

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 2, 2014
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория нелинейных колебаний

Аналитико-численные методы поиска скрытых колебаний в многомерных динамических системах

И.М.Буркин, Нгуен Нгок Хиен

Тульский гос. университет, Тула, Россия

Аннотация

Предложен новый аналитико-численный метод поиска скрытых аттракторов многомерных динамических систем. Метод применен для поиска скрытых аттракторов системы Чуа, построения контрпримера к гипотезе Калмана, поиску скрытых колебаний в системах управления летательными аппаратами.

Abstract

In nonlinear dynamical systems attractors can be regarded as self-excited and hidden attractors. Self-excited attractors can be localized numerically by a standard computational procedure in which after a transient process a trajectory starting from a point of the unstable manifold in a neighborhood of an equilibrium state reaches a state of oscillation, therefore one can easily identify it. In contrast, for a hidden attractor, a basin of attraction does not intersect with small neighborhoods of equilibria. While classical attractors are self-excited, attractors can therefore be obtained numerically by the standard computational procedure. For localization of hidden attractors it is necessary to develop special procedures, since there are no similar transient processes leading to such attractors.

In this paper we propose a new efficient analytical-numerical method for the study of hidden oscillations in multidimensional dynamical systems.

1 Введение

Теория нелинейных колебаний динамических систем, созданная в тридцатых годах XX века, первоначально была настолько прозрачна и понятна, что поколения исследователей могли успешно применять ее для решения задач из различных областей науки. При этом структура большинства изучаемых систем была такой, что факт существования колебательных режимов в них не вызывал сомнений, поэтому основные усилия исследователей были сосредоточены на анализе свойств и формы таких колебаний. В семидесятых годах ситуация кардинально изменилась. Стало понятно, что кроме орбитально устойчивых циклов и торов, имеющих единую природу, динамические системы могут обладать странными аттракторами, имеющими сложную топологическую структуру. В последующие десятилетия усилия многих математиков были со-

средоточены на исследовании структуры странных аттракторов, их размерности, условий их возникновения в результате каскада бифуркаций [43-46,33].

Следует подчеркнуть, что большинство конкретных математических моделей динамических систем не допускает "качественного интегрирования" с помощью чисто математического анализа. Поэтому многие результаты, касающиеся механизмов возникновения аттракторов, их локализации в фазовом пространстве и вычисления их характеристик были получены с помощью компьютерного моделирования [46]. Дело в том, что аттракторы классических систем Лоренца [24], Рёслера [25], Чуа [23], также как аттракторы моделей классических систем автоматического управления, содержат в своей области притяжения сколь угодно малые окрестности неустойчивых состояний равновесия. Такие аттракторы являются *самовозбуждающимися* в том смысле, что вычислительная процедура, "стартующая" из любой точки неустойчивого многообразия в окрестности состояния равновесия, "выходит" на аттрактор и рассчитывает его. В отличие от самовозбуждающихся, *скрытые* аттракторы не содержат в своей области притяжения окрестностей состояния равновесия. Феномен существования таких аттракторов (вложенных орбитально асимптотически устойчивых циклов) хорошо известен для случая двухмерных систем, в которых их легко обнаружить. Другими хорошо известными примерами существования скрытых аттракторов у многомерных моделей систем автоматического управления являются контрпримеры к предположениям Айзермана и Калмана [35,31], где единственное устойчивое в малом состояние равновесия сосуществует с орбитально устойчивым циклом [37,38]. Эффективно проверяемые условия существования скрытых орбитально устойчивых циклов у некоторого класса многомерных систем получены в работах [26,28].

В 2010 году Г.А.Леоновым был предложен новый метод поиска скрытых колебаний в многомерных динамических системах, основанный на использовании метода гармонической линеаризации, метода малого параметра и метода описывающих функций в сочетании с прикладной теорией бифуркаций [8]. Дальнейшее развитие этого метода [9-22], позволило впервые обнаружить хаотический скрытый аттрактор в контуре Чуа. Упомянутые работы вызвали волну интереса к исследованию многомерных динамических систем, которые либо не имеют состояний равновесия, либо имеют устойчивые в малом состояния равновесия и одновременно обладают орбитально устойчивыми циклами, или странными аттракторами [1-7].

Основная идея методов поиска скрытых колебаний динамической системы $\dot{x} = f(x)$, использованного в работах [9-22], основана на гомотопии и состоит в следующем. Рассматривается однопараметрическое семейство систем

$$\dot{x} = \varphi(x, \varepsilon), \varepsilon \in [0,1] \quad (1)$$

такое, что $\varphi(x,1) = f(x)$, и при малых $\varepsilon > 0$ система (1) имеет легко обнаруживаемый самовозбуждающийся орбитально асимптотически устойчивый цикл. Численно отслеживается эволюция этого цикла при возрастании ε до 1. Возможна следующая альтернатива: либо при некотором $\varepsilon \in (0,1)$ происходит бифуркация исчезновения аттрактора, либо при $\varepsilon = 1$ обнаруживается скрытый аттрактор исследуемой динамической системы.

Ясно, что ключевым моментом в приведенном алгоритме является построение функции $\varphi(x, \varepsilon)$, обладающей перечисленными выше свойствами. В работах [9-22] рассматривается класс систем, для которых возможно построение нужной функции и дан алгоритм ее построения.

В данной работе для такого же класса систем предлагается аналогичная по смыслу, но иная процедура поиска скрытых аттракторов. Предлагаемая процедура во многих случаях оказывается "менее затратной" на этапе подготовки к реализации численного алгоритма поиска скрытого аттрактора, и в то же время позволяет, например, обнаружить скрытые аттракторы в классической и обобщенной системах Чуа [23,30], построить контрпример к известной гипотезе Калмана [31], обнаружить скрытые колебания в системах управления летательными аппаратами [21,22,41,42].

2 Условия существования самовозбуждающихся циклов у многомерных систем.

Рассмотрим систему вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\xi, \xi = \varphi(\sigma), \sigma = C^* x, \quad (2)$$

где A, B, C – вещественные постоянные матрицы порядков, соответственно, $n \times n, n \times m$ и $n \times m$, где $m \leq n, x \in R^n$. Знак (*) означает транспонирование, а ниже в комплексном случае – эрмитово сопряжение. Везде в данной работе предполагается, что $\xi_j = \varphi_j(\sigma_j), j=1,2,\dots,m$, где $\varphi_j(\sigma_j)$ – непрерывные, дифференцируемые при $\sigma_j = 0$ функции.

Ниже, для формулировки утверждений, нам удобно будет использовать передаточную $m \times m$ -матрицу $W(p) = C^*(A - pI_n)^{-1}B$ системы (2), где p – комплексная переменная. На протяжении всей работы мы будем предполагать, что ранги матриц $\|B, AB, \dots, A^{n-1}B\|$ и $\|C, A^*B, \dots, (A^*)^{n-1}B\|$ равны n . В этом случае говорят [32], что система (2) управляема и наблюдаема. Согласно теореме 1.2.4 [32], управляемость и наблюдаемость системы (2) эквивалентна невырожденности ее передаточной матрицы $W(p)$. Последнее означает, что для любого корня p_0 многочлена $\delta(p) = \det(pI_n - A)$ существует такой минор $\nu(p)$ матрицы $W(p)$, что $\lim_{p \rightarrow p_0} \delta(p)\nu(p) \neq 0$.

Пусть функции $\varphi_j(\sigma_j)$ удовлетворяют условиям

$$0 \leq \frac{\varphi_j(\sigma_{j2}) - \varphi_j(\sigma_{j1})}{\sigma_{j2} - \sigma_{j1}} \leq \mu_j \quad \text{для всех } \sigma_j \in (-\infty, \infty), \sigma_{j1} \neq \sigma_{j2}, \varphi_j(0) = 0, j=1,2,\dots,m. \quad (3)$$

Предположения (3), очевидно, означают, что система (2) имеет решение (точку покоя) $x=0$. Если x_0 – какая-либо точка покоя системы (2), то для нее справедливо соотношение $C^*x_0 + C^*A^{-1}B\varphi(C^*x_0) = 0$, которое можно записать в виде

$$\sigma_0 + W(0)\varphi(\sigma_0) = 0, \text{ где } \sigma_0 = \text{col}(\sigma_1^0, \dots, \sigma_m^0), \varphi(\sigma_0) = \text{col}(\varphi_1(\sigma_1^0), \dots, \varphi_m(\sigma_m^0)). \quad (4)$$

Все формулируемые далее критерии существования циклов у системы (2) используют предположение о том, что $x=0$ – единственная точка покоя системы. Для этого необходимо и достаточно, чтобы система (4) имела только тривиальное решение $\sigma_0=0$. Положим $W(0) = (w_{ij})_{m \times m}$.

Лемма 1. Пусть в какой-либо строке с номером j матрицы $W(0)$ равны нулю все элементы, кроме элемента w_{jj} , расположенного на главной диагонали. Пусть выполнено неравенство $w_{jj} > -\mu_j^{-1}$. Тогда $\sigma_j = 0$.

Лемма 2. Пусть в строках с номерами i и j матрицы $W(0)$ равны нулю все элементы w_{kl} , для которых по крайней мере один из индексов k или l отличен от i или j . Если выполнены условия

$$w_{ii} > -\mu_i^{-1}, w_{jj} > -\mu_j^{-1}, w_{ij}w_{ji} \leq 0, \quad (5)$$

тогда система (4) имеет только тривиальное решение.

Приведем доказательство леммы 2. Лемма 1 доказывается аналогично.

Доказательство. Пусть, для определенности, $i=1, j=2$. Тогда первые два уравнения системы (4) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_1 + w_{11}\varphi_1(\sigma_1) + w_{12}\varphi_2(\sigma_2) &= 0, \\ \sigma_2 + w_{21}\varphi_1(\sigma_1) + w_{22}\varphi_2(\sigma_2) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

При $w > -\mu^{-1}$ прямая $\sigma + w\xi = 0$ не пересекает сектор $0 < \frac{\xi}{\sigma} < \mu$ на плоскости (σ, ξ) . Из условий (3) вытекают соотношения $0 \leq \frac{\varphi_k(\sigma_k)}{\sigma_k} \leq \mu_k$, $k = 1, 2$. Поэтому, предполагая, что система (6) имеет решение $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = 0$ и, используя условие $w_{11} > -\mu_1^{-1}$, сразу приходим к противоречию с первым уравнением системы. Аналогично, предполагая что $\sigma_1 = 0$, из второго уравнения системы и условия $w_{22} > -\mu_2^{-1}$ выводим, что $\sigma_2 = 0$. Предполагая теперь, что система (6) имеет решение $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, получаем

$$\left(\frac{\sigma_1}{\varphi_1(\sigma_1)} + w_{11} \right) \left(\frac{\sigma_2}{\varphi_2(\sigma_2)} + w_{22} \right) = w_{12} w_{21}.$$

В силу (5), оба сомножителя в левой части последнего равенства строго положительны, а его правая часть неположительна. Это противоречие и доказывает лемму.

Будем говорить, что матрица $W(0)$ "допускает редуцирование по варианту 1", если все элементы i -ой строки этой матрицы, кроме элемента w_{ii} равны нулю. Будем говорить, что матрица $W(0)$ "допускает редуцирование по варианту 2", если все элементы в каких-либо строках i и j этой матрицы, кроме элементов w_{ii} , w_{jj} , w_{ij} и w_{ji} равны нулю. Редуцированием матрицы по варианту 1 будем называть матрицу, в которой все элементы в строке и столбце с номером i заменены нулями. Редуцированием матрицы по варианту 2 будем называть матрицу, в которой все элементы в столбцах с номерами i и j заменены нулями.

Лемма 3. Пусть матрица $W(0)$ допускает последовательные редуцирования по вариантам 1 или 2 до тех пор, пока она не станет нулевой $m \times m$ -матрицей. Если при редуцировании по варианту 1 всякий раз выполнено условие $w_{ii} > -\mu_i^{-1}$, а при редуцировании по варианту 2 выполняются условия (5), то система (4) имеет только тривиальное решение $\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = \dots = \sigma_m^0 = 0$ (система (2) имеет единственное состояние равновесия $x = 0$).

Справедливость утверждения леммы 3 вытекает из лемм 1 и 2.

Замечание 1. Если функции $\varphi_j(\sigma_j)$ удовлетворяют соотношениям

$$\mu_j^1 \leq \frac{\varphi_j(\sigma_{j2}) - \varphi_j(\sigma_{j1})}{\sigma_{j2} - \sigma_{j1}} \leq \mu_j^2 \quad \text{для всех } \sigma_j \in (-\infty, \infty), \sigma_{j1} \neq \sigma_{j2}, \varphi_j(0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3')$$

то система (2) будет иметь единственное состояние равновесия $x = 0$, если условия леммы 3 выполнены для матрицы $W(0)[I_m + \mu W(0)]^{-1}$, где $\mu = \text{diag}(\mu_1^2 - \mu_1^1, \mu_2^2 - \mu_2^1, \dots, \mu_m^2 - \mu_m^1)$. В скалярном случае ($m = 1$), как хорошо известно, условие существования только тривиального состояния равновесия $x = 0$ у системы (2) сводится к требованию существования единственной точки пересечения $\sigma = 0$ графика нелинейности $\varphi(\sigma)$ с "характеристической прямой" $\sigma + W(0)\varphi = 0$.

Теорема 1. Пусть нелинейности $\varphi_j(\sigma_j)$ в системе (2) удовлетворяют соотношениям (3'). Пусть существует число $\lambda > 0$ такое, что выполнены следующие условия.

1) Матрица $A + B\varphi'(0)C^*$, где $\varphi'(0) = \text{diag}(\varphi'_1(0), \dots, \varphi'_m(0))$, имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda \leq \text{Re } p \leq 0$.

2) Матрица $A + BhC^*$, где $h = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_m)$ является гурвицевой и $|\varphi(\sigma) - hC^*x| < \gamma < \infty$.

3) При всех $\omega \in [0, \infty)$ справедливо неравенство

$$\det \text{Re}[I_m + \mu^1 W(i\omega - \lambda)]^* [I_m + \mu^2 W(i\omega - \lambda)] \neq 0, \mu^k = \text{diag}(\mu_1^k, \mu_2^k, \dots, \mu_m^k), k = 1, 2. \quad (7)$$

Тогда система (2) имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $x = 0$.

Доказательство. Пусть $C^* = \text{col}(c_1^*, c_2^*, \dots, c_m^*)$, где c_j^* – вектор-строка, а $x_1(t), x_2(t)$ – какие-либо два решения системы (2). Положим $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$. Очевидно, $z(t)$ является решением системы

$$\frac{dz}{dt} = Az + B\psi(t, \sigma), \quad \sigma = C^* z, \quad (8)$$

где $\psi(t, \sigma) = R(t)\sigma$, $R(t) = \text{diag}(r_1(t), \dots, r_m(t))$, $r_j(t) = \frac{[\varphi_j(\sigma_{j_2}(t)) - \varphi_j(\sigma_{j_1}(t))]c_j^* z(t)}{|c_j^* z(t)|^2}$ при $c_j^* z(t) \neq 0$

и $r_j(t) = 0$ при $c_j^* z(t) = 0$. Учитывая (3') для функции $\psi(t, \sigma) = R(t)\sigma$ получим,

$$\mu_j^1 \sigma_j^2 \leq \psi_j(t, \sigma_j) \sigma_j \leq \mu_j^2 \sigma_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

Введем в рассмотрение функцию $v(z) = z^* H z$. Матрицу $H = H^*$ подберем так, чтобы выполнялось неравенство

$$\dot{v}(z) + 2\lambda v(z) \leq -\varepsilon |z|^2 \quad (10)$$

с каким либо $\varepsilon > 0$, где производная функции $v(z)$ вычислена в силу системы (8).

Для выполнения соотношения (10) достаточно, чтобы для любых $z \in R^n$ и любых $\psi \in R^m$, удовлетворяющих соотношениям (9), было справедливо неравенство

$$2z^* H[(A + \lambda I_n)z + B\psi] + \sum_{j=1}^m (\mu_j^2 \sigma_j - \psi_j)(\psi_j - \mu_j^1 \sigma_j) \leq -\varepsilon(|z|^2 + |\psi|^2). \quad (11)$$

По частотной теореме 1.2.7 [32] для существования матрицы $H = H^*$, удовлетворяющей неравенству (11), необходимо и достаточно, чтобы при всех $\omega \in [0, \infty)$ выполнялось условие $\text{Re}[I_m + \mu^1 W(i\omega - \lambda)]^* [I_m + \mu^2 W(i\omega - \lambda)] < 0$. Последнее неравенство эквивалентно условию (7).

Полагая в (11) $\psi_j = \varphi_j'(0)\sigma_j$ и учитывая соотношения (9), приходим к матричному неравенству

$$H[A + B\varphi'(0)C^* + \lambda I_n] + [A + B\varphi'(0)C^* + \lambda I_n]^* H \leq -\varepsilon I_n. \quad (12)$$

Из этого неравенства, условия 1) теоремы и леммы 1.2.4 [32] вытекает, что матрица H неособая и имеет ровно 2 отрицательных и $n - 2$ положительных собственных значения.

Из приведенных рассуждений следует, что для функции $V(x) = x^* H x$ с найденной матрицей H и для любых двух решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ системы (2) справедливо соотношение

$$\dot{V}[x_1(t) - x_2(t)] + 2\lambda V[x_1(t) - x_2(t)] \leq -\varepsilon |x_1(t) - x_2(t)|^2. \quad (13)$$

Полагая в (13) $x_2(t) \equiv 0$, получим неравенство $\dot{V}[x(t)] + 2\lambda V[x(t)] \leq -\varepsilon |x(t)|^2$, справедливое для произвольного решения $x(t)$ системы (2). Из этого неравенства и теоремы 2.9 [33] следует, что $\Omega = \{x : x^* H x \leq 0\}$ является положительно инвариантным для траекторий системы (2) множеством, граница которого $\partial\Omega = \{x : x^* H x = 0\}$ пересекается вовнутрь всеми траекториями этой системы, которые ее встречают.

Положим $P = A + B\varphi'(0)C^*$, $f(x) = B[\varphi(C^* x) - \varphi'(0)C^* x]$ и перепишем систему (2) в виде

$$\dot{x} = Px + f(x). \quad (14)$$

В силу предположения 1) теоремы существует неособое преобразование $x = Qy$, приводящее систему (14) к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -P_{11}y_1 + g_1(y), \quad y = \text{col}(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 &= P_{22}y_2 + g_2(y), \end{aligned} \quad (15)$$

где P_{11}, P_{22} – антигурвицевы матрицы размерностей $(n-2) \times (n-2)$ и 2×2 соответственно, причем матрица $P_{22} + P_{22}^*$ положительно определена, а $g_i(y) = o(|y|)$, $i = 1, 2$. Пусть

$N = Q^* H Q, P_1 = Q^{-1} P Q$. Покажем, что $y^* N y < 0$ при $y_1 = 0, y_2 \neq 0, y^* N y > 0$ при $y_1 \neq 0, y_2 = 0$. Для этого представим матрицы N и P_1 в виде

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & L \\ L^* & N_{22} \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} -P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix},$$

где $N_{11} = N^*_{11} - (n-2) \times (n-2)$ -матрица, $N_{22} = N^*_{22} - 2 \times 2$ -матрица. Из соотношения (12) для квадратичной формы $y^* N y$ при $y_1 = 0, y_2 \neq 0$ имеем

$$2y_2^* N_{22} (P_{22} + \lambda I_2) y_2 \leq -\varepsilon |Qy|^2 \leq -\frac{\varepsilon}{|Q^{-1}|^2} |y_2|^2.$$

Из этого неравенства и антигурвицевости матрицы $P_{22} + \lambda I_2$ следует, что $N_{22} < 0$. Аналогично, с использованием того факта, что матрица $-P_{11} + \lambda I_{n-2}$ является гурвицевой, доказывается, что $y^* N y > 0$ при $y_1 \neq 0, y_2 = 0$.

Пусть k – наименьшее собственное значение положительно определенной матрицы $P_{22} + P_{22}^*$. Тогда

$$\frac{d}{dt}(|y_2|^2) = y_2^* (P_{22} + P_{22}^*) y_2 + 2y_2^* g_2(y) \geq k |y_2|^2 + 2y_2^* g_2(y). \quad (16)$$

Заметим, что для произвольного $y = \text{col}(y_1, y_2)$ из множества $\Omega = \{y : y^* Q^* H Q y \leq 0\}$ выполнено соотношение $|y_1| \leq \varrho |y_2|$ с некоторым $\varrho > 0$. Поэтому $g_2(y) = o(|y_2|)$. Положим $Fy = \text{col}(0, y_2)$. Из свойства $g_2(y)$ и соотношения (16) следует, что при достаточно малом $\theta > 0$ поверхность $\partial G_1 = \{x : |FQ^{-1}x| = \theta, x^* H x \leq 0\}$ бесконтактна для траекторий системы (2) и пересекается наружу всеми траекториями этой системы, которые ее встречают.

Пусть матрица R является решением уравнения Ляпунова

$$R(A + BhC^*) + (A + BhC^*)^* R = -I_n.$$

В силу предположения 2) теоремы матрица R положительно определена. Рассмотрим функцию $U(x) = x^* R x$. Для производной функции $U(x)$ в силу системы (2) имеем

$$\dot{U} = x^* [(A + BhC^*)^* R + R(A + BhC^*)] x + 2x^* R(\varphi(\sigma) - hC^* x) \leq -|x|^2 + \|R\| \gamma |x|. \quad (17)$$

Обозначим через q наибольшее собственное значение матрицы R и возьмем произвольное число $\rho > 4 \|R\|^2 \gamma^2 q$. Тогда, из (17) следует, что поверхность эллипсоида $\partial G_2 = \{x : x^* R x = \rho\}$ бесконтактна для траекторий системы (2) и пересекается вовнутрь всеми траекториями этой системы, которые ее встречают.

Обозначим через D область, ограниченную поверхностями $\partial \Omega, \partial G_2, \partial G_2$. Эта область замкнута, ограничена, не содержит состояния равновесия $x = 0$ системы (2) и пересекается вовнутрь всеми траекториями этой системы. Отсюда, а также из факта справедливости соотношения (13) и ограниченности функции $|\varphi(\sigma) - hC^* x|$ следует, что мы находимся в условиях теоремы 8.4 [33], согласно которой ω -предельное множество траектории любого решения $x(t)$ системы (2), для которого $x(0) \in D$, содержит по крайней мере один орбитально устойчивый цикл этой системы.

Из приведенных выше построений и соотношения (13) следует, что если $|x(0)|$ достаточно мала и $x(0)$ не принадлежит устойчивому многообразию состояния равновесия $x = 0$ системы (2), то для некоторого $\tau > 0$ $x(\tau) \in D$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнено предположение (3'), а также условия 1) и 3) теоремы 1. Пусть для некоторой матрицы $\tilde{M} = \text{diag}(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \dots, \tilde{\mu}_m)$, где $\tilde{\mu} \in (\mu_j^1, \mu_j^2)$ матрица $A + B\tilde{M}C^*$ не

имеет собственных значений в полосе $-\lambda \leq \operatorname{Re} p \leq 0$. Тогда для всех решений $x(t)$ системы (2) с $\varphi(\sigma) = \tilde{M}C^*x$, для которых $x(0) \in \Omega = \{x : x^*Hx \leq 0\}$ выполнено: $|x(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Обозначим здесь $P = A + B\tilde{M}C^*$ и положим в (11) $\psi = \tilde{M}C^*x$. Убеждаемся, что матрица P удовлетворяет неравенству $H(P + \lambda I_n) + (P + \lambda I_n)^*H \leq -\varepsilon I_n$. Так как матрица H имеет ровно 2 отрицательных и $n - 2$ положительных собственных значения, то по теореме 2.3 [33] матрица $P + \lambda I_n$ имеет ровно два собственных значения в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. В силу предположений доказываемой теоремы, матрица P также имеет ровно 2 собственных значения в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ и не имеет их на мнимой оси. Линейная система, получающаяся из системы (2) при $\varphi(\sigma) = \tilde{M}C^*x$, имеет вид (14) с $f(x) = 0$. После неособого преобразования $x = Qu$ она примет вид $\dot{y}_1 = -P_{11}y_1, \dot{y}_2 = P_{22}y_2$, где $y = \operatorname{col}(y_1, y_2)$, с гурвицевой $(n - 2) \times (n - 2)$ -матрицей $(-P_{11})$ и антигурвицевой 2×2 -матрицей P_{22} . Если $x(0) \in \Omega$, то по доказанному выше $y_2 \neq 0$. Поэтому $|y_2(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ и, следовательно, $|x(t)| \rightarrow \infty$.

Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Условие 2) теоремы 1 может быть заменено любым условием диссипативности по Левинсону системы (2), гарантирующим существование открытого ограниченного множества Λ , содержащего точку $x = 0$, такого, что его замыкание $\bar{\Lambda}$ положительно инвариантно для траекторий системы (2) и его граница $\partial\Lambda$ пересекается вовнутрь всеми траекториями этой системы, которые ее встречают. Например, как показано в [27,29], система (2) с нелинейностью, удовлетворяющей условиям (3'), будет диссипативной по Левинсону, если существуют числа $v_j^1, v_j^2 \in (\mu_j^1, \mu_j^2)$ и $\sigma_j^0 > 0$ такие, что $v_j^1(\sigma_j)^2 \leq \sigma_j \varphi_j(\sigma_j) \leq v_j^2(\sigma_j)^2$ при $|\sigma_j| \geq \sigma_j^0$ и при всех $\omega \in [0, \infty)$ справедливо соотношение

$$\det \operatorname{Re}[I_m + v^1 W(i\omega)]^* [I_m + v^2 W(i\omega)] \neq 0, v^k = \operatorname{diag}(v_1^k, v_2^k, \dots, v_m^k), k = 1, 2.$$

3 Алгоритм поиска скрытых аттракторов. Примеры.

Пусть имеется некоторая система, которая может быть записана в виде (2). Проведем "линейный анализ" этой системы. Пусть существуют числа μ_j^1, μ_j^2 ($j = 1, 2, \dots, m$), для которых справедливо соотношение (7) для некоторого $\lambda > 0$ и при этом некоторая матрица $A + BMC^*$, где $M = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m), \mu_j \in (\mu_j^1, \mu_j^2)$, имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda \leq \operatorname{Re} p \leq 0$. Пусть при всех $v_j \in (\mu_j^1, \mu_j^2)$ матрица $A + BNC^*, N = \operatorname{diag}(v_1, v_2, \dots, v_m)$ является гурвицевой. Пусть, наконец, выполнены условия леммы 3, или условия, сформулированные в замечании 1. Тогда, пользуясь теоремой 1, легко подобрать нелинейность $\psi(\sigma)$, так, чтобы система (2) с такой нелинейностью имела по крайней мере один орбитально асимптотически устойчивый цикл, область притяжения которого содержит все точки малой окрестности состояния равновесия $x = 0$ системы. Пусть $x_0 \neq 0$ – какая-либо (произвольная) точка из окрестности состояния равновесия $x = 0$. Найдем численно решение $x_0(t)$ системы (2) с нелинейностью $\psi(\sigma)$ на промежутке $[0, T]$, где T достаточно велико, и начальным условием $x_0(0) = x_0$. Значение $x_0(T)$ будет достаточно близко к циклу. Рассмотрим теперь, семейство систем (2) с нелинейностями $\varepsilon_j \varphi(\sigma) + (1 - \varepsilon_j) \psi(\sigma)$, где $\varepsilon_i = 0.1i, i = 0, 1, \dots, 10$. Решения этих систем будем обозначать $x_i(t)$. При численном интегрировании каждой из систем семейства в качестве начального условия $x_i(0)$ будем брать $x_{i-1}(T)$. Если при интегрировании всех систем семейства получаем аттрактор, то при $j = 10$ будет найден аттрактор системы (2) с нелинейностью $\varphi(\sigma)$. Если же при не-

котором значении ε_i аттрактор численным интегрированием не обнаруживается, то это означает, что произошла бифуркация и исчезновение аттрактора.

Замечание 3. Если в процессе реализации описанного алгоритма на некотором шаге аттрактор не обнаруживается, то это может означать, что очередной аттрактор имеет очень малую область притяжения. В этом случае целесообразно попытаться уменьшить шаг дискретизации по ε и повторить процедуру поиска с меньшим шагом.

Рассмотрим несколько примеров искусственно сконструированных систем, на которых продемонстрируем работу алгоритма поиска скрытых аттракторов.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1.241x_1 + 8.45x_2 - 1.4365 \frac{x_1^4 + 0.2}{0.34x_1^4 + 0.2} \tanh x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 + 0.1x_2^3, \\ \dot{x}_3 &= -12.1x_2 - 0.005x_3. \end{aligned} \tag{18}$$

Система (18) имеет состояния равновесия: $(0,0,0)$ и $(\pm 3.3862, \pm 1.3987 \times 10^{-3}, \mp 3.3862)$. При этом нулевое состояние равновесия устойчиво в малом, а два других состояния равновесия являются седло-фокусами. Эта система может быть записана в виде (2) с

$$A = \begin{pmatrix} 1.241 & 8.45 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -12.1 & -0.005 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -8.45 & 0 \\ 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(\sigma_1) = 0.17 \frac{\sigma_1^4 + 0.2}{0.34\sigma_1^4 + 0.2} \tanh \sigma_1, \varphi_2(\sigma_2) = \sigma_2^3.$$

Проведя "линейный анализ" системы (18), убеждаемся, что при $\mu_1 \in [0.148, 0.2]$, $\mu_2 \in [0, 0.8]$ матрица $A + BMC^*$, $M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2)$ является гурвицевой. При $\mu_1 \in [0.215, 0.9]$, $\mu_2 \in [0, 2]$ матрица $A + BMC^*$, $M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2)$ имеет ровно 2 собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-1 \leq \text{Re } p \leq 0$.

Пусть

$\Pi(\omega) = \det \text{Re}[I_2 + \mu^1 W(i\omega - \lambda)]^* [I_2 + \mu^2 W(i\omega - \lambda)]$, где $\lambda = 0.6$, $\mu^2 = \text{diag}(0.77, 1)$, $\mu^1 = \text{diag}(0.17, 0)$. График функции $\Pi(\omega)$ представлен на рисунке 1.

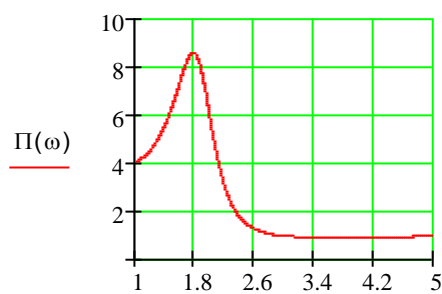


Рис.1

Таким образом, справедливы соотношения (7) для указанных матриц μ^1 и μ^2 . Заменяем функций $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$ в системе (18) на произвольные непрерывные кусочно-дифференцируемые функции, $\psi_1(x_1)$ и $\psi_2(x_2)$, для которых $\psi_1'(0) \in [0.215, 0.77]$, $\psi_2'(0) \in [0, 1]$,

на всех промежутках дифференцируемости выполнены условия $\psi_1'(x_1) \in [0.17, 0.77], \psi_2'(x_2) \in [0, 1]$ и выполняются, например, соотношения

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \frac{\psi_1(x_1)}{x_1} = 0.18, \lim_{|x_2| \rightarrow \infty} \frac{\psi_2(x_2)}{x_2} = 0.5. \quad (19)$$

Пользуясь замечанием 1, нетрудно убедиться, что в система при этом будет иметь единственное состояние равновесия $(0, 0, 0)$. Согласно теореме 1, система (18) с нелинейностями, удовлетворяющими условиям (19), будет иметь по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $(0, 0, 0)$.

Возьмем в качестве $\psi_1(x_1)$ и $\psi_2(x_2)$ следующие функции

$$\psi_1(x_1) = \begin{cases} 0.18x_1 - 0.11, & x \leq -0.5, \\ 0.4x_1, & |x| \leq 0.5, \\ 0.18x_1 + 0.11, & x \geq 0.5, \end{cases}, \quad \psi_2(x_2) = 0.5x_2.$$

"Стартуя" от системы с такими нелинейностями, реализуем описанный выше алгоритм поиска скрытого колебания системы (18). На рисунке 2 показан цикл "стартовой" системы с начальными условиями $(0.1, 0.2, 0.3)$.

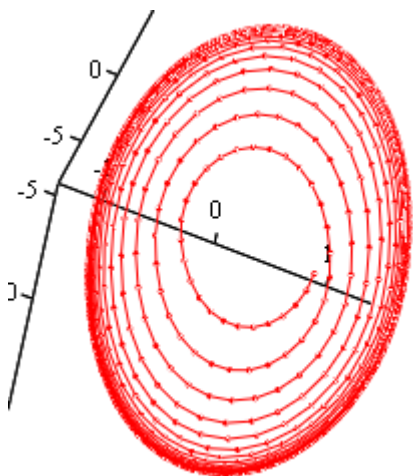


Рис.2

$\varepsilon = 0$

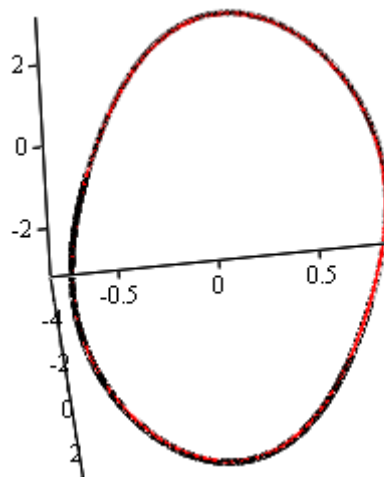


Рис.3

$\varepsilon = 0.6$

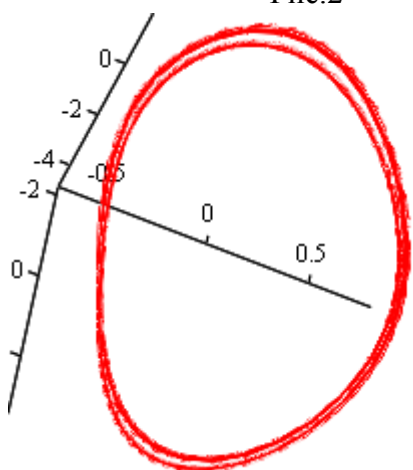


Рис.4

$\varepsilon = 0.9$

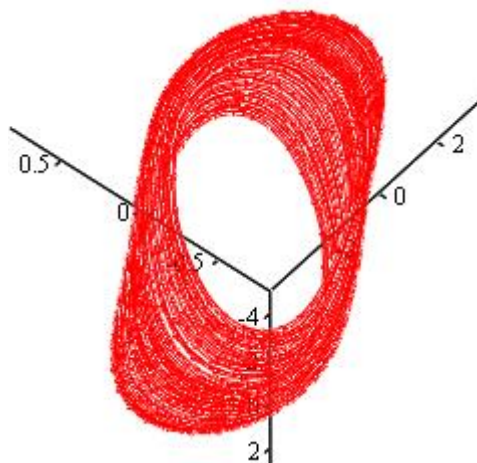


Рис.5

$\varepsilon = 1$

На рисунках 3-5 показана эволюция аттрактора системы при изменении ε .

Отметим, что точка с координатами $(3.386, 1.3987 \times 10^{-3}, -3.386)$ находится в области притяжения найденного аттрактора, тогда как траектории, начинающиеся в близкой точке $(3.386, 1.3987 \times 10^{-2}, -3.386)$ очень быстро "уходит на бесконечность".

Пример 2. Рассмотрим систему (2) с одной нелинейностью, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -18 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \varphi(\sigma) = (7 + 0.0567\sigma^2)\operatorname{atanh}\sigma.$$

Здесь матрица $A(\mu) = A + \mu BC^*$ является гурвицевой при $\mu \in (0,2) \cup (5,\infty)$. При $\mu = 2$ и $\mu = 5$ эта матрица имеет одно отрицательное и пару чисто мнимых собственных значений. При $\mu \in (2,5)$ матрица $A(\mu)$ имеет пару собственных значений в правой открытой полуплоскости и не имеет их в полосе $-3 \leq \operatorname{Re} p \leq 0$. Единственное состояние равновесия с рассматриваемой системы устойчиво в малом. Рисунки 6-8 показывают, что график нечетной нелинейности $\varphi(\sigma)$ "поочередно пребывает" в секторах гурвицевости и неустойчивости степени 2.

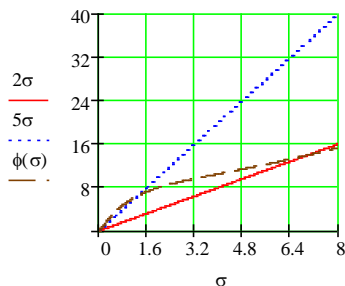


Рис.6

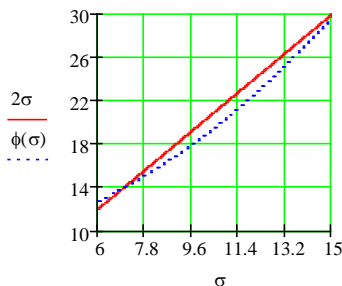


Рис.7

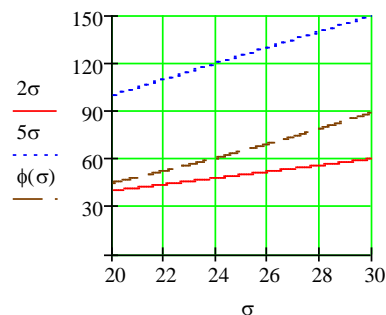


Рис.8

Такое поведение графика нелинейности дает основания предположить, что рассматриваемая система обладает скрытыми аттракторами.

Для данной системы передаточная функция имеет вид $W(p) = \frac{p^2 + p + 18}{p^3 + p^2 + 10p}$. Нетрудно

убедиться, что при всех $\omega \geq 0$ и $\lambda = 0.6$ справедливо соотношение

$$\operatorname{Re}\{[1 + 0.4W(i\omega - \lambda)][1 + 10W(i\omega - \lambda)]^*\} > 0,$$

означающее выполнение условия 3) теоремы 1 в скалярном случае.

Рассмотрим вспомогательную систему, заменив нелинейность $\varphi(\sigma)$ на функцию

$$\psi_1(\sigma) = \begin{cases} \sigma - 1.5, & \sigma \leq -0.5, \\ 4\sigma, & |\sigma| \leq 0.5, \\ \sigma + 1.5, & \sigma \geq 0.5. \end{cases}$$

Согласно теореме 1, система с такой нелинейностью будет иметь самовозбуждающийся цикл, область притяжения которого содержит точки сколь угодно малой окрестности точки покоя $x = 0$. Применяя алгоритм поиска скрытого колебания, описанный выше, обнаруживаем цикл рассматриваемой системы. Этапы работы алгоритма представлены на рисунках 9-11 (проекции цикла на плоскость (x, y)).

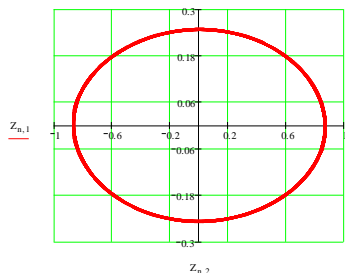


Рис.9 ($\varepsilon = 0$)

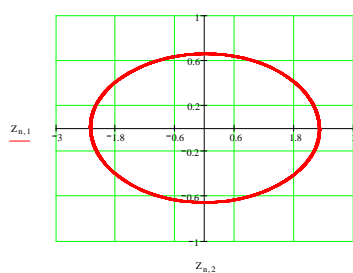


Рис.10 ($\varepsilon = 0.5$)

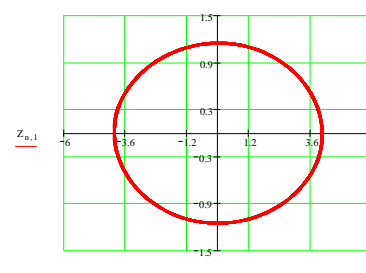


Рис.11 ($\varepsilon = 1$)

На рисунке 12 представлен график $\sigma(t)$ для найденного цикла.

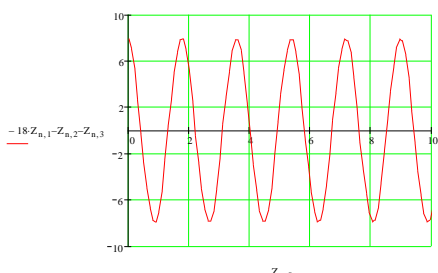


Рис.12

Из рисунка 12 видно, что $|\sigma(t)| < 8$. Пользуясь теоремой 2, подберем нелинейность $\psi_2(\sigma)$ в рассматриваемой системе так, чтобы эта система имела самовозбуждающийся цикл, заведомо отличный от цикла, найденного выше. Положим

$$\psi_2(\sigma) = \begin{cases} 6\sigma + 24, & \sigma \leq -8, \\ 4\sigma, & |\sigma| \leq 8, \\ 6\sigma - 24, & \sigma \geq 8. \end{cases}$$

Вновь применяя описанный выше алгоритм поиска скрытого колебания, обнаруживаем еще один орбитально устойчивый цикл рассматриваемой системы. Этапы работы алгоритма представлены на рисунках 13-15.

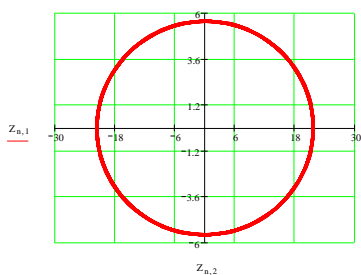


Рис.13 ($\varepsilon = 0$)

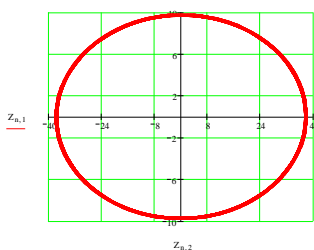


Рис.14 ($\varepsilon = 0.3$)

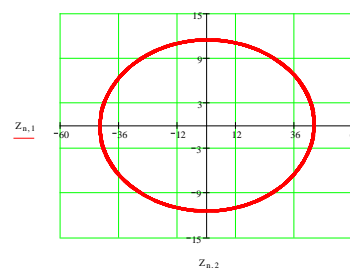


Рис.15 ($\varepsilon = 1$)

Заметим, что кроме найденных орбитально устойчивых циклов, рассматриваемая система имеет еще два неустойчивых цикла, которые могут быть найдены каким-либо из известных методов поиска неустойчивых циклов нелинейных систем, например, "методом стрельбы", изложенным в книге [34]. На рисунке 16 представлена проекция на плоскость (y, z) полученного численным интегрированием минимального глобального аттрактора рассматриваемой системы, представляющего собой совокупность устойчивого состояния равновесия $(0,0,0)$, двух орбитально устойчивых циклов, с начальными условиями $(-0.28697, -3.74819, 3.68689)$ и $(4.39634, -40.59566, -66.18277)$, и двух неустойчивых циклов с начальными условиями $(-0.13393, -1.17377, 2.01380)$ и $(2.02008, 5.13178, -24.27500)$.

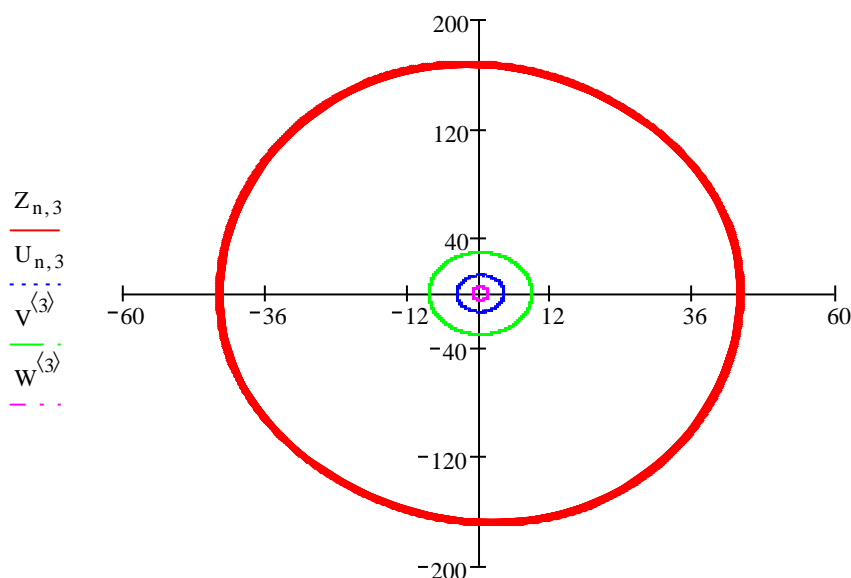


Рис.16

Пример 3. Покажем, что предложенный метод поиска скрытых аттракторов систем вида (2) в некоторых случаях может быть применен и для поиска аттракторов систем более общего вида. Рассмотрим систему третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -z, \\ \dot{y} &= -x - z, \\ \dot{z} &= 2x - 1.3y - 2z + x^2 + y^2 - xz. \end{aligned} \tag{20}$$

Эта система подробно изучена в работе [7], где показано, что она обладает единственным устойчивым в малом состоянием равновесия $O(0,0,0)$ и скрытым хаотическим аттрактором.

Попытаемся численно обнаружить этот аттрактор.

Перепишем систему (20) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -z, \\ \dot{y} &= -x - z, \\ \dot{z} &= 2x - 1.3y - 2z + (1 - \varepsilon)\varphi(x - y) + \varepsilon(x^2 + y^2 - xy) \end{aligned} \tag{21}$$

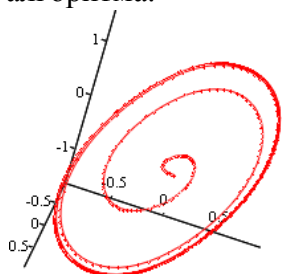
и подберем функцию $\varphi(x - y)$ так, чтобы система (21) при $\varepsilon = 0$ имела самовозбуждающийся цикл. При $\varepsilon = 0$ система (21) имеет вид (2) с

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1.3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, W(p) = \frac{p^2 + p}{p^3 + 2p^2 + 0.7p + 1.3}.$$

Линейный анализ дает следующие результаты. При $\mu \in (-\infty, -0.037559)$ матрица $A(\mu) = A + \mu BC^*$ имеет два собственных значения в правой открытой полуплоскости и не имеет их в полосе $-1 \leq \text{Re } p \leq 0$. При $\mu \approx -0.037559$ матрица $A(\mu)$ имеет пару чисто мнимых собственных значений и одно отрицательное. При $\mu > -0.037559$ матрица $A(\mu)$ гурвицева. Для $\mu_1 = -1.2, \mu_2 = 2.5, \lambda = 1$, как легко проверить, при всех $\omega \geq 0$ справедливо неравенство $\text{Re}\{[1 + \mu_1 W(i\omega - \lambda)][1 + \mu_2 W(i\omega - \lambda)]^*\} > 0$. Пользуясь теоремой 1, сконструируем функцию $\varphi(\sigma) = \varphi(x - y)$ так, чтобы система (21) при $\varepsilon = 0$ имела цикл, самовозбуждающийся из сколь угодно малой окрестности точки покоя $O(0,0,0)$. Например, положим

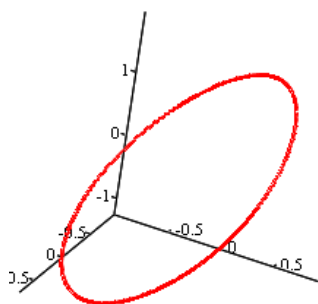
$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 2\sigma + 2, & \sigma \leq -1, \\ \sigma^3 - \sigma, & |\sigma| \leq 1, \\ 2\sigma - 2, & \sigma \geq 1. \end{cases}$$

Стартуя от этого цикла и меняя ε в системе (21) от 0 до 1 с малым шагом, попытаемся обнаружить скрытый аттрактор системы (20). На рисунках 17-21 представлены результаты работы алгоритма.



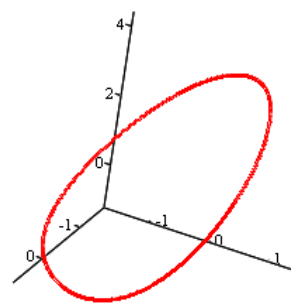
$(z^{(3)}, z^{(1)}, z^{(2)})$

Рис.17 ($\varepsilon = 0$)



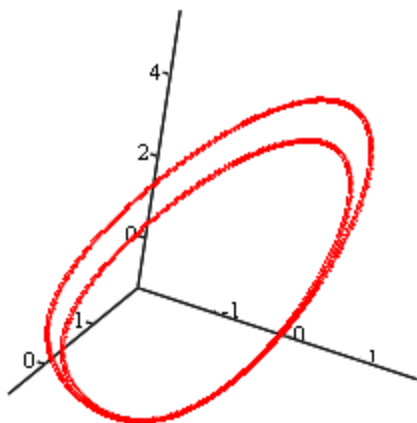
$(z^{(3)}, z^{(1)}, z^{(2)})$

Рис.18 ($\varepsilon = 0.6$)



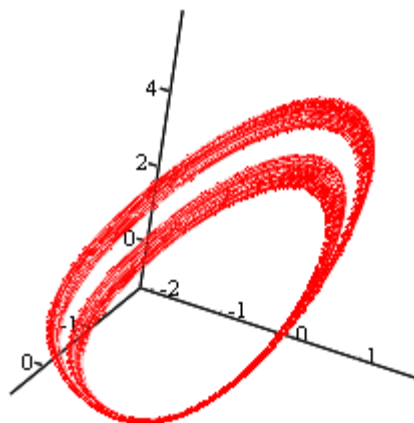
$(z^{(3)}, z^{(1)}, z^{(2)})$

Рис.19 ($\varepsilon = 0.95$)



$$(z^{(3)}, z^{(1)}, z^{(2)})$$

Рис.20 ($\varepsilon = 0.99$)



$$(z^{(3)}, z^{(1)}, z^{(2)})$$

Рис.21 ($\varepsilon = 1$)

4 Проблема Калмана

Широко известные в теории нелинейных регулируемых систем проблемы Айзермана и Калмана [35,31] были сформулированы в середине XX века и сразу привлекли внимание специалистов в теории управления и дифференциальных уравнений. Суть этих проблем состоит в следующем. Рассмотрим систему (2), в которой где A – $n \times n$ -матрица, B и C – n -векторы, $\varphi(\sigma)$ – скалярная функция, $\varphi(0) = 0$. Пусть все линейные системы (2) с $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$ асимптотически устойчивы при $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$.

Гипотеза Айзермана. Система (2) с любой кусочно-непрерывной нелинейностью $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей при $\sigma \neq 0$ условию $\mu_1 < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \mu_2$, устойчива в целом.

Гипотеза Калмана. Система (2) с любой кусочно-дифференцируемой нелинейностью $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей в точках дифференцируемости условию $\mu_1 < \varphi'(\sigma) < \mu_2$, устойчива в целом.

Для случая $n = 2$ первый контрпример к проблеме Айзермана был построен Н.Н.Красовским в 1952 году [36]. В 1958 году В.А.Плисс [37] указал метод построения трехмерных нелинейных систем, удовлетворяющих условиям Айзермана и обладающих периодическими решениями. Позднее этот метод был обобщен Г.А.Леоновым на системы произвольной размерности [38]. Однако, предложенные в упомянутых работах классы нелинейных систем не удовлетворяли условиям Калмана. Доказательство того факта, что проблема Калмана имеет положительное решение для случаев $n = 2$ и $n = 3$ получено в книге [39]. Наконец, в 1988 году Н.Е.Барабанов [40] доказал существование систем четвертого порядка, для которых проблема Калмана имеет отрицательное решение. Как справедливо отмечено в работе [14], результат Барабанова является "теоремой существования" и нуждается в тщательной проверке. Иными словами, необходимо найти примеры конкретных систем четвертого порядка, удовлетворяющих условиям Калмана и обладающих, например, периодическими решениями.

Изложим процедуру построения контрпримера к гипотезе Калмана, основанную на использовании теоремы 1.

Рассмотрим систему (2) с

$$A = \begin{pmatrix} 3.5 & 1 & -4.5 & -2 \\ -4 & -2 & 3.5 & 2.5 \\ 2.5 & 1 & -2.5 & -1 \\ -0.5 & -1 & -0.5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -25.55 \\ 26.05 \\ -15.55 \\ -4.55 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -9.2 \\ -20.2 \\ -21 \\ 10 \end{pmatrix}, \varphi(\sigma) = th\sigma = \frac{e^\sigma - e^{-\sigma}}{e^\sigma + e^{-\sigma}}.$$

Для функции $\varphi(\sigma)$ выполнены условия $0 < \varphi'(\sigma) < 2$, тогда как матрица $A + \mu BC^*$ является гурвицевой при $0 < \mu < 9.9$. Поэтому для рассматриваемой системы выполнены все предположения гипотезы Калмана. Используя описанную выше процедуру, покажем, что рассматриваемая система имеет цикл.

Нетрудно проверить, что здесь выполнено условие 3) теоремы 1 для $\mu_1 = 0.1, \mu_2 = 20, \lambda = 0.3$. В качестве $\psi(\sigma)$ возьмем функцию $15th\sigma + 0.1\sigma$. Теорема 1 гарантирует, что рассматриваемая система с такой нелинейностью имеет орбитально устойчивый цикл. Численное интегрирование системы с такой функцией и начальными условиями $(0, 1; 0, 3; 0, 3; 0, 2)$ методом Рунге-Кутты выводит нас на этот цикл. Проекция цикла на плоскость (x_3, x_4) представлена на рисунке 22.

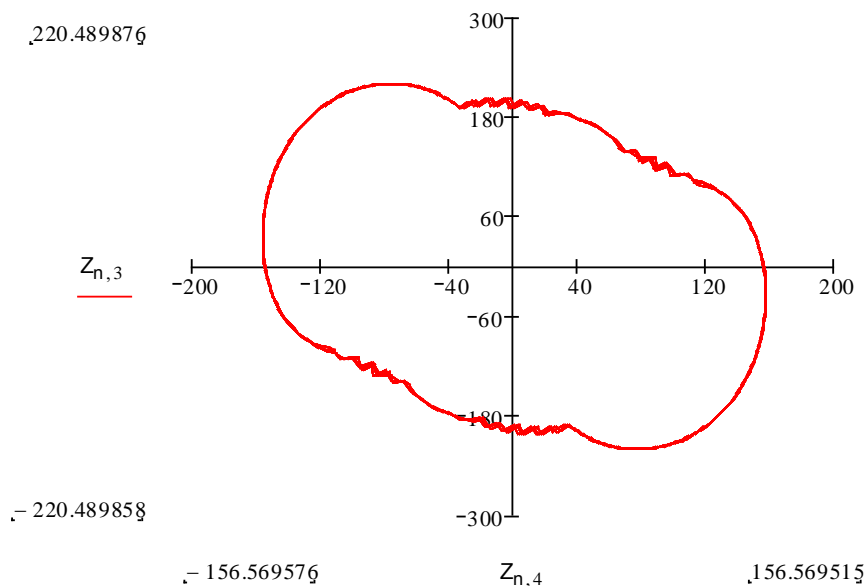


Рис.22

Рассмотрим теперь семейство систем (2) с нелинейностями $\varepsilon_j \varphi(\sigma) + (1 - \varepsilon_j) \psi(\sigma)$, где $\varepsilon_j = 0.1j, j = 0, \dots, 10$. К этому семейству применим описанную выше процедуру последовательного построения решений $x_j(t)$. Циклы, полученные при $j = 5$ и $j = 10$ представлены на рисунках 23 и 24.

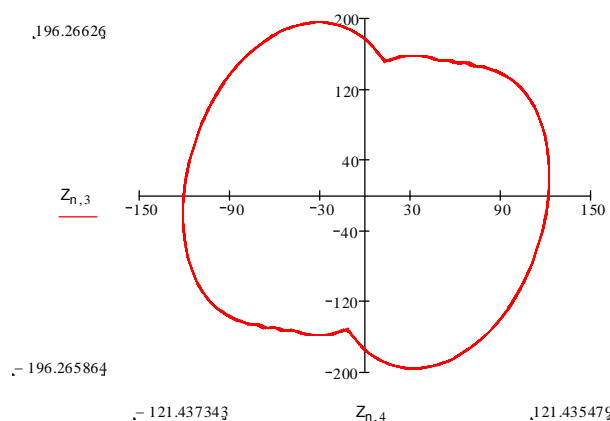


Рис.23

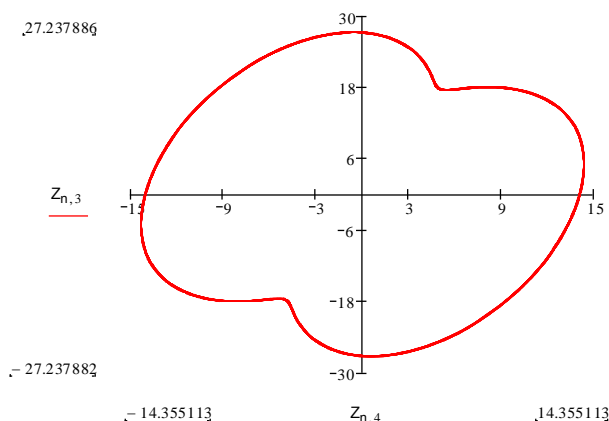


Рис.24

5 Скрытые аттракторы системы Чуа

Цепи Чуа являются трехмерными аналогами автогенераторов, то есть генераторов колебаний с обратной связью. Системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение це-

пей Чуа [23], являются трехмерными динамическими системами с одной скалярной нелинейностью. В безразмерных координатах такая система может быть записана в виде [14]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x) - \alpha\varphi(x), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z, \end{aligned} \quad (22)$$

где функция $\varphi(x)$ характеризует нелинейный элемент ("диод Чуа"). В зависимости от вида функции $\varphi(x)$ различают классическую и обобщенную системы Чуа. Обобщенной системой Чуа называют систему (22) с нелинейностью вида [30]

$$\varphi(x) = m_1 x + 0.5(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|) + 0.5(s - m_0)(|x + \delta_0| - |x - \delta_0|) \quad (23)$$

В соотношениях (22) – (23) α, β, m_0, m_1 – параметры классической системы Чуа, δ_0 и s – параметры обобщенной системы Чуа, отвечающие за устойчивость нулевого состояния равновесия.

Рассмотрим сначала классическую систему Чуа, параметры которой, следуя работе [14], выберем следующим образом: $\alpha = 8.4562, \beta = 12.0732, \gamma = 0.0052, m_0 = -0.1768, m_1 = -1.1468$. Запишем систему (22)-(23) в виде

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + B\varphi_1(\sigma), \sigma = C^* X; \quad X = \text{col}(x, y, z), \\ A &= \begin{pmatrix} -\alpha(m_1 + 1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_1(\sigma) = \varphi(\sigma) - m_1 \sigma. \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим, что матрица $A + 0.97 BC^*$ является гурвицевой, поэтому решение $x = 0, y = 0, z = 0$ рассматриваемой системы асимптотически устойчиво в малом. Это обстоятельство не позволяет численно обнаружить аттрактор системы, "стартуя" из окрестности указанного положения равновесия.

Полагая в (24) $\varphi_1(\sigma) = \mu\sigma$, проведем линейный анализ системы, то есть выделим секторы устойчивости и неустойчивости линейной системы $\dot{X} = (A + \mu BC^*)X$ при различных значениях $\mu \in (-\infty, \infty)$. При $\mu \in (-\infty, 0.14723)$ матрица $A_\mu = A + \mu BC^*$ имеет одно положительное собственное значение и два комплексно-сопряженных собственных значения в левой открытой полуплоскости. При некотором $\tilde{\mu}_1 \in (0.14723, 0.147231)$ положительное собственное значение переходит в левую полуплоскость и матрица A_μ становится гурвицевой. При $\mu \in (0.147231, 0.20986)$ матрица A_μ остается гурвицевой (гурвицев сектор). При некотором $\tilde{\mu}_2 \in (0.20986, 0.20987)$ два собственных значения A_μ становятся чисто мнимыми, а одно остается в левой открытой полуплоскости. При $\mu \in (0.20987, 0.9596)$ матрица A_μ имеет два комплексно-сопряженных собственных значения с положительными вещественными частями и одно отрицательное (сектор неустойчивости степени 2). При некотором $\tilde{\mu}_3 \in (0.9596, 0.9597)$ матрица A_μ вновь имеет пару чисто мнимых и одно отрицательное собственное значение. Наконец, при $\mu \in (0.9597, \infty)$ матрица A_μ является гурвицевой.

Возьмем $\mu_1 = 0.17 \in (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2), \mu_2 = 4 > \tilde{\mu}_3, \lambda = 0.5$. Легко проверить, что для указанных значений справедливо соотношение (7). Сконструируем вспомогательную нелинейность $\psi(\sigma)$ так, чтобы система (24) с такой нелинейностью удовлетворяла всем условиям теоремы 1. Нетрудно убедиться, что в качестве $\psi(\sigma)$ можно взять, например, следующую функцию

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} 0.18\sigma - 0.62, & \sigma \leq -1, \\ 0.4(|\sigma + 1| - |\sigma - 1|), & |\sigma| \leq 1, \\ 0.18\sigma + 0.62, & \sigma \geq 1. \end{cases}$$

Результат работы описанного выше алгоритма поиска скрытого аттрактора классической системы Чуа представлен на рисунках 25-27 (проекция на плоскость (x, y))

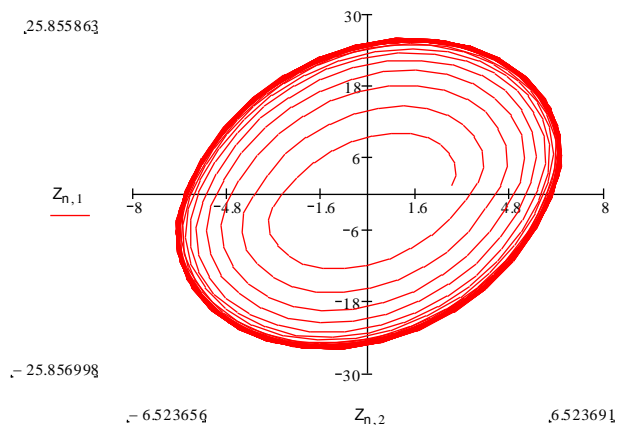


Рис.25 ($\varepsilon = 0$)

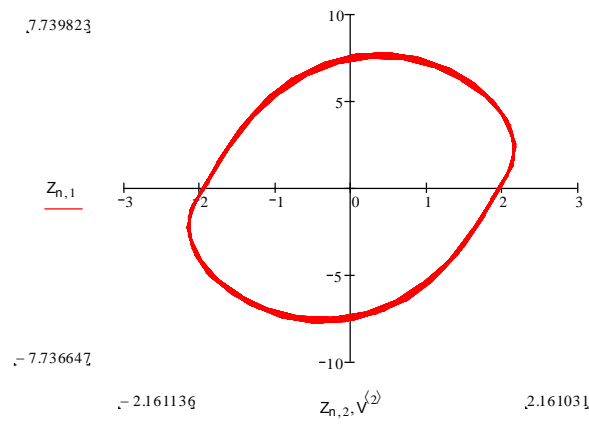


Рис.26 ($\varepsilon = 0.5$)

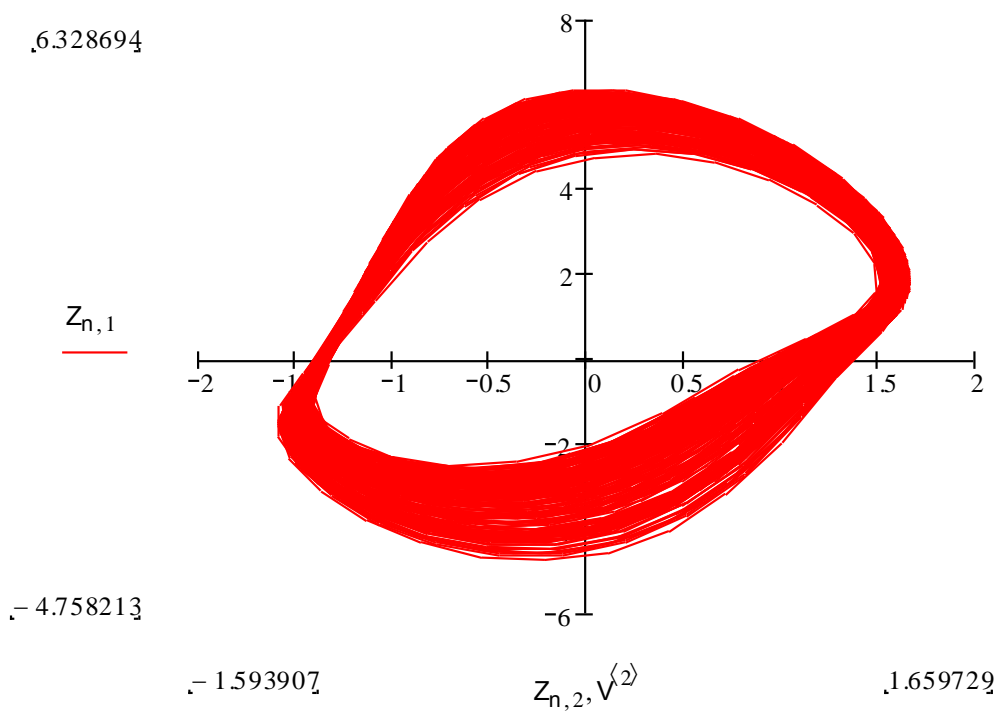


Рис.27 ($\varepsilon = 1$)

Скрытый странный аттрактор системы, представленный на рисунке 27, получен численным интегрированием с начальными условиями $(3,414309, 1,41477, -3,666077)$. Обратим внимание, что этот аттрактор не является симметричным относительно начала координат, тогда как исходная система не меняется при замене (x, y, z) на $(-x, -y, -z)$. Последнее обстоятельство дает основания предположить, что система обладает еще одним скрытым аттрактором, который получается численным интегрированием с начальными условиями $(-3,414309, -1,41477, 3,666077)$. Это предположение оказывается справедливым. Два скрытых аттрактора-близнеца представлены на рисунках 28 и 29

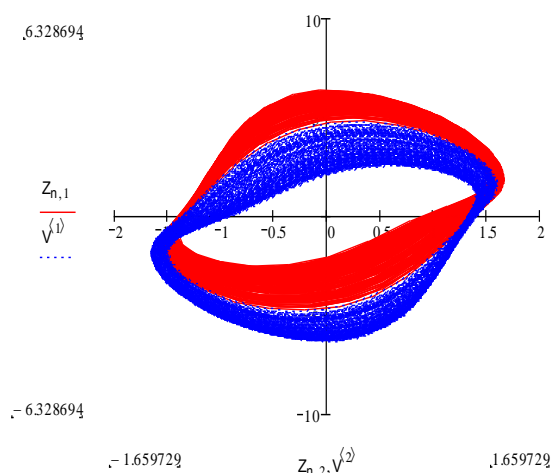


Рис. 28

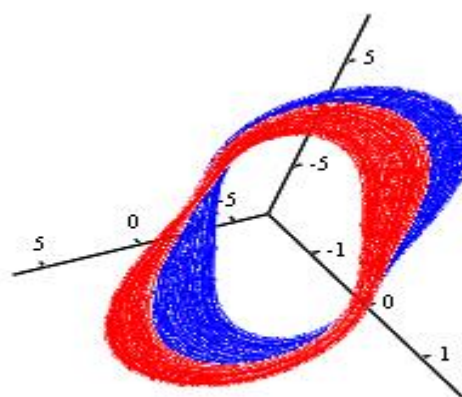


Рис.29

$$(z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}), (v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$$

Рассмотрим теперь обобщенную систему Чуа (22) с нелинейностью $\varphi(x)$ вида (23) и значениями параметров $\alpha = 8.4562, \beta = 12.0732, \gamma = 0.0052, m_0 = 0.14, m_1 = -1.1468, s = -0.9668, \delta_0 = 0.2$. Эта система устойчива в малом.

Процесс поиска скрытых колебаний начнем с построения вспомогательной нелинейности $g(\sigma)$ такой, чтобы система (24) с такой нелинейностью удовлетворяла всем условиям теоремы 1. Положим, например,

$$g(\sigma) = \begin{cases} 2\sigma + 0.3 & d'd\check{c} \sigma \leq -0.2, \\ 0.5\sigma & d'd\check{c} -0.2 \leq \sigma \leq 0.2, \\ 2\sigma - 0.3 & d'd\check{c} \sigma \geq 0.2. \end{cases}$$

Результат работы алгоритма поиска скрытого колебания обобщенной системы Чуа представлен на рисунках 30-32 (проекция на плоскость (x, y)).

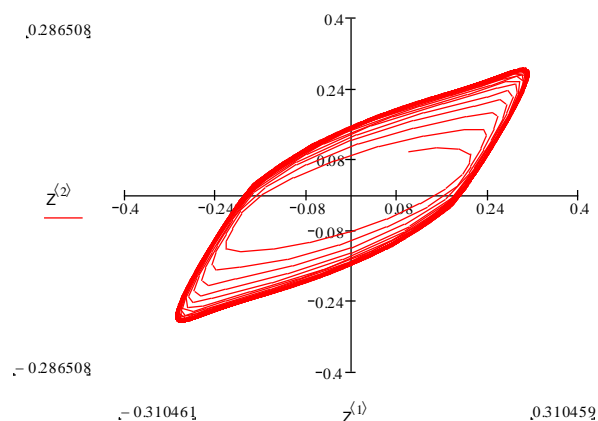


Рис.30 ($\varepsilon = 0$)

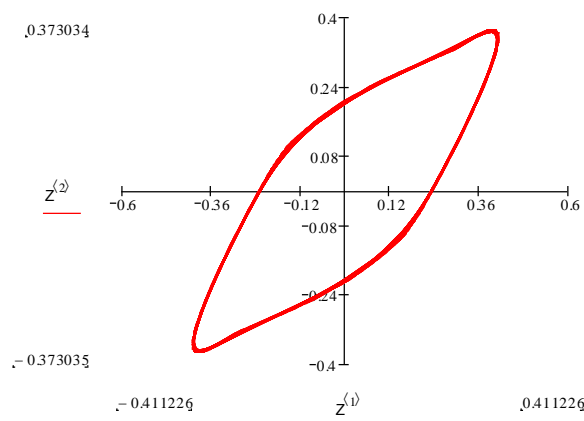


Рис.31 ($\varepsilon = 0.5$)

На рисунке 33 представлен график $x(t)$ для найденного цикла Γ . Из рисунка 33 видно, что для цикла Γ выполнено соотношение $|x(t)| = |\sigma(t)| < 0.76$.

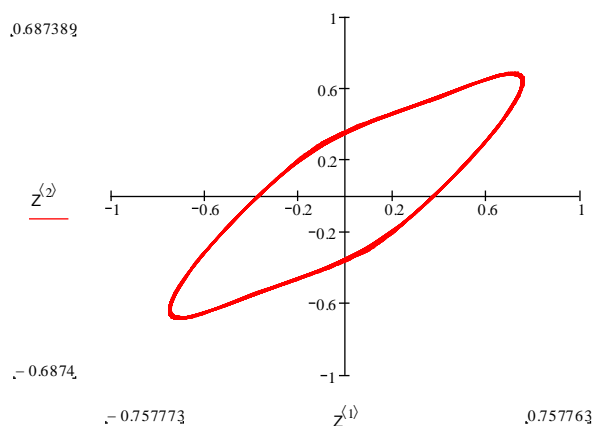


Рис.32 ($\varepsilon = 1$)

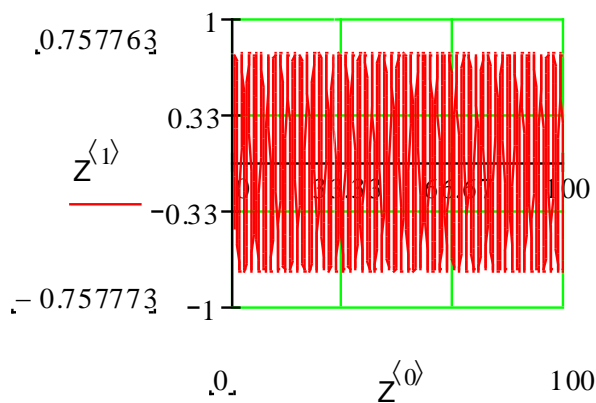


Рис. 33

Теперь построим еще одну вспомогательную систему так, чтобы она имела цикл, заведомо отличный от найденного выше цикла Γ обобщенной системы Чуа. В качестве такой системы возьмем систему (24) с нелинейностью

$$g_1(x) = \begin{cases} 0.18x - 0.64, & x \leq 2, \\ 0.5x & , -2 \leq x \leq 2, \\ 0.18x + 0.64, & x \geq 2. \end{cases}$$

Для системы с такой нелинейностью выполнены все условия теоремы 1, поэтому она имеет орбитально устойчивый цикл Γ_1 , на который вычислительная процедура "выходит" при старте из любой точки окрестности нулевого состояния равновесия. Этот цикл заведомо отличен от найденного ранее цикла Γ системы Чуа. В самом деле, он содержится в конусе $\Omega = \{x : x^* Hx \leq 0\}$. Если он совпадает с циклом Γ , то для него выполнено условие $|x(t)| = |\sigma(t)| < 0.76$ при всех $t \in (-\infty, \infty)$. Но тогда Γ_1 есть траектория линейной системы (24) с $\varphi_1(\sigma) = 0.5\sigma$. Собственные значения матрицы $A + 0.5BC^*$ этой системы: $\lambda_1 = -4.3652$, $\lambda_{2,3} = 0.1666 \pm 2.8669i$, то есть она не имеет собственных значений в полосе $-0.5 \leq \text{Re } p \leq 0$. Поэтому все решения такой линейной системы с начальными условиями в Ω , согласно теореме 2, являются неограниченными при $t \rightarrow \infty$. Значит $\Gamma_1 \neq \Gamma$. Циклы Γ_1 ("большой") и Γ ("малый") представлены на рисунке 34.

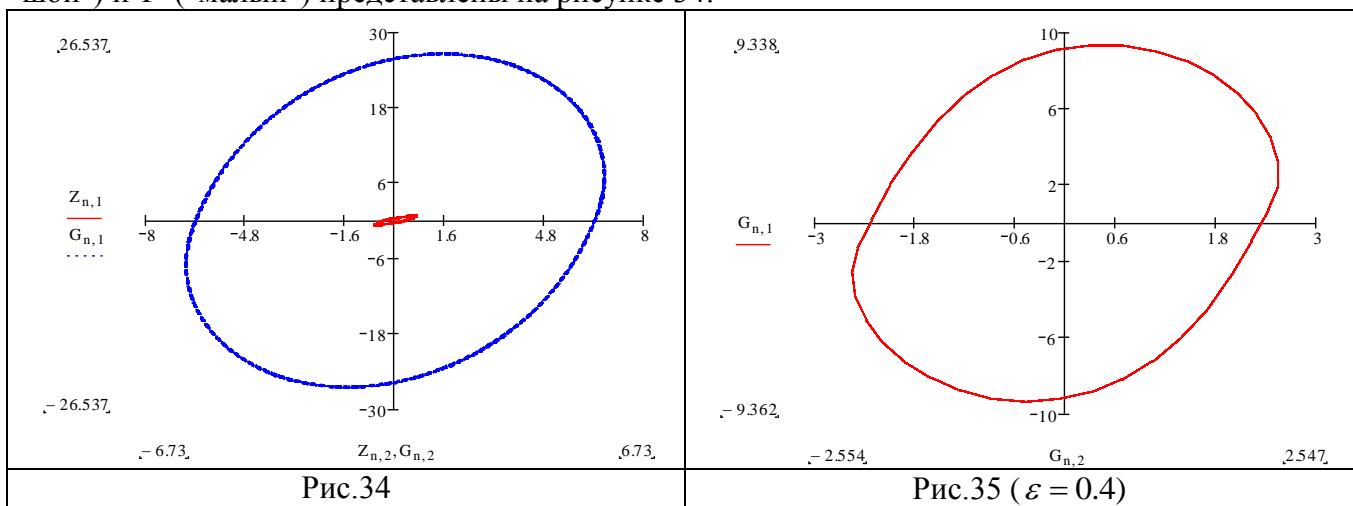


Рис.34

Рис.35 ($\varepsilon = 0.4$)

Теперь мы повторим процедуру поиска скрытого аттрактора, описанную выше, стартуя из какой-либо точки цикла Γ_1 . То есть рассмотрим семейство систем (24) с нелинейностями $\zeta_j(x) = \varepsilon_j \varphi_1(x) + (1 - \varepsilon_j)g_1(x)$. По мере приближения к аттрактору шаг дискретизации по ε целесообразно уменьшить. Результат работы алгоритма поиска аттрактора, отличного от цикла Γ , представлен на рисунках 35-37.

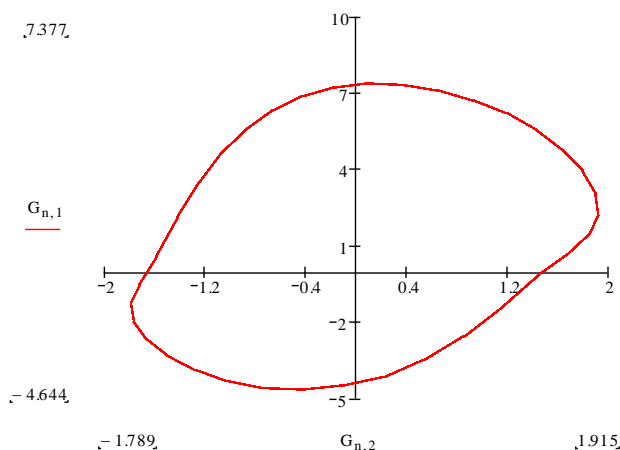


Рис.36 ($\varepsilon = 0.8$)

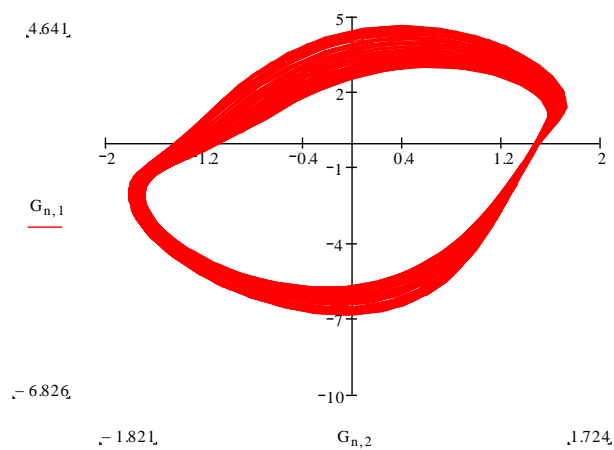


Рис.37 ($\varepsilon = 1$)

Найденный аттрактор обобщенной системы Чуа не симметричен относительно начала координат. Пользуясь соображениями, приведенными выше при анализе классической системы Чуа, обнаруживаем у рассматриваемой системы симметричный аттрактор-близнец. На рисунках 38-40 представлены проекции скрытых аттракторов обобщенной системы Чуа на плоскости (x, y) , (x, z) , (y, z) соответственно.

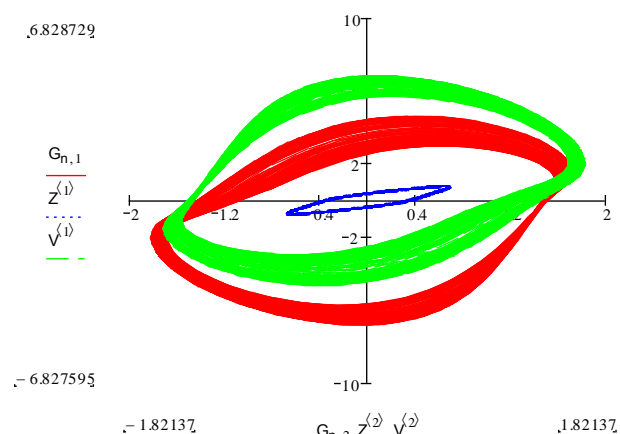


Рис.38

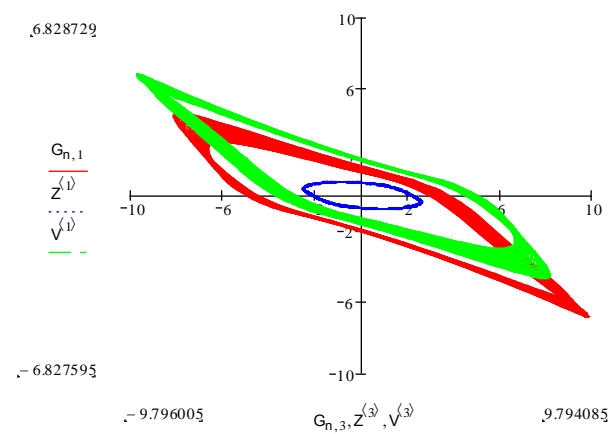


Рис.39

На рисунке 41 представлен аттрактор обобщенной системы Чуа в R^3 .

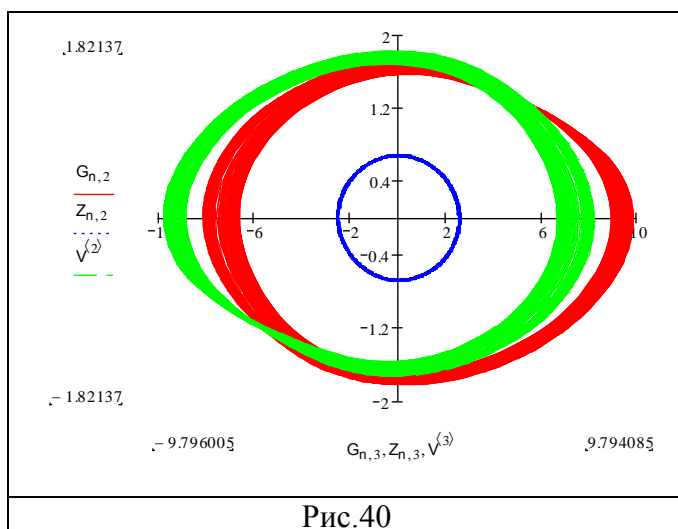


Рис.40

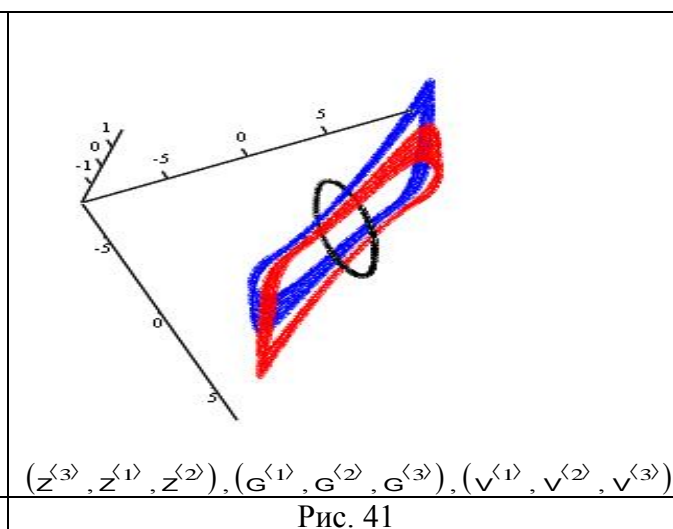


Рис. 41

Кроме устойчивого состояния равновесия $(0,0,0)$ рассматриваемая система имеет еще два седловых состояния равновесия $(\pm 7.2365, 3.1154 \times 10^{-3}, \mp 7.2365)$. Численное интегрирование показывает, что среди траекторий, начинающихся в малой окрестности седловых состояний

равновесия, есть неограниченно возрастающие (например, траектории с начальными условиями $(\pm 7.2, 0.03, \mp 7.2)$). Отметим, что область притяжения цикла "достаточно большая". Так, например, траектории с начальными условиями $(\pm 7.2, 0, \mp 7.2)$, находящимися в малой окрестности неустойчивых состояний равновесия, притягиваются к циклу. Таким образом, стартуя из произвольной точки достаточно малой окрестности любого из трех состояний равновесия, не удастся численно обнаружить скрытые аттракторы исследуемой системы.

6 Скрытые аттракторы систем управления летательными аппаратами

При наличии внешних возмущений в системах управления летательными аппаратами могут возникнуть неустойчивые режимы, которые способны привести к катастрофическим последствиям. Такие режимы (скрытые колебания), обычно не обнаруживаются при используемом в инженерной практике приближенном линейном анализе систем управления. Сконструированные на основе такого анализа системы, как правило, нормально функционируют в том случае, когда задающие и возмущающие воздействия на систему достаточно малы. Если же возмущения оказываются большими, то система управления не может парировать возникшие рассогласования из-за наличия нелинейности типа "насыщение" в контуре управления. Возникновение в системе колебательных процессов, соответствующих максимально возможному амплитудам входного воздействия на объект управления, в англоязычной литературе получило название "wind up". Обзору методов борьбы с явлением "wind up", применяемым в инженерной практике, а также развитию новых методов anti-windup-коррекции систем управления летательными аппаратами посвящена работа [41]. Ниже будет продемонстрирована возможность возникновения скрытых колебаний в системе управления ракетой при наличии нелинейности типа "насыщение" в контуре управления (аналогичные результаты получены в [22]).

Линеаризованная модель системы управления ракетой-носителем (flexible space launch vehicle) описывается системой уравнений [42]

$$\begin{cases} \ddot{\psi}(t) + a_y^{\dot{\psi}} \dot{\psi}(t) + a_y^{\psi} \psi(t) = a_y^{\delta_r} \delta_r(t) + f_y(t), \\ \ddot{\tilde{\psi}}(t) + 2\xi_1 \omega_1 \dot{\tilde{\psi}}(t) + \omega_1^2 \tilde{\psi}(t) = l_1 \omega_1^2 \delta_r(t) + \tilde{f}_y(t), \\ \psi_g(t) = \psi(t) + \tilde{\psi}(t). \end{cases} \quad (25)$$

Здесь первое уравнение описывает динамику ракеты, как абсолютно твердого тела, где ψ — угол рыскания, δ_r — угол отклонения руля. Второе уравнение описывает динамику системы управления, третье — выход системы. Внешние возмущения $f_y(t)$, $\tilde{f}_y(t)$ считаем отсутствующими.

Учитывая некоторые ограничения на динамику сервопривода руля, работу сервомотора руля можно описать следующим образом:

$$\delta_r = Msat\left(\frac{u}{M}\right),$$

где $u(t)$ — сигнал контроля, генерируемый системой угловой стабилизации. Здесь функция $sat(\sigma) = sign(\sigma) \min(1, |\sigma|)$, а $u(t) = -k_p \psi_g(t) - k_D \dot{\psi}_g(t)$, где k_p и k_D пропорциональный и дифференциальный коэффициенты усиления соответственно.

Полагая $X = (\psi, \dot{\psi}, \tilde{\psi}, \dot{\tilde{\psi}})$, запишем систему (26) в виде (2) с

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_y^{\psi} & 0 & -a_y^{\dot{\psi}} & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 & 0 & -2\xi_1 \omega_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_y^{\delta_r} \\ l_1 \omega_1^2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -k_p \\ -k_p \\ -k_D \\ -k_D \end{pmatrix}.$$

Зададим следующие значения коэффициентов исследуемой модели [42], $a_y^w = -4c^{-2}$, $a_y^{\dot{w}} = 0.4c^{-1}$, $a_y^{\delta_r} = 14c^{-2}$, $\omega_1 = 2c^{-1}$, $\xi_1 = 0.03$, $l_1 = -0.12c^{-2}$, $k_p = 5$, $k_D = 2$, $M = 0.174$. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -0.12 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \\ -0.48 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$W(p) = \frac{2(1690p^3 + 4411p^2 + 7705p + 18100)}{(5p^2 + 2p - 20)(25p^2 + 3p + 100)}.$$

Проведем линейный анализ системы: выделим секторы устойчивости и неустойчивости линейной системы $\dot{X} = (A + \mu BC^*)X$ при различных значениях $\mu \in (0, \infty)$. При $\mu \in (0, 0.05524)$ матрица $A_\mu = A + \mu BC^*$ имеет одно положительное собственное значение и три собственных значения в левой открытой полуплоскости. При некотором $\tilde{\mu}_1 \in (0.05524, 0.05525)$ положительное собственное значение переходит в левую полуплоскость и матрица A_μ становится гурвицевой. При $\mu \in (0.05525, 0.056)$ матрица A_μ остается гурвицевой (гурвицев сектор). При некотором $\tilde{\mu}_2 \in (0.056, 0.057)$ два собственных значения A_μ становятся чисто мнимыми, и два остаются в левой открытой полуплоскости. При $\mu \in (0.057, 0.1633)$ матрица A_μ имеет два комплексно-сопряженных собственных значения с положительными вещественными частями и два собственных значения с отрицательными вещественными частями (сектор неустойчивости степени 2). При некотором $\tilde{\mu}_3 \in (0.1633, 0.1634)$ матрица A_μ вновь имеет пару чисто мнимых собственных значений и два собственных значения с отрицательными вещественными частями. Наконец, при $\mu \in (0.1634, \infty)$ матрица A_μ является гурвицевой.

Если в рассматриваемой системе положить $\varphi(\sigma) = \sigma$, то получим устойчивую в целом линейную систему.

Положим $\mu_1 = 0.0555$, $\mu_2 = 0.14$, $\lambda = 0.009$. График функции $\chi(\omega) = \mu_1 \mu_2 |W(i\omega - \lambda)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{Re} W(i\omega - \lambda) + 1$ приведен на рисунке 42.

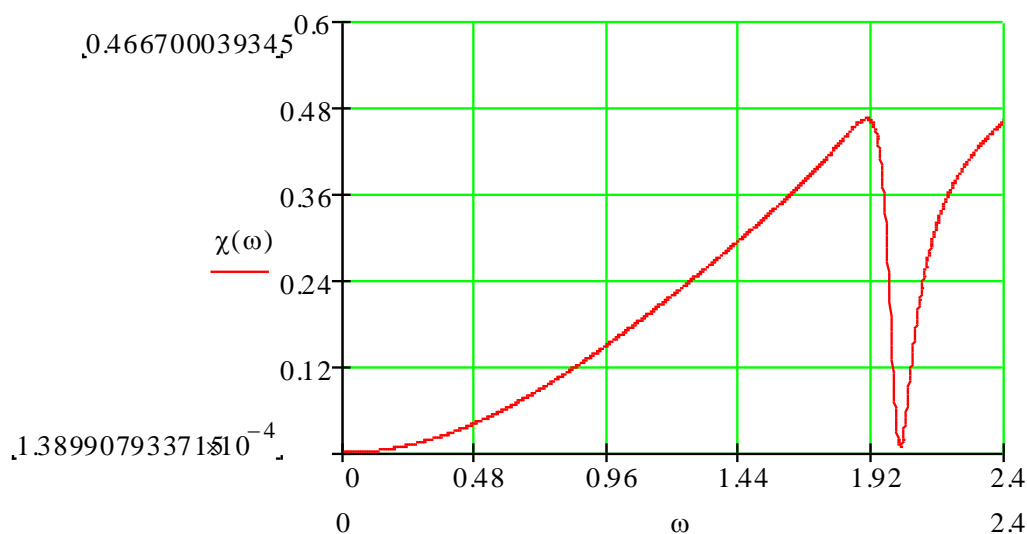


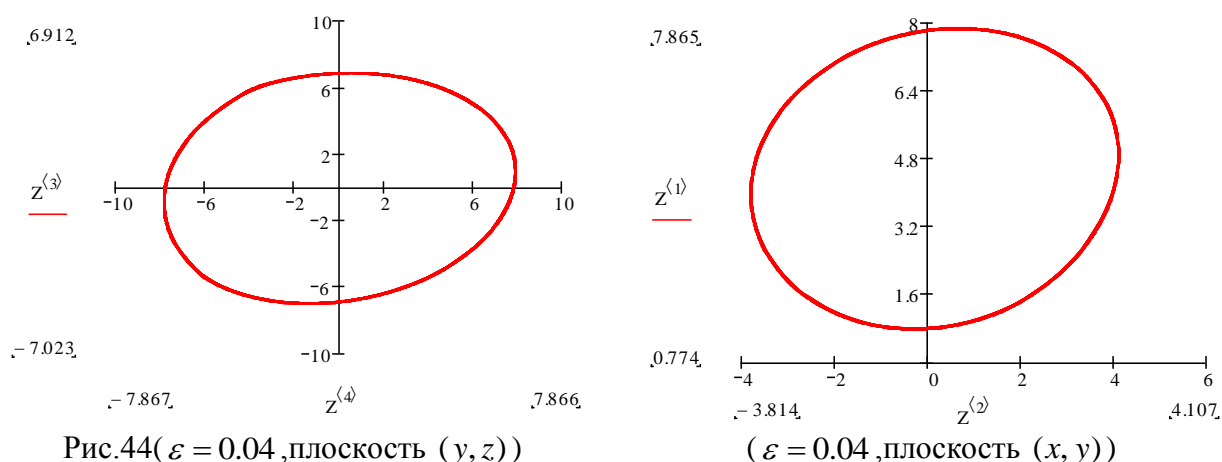
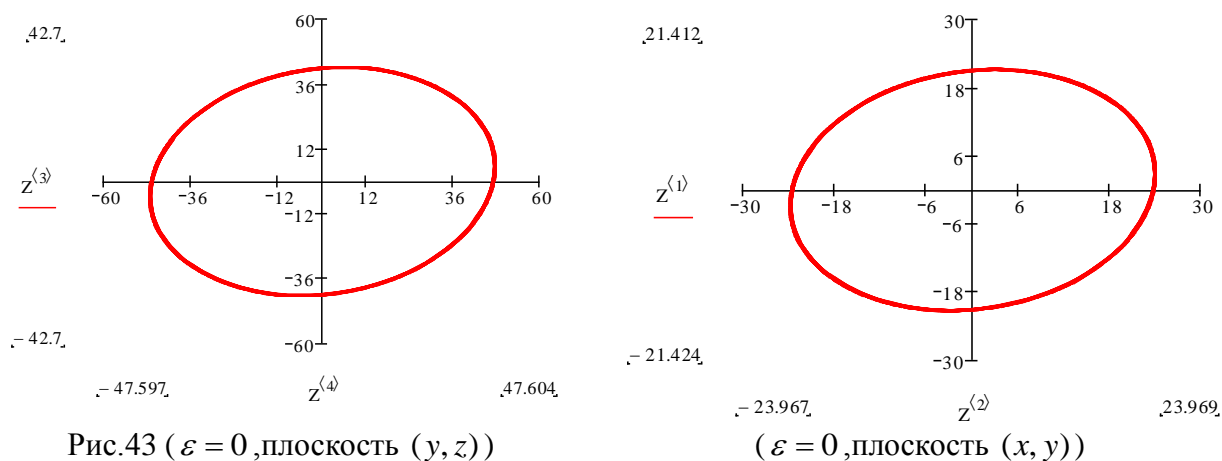
Рис. 42

Таким образом, здесь выполнены условия 3) теоремы 1. При этом для всех $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ матрица $A_\mu = A + \mu BC^*$ имеет ровно два собственных значения в правой открытой полуплоскости и не имеет их в полосе $-\lambda \leq \text{Re } p \leq 0$.

В соответствии с выбранными параметрами системы нелинейность типа "насыщение" здесь будет иметь вид $\varphi(\sigma) = 0.5(|\sigma + 0.174| - |\sigma - 0.174|)$. Пользуясь проведенным линейным анализом, в качестве "стартовой" нелинейности, гарантирующей существование цикла при старте из сколь угодно малой окрестности состояния равновесия, возьмем

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} 0.0555\sigma - 0.174\left(1 - \frac{0.0555}{0.13}\right), & \sigma < -\frac{0.174}{0.13}, \\ 0.13\sigma, & |\sigma| \leq \frac{0.174}{0.13}, \\ 0.0555\sigma + 0.174\left(1 - \frac{0.0555}{0.13}\right), & \sigma > \frac{0.174}{0.13}. \end{cases}$$

Результаты пошаговой работы алгоритма локализации скрытого аттрактора системы (25) представлены на рисунках 43-48 (проекции на координатные подпространства размерности 2). Как видно из рисунка 48, система обладает двумя скрытыми аттракторами-близнецами. На рисунках 49 и 50 представлены проекции скрытых аттракторов-близнецов в подпространства размерности 3.



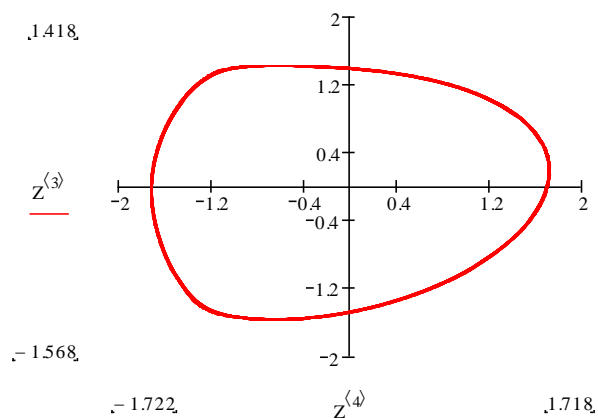
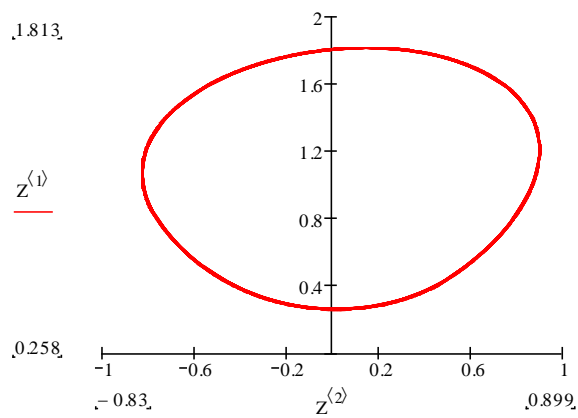


Рис.45 ($\varepsilon = 0.2$, плоскость (y, z))



($\varepsilon = 0.2$, плоскость (x, y))

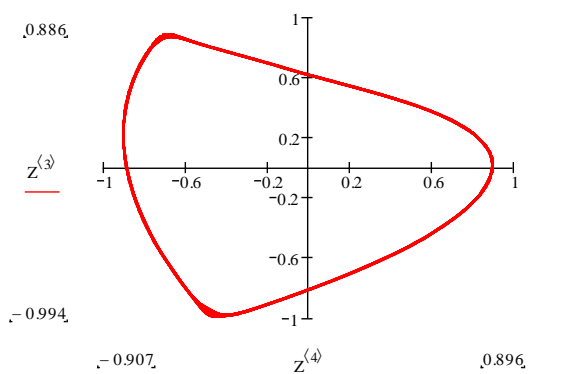
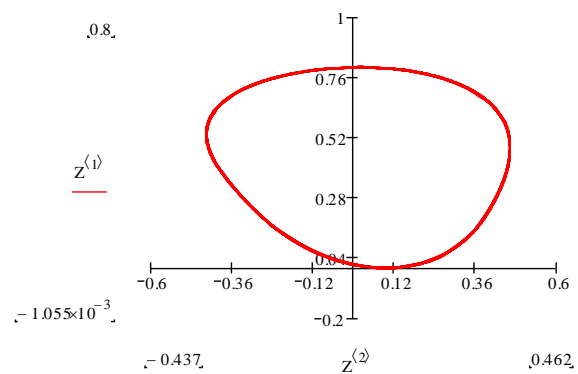


Рис 46 ($\varepsilon = 0.5$, плоскость (y, z))



($\varepsilon = 0.5$, плоскость (x, y))

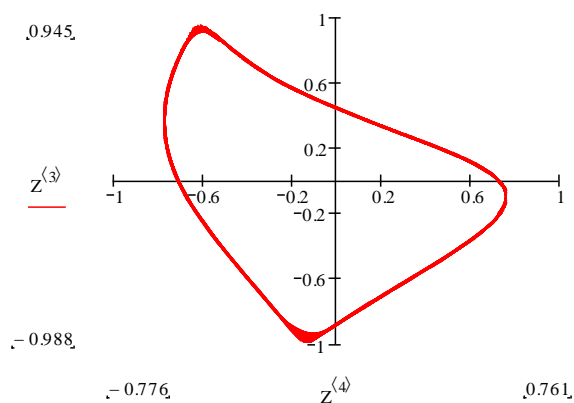
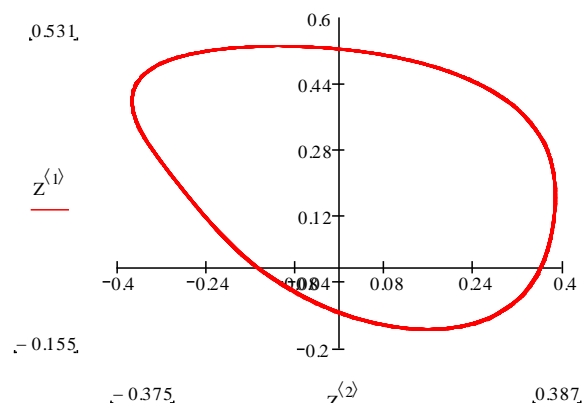


Рис.47 ($\varepsilon = 0.8$, плоскость (y, z))



($\varepsilon = 0.8$, плоскость (x, y))

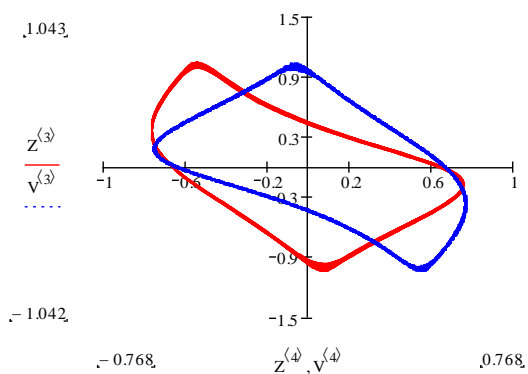
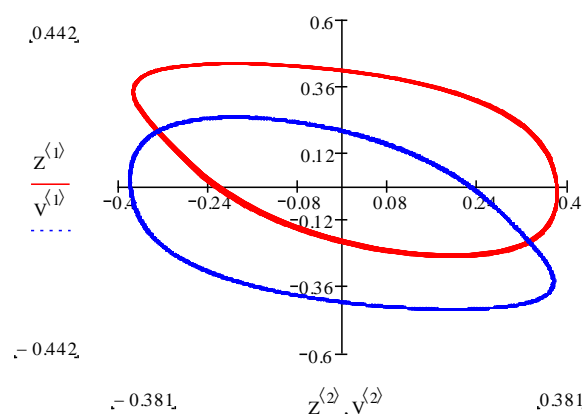
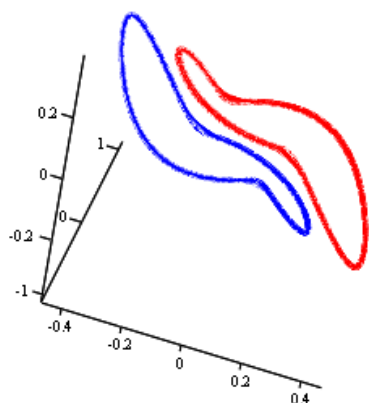


Рис.48 ($\varepsilon = 1$, плоскость (y, z))

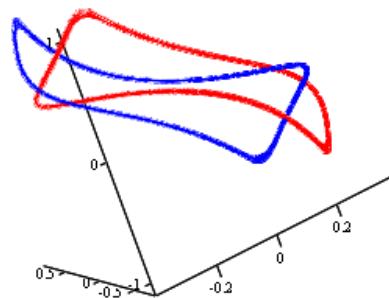


($\varepsilon = 1$, плоскость (x, y))



$$(z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}), (v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$$

Рис. 49



$$(z^{(2)}, z^{(3)}, z^{(4)}), (v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)})$$

Рис 50

Итак, наглядно продемонстрировано, что использование только линейного анализа при проектировании систем управления летательными аппаратами не дает гарантии отсутствия в системе сложных колебательных режимов, которые позволяет выявить только специальным образом организованный ее нелинейный анализ.

Список литературы

1. Jafari S., Sprott J. C., Golpayegani S. M. R. H. Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria. *Phys. Lett. A*, 2013, vol.377, pp.699-702.
2. Molaie M., Jafari S., Sprott J. C., Golpayegani, S. M. R. H. Simple chaotic flows with one stable equilibrium. *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2013, vol. 23, no. 11. 1350188.
3. Wangand X., Chen G. A chaotic system with only one stable equilibrium *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2012, vol.17, no.3, pp.1264–1272.
4. Wei Z. Dynamical behaviors of a chaotic system with no equilibria. *Phys. Lett. A*, 2011, vol.376, pp.102–108.
5. Wei Z. Delayed feedback on the 3-D chaotic system only with two stable node-foci. *Comput.Math. Appl.* 2011, vol.63, pp.728-738..
6. Wang X. ,Chen G. Constructing a chaotic system with any number of equilibria. *Nonlinear Dyn.*, 2013, vol. 71, pp.429-436..
7. Seng-Kin Lao, Shekofteh Y., Jafari .S, Sprott, J. C. Cost Function Based on Gaussian Mixture Model for Parameter Estimation of a Chaotic Circuit with a Hidden Attractor. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2014, vol. 24, no.01.1450010.
8. Leonov G. A. Effective methods for periodic oscillations search in dynamical systems. *Appl. Math. Mech.*, 2010, vol.74, no.1, pp. 24–50.
9. Leonov G.A., Vagaitsev V.I, Kuznetsov N.V. Algorithm for localizing Chua attractors based on the harmonic linearization method. *Doklady Mathematics*, 2010, vol. 82, no.1, pp. 663–666. (doi:10.1134/S1064562410040411).
10. Leonov G.A, Bragin V.O., Kuznetsov N.V. Algorithm for constructing counterexamples to the Kalman problem. *Doklady Mathematics*, 2010, vol. 82, no.1, pp. 540–542.. (doi:10.1134/S1064562410040101).

11. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Algorithms for searching for hidden oscillations in the Aizerman and Kalman problems. *Doklady Mathematics*, 2011, vol.8, no.1, pp. 475–481. (doi:10.1134/S1064562411040120).
12. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Analytical-numerical methods for investigation of hidden oscillations in nonlinear control systems". *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 2011, vol.18, no1, pp. 2494-2505. (doi:10.3182/20110828-6-IT-1002.03315).
13. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Seledzhi S.M. Hidden oscillations in nonlinear control systems, *IFAC Proceedings Volumes" IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 2011, vol.18, no1, pp. 2506-2510. (doi: 10.3182/20110828-6-IT-1002.03316).
14. Bragin V.O., Vagaitsev V.I., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. Algorithms for finding hidden oscillations in nonlinear systems. The Aizerman and Kalman conjectures and Chua's circuits. *J. Comput.Syst. Sci. Int.* 2011, vol. 50, no.4, pp. 511–543.
15. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Vagaitsev, V. I. Localization of hidden Chua's attractors. *Phys. Lett. A* 2011, vol. 375, pp.2230-2233.
16. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Kuznetsova O.A., Seledzhi S.M., Vagaitsev, V.I. Hidden oscillations in dynamical systems, *Trans Syst. Contr.*, 2011, .no.6, pp.54-67.
17. Leonov G.A, Kuznetsov N.V., Vagaitsev V.I. Hidden attractor in smooth Chua systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2012, 241(18), pp. 1482-1486. (doi: 10.1016/j.physd.2012.05.016)
18. Kuznetsov N. V., Kuznetsova O. A., Leonov G. A., Vagaitsev V. I. Analytical-numerical localization of hidden attractor in electrical Chua's circuit. *Lecture Notes in Electrical Engineering*, 2013,174, pp.149-158,.
19. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Hidden attractors in dynamical systems: From hidden oscillation in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2013, vol.23, no.1.1330002.
20. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Analytical-numerical methods for hidden attractors localization: The 16th Hilbert problem, Aizerman and Kalman conjectures, and Chua circuit. *Numerical Methods for Differential Equations, Optimization, and Technological Problems, Computational Methods in Applied Sciences*, 2013,vol.27, Part 1 (Springer), pp. 41-64..
21. Andrievsky B.R., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Pogromsky A.Yu. Hidden Oscillations in Aircraft Flight Control System with Input Saturation. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 2013, vol.5, no.1, pp.75-79. (doi: 10.3182/20130703-3-FR-4039.00026).
22. Andrievsky B.R., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Seledzhi S.M. Hidden oscillations in stabilization system of flexible launcher with saturating actuators. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 2013, vol.19, no.1, pp.37-41. (doi: 10.3182/20130902-5-DE-2040.00040).
23. Chua L.O. A zoo of Strange Attractors from the Canonical Chua's Circuits. *Proc. Of the IEEE 35th Midwest Symp. on Circuits and Systems (Cat. No.92CH3099-9)*. Washington, 1992,vol. 2, pp. 916 – 926,
24. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow *J.Atmos.Sci.*, 1963,vol.20, pp.65 -75..
25. Rössler O.E. An Equation for Continuous Chaos. *Physics Letters A*, 1976,vol. 57, no.5, pp.397 -398.
26. Burkin I.M. The Buffer Phenomenon in Multidimensional Dynamical Systems. *Diff. Equations*, 2002, vol.38, no.5, pp.615-625.
27. Буркин И.М., Буркина Л.И. Частотный критерий существования циклов у многосвязных систем автоматического регулирования. *Вестник ТулГУ. Серия "Дифференциальные уравнения и прикладные задачи"*. 2010.Вып.1. ТулГУ, с.3-14..
28. Буркин И.М., Соболева Д.В. О структуре глобального аттрактора многосвязных систем автоматического регулирования. *Известия ТулГУ. Естественные науки*, 2012. ТулГУ. Вып. 1, с. 5-16,.

29. Буркин И.М., Буркина Л.И. Колебания с жестким возбуждением в многосвязных регулируемых системах. Вестник ТулГУ. Серия "Дифференциальные уравнения и прикладные задачи". 2012. Вып.1. ТулГУ, с.3-13.
30. Savaci F.A., Gunel S. Harmonic Balance Analysis of the Generalized Chua's Circuit. Int. J. Bifurcation and Chaos. 2006, vol. 16, no 8, pp. 2325-2332.
31. Kalman R.E. Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems. Transactions of ASME. 1957, vol.79, no.3, pp.553-566.
32. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М."Наука", 1978. 400с.
33. Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavi A.I. Frequency Methods in Oscillation Theory. Kluwer Academic Publishers, 1996. 404 p.
34. Холодниок М., Клич А., Кубичек М, Марек М.. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М., Мир, 1991. 366с.
35. Айзерман М.А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости в "большом" динамических систем 1949, УМН,Т.4, с. 186-188..
36. Красовский Н.Н. Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений. 1952,ПММ..Т.16, №5,с.547-554,.
37. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М."Наука", 1964. 367с.
38. Леонов Г.А. Об устойчивости в целом нелинейных систем в критическом случае двух нулевых корней. 1981, ПММ..Т.45, №4, с.752-755.
39. Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B. Frequency methods for nonlinear analysis. Theory and applications.. Singapore: World Scientific, 1996, 498 p.
40. Барабанов Н.Е. О проблеме Калмана. Сиб. мат. журнал.1988. Т. XXIX, с. 3-11.
41. Leonov G. A., Andrievskii B. R., Kuznetsov N. V., Pogromskii A. Yu. Aircraft Control with Anti-Windup Compensation. Differential Equations, 2012, vol. 48, no. 13, pp. 1700–1720.
42. Hahs D., Sorrells J. Dynamic vehicle control (Problem). Proc. American Control Conf.(ACC 1991). 1991, Boston, USA, pp. 2967-2968.
43. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М. "Наука". 1987. 423с.
44. Leonov G.A., Boichenko V.A. Lyapunov's Direct Method in the Estimation of the Hausdorff Dimension of Attractors. Acta Applicandae Mathematicae. 1992, vol. 26, pp. 1-60.
45. Леонов Г.А. "Верхние оценки хаусдорфовой размерности аттракторов". Вестник Санкт-Петербургского университета. 1998. Сер. 1, вып.1, с. 19-22..
46. Magnitskii N.A., Sidorov S.V. New Methods for Chaotic Dynamics. Singapore:World Scientific, 2006, 363 p.