что будет выполняться неравенство $L<\dfrac{1}{1+L^*}$. Тогда

$$\frac{L}{1-L}L^*<1. \tag{48}$$

Рассмотрим в m-мерном пространстве шар B, определяемый неравенством $||\alpha-\varphi_0||\leqslant||x_0-u(\varphi_0)||$. Из неравенств (47) и (48) следует, что преобразование (46) переводит шар B в себя, а тогда по теореме Брауэра это преобразование имеет неподвижную точку. Таким образом, уравнение (46) имеет решение $\alpha=\alpha^*$. Подставляя решение α^* во второе уравнение (45), находим, что пара α^*, y_0^*, где $y_0^*=x_0-u(\alpha^*)$, удовлетворяет системе (44). Теорема 5 доказана.

Замечание 6. Так как $\lambda>2l$ по условию теоремы 1, то $L^*=\dfrac{2l}{\lambda-l}<2$. Следовательно, если функция $h(t,y,\alpha)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L<\dfrac{1}{3}$, то неравенство (48) выполняется. Из теоремы 4 следует что этого можно добиться, если взять $\varepsilon=\varepsilon(\frac{1}{3})$ и $M=M(\varepsilon(\frac{1}{3}))$ (см. замечание 3). Таким образом, в формулировке теоремы 6 в качестве M можно взять

$$M<\frac{3\lambda}{4(k+1)}\left(\frac{\lambda}{4l}\right)^{k+1}. \tag{49}$$

При этом тор будет лежать в множестве $H(\frac{1}{3})$. Заметим, что $\varepsilon_x(\frac{1}{3})\leqslant\dfrac{\lambda}{4l}$.

Таким образом, существование расслоения доказано при выполнении условия А и для M, удовлетворяющего неравенству (49).

Литература

1. *Волков Д. Ю., Ильин Ю. А.* О существовании инвариантного тора у существенно нелинейной системы дифференциальных уравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.1. 1992. Вып.4 (N 22).

2. *Ильин Ю. А.* Существование интегральных многообразий в окрестности точки покоя существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений / Диссертация на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. н. Ленинград. 1989.

3. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977. 304 с.

4. *Ильин Ю. А.* О применении логарифмических норм к нелинейным системам дифференциальных уравнений // Нелинейные динамические системы. Вып. 2. СПб. 1999.

5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

6. *Лозинский С. М.* Оценки погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958. N 5.

Боголюбов Андрей Александрович - аспирант кафедры дифференцуиальных уравнений математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Ильин Юрий Анатольевич - доцент кафедры дифференцуиальных уравнений математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Раб. тел.: 428 69 59