ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2013
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

А. Г. Ченцов, Ю. В. Шапарь

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет
chentsov@imm.uran.ru, shaparuv@mail.ru

Об асимптотике программного максимина в одной задаче с последовательным ослаблением ограничений.[1]

1 Введение

В дальнейшем используются следующие сокращения: БФ (база фильтра), в/з (вещественнозначная), ИП (измеримое пространство), к.-а. (конечно-аддитивная), МП (множество притяжения), н.спр. (непрерывная справа), ОУ (обобщенное управление), п/м (подмножество), ТП (топологическое пространство). Рассматриваемая ниже абстрактная постановка имеет своим источником следующую игровую задачу программного управления с фиксированным моментом окончания.

Даны две управляемые системы. В пространстве $\mathbb{R}^{n_1}$ рассматривается движение системы

$$\dot{y}(t) = B_1(t)u(t) + b_1(t) \tag{1.1}$$

на промежутке $[t_0^{(1)}, \theta_1]$, $t_0^{(1)} < \theta_1$. В (1.1) предполагается, что $B_1(\cdot)$ есть $(n_1 \times p_1)$– матричнозначная функция на $[t_0^{(1)}, \theta_1[$, все компоненты кото-

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математическая теория управления» (проекты 12-П-1-1019, 12-П-1-1012) и при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00537, 11-01-90432-укр_ф_а, 13-01-00304, 13-01-96022)

рой допускают равномерное приближение к.-п. и н.спр. в/з функциями на $[t_0^{(1)}, \theta_1[$; $b_1 = b_1(\cdot)$ есть n_1– вектор - функция на $[t_0^{(1)}, \theta_1[$, все компоненты которой также являются равномерными пределами к.-п. и н.спр. в/з функций на том же промежутке $[t_0^{(1)}, \theta_1[$; $u = u(\cdot)$— программное управление, являющееся p_1–вектор - функцией на $[t_0^{(1)}, \theta_1[$, все компоненты которой неотрицательны, к.-п. и н.спр. При этом

$$\sum_{i=1}^{p_1} \int_{t_0^{(1)}}^{\theta_1} u_i(t)\,dt \leqslant c_1, \ \int_{t_0^{(1)}}^{\theta_1} S_1(t)u(t)\,dt \in Y. \tag{1.2}$$

Первое условие в (1.2) есть ограничение на энергоресурс, второе — «моментное ограничение», которое, в частности, может возникать за счет использования краевых и промежуточных условий, Y — непустое замкнутое п/м $\mathbb{R}^{m_1}$, а $S_1 = S_1(\cdot)$ есть $(m_1 \times p_1)$– матричнозначная функция на $[t_0^{(1)}, \theta_1[$, компоненты которой удовлетворяют условиям, подобным тем, которые накладывались на компоненты $B_1(\cdot)$. В вышеупомянутых соотношениях m_1, p_1 и n_1 — натуральные числа. Полагаем также, что фиксировано начальное условие: $y(t_0^{(1)}) = y_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$. Каждая p_1– вектор - функция $u = u(\cdot)$ на $[t_0^{(1)}, \theta_1[$, имеющая к.-п. и н.спр. компоненты, порождает в (1.1) вполне определенную траекторию $\varphi_u^{(1)} = (\varphi_u^{(1)}(t), t_0^{(1)} \leqslant t \leqslant \theta_1)$, развертывающуюся в n_1 – мерном фазовом пространстве; эта траектория легко определяется интегрированием правой части (1.1).

В пространстве $\mathbb{R}^{n_2}$ рассматривается движение системы

$$\dot{z}(t) = B_2(t)v(t) + b_2(t) \tag{1.3}$$

на промежутке $[t_0^{(2)}, \theta_2]$, $t_0^{(2)} < \theta_2$. В (1.3) полагаем, что $B_2(\cdot)$ есть $(n_2 \times p_2)$– матричнозначная функция на $[t_0^{(2)}, \theta_2[$, все компоненты которой являются равномерными пределами к.-п. и н.спр. в/з функций на $[t_0^{(2)}, \theta_2[$ (условие аналогично предположению относительно $B_1(\cdot)$); $b_2 = b_2(\cdot)$ есть n_2–вектор - функция, все компоненты которой допускают равномерное приближение к.-п. и н.спр. в/з функциями на $[t_0^{(2)}, \theta_2[; v = v(\cdot)$— программное управление в виде p_2– вектор - функции на $[t_0^{(2)}, \theta_2[$, все компоненты которой неотрицательны, к.-п. и н.спр., причем

$$\sum_{i=1}^{p_2} \int_{t_0^{(2)}}^{\theta_2} v_i(t)\,dt \leqslant c_2, \ \int_{t_0^{(2)}}^{\theta_2} S_2(t)v(t)\,dt \in Z, \tag{1.4}$$

где Z— непустое замкнутое п/м $\mathbb{R}^{m_2}$, а $S_2 = S_2(\cdot)$ есть $(m_2 \times p_2)$– матричнозначная функция, все компоненты которой являются равномерными пределами к.-п. и н.спр. в/з функций на $[t_0^{(2)}, \theta_2[$. Фиксируем начальное условие

$z(t_0^{(2)}) = z_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$. Каждая p_2-вектор-функция $v = v(\cdot)$ порождает траекторию $\varphi_v^{(2)} = \left(\varphi_v^{(2)}(t),\ t_0^{(2)} \leqslant t \leqslant \theta_2\right)$ в $\mathbb{R}^{n_2}$, которая получается интегрированием правой части (1.3). Как и в случае (1.1), можно полагать, что система (1.3) получена в результате неособого линейного преобразования [1, с. 161].

Пусть траектории систем (1.1) и (1.3) рассматриваются и оцениваются в совокупности. Полагаем при этом, что задана непрерывная функция

$$f_0 : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R},$$

которая используется при конструировании терминального критерия: каждую пару программных управлений $u = u(\cdot)$, $v = v(\cdot)$ мы оцениваем значением $f_0\left(\varphi_u^{(1)}(\theta_1), \varphi_v^{(2)}(\theta_2)\right) \in \mathbb{R}$. Полагаем, что управление u формирует первый игрок (игрок I), который заинтересован в минимизации упомянутых значений функции f_0, а управление v формирует второй игрок (игрок II), который заинтересован в максимизации упомянутых значений. Возникает игровая ситуация

$$\downarrow_u f_0\left(\varphi_u^{(1)}(\theta_1), \varphi_v^{(2)}(\theta_2)\right) \uparrow_v; \tag{1.5}$$

при этом выбор u и v должен осуществляться с соблюдением условий (1.2) и (1.4) соответственно. Нас интересует программный «максимин», отвечающий (1.5): предполагается, что выбранное игроком II управление v становится известным игроку I, который парирует это управление своим программным управлением $u = u(\cdot)$ и решает задачу

$$f_0\left(\varphi_u^{(1)}(\theta_1), \varphi_v^{(2)}(\theta_2)\right) \to \inf \tag{1.6}$$

при соблюдении условий (1.2). В свою очередь, игрок II имеет право выбирать любую программу $v = v(\cdot)$ с соблюдением условий (1.4) с целью максимизации соответствующего значения (экстремума) задачи (1.6). В результате упомянутых операций реализуется «максимин»; при этом, конечно, соответствующие экстремумы могут не достигаться, но мы ориентируемся здесь на выражение $\sup\inf$, которое и трактуем как «максимин». Разумеется, сейчас мы ориентируемся на тот случай, когда существуют программные управления $u = u(\cdot)$ игрока I, удовлетворяющие (1.2), и существуют программные управления $v = v(\cdot)$ игрока II, удовлетворяющие (1.4) (в основной части работы мы не будем ограничивать себя этим случаем).

Допустим, что «моментные» ограничения в (1.2) и (1.4) ослаблены: требования принадлежности множествам Y и Z заменено требованиями принадлежности окрестностям этих множеств, что объективно расширяет возможности игроков I, II. В этой ситуации также можно определить «максимин» платы f_0, который может существенно отличаться от «максимина» невозмущенной задачи; см. [2, с. 90]. Возникает естественный вопрос об асимптотике значений «максимина» возмущенной задачи в условиях, когда соответствующие окрестности множеств Y и Z становятся сколь угодно близкими к этим множествам; имеется в виду, что множество Y заменяется своей ε-окрестностью ($\varepsilon > 0$), Z заменяется δ-окрестностью ($\delta > 0$) и при этом $\varepsilon \approx 0$ и $\delta \approx 0$. В [2] вышеупомянутая асимптотика найдена для случая, когда управляющие программы $u = u(\cdot)$ и $v = v(\cdot)$ скалярны, т.е. $u(t)$ и $v(\widetilde{t}\,)$ — суть вещественные числа при $t \in [t_0^{(1)}, \theta_1[$ и $\widetilde{t} \in [t_0^{(2)}, \theta_2[$; соответственно данный вариант извлекается в виде частного случая из положений [2, §§4,5]. В настоящей работе мы обращаемся к случаю векторных управлений, используя общий подход [3]. Как и в [2, 3], мы рассматриваем абстрактный аналог вышеупомянутой содержательной задачи управления. При этом существенно используется конструкция расширения в классе векторных конечно-аддитивных (к.-а.) мер, изложенная в [4].

2 Определения и обозначения общего характера

Используем кванторы, пропозициональные связки; def заменяет фразу «по определению», $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Через $\mathcal{P}(E)$ (через $\mathcal{P}'(E)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества E. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем [5] множество всех отображений из A в B; если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ C при действии f. Кроме того, полагаем для всяких множеств A, B и $C \in \mathcal{P}'(A)$, а также отображения $f \in B^A$, что $(f|C) \triangleq (f(x))_{x \in C} \in B^C$. Как обычно, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $[0, \infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\}$ и $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$. Если $m \in \mathbb{N}$, то $\overline{1, m} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid i \leqslant m\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$. Через $\tau_{\mathbb{R}}$ обозначаем обычную топологию на $\mathbb{R}$, порожденную метрикой-модулем. Условимся о соглашении: элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — не являются множествами. С учетом этого полагаем, что для всяких множества T и числа $m \in \mathbb{N}$ $T^m = T^{\overline{1,m}}$; таким образом, T^m есть множество всех кортежей

$$(t_i)_{i \in \overline{1,m}} : \overline{1, m} \to T. \tag{2.1}$$

В частности, так интерпретируем элементы $\mathbb{R}^m$, рассматривая их как кортежи (2.1), где $T = \mathbb{R}$. Всюду в дальнейшем линейные операции, умножение и порядок в пространствах вещественнозначных (в/з) функций определяем поточечно. В частности, это относится к случаю векторов конечной размерности m. Если $m \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}^m$, то через $\|x\|^{(m)}$ обозначаем наибольший из модулей компонент вектора x (если $x = (x_i)_{i\in\overline{1,m}}$, где $(x_i)_{i\in\overline{1,m}} : \overline{1,m} \to \mathbb{R}$, то

$$\|x\|^{(m)} = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i| = \max_{i\in\overline{1,m}} |x_i| \in [0,\infty[,$$

разумеется, выбор именно этой нормы не является принципиальным). Соответственно, при $m \in \mathbb{N}$ $\|\cdot\|^{(m)}$ есть норма $x \mapsto \|x\|^{(m)} : \mathbb{R}^m \to [0,\infty[$, а $\tau_{\mathbb{R}}^{(m)}$ — обычная топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^m$; $\tau_{\mathbb{R}}^{(m)}$ порождена нормой $\|\cdot\|^{(m)}$. Если $m \in \mathbb{N}$, $S \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ и $\zeta \in]0,\infty[$, то

$$O_\zeta^{(m)}[S] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, s \in S : \|x - s\|^{(m)} < \zeta\} \in \tau_{\mathbb{R}}^{(m)}; \tag{2.2}$$

если при этом $M \in \mathcal{P}(\overline{1,m})$, то полагаем также

$$\widehat{O}_\zeta^{(m)}[S|M] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, s \in S : (x(j) = s(j)\ \forall\, j \in M)\ \&\ (|x(j) - s(j)| < \zeta \\ \forall\, j \in \overline{1,m} \setminus M)\}.$$

Напомним, что в наших обозначениях m-мерный вектор есть отображение из $\overline{1,m}$ в $\mathbb{R}$. Легко видеть, что

$$O_\zeta^{(m)}[S] = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, s \in S : |x(j) - s(j)| < \zeta\ \forall\, j \in \overline{1,m}\}$$

и, как следствие, справедливо равенство

$$\widehat{O}_\zeta^{(m)}[S|\varnothing] = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, s \in S : |x(j) - s(j)| < \zeta\ \forall\, j \in \overline{1,m}\} = O_\zeta^{(m)}[S].$$

Возвращаясь к общему случаю $M \in \mathcal{P}(\overline{1,m})$, получаем вложение

$$\widehat{O}_\zeta^{(m)}[S|M] \subset O_\zeta^{(m)}[S]. \tag{2.3}$$

Элементы топологии.

Если (X,τ) — топологическое пространство и $A \in \mathcal{P}(X)$, то $\mathrm{cl}(A,\tau)$ есть def замыкание A в (X,τ), $\tau|_A \triangleq \{A \cap G : G \in \tau\}$ — топология A, индуцированная из (X,τ) топологией τ множества X. Если (X,τ) — ТП и $x \in X$, то $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$ и

$$N_\tau(x) \triangleq \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid \exists\, G \in N_\tau^0(x) : G \subset Y\} \tag{2.4}$$

фильтр окрестностей x в ТП (X,τ); при этом, конечно,

$$N_\tau^0(x) \subset N_\tau(x).$$

Направленностью в произвольном множестве Y называем всякий триплет $(D,\preceq,f)$, где $(D,\preceq)$ — направленное множество (НМ) [6, гл. 2], $D \neq \varnothing$, и $f \in Y^D$. Если (X,τ) — ТП, $(D,\preceq,f)$ — направленность в X и $x \in X$, то

$$\Big((D,\preceq,f) \xrightarrow{\tau} x\Big) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall\, H \in N_\tau(x) \exists\, d_1 \in D\; \forall\, d_2 \in D \quad (d_1 \preceq d_2) \Rightarrow (f(d_2) \in H)). \tag{2.5}$$

Тем самым введена «обычная» сходимость по Мору-Смиту. Сходимость (2.5) удобно характеризовать в терминах сходимости фильтров (см. [7, гл. I]), используя так называемый ассоциированный (с направленностью) фильтр: если $(D,\preceq,f)$ есть направленность в множестве Z, то

$$(Z-\mathrm{ass})[D;\preceq;f] \triangleq \{A \in \mathcal{P}(Z) \mid \exists\, d \in D \forall\, \delta \in D \quad (d \preceq \delta) \Rightarrow (f(\delta) \in A)\} \tag{2.6}$$

есть фильтр [7, гл. I], ассоциированный с $(D,\preceq,f)$. Если Z оснащено топологией τ и $z \in Z$, то согласно (2.5)

$$((D,\preceq,f) \xrightarrow{\tau} z) \Leftrightarrow (N_\tau(z) \subset (Z-\mathrm{ass})[D;\preceq;f]).$$

Если $(\mathbf{T},\mathbf{t})$ — ТП, $\mathbf{T} \neq \varnothing$, и $k \in \mathbb{N}$, то через $\otimes^k[\mathbf{t}]$ обозначаем топологию множества $\mathbf{T}^k$, отвечающую стандартному произведению k экземпляров ТП $(\mathbf{T},\mathbf{t})$; тогда $(\mathbf{T}^k,\otimes^k[\mathbf{t}])$ есть конечная тихоновская степень данного $(\mathbf{T},\mathbf{t})$. Заметим, что в данном случае базой топологии $\otimes^k[\mathbf{t}]$ является семейство всех множеств

$$\prod_{i=1}^{k} G_i, \quad (G_i)_{i\in\overline{1,k}} \in \mathbf{t}^k.$$

В частности, $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} = \otimes^k[\tau_{\mathbb{R}}]\ \forall\, k \in \mathbb{N}$. В дальнейшем используются также следующие соглашения: если (X,τ) есть ТП, то через $(\tau-\mathrm{comp})[X]$ обозначаем семейство всех компактных [8, с. 196] п/м X. Если (A,τ_1) и (B,τ_2) — два ТП, то $C(A,\tau_1,B,\tau_2)$ есть def множество всех непрерывных отображений из B^A. В частности, полагаем для всякого ТП (X,τ), $X \neq \varnothing$, что $\mathbb{C}(X,\tau) \triangleq C(X,\tau,\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$.

3 Множества притяжения.

В дальнейших построениях МП, соответствующие [4, с. 245], играют важную роль в связи с использованием подхода [3].

Итак, (см. [9, определение 3.1]) для всяких непустого множества X, ТП (Y,τ), $Y \neq \varnothing$, отображения $g \in Y^X$ и семейства $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$ через $(\mathbf{as})[X;Y;\tau;g;\mathcal{X}]$ обозначаем множество всех $y \in Y$, для каждого из которых существует такая направленность $(D,\preceq,h)$ в X, для которой

$$(\mathcal{X} \subset (X - \text{ass})[D;\preceq;h]) \ \& \ ((D,\preceq,g\circ h) \xrightarrow{\tau} y).$$

Заметим, что в качестве $\mathcal{X}$ обычно используются направленные семейства [10, (2.2.7)]; более того, практический интерес представляют БФ в X— направленные семейства непустых п/м X; см. [9, с. 117]. Тогда $\beta_0[X] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X)) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B}\ \ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \ \exists\, B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2\}$ есть множество всех БФ в множестве X. Если X— непустое множество, (Y,τ), $Y \neq \varnothing$, есть компактное ТП, $g \in Y^X$ и $\mathcal{X} \in \beta_0[X]$, то [10, (2.2.8),(2.5.1)] (см. также [11, (3.2)])

$$(\mathbf{as})[X;Y;\tau;g;\mathcal{X}] \in \mathcal{P}'(Y). \tag{3.1}$$

В связи с (3.1) полезно напомнить о несколько более общем случае [12, (3.3.10)]. Для этого произвольному множеству X сопоставим семейство

$$\beta[X] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B}\ \ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \ \exists\, B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2\}; \tag{3.2}$$

если при этом (Y,τ)— ТП, $Y \neq \varnothing$, $g \in Y^X$ и $\mathfrak{B} \in \beta[X]$, то [12, (3.3.10)]

$$(\mathbf{as})[X;Y;\tau;g;\mathfrak{B}] = \bigcap_{B \in \mathfrak{B}} \operatorname{cl}(g^1(B),\tau). \tag{3.3}$$

Представление (3.3) распространяется на случай $\mathfrak{B} \in \beta_0[X]$, т.к. $\beta_0[X] \subset \beta[X]$.

4 Элементы конечно-аддитивной теории меры.

В дальнейшем рассматривается абстрактный аналог игровой задачи программного управления, приведенной во Введении. Конструируя на основе построений [3] корректное расширение возникающей игровой абстрактной задачи, мы будем использовать в качестве соответствующих обобщенных элементов векторные к.-а. меры; в случае управления системами вида (1.1), (1.3) упомянутые меры играют роль ОУ. С учетом этого условимся использовать термин ОУ и в абстрактной версии игровой задачи (см. в этой связи построения [2]).

Общая схема расширения абстрактной задачи о достижимости в классе к.-а. мер приведена в [4, 12, 13, 14]. В данной работе мы ориентируемся на конструкцию [4], используя, однако, более частную версию, отвечающую компактифицируемому случаю вышеупомянутой задачи о достижимости. В настоящем разделе мы введем целый ряд определений специального характера и, на их основе сформулируем основные утверждения в более специализированной, в сравнении с [4], форме. Излагаемая конструкция будет использована в дальнейшем в двух вариантах, отвечающих действиям каждого из игроков. Данное использование будет получаться простой конкретизацией приводимого ниже построения, относящегося к расширению абстрактной задачи о достижимости в конечномерном арифметическом пространстве.

В пределах настоящего раздела фиксируем непустое множество E и полуалгебру $\mathcal{L}$ п/м E : $(E, \mathcal{L})$ есть ИП с полуалгеброй множеств. Следуем обозначениям [4, раздел 3]. Через $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ обозначаем множество всех неотрицательных в/з к.-а. мер на полуалгебре $\mathcal{L}$ (см. [15, гл.3]), а через $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ — множество всех в/з к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{L}$; $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ есть линейное подпространство $\mathbb{R}^{\mathcal{L}}$, порожденное конусом $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. В частности, $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \subset \mathbb{A}(\mathcal{L})$.

Через $B_0(E, \mathcal{L})$ обозначаем линейную оболочку множества всех индикаторов [16, с.56] множеств из $\mathcal{L}$, а через $\mathbb{B}(E)$ — множество всех ограниченных в/з функций на E, получая линейное подпространство $\mathbb{R}^E$, оснащаемое sup-нормой $\|\cdot\|$ [17, с.261]. Замыкание $B_0(E, \mathcal{L})$ в топологии sup-нормы $\|\cdot\|$ пространства $\mathbb{B}(E)$ обозначаем через $B(E, \mathcal{L})$, что согласуется с [17, гл. IV]. Тогда $B(E, \mathcal{L})$ с нормой, индуцированной из $(\mathbb{B}(E), \|\cdot\|)$, есть банахово пространство, для которого топологическое сопряженное $B^*(E, \mathcal{L})$ (пространство линейных ограниченных функционалов на $B(E, \mathcal{L})$; см. [15, (3.5.1)]) изометрически изоморфно $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме-вариации; конкретный изометрический изоморфизм $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ на $B^*(E, \mathcal{L})$ имеет вид

$$\mu \mapsto \left(\int_E f\, d\mu\right)_{f \in B(E,\mathcal{L})} : \mathbb{A}(\mathcal{L}) \to B^*(E, \mathcal{L}),$$

где интеграл определяется простейшей схемой [15, определение 3.3.1, предложение 3.3.1]. Получающейся двойственности $(B(E, \mathcal{L}), \mathbb{A}(\mathcal{L}))$ соответствует «обычная» *-слабая топология $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, обозначаемая далее через $\tau_*(\mathcal{L})$ [10, с. 70]. Мы используем также топологию $\tau_0(\mathcal{L})$ [4, с. 246] множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, отвечающую представлению $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ как подпространства тихоновской степени $\mathbb{R}$ в дискретной топологии при использовании $\mathcal{L}$ в качестве индексного множества. Заметим (см. [10, гл. 4]), что топологии $\tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau_0(\mathcal{L})$ на множестве $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, вообще говоря, несравнимы, однако для топологий

$$\tau_*^+(\mathcal{L}) \triangleq \tau_*(\mathcal{L})|_{(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]}, \quad \tau_0^+(\mathcal{L}) \triangleq \tau_0(\mathcal{L})|_{(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]} \tag{4.1}$$

конуса $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ справедливо [4, (3.2)]следующее свойство сравнимости

$$\tau_*^+(\mathcal{L}) \subset \tau_0^+(\mathcal{L}). \tag{4.2}$$

Через $B_0^+(E,\mathcal{L})$ (через $B^+(E,\mathcal{L})$) обозначим множество всех неотрицательных функций из $B_0(E,\mathcal{L})$ (из $B(E,\mathcal{L})$). До конца настоящего раздела фиксируем $r \in \mathbb{N}$ (в последующих разделах параметру r будут придаваться различные значения). Рассматриваем ниже r-вектор-функции на E и векторные к.-а. меры со значениями в $\mathbb{R}^r$. В соответствии с определениями второго раздела $B_{0,r}^+[E;\mathcal{L}] \triangleq B_0^+(E,\mathcal{L})^r$ и $B_r^+[E;\mathcal{L}] \triangleq B^+(E,\mathcal{L})^r$ — суть множества всех кортежей «длины» r со значениями в $B_0^+(E;\mathcal{L})$ и в $B^+(E;\mathcal{L})$ соответственно, а $(\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}] \triangleq (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]^r$ — множество всех кортежей «длины» r со значениями в $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ (см. (2.1)); упомянутые обозначения согласуются с [4, с. 246]. Для обозначения вышеупомянутых кортежей будет использоваться индексная форма записи функций (см. [18]). При этом [4, (3.4)]

$$B_{0,r}^+[E;\mathcal{L}] \subset B_r^+[E;\mathcal{L}].$$

Для непустого множества $(\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}]$ определены топологии $\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]$ и $\otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]$, для которых согласно (4.2)

$$\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})] \subset \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]. \tag{4.3}$$

В свою очередь, из (4.3) следует, что

$$\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]|_M \subset \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]|_M \quad \forall\, M \in \mathcal{P}((\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}]). \tag{4.4}$$

Итак, в (4.3), (4.4) мы имеем известные [4, с. 246] соотношения для двух топологических структур непустого множества $(\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}]$ и его подпространств. Следуя [4, (3.13)], полагаем, что

$$\mathbb{N}_r^+(\mathcal{L}) \triangleq \{\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]; \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]\} \tag{4.5}$$

(двухэлементное множество, составленное из хаусдорфовых топологий $(\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}]$).

Слабая абсолютная непрерывность

В настоящем разделе фиксируем $\eta \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, после чего (см. [4, (3.6)]) полагаем

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \triangleq \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \mid \forall\, L \in \mathcal{L} \;\; (\eta(L) = 0) \Rightarrow (\mu(L) = 0)\}. \quad (4.6)$$

В построениях, касающихся игровой задачи, в качестве η могут использоваться различные к.-а. меры (имеются в виду две конкретизации η, используемые в моделях, отвечающих принятию решений каждым из двух игроков). Если $f \in B(E,\mathcal{L})$, то $f * \eta \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ обозначаем неопределенный η-интеграл f (см. [15, гл. 3]). Если $f \in B^+(E,\mathcal{L})$, то $f * \eta \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$. Более того,

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E,\mathcal{L})\}, \tau_*(\mathcal{L})) = \\ = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E,\mathcal{L})\}, \tau_0(\mathcal{L})). \quad (4.7)$$

Поскольку при $M \in \mathcal{P}((\mathrm{add})_+[\mathcal{L}])$ справедливы равенства $\mathrm{cl}(M,\tau_*^+(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(M,\tau_*(\mathcal{L})) \cap (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\mathrm{cl}(M,\tau_0^+(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(M,\tau_0(\mathcal{L})) \cap (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то получаем, что (см. (4.7))

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E,\mathcal{L})\}, \tau_*^+(\mathcal{L})) = \\ = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E,\mathcal{L})\}, \tau_0^+(\mathcal{L})). \quad (4.8)$$

В [4, (3.10)] указаны конкретные способы аппроксимативной реализации к.-а. мер из $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$. Следуя соглашениям раздела 2 и [4, (3.14)], получаем, что

$$(\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L};\eta] \triangleq (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]^r \quad (4.9)$$

есть множество всех кортежей «длины» r со значениями в (конусе) $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$. Элементами (4.9) являются векторные к.-а. меры на $\mathcal{L}$, слабо абсолютно непрерывные относительно η. В силу свойства [13, (4.6)] имеем, что (4.9) есть множество, замкнутое в каждой топологии из $\mathbb{N}_r^+(\mathcal{L})$ (4.5). В [4, (3.17)] указан конкретный вариант аппроксимативной реализации элементов (4.9) в классе (ступенчатых) вектор-функций из $B_{0,r}^+[E;\mathcal{L}]$; данный вариант оказывается [4, с. 248] универсальным относительно топологий из множества (4.5). Как следствие получаем, что [13, (4.6)]

$$(\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L};\eta] = \mathrm{cl}(\{(f_i * \eta)_{i\in\overline{1,r}} : (f_i)_{i\in\overline{1,r}} \in B_{0,r}^+[E;\mathcal{L}]\}, \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]) = \\ = \mathrm{cl}(\{(f_i * \eta)_{i\in\overline{1,r}} : (f_i)_{i\in\overline{1,r}} \in B_{0,r}^+[E;\mathcal{L}]\}, \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]). \quad (4.10)$$

Интегральные ограничения и их релаксации

В настоящем разделе фиксируем $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ и произвольное отображение

$$S : \overline{1, \mathbf{n}} \times \overline{1, r} \to B(E, \mathcal{L}), \qquad (4.11)$$

получая фактически матрицант на E. Кроме того, мы фиксируем до конца настоящего раздела замкнутое в топологии $\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})}$ множество $\mathbb{Y} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$. Соответственно $\mathbf{n}, S$ и $\mathbb{Y}$ добавляются к оговоренным ранее параметрам задачи о достижимости. Всюду в дальнейшем используем соглашение: если $i \in \overline{1, \mathbf{n}}$ и $j \in \overline{1, r}$, то

$$S_{i,j} \triangleq S(i, j).$$

Рассматриваем далее ограничения вида

$$\left(\sum_{j=1}^{r} \int_E S_{i,j} f_j \, d\eta \right)_{i \in \overline{1, \mathbf{n}}} \in \mathbb{Y} \qquad (4.12)$$

на выбор $(f_i)_{i \in \overline{1,r}} \in B_{0,r}^{+}[E; \mathcal{L}]$. Ограничения такого типа условимся называть моментными. Кроме моментных будем использовать также ограничения импульсного характера. Пусть $\mathbb{F}$ — непустое замкнутое и ограниченное п/м $\mathbb{R}_{+}^{r}$, где $\mathbb{R}_{+}^{r}$ — множество всех векторов из $\mathbb{R}^r$ с неотрицательными компонентами. При этом

$$(x_i)_{i \in \overline{1,r}} \mapsto \sum_{i=1}^{r} x_i : \mathbb{F} \to [0; \infty[$$

ограничено и достигает максимума на $\mathbb{F}$; с учетом этого полагаем, что

$$\mathbf{c}_{\mathbb{F}} \triangleq \max_{(x_i)_{i \in \overline{1,r}} \in \mathbb{F}} \sum_{i=1}^{r} x_i, \qquad (4.13)$$

получая $\mathbf{c}_{\mathbb{F}} \in [0, \infty[$. Тогда полагаем, что

$$(r - \mathrm{adm})[\mathbb{F}|E; \mathcal{L}; \eta] \triangleq \left\{ (f_i)_{i \in \overline{1,r}} \in B_{0,r}^{+}[E; \mathcal{L}] \mid \left(\int_E f_i \, d\eta \right)_{i \in \overline{1,r}} \in \mathbb{F} \right\} \qquad (4.14)$$

есть множество обычных (векторных) управлений, допустимых в части соблюдения ограничений импульсного характера. Разумеется, в силу (4.13), (4.14)

$$\sum_{i=1}^{r} \int_E f_i \, d\eta \leqslant \mathbf{c}_{\mathbb{F}} \quad \forall \, (f_i)_{i \in \overline{1,r}} \in (r - \mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta]. \qquad (4.15)$$

Мы трактуем (4.15) как импульсную компоненту системы ограничений. Если $\mathbf{Y}$ — п/м $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, то полагаем, что

$$((\mathbf{n}, r) - \mathrm{ADM})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta; \mathbf{Y}; S] \triangleq$$
$$\triangleq \left\{ (f_i)_{i \in \overline{1,r}} \in (r - \mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta] \mid \left(\sum_{j=1}^{r} \int_E S_{i,j} f_j \, d\eta \right)_{i \in \overline{1,\mathbf{n}}} \in \mathbf{Y} \right\}. \quad (4.16)$$

В качестве $\mathbf{Y}$ можно, в частности, использовать множества $\mathcal{O}_\zeta^{(\mathbf{n})}[\mathbb{Y}]$, $\zeta \in]0, \infty[$. Кроме того, при $\mathbb{S} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$, $M \in \mathcal{P}'(\overline{1,\mathbf{n}})$ и $\zeta \in]0, \infty[$ будем использовать далее в качестве $\mathbf{Y}$ также множество $\widehat{\mathcal{O}}_\zeta^{(\mathbf{n})}[\mathbb{S}|M]$. Во всех упомянутых случаях вида (4.16) получаем п/м $B_{0,r}^+[E; \mathcal{L}]$.

Полагаем в дальнейшем, что

$$\Sigma_r[E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{F}] \triangleq \left\{ (\mu_j)_{j \in \overline{1,r}} \in (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta] \mid (\mu_j(E))_{j \in \overline{1,r}} \in \mathbb{F} \right\}. \quad (4.17)$$

С учетом [4, (4.24)] получаем, что множество (4.17) замкнуто в топологии $\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]$. Более того, из [4, (4.26)] следует, что

$$\Sigma_r[E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{F}] \in (\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})] - \mathrm{comp})[(\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}]]. \quad (4.18)$$

Отметим, что по свойствам неопределенного интеграла из (4.14) следует, что

$$(r - \mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta] = \left\{ (f_i)_{i \in \overline{1,r}} \in B_{0,r}^+[E; \mathcal{L}] \mid ((f_i * \eta)(E))_{i \in \overline{1,r}} \in \mathbb{F} \right\}. \quad (4.19)$$

С другой стороны, имеем очевидное свойство (см. (4.9))

$$(f_i * \eta)_{i \in \overline{1,r}} \in (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta] \ \ \forall \, (f_i)_{i \in \overline{1,r}} \in B_r^+[E; \mathcal{L}]. \quad (4.20)$$

Из (4.17), (4.19) и (4.20) вытекает, что

$$\left\{ (f_i * \eta)_{i \in \overline{1,r}} : (f_i)_{i \in \overline{1,r}} \in (r - \mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta] \right\} \subset \Sigma_r[E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{F}]. \quad (4.21)$$

Утверждение 1 *Справедлива следующая цепочка равенств*

$$\mathrm{cl}(\{(f_i * \eta)_{i \in \overline{1,r}} : (f_i)_{i \in \overline{1,r}} \in (r - \mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta]\}, \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]) =$$
$$= \mathrm{cl}(\{(f_i * \eta)_{i \in \overline{1,r}} : (f_i)_{i \in \overline{1,r}} \in (r - \mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta]\}, \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]) = \Sigma_r[E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{F}].$$

Доказательство осуществляется подробно в [4, предложение 4.2]. Полагаем до конца настоящего раздела, что $\exists \, L \in \mathcal{L} : \eta(L) \neq \varnothing$; тогда $\eta(E) \in]0, \infty[$, а каждое из множеств $(r - \mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta]$, $\Sigma_r[E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{F}]$ непусто. Из (4.18) вытекает, что топология

$$\tau_\Sigma^*[E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{F} \mid r] \triangleq \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]|_{\Sigma_r[E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{F}]} \quad (4.22)$$

превращает $\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}]$ в непустой компакт

$$(\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}],\tau^*_\Sigma[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}\mid r]). \qquad (4.23)$$

Кроме того, введем следующую топологию множества $\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}]$:

$$\tau^0_\Sigma[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}\mid r]\triangleq\otimes^r[\tau^+_0(\mathcal{L})]|_{\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}]}. \qquad (4.24)$$

Тогда из (4.4), (4.22), (4.24) вытекает, что

$$\tau^*_\Sigma[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}\mid r]\subset\tau^0_\Sigma[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}\mid r]. \qquad (4.25)$$

Через $\mathbb{I}$ условимся в этом разделе обозначать отображение

$$(f_i)_{i\in\overline{1,r}}\mapsto(f_i*\eta)_{i\in\overline{1,r}}:(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta]\to\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}]. \qquad (4.26)$$

Из (2.5) и последнего соотношения вытекает свойство: если $(D,\preceq,g)$ есть направленность в $\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}]$ и $\mu\in\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}]$, то

$$\left((D,\preceq,g)\overset{\tau^0_\Sigma[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}\mid r]}{\longrightarrow}\mu\right)\Rightarrow\left((D,\preceq,g)\overset{\tau^*_\Sigma[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}\mid r]}{\longrightarrow}\mu\right). \qquad (4.27)$$

В свою очередь, из определения МП в разделе 3 и из (4.27) вытекает, что для всякой направленности $(D,\preceq,h)$ в $(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta]$ и меры $\mu\in\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}]$

$$\left((D,\preceq,\mathbb{I}\circ h)\overset{\tau^0_\Sigma[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}|r]}{\longrightarrow}\mu\right)\Rightarrow\left((D,\preceq,\mathbb{I}\circ h)\overset{\tau^*_\Sigma[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}|r]}{\longrightarrow}\mu\right). \qquad (4.28)$$

Из (4.27) легко следует, что при $\mathcal{X}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}((r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta]))$

$$\begin{aligned}&(\mathbf{as})\left[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta];\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}];\tau^0_\Sigma[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}\mid r];\mathbb{I};\mathcal{X}\right]\subset\\&\subset(\mathbf{as})\left[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta];\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}];\tau^*_\Sigma[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}\mid r];\mathbb{I};\mathcal{X}\right]. \qquad (4.29)\end{aligned}$$

С учетом (4.26) имеем для всякого множества $M\in\mathcal{P}((r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta])$ следующее равенство

$$\mathbb{I}^1(M)=\{(f_i*\eta)_{i\in\overline{1,r}}:(f_i)_{i\in\overline{1,r}}\in M\}. \qquad (4.30)$$

Из утверждения 1 и (4.30) вытекает цепочка равенств

$$\begin{aligned}\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}]&=\mathrm{cl}(\mathbb{I}^1((r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta]),\otimes^r[\tau^+_*(\mathcal{L})])=\\&=\mathrm{cl}(\mathbb{I}^1((r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta]),\otimes^r[\tau^+_0(\mathcal{L})]). \qquad (4.31)\end{aligned}$$

В связи с (4.21), (4.22), (4.31) отметим, что

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{cl}(\mathbb{I}^1((r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta]), \tau_{\Sigma}^{*}[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F} \mid r]) = \\
&\qquad = \mathrm{cl}(\mathbb{I}^1((r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta]), \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]) \cap \Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}] = \\
&\qquad\qquad = \Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}]. \quad (4.32)
\end{aligned}
$$

Из (4.21), (4.22), (4.31) получаем, что

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{cl}(\mathbb{I}^1((r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta]), \tau_{\Sigma}^{0}[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F} \mid r]) = \\
&\qquad = \mathrm{cl}(\mathbb{I}^1((r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta]), \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]) \cap \Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}] = \\
&\qquad\qquad = \Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}]. \quad (4.33)
\end{aligned}
$$

Введем в рассмотрение отображение

$$
(\mu_j)_{j\in\overline{1,r}} \mapsto \left(\sum_{j=1}^{r}\int_E S_{i,j}\,d\mu_j\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}}} : \Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}] \to \mathbb{R}^{\mathbf{n}}; \quad (4.34)
$$

в настоящем разделе отображение (4.34) будем обозначать через $\mathcal{S}$; тогда

$$
\mathcal{S} : \Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}] \to \mathbb{R}^{\mathbf{n}}
$$

и при этом справедливы равенства

$$
\mathcal{S}\left((\mu_j)_{j\in\overline{1,r}}\right) = \left(\sum_{j=1}^{r}\int_E S_{i,j}\,d\mu_j\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}}} \quad \forall\,(\mu_j)_{j\in\overline{1,r}} \in \Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}]. \quad (4.35)
$$

В этом случае корректно определяется

$$
\begin{aligned}
&((\mathbf{n},r)-\mathcal{ADM})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S] \triangleq \mathcal{S}^{-1}(\mathbb{Y}) = \\
&\qquad = \left\{(\mu_j)_{j\in\overline{1,r}} \in \Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}] \mid \left(\sum_{j=1}^{r}\int_E S_{i,j}\,d\mu_j\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}}} \in \mathbb{Y}\right\}. \quad (4.36)
\end{aligned}
$$

С учетом (4.16) нетрудно показать (см. (3.2)), что семейство

$$
\begin{aligned}
&((\mathbf{n},r)-\mathbb{ADM})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S] \triangleq \\
&\qquad \triangleq \left\{((\mathbf{n},r)-\mathrm{ADM})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta;\mathcal{O}_{\zeta}^{(\mathbf{n})}[\mathbb{Y}];S] : \zeta \in]0,\infty[\right\} \in \\
&\qquad\qquad \in \beta[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta]]. \quad (4.37)
\end{aligned}
$$

Тем самым (см. (4.37)) определен один вариант ограничений асимптотического характера, подобный [4]. Рассмотрим другой вариант, полагая

$$((\mathbf{n},r)-\mathrm{step})[E;\mathcal{L};S] \triangleq \{M\in\mathcal{P}(\overline{1,\mathbf{n}}) \mid S_{i,j}\in B_0(E,\mathcal{L})\ \forall\, i\in M\ \forall\, j\in\overline{1,r}\,\}. \tag{4.38}$$

С учетом определений раздела 2 при $M\in((\mathbf{n},r)-\mathrm{step})[E;\mathcal{L};S]$ и $\zeta\in]0,\infty[$ определено множество $\widehat{\mathcal{O}}_\zeta^{(\mathbf{n})}[\mathbb{Y}|M]\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$;

Легко видеть (см. (3.2), (4.16)), что при $M\in((\mathbf{n},r)-\mathrm{step})[E;\mathcal{L};S]$ семейство

$$\begin{aligned}((\mathbf{n},r)-\mathbf{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};M;S] \triangleq\\ \triangleq \Big\{((\mathbf{n},r)-\mathrm{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\widehat{\mathcal{O}}_\zeta^{(\mathbf{n})}[\mathbb{Y}|M];S] : \zeta\in]0,\infty[\Big\}\in\\ \in\beta[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta]].\end{aligned} \tag{4.39}$$

Заметим, что согласно (4.38) $\varnothing\in((\mathbf{n},r)-\mathrm{step}))[E;\mathcal{L};S]$. При этом

$$((\mathbf{n},r)-\mathbb{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S] = ((\mathbf{n},r)-\mathbf{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};\varnothing;S]. \tag{4.40}$$

До конца настоящего раздела фиксируем

$$M\in((\mathbf{n},r)-\mathrm{step})[E;\mathcal{L};S]. \tag{4.41}$$

Утверждение 2 *Справедлива следующая цепочка равенств:*

$$\begin{aligned}((\mathbf{n},r)-\mathcal{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S] =\\ =(\mathbf{as})[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta];\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}];\tau_\Sigma^*[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}\mid r];\\ \mathbb{I};((\mathbf{n},r)-\mathbb{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S]] =\\ =(\mathbf{as})[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta];\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}];\tau_\Sigma^*[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}\mid r];\\ \mathbb{I};((\mathbf{n},r)-\mathbf{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};M;S]] =\\ =(\mathbf{as})[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta];\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}];\tau_\Sigma^0[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}\mid r];\\ \mathbb{I};((\mathbf{n},r)-\mathbb{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S]] =\\ =(\mathbf{as})[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta];\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}];\tau_\Sigma^0[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}\mid r];\\ \mathbb{I};((\mathbf{n},r)-\mathbf{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};M;S]].\end{aligned} \tag{4.42}$$

Доказательство извлекается из утверждений [4, раздел 4] (см., в частности, [4, теоремы 4.1, 4.2]). Введем теперь в рассмотрение $\mathbf{k}\in\mathbb{N}$ и отображение

$$A:\overline{1,\mathbf{k}}\times\overline{1,r}\to B(E,\mathcal{L}). \tag{4.43}$$

Полагаем, что $A_{i,j} \triangleq A(i,j) \quad \forall\, i \in \overline{1,\mathbf{k}}\ \forall\, j \in \overline{1,r}$. Если $(f_j)_{j\in\overline{1,r}} \in B^+_{0,r}[E;\mathcal{L}]$, то определен вектор

$$\left(\sum_{j=1}^{r}\int_E A_{i,j} f_j\, d\eta\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{k}}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{k}}. \tag{4.44}$$

В частности, в (4.44) можно использовать $(f_j)_{j\in\overline{1,r}} \in (r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta]$. Таким образом, $(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta]$ — непустое множество и при $(f_j)_{j\in\overline{1,r}} \in (r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta]$ определен вектор (4.44). С учетом этого введем целевое отображение

$$\widehat{\mathcal{A}} : (r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta] \to \mathbb{R}^{\mathbf{k}} \tag{4.45}$$

по следующему правилу:

$$\widehat{\mathcal{A}}\left((f_i)_{i\in\overline{1,r}}\right) \triangleq \left(\sum_{j=1}^{r}\int_E A_{i,j} f_j\, d\eta\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{k}}} \quad \forall\,(f_j)_{j\in\overline{1,r}} \in (r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta]. \tag{4.46}$$

В связи с (4.45), (4.46) отметим, что далее будут рассматриваться следующие МП:

$$(\mathbf{as})[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta];\mathbb{R}^{\mathbf{k}};\tau^{\mathbf{k}}_{\mathbb{R}};\widehat{\mathcal{A}};((\mathbf{n},r)-\mathbb{ADM})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S]] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbf{k}}), \tag{4.47}$$

$$(\mathbf{as})[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta];\mathbb{R}^{\mathbf{k}};\tau^{\mathbf{k}}_{\mathbb{R}};\widehat{\mathcal{A}};((\mathbf{n},r)-\mathbf{ADM})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};M;S]] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbf{k}}), \tag{4.48}$$

Для представления МП (4.47), (4.48) введем обобщенный целевой оператор

$$\widetilde{A} : \Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}] \to \mathbb{R}^{\mathbf{k}} \tag{4.49}$$

по следующему правилу:

$$\widetilde{\mathcal{A}}\left((\mu_j)_{j\in\overline{1,r}}\right) \triangleq \left(\sum_{j=1}^{r}\int_E A_{i,j}\, d\mu_j\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{k}}} \quad \forall\,(\mu_j)_{j\in\overline{1,r}} \in \Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}]. \tag{4.50}$$

Из (4.49) следует, что определен образ

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{A}}^1\left(((\mathbf{n},r)-\mathcal{ADM})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S]\right) &= \\ = \Big\{\widetilde{\mathcal{A}}\left((\mu_j)_{j\in\overline{1,r}}\right) : (\mu_j)_{j\in\overline{1,r}} \in ((\mathbf{n},r)-\mathcal{ADM})[\mathbb{F} \mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S]\Big\} &\in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbf{k}}).\end{aligned} \tag{4.51}$$

Отметим, что согласно (4.26)

$$\mathbb{I} : (r - \mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta] \to \Sigma_r[E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{F}]. \tag{4.52}$$

Тогда согласно (4.49), (4.52) определено отображение

$$\widetilde{\mathcal{A}} \circ \mathbb{I} : (r - \mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta] \to \mathbb{R}^{\mathbf{k}}, \tag{4.53}$$

для которого [10, (3.4.11)]

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{\mathcal{A}} \circ \mathbb{I})\left((f_j)_{j\in\overline{1,r}}\right) = \widetilde{\mathcal{A}}(\mathbb{I}((f_j)_{j\in\overline{1,r}})) = \\
&= \widetilde{\mathcal{A}}((f_j * \eta)_{j\in\overline{1,r}}) = \left(\sum_{j=1}^{r} \int_E A_{i,j}\, d(f_j * \eta)\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{k}}} = \left(\sum_{j=1}^{r} \int_E A_{i,j} f_j\, d\eta\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{k}}} = \\
&\qquad = \widehat{\mathcal{A}}((f_j)_{j\in\overline{1,r}}) \quad \forall\, (f_j)_{j\in\overline{1,r}} \in (r - \mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta].
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Из (4.45), (4.53) и (4.54) следует, что

$$\widetilde{\mathcal{A}} \circ \mathbb{I} = \widehat{\mathcal{A}}. \tag{4.55}$$

Утверждение 3 *Оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$ непрерывен:*

$$\widetilde{\mathcal{A}} \in C\left(\Sigma_r[E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{F}], \tau_{\Sigma}^{*}[E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{F} \mid r], \mathbb{R}^{\mathbf{k}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})}\right). \tag{4.56}$$

Доказательство следует фактически из определения *-слабой топологии $\tau_*(\mathcal{L})$; см. в этой связи [19, (4.6.16)].

Напомним, что (4.23) есть непустой компакт, $\mathbb{I}$ есть оператор погружения, определяемый в (4.26), $\widetilde{\mathcal{A}}$ есть непрерывный оператор из компакта в $\left(\mathbb{R}^{\mathbf{k}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})}\right)$. При этом $\widehat{\mathcal{A}}$ соответствует (4.45) и реализуется в виде композиции по правилу (4.55). Напомним здесь же, что $(r - \mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta]$ есть непустое множество (см. замечание 4.1), отображаемое в $\left(\mathbb{R}^{\mathbf{k}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})}\right)$ посредством $\widehat{\mathcal{A}}$. Из этих свойств вытекает, что $(\Sigma_r[E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{F}], \tau_{\Sigma}^{*}[E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{F} \mid r], \mathbb{I}, \widetilde{\mathcal{A}})$ есть $(\mathbb{R}^{\mathbf{k}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})}, \widehat{\mathcal{A}})$-компактификатор в смысле [11, определение 3.1]. Тогда согласно [11, предложение 3.2]

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{as})\left[(r - \mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta]; \mathbb{R}^{\mathbf{k}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})}; \widehat{\mathcal{A}}; \mathfrak{R}\right] = \\
&\quad = \widetilde{\mathcal{A}}^{1}\left((\mathbf{as})\left[(r - \mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta]; \Sigma_r[E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{F}]; \tau_{\Sigma}^{*}\left[E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{F} \mid r\right]; \mathbb{I}; \mathfrak{R}\right]\right) \\
&\qquad\qquad \forall\, \mathfrak{R} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}((r - \mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta])).
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Из (4.37), (4.57) получаем равенство

$$(\mathbf{as})\left[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta];\mathbb{R}^{\mathbf{k}},\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})};\widehat{\mathcal{A}};((\mathbf{n},r)-\mathbb{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S]\right]= \\ =\widetilde{\mathcal{A}}^1((\mathbf{as})[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta];\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}];\tau_{\Sigma}^*[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}\mid r];\mathbb{I}; \\ ((\mathbf{n},r)-\mathbb{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S]])= \\ =\widetilde{\mathcal{A}}^1(((\mathbf{n},r)-\mathcal{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S]); \quad (4.58)$$

мы учли утверждение 2. С другой стороны, из (4.39) и (4.57) вытекает цепочка равенств (см. утверждение 2):

$$(\mathbf{as})\left[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta];\mathbb{R}^{\mathbf{k}},\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})};\widehat{\mathcal{A}};((\mathbf{n},r)-\mathbf{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};M;S]\right]= \\ =\widetilde{\mathcal{A}}^1((\mathbf{as})[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta];\Sigma_r[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}];\tau_{\Sigma}^*[E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{F}\mid r];\mathbb{I}; \\ ((\mathbf{n},r)-\mathbf{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};M;S]])= \\ =\widetilde{\mathcal{A}}^1(((\mathbf{n},r)-\mathcal{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S]). \quad (4.59)$$

Из (4.58), (4.59) следует

$$(\mathbf{as})\left[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta];\mathbb{R}^{\mathbf{k}},\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})};\widehat{\mathcal{A}};((\mathbf{n},r)-\mathbb{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S]\right]= \\ =\widetilde{\mathcal{A}}^1(((\mathbf{n},r)-\mathcal{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S])= \\ =(\mathbf{as})[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta];\mathbb{R}^{\mathbf{k}};\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})};\widehat{\mathcal{A}};((\mathbf{n},r)-\mathbf{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};M;S]]. \quad (4.60)$$

Тем самым установлено свойство асимптотической нечувствительности МП при ослаблении части ограничений, определяемой индексным множеством M (речь идет об использовании двух типов окрестностей $\mathbb{Y}$, а именно: $O_{\zeta}^{(\mathbf{n})}[\mathbb{Y}]$ и $\widehat{O}_{\zeta}^{(\mathbf{n})}[\mathbb{Y}\mid M]$, где $\zeta\in]0,\infty[$); в этой связи напомним, что

$$M\in((\mathbf{n},r)-\mathrm{step})[E;\mathcal{L};S]:M\subset\overline{1,\mathbf{n}}. \quad (4.61)$$

Согласно (3.2) и (4.37)

$$((\mathbf{n},r)-\mathbb{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};S]\in\beta((r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta]). \quad (4.62)$$

Кроме того, из (3.2) и (4.39) следует, что (см. (4.61))

$$((\mathbf{n},r)-\mathbb{ADM})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta;\mathbb{Y};M;S]\in\beta((r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta]). \quad (4.63)$$

Напомним [20], что при всяком выборе семейств $\mathfrak{X}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}((r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta]))$ и $\mathfrak{Y}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}((r-\mathrm{adm})[\mathbb{F}\mid E;\mathcal{L};\eta]))$ семейство $\mathfrak{Y}$ π-вписано в $\mathfrak{X}$, если

$$\forall A\in\mathfrak{X}\ \exists B\in\mathfrak{Y}:B\subset A; \quad (4.64)$$

для краткого обозначения свойства (4.64) используем, как и в [20, с. 194] выражение $\mathfrak{X} \dashv \mathfrak{Y}$.

Напомним также, что согласно [20, предложение 6.2] и (3.2)

$$\forall\, \mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}((r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta]))\ \forall\, \mathfrak{Y} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}((r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta])) \\ (\mathfrak{X} \dashv \mathfrak{Y}) \Rightarrow ((\mathbf{as})[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta]; \mathbb{R}^{\mathbf{k}}; \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})}; \widehat{\mathcal{A}}; \mathfrak{Y}] \subset \\ \subset (\mathbf{as})[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta]; \mathbb{R}^{\mathbf{k}}; \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})}; \widehat{\mathcal{A}}; \mathfrak{X}]). \quad (4.65)$$

Из (2.3) и (4.16) вытекает, что

$$((\mathbf{n}, r) - \mathrm{ADM})\left[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta; \widehat{O}_{\zeta}^{(\mathbf{n})}[\mathbb{Y} \mid M; S]\right] \subset \\ \subset ((\mathbf{n}, r) - \mathrm{ADM})\left[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta; O_{\zeta}^{(\mathbf{n})}[\mathbb{Y}; S]\right]\ \forall\, \zeta \in]0, \infty[. \quad (4.66)$$

Из (4.37), (4.39) и (4.66) получаем, что

$$\forall\, A \in ((\mathbf{n}, r) - \mathbb{ADM})\,[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{Y}; S] \\ \exists\, B \in ((\mathbf{n}, r) - \mathbf{ADM})\,[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{Y}; M; S] : B \subset A. \quad (4.67)$$

С учетом определения $\dashv$ (см. (4.64)) получаем, что

$$((\mathbf{n}, r) - \mathbb{ADM})\,[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{Y}; S] \dashv ((\mathbf{n}, r) - \mathbf{ADM})\,[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{Y}; M; S]\,.$$

Теорема 1 *Если* $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}((r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta]))$, *то*

$$(((\mathbf{n}, r) - \mathbb{ADM})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{Y}, S] \dashv \mathcal{Z})\ \& \\ \&(\mathcal{Z} \dashv ((\mathbf{n}, r) - \mathbf{ADM})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{Y}; M; S])) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Big((\mathbf{as})\left[(r-\mathrm{adm})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta]; \mathbb{R}^{\mathbf{k}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})}; \widehat{\mathcal{A}}; \mathcal{Z}\right]\Big) = \\ = \widetilde{\mathcal{A}}^{1}(((\mathbf{n}, r) - \mathcal{ADM})[\mathbb{F} \mid E; \mathcal{L}; \eta; \mathbb{Y}; S])). \quad (4.68)$$

Доказательство сводится к непосредственной комбинации (4.60) и (4.61).

5 Игровая задача с моментными ограничениями: элементы конструкции расширения.

В настоящем разделе рассматривается абстрактный аналог игровой задачи программного управления раздела 1. При этом используются конструкции и результаты предыдущего раздела.

Фиксируем ниже следующие два ИП с полуалгебрами множеств: $(E_1, \mathcal{L}_1)$ и $(E_2, \mathcal{L}_2)$, $E_1 \neq \varnothing, E_2 \neq \varnothing$. Для этих двух ИП конкретизируем основные понятия раздела 4, используя в качестве E какое-либо из множеств E_1, E_2, а в качестве $\mathcal{L}$ — какую-либо полуалгебру: $\mathcal{L}_1$ или $\mathcal{L}_2$. Кроме того, фиксируем $r_1 \in \mathbb{N}$ и $r_2 \in \mathbb{N}$. Эти натуральные числа используем в качестве r раздела 4, причем r_1 используется при $(E, \mathcal{L}) = (E_1, \mathcal{L}_1)$, а r_2 — при $(E, \mathcal{L}) = (E_2, \mathcal{L}_2)$. В результате получаем два типа вектор-функций и два типа к.-а. мер:

$$B^+_{0,r_1}[E_1; \mathcal{L}_1],\ B^+_{0,r_2}[E_2; \mathcal{L}_2],\ (\mathrm{add})^+_{r_1}[\mathcal{L}_1],\ (\mathrm{add})^+_{r_2}[\mathcal{L}_2].$$

Соответственно, реализуются топологии

$$\otimes^{r_1}[\tau_*^+[\mathcal{L}_1)],\ \otimes^{r_2}[\tau_*^+[\mathcal{L}_2],\ \otimes^{r_1}[\tau_0^+(\mathcal{L}_1)],\ \otimes^{r_2}[\tau_0^+(\mathcal{L}_2)].$$

Используя естественные аналогии, подобные конкретизации реализуем и для других понятий раздела 4.

Пусть $\eta_1 \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}_1]$ и $\eta_2 \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}_2]$. В результате мы получаем пространства

$$(E_1, \mathcal{L}_1, \eta_1),\ (E_2, \mathcal{L}_2, \eta_2). \tag{5.1}$$

Используем построения раздела 4 в условиях, когда $(E, \mathcal{L}, \eta)$ раздела 4 совпадает с одним из пространств (5.1); в частности, далее существенны множества $(\mathrm{add})^+_{r_1}[\mathcal{L}_1; \eta_1]$ и $(\mathrm{add})^+_{r_2}[\mathcal{L}_2; \eta_2]$.

Пусть $\mathbf{n}_1 \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{n}_2 \in \mathbb{N}$; рассматриваем $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ в качестве конкретизации параметра $\mathbf{n}$ предыдущего раздела. Фиксируем также отображения

$$S^{(1)} : \overline{1, \mathbf{n}_1} \times \overline{1, r_1} \to B(E_1, \mathcal{L}_1), \quad S^{(2)} : \overline{1, \mathbf{n}_2} \times \overline{1, r_2} \to B(E_2, \mathcal{L}_2) \tag{5.2}$$

в качестве вариантов S раздела 4. Подобно разделу 4 полагаем, что

$$\Big(S^{(1)}_{i,j} \triangleq S^{(1)}(i,j)\ \forall\, i \in \overline{1, \mathbf{n}_1}\ \forall\, j \in \overline{1, r_1}\Big)\ \&$$
$$\&\ \Big(S^{(2)}_{i,j} \triangleq S^{(2)}(i,j)\ \forall\, i \in \overline{1, \mathbf{n}_2}\ \forall\, j \in \overline{1, r_2}\Big).$$

Пусть теперь $\mathbb{Y}_1$ есть непустое п/м $\mathbb{R}^{\mathbf{n}_1}$, замкнутое в (обычной) топологии $\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n}_1)}$, а $\mathbb{Y}_2$ – непустое п/м $\mathbb{R}^{\mathbf{n}_2}$, замкнутое в смысле $\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n}_2)}$. Множество $\mathbb{Y}_1$ формирует ограничение

$$\left(\sum_{j=1}^{r_1} \int_{E_1} S^{(1)}_{i,j} f_j \, d\eta_1\right)_{i \in \overline{1, \mathbf{n}_1}} \in \mathbb{Y}_1 \tag{5.3}$$

на выбор $(f_j)_{j\in\overline{1,r_1}} \in B^+_{0,r_1}[E_1;\mathcal{L}_1]$ (ниже будут введены и другие ограничения). Условие (5.3) логично трактовать как моментное ограничение. Аналогичным образом, $\mathbb{Y}_2$ формирует ограничение

$$\left(\sum_{j=1}^{r_2}\int_{E_2} S^{(2)}_{i,j} f_j\, d\eta_2\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}_2}} \in \mathbb{Y}_2 \tag{5.4}$$

на выбор $(f_j)_{j\in\overline{1,r_2}} \in B^+_{0,r_2}[E_2;\mathcal{L}_2]$, также называемое далее моментным.

Пусть $\mathbb{F}_1$ – непустое ограниченное п/м $\mathbb{R}^{r_1}_+$, замкнутое в $(\mathbb{R}^{r_1},\tau^{(r_1)}_{\mathbb{R}})$, а $\mathbb{F}_2$ – непустое ограниченное п/м $\mathbb{R}^{r_2}_+$, замкнутое в $(\mathbb{R}^{r_2},\tau^{(r_2)}_{\mathbb{R}})$. Тогда по аналогии с (4.14) вводим множества

$$(r_1-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_1|E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1] \triangleq \left\{(f_i)_{i\in\overline{1,r_1}} \in B^+_{0,r_1}[E_1;\mathcal{L}_1] \mid \left(\int_{E_1} f_i\, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,r_1}} \in \mathbb{F}_1\right\}, \tag{5.5}$$

$$(r_2-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_2|E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2] \triangleq \left\{(f_i)_{i\in\overline{1,r_2}} \in B^+_{0,r_2}[E_2;\mathcal{L}_2] \mid \left(\int_{E_2} f_i\, d\eta_2\right)_{i\in\overline{1,r_2}} \in \mathbb{F}_2\right\}. \tag{5.6}$$

Разумеется, (5.5) и (5.6) можно рассматривать как две конкретизации множества (4.14). При этом каждое из этих двух множеств интегрально ограничено в смысле, подобном (4.15). Аналогичным образом, вводим две конкретизации (4.16):

$$((\mathbf{n}_1,r_1)-\mathrm{ADM})[\mathbb{F}_1 \mid E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1;\mathbf{Y};S^{(1)}] \triangleq$$
$$\triangleq \left\{(f_i)_{i\in\overline{1,r_1}} \in (r_1-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1] \mid \left(\sum_{j=1}^{r_1}\int_{E_1} S^{(1)}_{i,j} f_j\, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}_1}} \in \mathbf{Y}\right\}$$
$$\forall\, \mathbf{Y}\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}_1}), \tag{5.7}$$

$$((\mathbf{n}_2,r_2)-\mathrm{ADM})[\mathbb{F}_2 \mid E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2;\mathbf{Y};S^{(2)}] \triangleq$$
$$\triangleq \left\{(f_i)_{i\in\overline{1,r_2}} \in (r_2-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2] \mid \left(\sum_{j=1}^{r_2}\int_{E_2} S^{(2)}_{i,j} f_j\, d\eta_2\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}_2}} \in \mathbf{Y}\right\}$$
$$\forall\, \mathbf{Y}\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}_2}). \tag{5.8}$$

Кроме того, используем ниже следующие варианты множества (4.17) и (4.18)

$$\Sigma_{r_1}[E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1;\mathbb{F}_1] \triangleq \left\{(\mu_j)_{j\in\overline{1,r_1}} \in (\mathrm{add})^+_{r_1}[\mathcal{L}_1;\eta_1] \mid (\mu_j(E_1))_{j\in\overline{1,r_1}} \in \mathbb{F}_1\right\} \in$$
$$\in \left(\otimes^{r_1}[\tau^+_*(\mathcal{L}_1)]-\mathrm{comp}\right)\left[(\mathrm{add})^+_{r_1}[\mathcal{L}_1]\right], \tag{5.9}$$

$$\Sigma_{r_2}[E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2;\mathbb{F}_2] \triangleq \left\{(\nu_j)_{j\in\overline{1,r_2}} \in (\mathrm{add})^+_{r_2}[\mathcal{L}_2;\eta_2] \mid (\nu_j(E_2))_{j\in\overline{1,r_2}} \in \mathbb{F}_2\right\} \in \\ \in \left(\otimes^{r_2}[\tau^+_*(\mathcal{L}_2)] - \mathrm{comp}\right)\left[(\mathrm{add})^+_{r_2}[\mathcal{L}_2]\right]. \quad (5.10)$$

В этой связи отметим свойства плотности (см. утверждение 1):

$$\Sigma_{r_1}[E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1;\mathbb{F}_1] = \\ = \mathrm{cl}(\{(f_i*\eta_1)_{i\in\overline{1,r_1}} : (f_i)_{i\in\overline{1,r_1}} \in (r_1-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1]\}, \otimes^{r_1}[\tau^+_*(\mathcal{L}_1)]) = \\ = \mathrm{cl}(\{(f_i*\eta_1)_{i\in\overline{1,r_1}} : (f_i)_{i\in\overline{1,r_1}} \in (r_1-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1]\}, \otimes^{r_1}[\tau^+_0(\mathcal{L}_1)]), \quad (5.11)$$

$$\Sigma_{r_2}[E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2;\mathbb{F}_2] = \\ = \mathrm{cl}(\{(f_i*\eta_2)_{i\in\overline{1,r_2}} : (f_i)_{i\in\overline{1,r_2}} \in (r_2-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2]\}, \otimes^{r_2}[\tau^+_*(\mathcal{L}_2)]) = \\ = \mathrm{cl}(\{(f_i*\eta_2)_{i\in\overline{1,r_2}} : (f_i)_{i\in\overline{1,r_2}} \in (r_2-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2]\}, \otimes^{r_2}[\tau^+_0(\mathcal{L}_2)]). \quad (5.12)$$

Всюду в дальнейшем полагаем, что меры η_1 и η_2 ненулевые: $\eta_1(E_1) \in]0,\infty[$, $\eta_2(E_2) \in]0,\infty[$. Тогда согласно замечанию 3.7.1

$$(r_1-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1] \neq \varnothing,\ \Sigma_{r_1}[E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1;\mathbb{F}_1] \neq \varnothing,$$

$$(r_2-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2] \neq \varnothing,\ \Sigma_{r_2}[E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2;\mathbb{F}_2] \neq \varnothing.$$

Введем (см. (4.22)) топологию

$$\tau^*_{\sum}[E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1;\mathbb{F}_1 \mid r_1] \triangleq \otimes^{r_1}[\tau^+_*(\mathcal{L}_1)]|_{\Sigma_{r_1}[E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1;\mathbb{F}_1]},$$

порождающую непустой компакт

$$\left(\Sigma_{r_1}[E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1;\mathbb{F}_1], \tau^*_{\sum}[E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1;\mathbb{F}_1 \mid r_1]\right). \quad (5.13)$$

Аналогично (см. (4.22)), топология

$$\tau^*_{\sum}[E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2;\mathbb{F}_2 \mid r_2] \triangleq \otimes^{r_2}[\tau^+_*(\mathcal{L}_2)]|_{\Sigma_{r_2}[E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2;\mathbb{F}_2]}$$

порождает непустой компакт

$$\left(\Sigma_{r_2}[E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2;\mathbb{F}_2], \tau^*_{\sum}[E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2;\mathbb{F}_2 \mid r_2]\right). \quad (5.14)$$

Кроме того, пусть $\tau^0_{\sum}[E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1;\mathbb{F}_1 \mid r_1] \triangleq \otimes^{r_1}[\tau^+_0(\mathcal{L}_1)]|_{\Sigma_{r_1}[E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1;\mathbb{F}_1]}$; $\tau^0_{\sum}[E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2;\mathbb{F}_2 \mid r_2] \triangleq \otimes^{r_2}[\tau^+_0(\mathcal{L}_2)]|_{\Sigma_{r_2}[E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2;\mathbb{F}_2]}$. Введем два варианта оператора (4.26). Для этого полагаем, что $\mathbf{I}$ есть def отображение

$$(f_i)_{i\in\overline{1,r_1}} \mapsto (f_i*\eta_1)_{i\in\overline{1,r_1}} : (r_1-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1] \to \Sigma_{r_1}[E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1;\mathbb{F}_1]; \quad (5.15)$$

кроме того, определяем $\mathbf{J}$ как отображение

$$(f_i)_{i\in\overline{1,r_2}} \mapsto (f_i * \eta_2)_{i\in\overline{1,r_2}} : (r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2] \to \Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2]. \tag{5.16}$$

Разумеется, $\mathbf{I}^1(\cdot)$ и $\mathbf{J}^1(\cdot)$ – суть операции взятия образа при действии $\mathbf{I}$ (5.15) и $\mathbf{J}$ (5.16) соответственно. С учетом этого согласно (4.32), (4.34)

$$\begin{aligned}\Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1] &= \\ &= \mathrm{cl}\left(\mathbf{I}^1\left((r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]\right), \tau^*_{\sum}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1 \mid r_1]\right) = \\ &= \mathrm{cl}\left(\mathbf{I}^1((r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]), \tau^0_{\sum}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1 \mid r_1]\right),\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2] &= \\ &= \mathrm{cl}\left(\mathbf{J}^1\left((r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]\right), \tau^*_{\sum}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2 \mid r_2]\right) = \\ &= \mathrm{cl}\left(\mathbf{J}^1((r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]), \tau^0_{\sum}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2 \mid r_2]\right).\end{aligned} \tag{5.18}$$

Используя (4.34) и (4.35), введем отображения $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$, определенные на компактах (5.13) и (5.14) соответственно. Итак, $\mathcal{S}_1$ отождествляем с

$$(\mu_j)_{j\in\overline{1,r_1}} \mapsto \left(\sum_{j=1}^{r_1} \int_{E_1} S^{(1)}_{i,j}\, d\mu_j\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}_1}} : \Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1] \to \mathbb{R}^{\mathbf{n}_1}, \tag{5.19}$$

а $\mathcal{S}_2$ – с отображением

$$(\nu_j)_{j\in\overline{1,r_2}} \mapsto \left(\sum_{j=1}^{r_2} \int_{E_2} S^{(2)}_{i,j}\, d\nu_j\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}_2}} : \Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2] \to \mathbb{R}^{\mathbf{n}_2}. \tag{5.20}$$

В терминах прообразов множеств $\mathbb{Y}_1$ и $\mathbb{Y}_2$ при действии операторов (5.19) и (5.20) определяются (см. (4.36)) множества допустимых ОУ игроков I и II соответственно:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &\triangleq ((\mathbf{n}_1, r_1) - \mathcal{ADM})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{Y}_1; \mathcal{S}^{(1)}] = \\ &= \left\{(\mu_j)_{j\in\overline{1,r_1}} \in \Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1] \mid \mathcal{S}_1\left((\mu_j)_{j\in\overline{1,r_1}}\right) \in \mathbb{Y}_1\right\},\end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} &\triangleq ((\mathbf{n}_2, r_2) - \mathcal{ADM})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{Y}_2; \mathcal{S}^{(2)}] = \\ &= \left\{(\nu_j)_{j\in\overline{1,r_2}} \in \Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2] \mid \mathcal{S}_2\left((\nu_j)_{j\in\overline{1,r_2}}\right) \in \mathbb{Y}_2\right\}.\end{aligned} \tag{5.22}$$

Введем теперь соответствующие аналоги семейства (4.37), учитывая (5.7) и (5.8):

$$\mathfrak{A}_1 \triangleq ((\mathbf{n}_1, r_1) - \mathbb{ADM})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{Y}_1; S^{(1)}] =$$
$$= \Big\{((\mathbf{n}_1, r_1) - ADM) \Big[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathcal{O}_\zeta^{(\mathbf{n}_1)}[\mathbb{Y}_1]; S^{(1)}\Big] : \zeta \in]0, \infty[\Big\} \in$$
$$\in \beta\left[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]\right], \quad (5.23)$$

$$\mathfrak{A}_2 \triangleq ((\mathbf{n}_2, r_2) - \mathbb{ADM})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{Y}_2; S^{(2)}] =$$
$$= \Big\{((\mathbf{n}_2, r_2) - ADM) \Big[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathcal{O}_\zeta^{(\mathbf{n}_2)}[\mathbb{Y}_2]; S^{(2)}\Big] : \zeta \in]0, \infty[\Big\} \in$$
$$\in \beta\left[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]\right]. \quad (5.24)$$

Семейства (5.23), (5.24) используем в качестве ограничений асимптотического характера на выбор управлений игроков I и II соответственно. Согласно (4.38)

$$((\mathbf{n}_1, r_1) - \mathrm{step})[E_1; \mathcal{L}_1; S^{(1)}] =$$
$$= \Big\{M \in \mathcal{P}(\overline{1, \mathbf{n}_1}) \mid S_{i,j}^{(1)} \in B_0(E_1, \mathcal{L}_1) \ \forall i \in M \ \forall j \in \overline{1, r_1}\Big\}, \quad (5.25)$$

$$((\mathbf{n}_2, r_2) - \mathrm{step})[E_2; \mathcal{L}_2; S^{(2)}] =$$
$$= \Big\{M \in \mathcal{P}(\overline{1, \mathbf{n}_2}) \mid S_{i,j}^{(2)} \in B_0(E_2, \mathcal{L}_2) \ \forall i \in M \ \forall j \in \overline{1, r_2}\Big\}. \quad (5.26)$$

Каждое из семейств (5.25), (5.26) непусто. С учетом (4.39), (5.7), (5.8), имеем

$$((\mathbf{n}_1, r_1) - \mathbf{ADM})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{Y}_1; M; S^{(1)}] =$$
$$= \Big\{((\mathbf{n}_1, r_1) - \mathrm{ADM})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \widehat{\mathcal{O}}_\zeta^{(\mathbf{n}_1)}[\mathbb{Y}_1|M]; S^{(1)}] : \zeta \in]0, \infty[\Big\} \in$$
$$\in \beta[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]] \ \forall M \in ((\mathbf{n}_1, r_1) - \mathrm{step})[E_1; \mathcal{L}_1; S^{(1)}], \quad (5.27)$$

$$((\mathbf{n}_2, r_2) - \mathbf{ADM})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{Y}_2; \widetilde{M}; S^{(2)}] =$$
$$= \Big\{((\mathbf{n}_2, r_2) - \mathrm{ADM})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \widehat{\mathcal{O}}_\zeta^{(\mathbf{n}_2)}[\mathbb{Y}_2|\widetilde{M}]; S^{(2)}] : \zeta \in]0, \infty[\Big\} \in$$
$$\in \beta[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]] \ \ \forall \widetilde{M} \in ((\mathbf{n}_2, r_2) - \mathrm{step})[E_2; \mathcal{L}_2; S^{(2)}]. \quad (5.28)$$

При этом согласно (4.40), (5.23), (5.24), имеем, в частности, следующие два равенства:

$$(\mathfrak{A}_1 = ((\mathbf{n}_1, r_1) - \mathbf{ADM})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{Y}_1; \varnothing; S^{(1)}]) \ \&$$
$$\& \ (\mathfrak{A}_2 = ((\mathbf{n}_2, r_2) - \mathbf{ADM})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{Y}_2; \varnothing; S^{(2)}]). \quad (5.29)$$

Случай, рассматриваемый в (5.29) отвечает ситуации, когда $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ не содержат «строк», элементами которых являются ступенчатые относительно $(E_1, \mathcal{L}_1)$ и $(E_2, \mathcal{L}_2)$ функции.

Всюду в дальнейшем фиксируем множества

$$(M_1 \in ((\mathbf{n}_1, r_1) - \mathrm{step})[E_1; \mathcal{L}_1; S^{(1)}]) \ \& \ (M_2 \in ((\mathbf{n}_2, r_2) - \mathrm{step})[E_2; \mathcal{L}_2; S^{(2)}]). \tag{5.30}$$

С учетом (5.27), (5.28) и (5.30) имеем два направленных семейства

$$\begin{gathered}\mathfrak{B}_1 \triangleq ((\mathbf{n}_1, r_1) - \mathbf{ADM})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{Y}_1; M_1; S^{(1)}] = \\ = \left\{((\mathbf{n}_1, r_1) - \mathrm{ADM})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \widehat{\mathcal{O}}_\zeta^{(\mathbf{n}_1)}[\mathbb{Y}_1|M_1]; S^{(1)}] : \zeta \in]0, \infty[\right\} \in \\ \in \beta[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]], \end{gathered} \tag{5.31}$$

$$\begin{gathered}\mathfrak{B}_2 \triangleq ((\mathbf{n}_2, r_2) - \mathbf{ADM})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{Y}_2; M_2; S^{(2)}] = \\ = \left\{((\mathbf{n}_2, r_2) - \mathrm{ADM})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \widehat{\mathcal{O}}_\zeta^{(\mathbf{n}_2)}[\mathbb{Y}_2|M_2]; S^{(2)}] : \zeta \in]0, \infty[\right\} \in \\ \in \beta[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]]. \end{gathered} \tag{5.32}$$

В виде $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{B}_1$ мы имеем два типа ограничений асимптотического характера на выбор управлений игрока I, а в виде $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}_2$ — два типа аналогичных ограничений на выбор управлений игрока II. Из утверждения 2 извлекаются следующие две конкретизации:

$$\begin{gathered}\mathfrak{M} = \\ (\mathbf{as})[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]; \Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1]; \tau_\Sigma^*[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1 \mid r_1]; \mathbf{I}; \mathfrak{A}_1] = \\ (\mathbf{as})[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]; \Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1]; \tau_\Sigma^*[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1 \mid r_1]; \mathbf{I}; \mathfrak{B}_1] = \\ (\mathbf{as})[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]; \Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1]; \tau_\Sigma^0[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1 \mid r_1]; \mathbf{I}; \mathfrak{A}_1] = \\ (\mathbf{as})[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]; \Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1]; \tau_\Sigma^0[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1 \mid r_1]; \mathbf{I}; \mathfrak{B}_1]. \end{gathered} \tag{5.33}$$

$$\begin{gathered}\mathfrak{N} = \\ (\mathbf{as})[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]; \Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2]; \tau_\Sigma^*[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2 \mid r_2]; \mathbf{J}; \mathfrak{A}_2] = \\ (\mathbf{as})[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]; \Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2]; \tau_\Sigma^*[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2 \mid r_2]; \mathbf{J}; \mathfrak{B}_2] = \\ (\mathbf{as})[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]; \Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2]; \tau_\Sigma^0[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2 \mid r_2]; \mathbf{J}; \mathfrak{A}_2] = \\ (\mathbf{as})[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]; \Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2]; \tau_\Sigma^0[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2 \mid r_2]; \mathbf{J}; \mathfrak{B}_2]. \end{gathered} \tag{5.34}$$

Пусть $\mathbf{k}_1 \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{k}_2 \in \mathbb{N}$. Следуя конструкции (4.43), введем отображения

$$A^{(1)} : \overline{1, \mathbf{k}_1} \times \overline{1, r_1} \to B(E_1, \mathcal{L}_1), \quad A^{(2)} : \overline{1, \mathbf{k}_2} \times \overline{1, r_2} \to B(E_2, \mathcal{L}_2),$$

формирующие вектор-функционалы, участвующие в последующем формировании критерия основной игровой задачи. Условимся об обозначениях: $A^{(1)}_{i,j} \triangleq A^{(1)}(i,j)$ при $i \in \overline{1, \mathbf{k}_1}$ и $j \in \overline{1, r_1}$, $A^{(2)}_{i,j} \triangleq A^{(2)}(i,j)$ при $i \in \overline{1, \mathbf{k}_2}$ и $j \in \overline{1, r_2}$. Итак, вектор-функционал

$$\widehat{\mathcal{A}_1} : (r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1] \to \mathbb{R}^{\mathbf{k}_1} \tag{5.35}$$

определяем посредством следующего условия:

$$\widehat{\mathcal{A}}_1\left((f_j)_{j \in \overline{1, r_1}}\right) \triangleq \left(\sum_{j=1}^{r_1} \int_{E_1} A^{(1)}_{i,j} f_j \, d\eta_1\right)_{i \in \overline{1, \mathbf{k}_1}} \quad \forall\, (f_j)_{j \in \overline{1, r_1}} \in (r_1{-}\mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1].$$

Кроме того, введем при $\mathbf{k}_2 \in \mathbb{N}$ в рассмотрение вектор-функционал

$$\widehat{\mathcal{A}_2} : (r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2] \to \mathbb{R}^{\mathbf{k}_2}, \tag{5.36}$$

полагая, что

$$\widehat{\mathcal{A}}_2\left((f_j)_{j \in \overline{1, r_2}}\right) \triangleq \left(\sum_{j=1}^{r_2} \int_{E_2} A^{(2)}_{i,j} f_j \, d\eta_2\right)_{i \in \overline{1, \mathbf{k}_2}} \quad \forall\, (f_j)_{j \in \overline{1, r_2}} \in (r_2{-}\mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2].$$

На значениях отображения $\widehat{\mathcal{A}}_1$ (отображения $\widehat{\mathcal{A}}_2$) будут определяться МП в $\mathbb{R}^{\mathbf{k}_1}$ (в $\mathbb{R}^{\mathbf{k}_2}$). Отображению $\widehat{\mathcal{A}}_1$ соответствует обобщенный вектор-функционал

$$\mathbb{P} : \ \Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1] \to \mathbb{R}^{\mathbf{k}_1}, \tag{5.37}$$

определяемый посредством следующего (подобного (4.50)) условия

$$\mathbb{P}\left((\mu_j)_{j \in \overline{1, r_1}}\right) \triangleq \left(\sum_{j=1}^{r_1} \int_{E_1} A^{(1)}_{i,j} \, d\mu_j\right)_{i \in \overline{1, \mathbf{k}_1}} \quad \forall\, (\mu_j)_{j \in \overline{1, r_1}} \in \Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1]. \tag{5.38}$$

Кроме того, отображению $\widehat{\mathcal{A}}_2$ отвечает обобщенный вектор-функционал

$$\mathbb{Q} : \ \Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2] \to \mathbb{R}^{\mathbf{k}_2}, \tag{5.39}$$

определяемый следующим условием (см. (4.50)):

$$\mathbb{Q}\left((\nu_j)_{j \in \overline{1, r_2}}\right) \triangleq \left(\sum_{j=1}^{r_2} \int_{E_2} A^{(2)}_{i,j} \, d\nu_j\right)_{i \in \overline{1, \mathbf{k}_2}} \quad \forall\, (\nu_j)_{j \in \overline{1, r_2}} \in \Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2]. \tag{5.40}$$

Заметим, что с учетом (4.51) реализуются следующие два множества

$$\big(\mathbb{P}^1(\mathfrak{M}) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbf{k}_1})\big) \ \& \ \big(\mathbb{Q}^1(\mathfrak{N}) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbf{k}_2})\big). \tag{5.41}$$

В связи со свойствами множеств (5.41) рассмотрим соответствующие конкретизации представления на основе (4.53), (4.54). Итак, конкретной версией (4.53) является отображение $\mathbb{P} \circ \mathbf{I}$, действующее из $(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]$ в $\mathbb{R}^{\mathbf{k}_1}$ и такое, что $\mathbb{P} \circ \mathbf{I} = \widehat{\mathcal{A}}_1$ (см. (4.55)), где согласно утверждению 3

$$\mathbb{P} \in C\left(\Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1], \tau_\Sigma^*[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1 \mid r_1], \mathbb{R}^{\mathbf{k}_1}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}\right). \tag{5.42}$$

С учетом (5.42) и построений, следующих за утверждением 3 мы получаем, что $(\Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1], \tau_\Sigma^*[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1 \mid r_1], \mathbf{I}, \mathbb{P})$ есть $\left(\mathbb{R}^{\mathbf{k}_1}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}, \widehat{\mathcal{A}}_1\right)$ – компактификатор [11, определение 3.1]. Поэтому (см. (4.58), (5.23))

$$(\mathbf{as})[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]; \mathbb{R}^{\mathbf{k}_1}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}; \widehat{\mathcal{A}}_1; \mathfrak{A}_1] = \mathbb{P}^1(\mathfrak{M}). \tag{5.43}$$

Кроме того (см. (4.61), (5.31)), получаем следующие равенства

$$(\mathbf{as})[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]; \mathbb{R}^{\mathbf{k}_1}; \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}; \widehat{\mathcal{A}}_1; \mathfrak{B}_1] = \mathbb{P}^1(\mathfrak{M}); \tag{5.44}$$

в связи с (5.44) напомним (5.30). Сопоставляя (5.43) и (5.44), отметим полезное свойство сравнимости, извлекаемое из (4.68): $\mathfrak{A}_1 \dashv \mathfrak{B}_1$. Наконец, из теоремы 1 следует (см. (5.43), (5.44)), что $\forall\, \mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]))$

$$\begin{gathered}((\mathfrak{A}_1 \dashv \mathcal{Z}) \ \& \ (\mathcal{Z} \dashv \mathfrak{B}_1)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left((\mathbf{as})[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]; \mathbb{R}^{\mathbf{k}_1}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}; \widehat{\mathcal{A}}_1; \mathcal{Z}] = \mathbb{P}^1(\mathfrak{M})\right).\end{gathered} \tag{5.45}$$

В (5.43)–(5.45) мы имеем конкретный вариант представления МП для игрока I. Сейчас рассмотрим аналогичную конкретизацию построений раздела 4 для игрока II. Здесь конкретной версией отображения (4.53) является $\mathbb{Q} \circ \mathbf{J}$, для которого согласно (4.55) $\mathbb{Q} \circ \mathbf{J} = \widehat{\mathcal{A}}_2$; при этом согласно предложению 4.3

$$\mathbb{Q} \in C\left(\Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2], \tau_\Sigma^*[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2 \mid r_2], \mathbb{R}^{\mathbf{k}_2}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}\right). \tag{5.46}$$

С учетом (5.46) имеем, что $(\Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2], \tau_\Sigma^*[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2 \mid r_2], \mathbf{J}, \mathbb{Q})$ есть $\left(\mathbb{R}^{\mathbf{k}_2}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}, \widehat{\mathcal{A}}_2\right)$ – компактификатор [11, определение 3.1]. Используя (4.58) и (5.24), получаем равенство

$$(\mathbf{as})[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]; \mathbb{R}^{\mathbf{k}_2}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}, \widehat{\mathcal{A}}_2; \mathfrak{A}_2] = \mathbb{Q}^1(\mathfrak{N}). \tag{5.47}$$

Кроме того, из (4.61), (5.30) и (5.32) следует равенство

$$(\mathbf{as})[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]; \mathbb{R}^{\mathbf{k}_2}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}, \widehat{\mathcal{A}}_2; \mathfrak{B}_2] = \mathbb{Q}^1(\mathfrak{N}). \tag{5.48}$$

В связи с (5.47) и (5.48) заметим, что согласно (5.24) и (5.32) $\mathfrak{A}_2 \dashv \mathfrak{B}_2$. В свою очередь, теорема 1 сводится в рассматриваемом случае к утверждению: $\forall\, \mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}((r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]))$

$$((\mathfrak{A}_2 \dashv \mathcal{Z}) \& (\mathcal{Z} \dashv \mathfrak{B}_2)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Big((\mathbf{as})[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]; \mathbb{R}^{\mathbf{k}_2}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}; \widehat{\mathcal{A}}_2; \mathcal{Z}] = \mathbb{Q}^1(\mathfrak{N}) \Big). \tag{5.49}$$

В (5.47)–(5.49) мы имеем представление МП для игрока II.

Итак, в (5.45), (5.49) мы имеем два типа МП, отвечающие вариантам асимптотического поведения игроков I и II. С учетом этого мы зафиксируем в дальнейшем

$$(\mathcal{Z}_1 \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}((r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]))) \ \& \\ \& \, (\mathcal{Z}_2 \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}((r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]))) \,, \tag{5.50}$$

получая два непустых семейства множеств. Впрочем, всюду в дальнейшем будем полагать, что

$$(\mathcal{Z}_1 \in \beta[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]]) \ \& \ (\mathcal{Z}_2 \in \beta[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]]) \,. \tag{5.51}$$

В связи с построениями для более общего случая (5.50) отметим известное [11, (3.3)] преобразование, позволяющее свести исследование к случаю (5.51). В связи с (5.45) и (5.49) будем предполагать далее, что

$$(\mathfrak{A}_1 \dashv \mathcal{Z}_1) \ \& \ (\mathcal{Z}_1 \dashv \mathfrak{B}_1) \tag{5.52}$$

и, кроме того,

$$(\mathfrak{A}_2 \dashv \mathcal{Z}_2) \ \& \ (\mathcal{Z}_2 \dashv \mathfrak{B}_2). \tag{5.53}$$

Замечание 1 *Отметим, что в качестве $\mathcal{Z}_1$ можно при соблюдении (5.52) и первого условия в (5.51) полагать, что $\mathcal{Z}_1 = \mathfrak{A}_1$ или $\mathcal{Z}_1 = \mathfrak{B}_1$. Это следует из ранее упомянутого свойства $\mathfrak{A}_1 \dashv \mathfrak{B}_1$. Аналогичным образом, в качестве $\mathcal{Z}_2$ можно, при соблюдении (5.53) и второго условия в (5.51), полагать, что $\mathcal{Z}_2 = \mathfrak{A}_2$ или $\mathcal{Z}_2 = \mathfrak{B}_2$. Это следует из ранее упомянутого свойства $\mathfrak{A}_2 \dashv \mathfrak{B}_2$. Поэтому возможна любая из следующих реализаций пары $(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)$:*

$$(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2), \quad (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_2),$$

$$(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_2), \quad (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2).$$

Из (5.45) и (5.52) вытекает равенство

$$(\mathbf{as})[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]; \mathbb{R}^{\mathbf{k}_1}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}, \widehat{\mathcal{A}}_1; \mathcal{Z}_1] = \mathbb{P}^1(\mathfrak{M}). \tag{5.54}$$

В свою очередь, из (5.49), (5.53) получаем равенство

$$(\mathbf{as})[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]; \mathbb{R}^{\mathbf{k}_2}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}, \widehat{\mathcal{A}}_2; \mathcal{Z}_2] = \mathbb{Q}^1(\mathfrak{N}). \tag{5.55}$$

6 Игровая задача с моментными ограничениями: асимптотика максимина в «диапазоне».

Поскольку $\mathbb{F}_1$ и $\mathbb{F}_2$ – непустые ограниченные множества в конечномерных пространствах, то для некоторых $\mathbf{a}_1 \in]0, \infty[$ и $\mathbf{a}_2 \in]0, \infty[$

$$\left(\|x\|^{(\mathbf{r}_1)} \leqslant \mathbf{a}_1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{F}_1\right) \ \& \ \left(\|y\|^{(\mathbf{r}_2)} \leqslant \mathbf{a}_2 \ \ \forall\, x \in \mathbb{F}_2\right). \tag{6.1}$$

Из (5.9) и (6.1) вытекает, что

$$|\mu_l(E_1)| \leqslant \mathbf{a}_1 \ \forall\, (\mu_j)_{j \in \overline{1, r_1}} \in \Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1] \ \ \forall\, l \in \overline{1, r_1}. \tag{6.2}$$

Условимся через $\|\cdot\|_1$ обозначать sup-норму [17, с. 261] пространства $\mathbb{B}(E_1)$ (в разделе 4 для sup-нормы использовалось обозначение $\|\cdot\|$). Тогда имеем с учетом (6.2)

$$\left|\int_{E_1} A_{i,l}^{(1)}\, d\mu_l\right| \leqslant \left\|A_{i,l}^{(1)}\right\|_1 \mathbf{a}_1 \ \ \forall\, (\mu_j)_{j \in \overline{1, r_1}} \in \Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1 \mathbb{F}_1] \ \ \forall\, i \in \overline{1, \mathbf{k}_1} \ \ \forall\, l \in \overline{1, r_1}.$$

Поэтому согласно (5.38) получаем оценки

$$\left|\mathbb{P}((\mu_j)_{j \in \overline{1, r_1}})(i)\right| \leqslant \mathbf{a}_1 \sum_{j=1}^{r_1} \left\|A_{i,j}^{(1)}\right\|_1 \ \ \forall\, (\mu_j)_{j \in \overline{1, r_1}} \in \Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1] \ \ \forall\, i \in \overline{1, \mathbf{k}_1}. \tag{6.3}$$

Как следствие, мы получаем в терминах величины

$$\alpha_1 \triangleq \mathbf{a}_1 \sum_{i=1}^{\mathbf{k}_1} \sum_{j=1}^{r_1} \left\|A_{i,j}^{(1)}\right\|_1 \tag{6.4}$$

очевидную оценку для значений нормы:

$$\left\|\mathbb{P}((\mu_j)_{j \in \overline{1, r_1}})\right\|^{(\mathbf{k}_1)} \leqslant \alpha_1 \ \ \forall\, (\mu_j)_{j \in \overline{1, r_1}} \in \Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1]. \tag{6.5}$$

С учетом (6.5) введем в рассмотрение шар

$$U \triangleq \{x \in \mathbb{R}^{\mathbf{k}_1} \mid \|x\|^{(\mathbf{k}_1)} \leqslant \alpha_1\}, \tag{6.6}$$

получая непустой компакт в $\left(\mathbb{R}^{\mathbf{k}_1}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}\right)$: топология $\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}|_U$ превращает U (6.6) в непустой компакт. Заметим, что

$$(x', x'') \mapsto \|x' - x''\|^{(\mathbf{k}_1)} : \mathbb{R}^{\mathbf{k}_1} \times \mathbb{R}^{\mathbf{k}_1} \to [0, \infty[\tag{6.7}$$

есть метрика $\mathbb{R}^{\mathbf{k}_1}$, порожденная нормой $\|\cdot\|^{(\mathbf{k}_1)}$. В свою очередь

$$\rho_1 \triangleq \left(\|x' - x''\|^{(\mathbf{k}_1)}\right)_{(x', x'') \in U \times U} \tag{6.8}$$

есть метрика U (6.6) являющаяся сужением (6.7) (на $U \times U$). Поскольку топология $\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}|_U$ порождается [8] метрикой ρ_1 (см. [19, (2.7.32)]), то (U, ρ_1) удовлетворяет условиям [3, §2]. Обозначаем топологию множества U, порожденную метрикой ρ_1 через $\tau^0_{\rho_1}[U]$, что согласуется с [3];

$$\tau^0_{\rho_1}[U] \triangleq \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}|_U, \tag{6.9}$$

а $(U, \tau^0_{\rho_1}[U])$ есть метризуемый компакт (см. в этой связи [3, (2.2)]). Таким образом, построено «промежуточное» (в смысле [3]) пространство игрока I. Аналогичным образом можно построить «промежуточное» пространство игрока II.

С учетом (5.10) и (6.1) получаем

$$|\nu_l(E_2)| \leqslant \mathbf{a}_2 \ \forall \, (\nu_j)_{j \in \overline{1, r_2}} \in \Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2] \ \forall \, l \in \overline{1, r_2}. \tag{6.10}$$

Полагаем далее, что $\|\cdot\|_2$ есть def sup-норма [17, с. 261] пространства $\mathbb{B}(E_2)$ ($\|\cdot\|_2$ есть вариант sup-нормы $\|\cdot\|$ раздела 4, отвечающий случаю $E = E_2$). С учетом (6.10) имеем

$$\left|\int_{E_2} A^{(2)}_{i,l} \, d\nu\right| \leqslant \left\|A^{(2)}_{i,l}\right\|_2 \mathbf{a}_2 \ \ \forall \, (\nu_j)_{j \in \overline{1, r_2}} \in \Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2] \ \ \forall \, l \in \overline{1, r_2}.$$

Введем в рассмотрение оценочную константу

$$\alpha_2 \triangleq \mathbf{a}_2 \sum_{i=1}^{\mathbf{k}_2} \sum_{j=1}^{r_2} \left\|A^{(2)}_{i,j}\right\|_2 \in [0, \infty[.$$

Тогда подобно (6.5) получаем, в частности, что

$$\|\mathbb{Q}((\nu_j)_{j \in \overline{1, r_2}})\|^{(\mathbf{k}_2)} \leqslant \alpha_2 \ \forall \, (\nu_j)_{j \in \overline{1, r_2}} \in \Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2]. \tag{6.11}$$

С учетом (6.11) введем множество, играющее роль «промежуточного» пространства игрока II:

$$V \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbf{k}_2} \mid \|x\|^{(\mathbf{k}_2)} \leqslant \alpha_2 \right\}, \tag{6.12}$$

получая непустой компакт в $\left(\mathbb{R}^{\mathbf{k}_2}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}\right)$: топология $\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}|_V$ превращает V (6.12) в непустой компакт. Метрика

$$(x', x'') \mapsto \|x' - x''\|^{(\mathbf{k}_2)} : \mathbb{R}^{\mathbf{k}_2} \times \mathbb{R}^{\mathbf{k}_2} \to [0, \infty[$$

пространства $\mathbb{R}^{\mathbf{k}_2}$ (порожденная нормой $\| \cdot \|^{(\mathbf{k}_2)}$) реализует сужение

$$\rho_2 \triangleq \left(\|x' - x''\|^{(\mathbf{k}_2)} \right)_{(x', x'') \in V \times V}, \tag{6.13}$$

являющееся метрикой V, порождающей [19, (2.7.32)] топологию $\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}|_V$. Итак, (V, ρ_2) удовлетворяет условиям [3, §2] и, следуя [3], обозначим через $\tau_{\rho_2}^0[V]$ топологию множества V, порожденную метрикой ρ_2 :

$$\tau_{\rho_2}^0[V] \triangleq \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}|_V. \tag{6.14}$$

Таким образом, мы располагаем непустыми метризуемыми компактами

$$\left(U, \tau_{\rho_1}^0[U]\right), \quad \left(V, \tau_{\rho_2}^0[V]\right),$$

удовлетворяющими условиям [3, §2].

Напомним, что

$$(\mathbb{P} \circ \mathbf{I} = \widehat{\mathcal{A}}_1) \ \& \ (\mathbb{Q} \circ \mathbf{J} = \widehat{\mathcal{A}}_2). \tag{6.15}$$

Из (6.15) имеем по определению $\mathbf{I}$, что при $(f_i)_{i \in \overline{1, r_1}} \in (r_1\text{–adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]$ векторная к.-а. мера

$$\mathbf{I}\left((f_i)_{i \in \overline{1, r_1}}\right) = (f_i * \eta_1)_{i \in \overline{1, r_1}} \in \Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1]$$

реализует следующее равенство: $\widehat{\mathcal{A}}_1\left((f_i)_{i \in \overline{1, r_1}}\right) = \mathbb{P}\left(\mathbf{I}\left((f_i)_{i \in \overline{1, r_1}}\right)\right)$, а потому согласно (6.5) имеем оценку $\|\widehat{\mathcal{A}}_1\left((f_i)_{i \in \overline{1, r_1}}\right)\|^{(\mathbf{k}_1)} \leqslant \alpha_1$, из которой вытекает в силу (6.6) очевидное включение $\widehat{\mathcal{A}}_1\left((f_i)_{i \in \overline{1, r_1}}\right) \in U$. Поскольку выбор $(f_i)_{i \in \overline{1, r_1}}$ был произвольным, установлено, что

$$\widehat{\mathcal{A}}_1 : (r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1] \to U. \tag{6.16}$$

Используем $\widehat{\mathcal{A}}_1$ (6.16) в качестве отображения g [3, § 2].

Аналогичным образом можно использовать второе соотношение в (6.15). Итак, по определению $\mathbf{J}$ при $(f_i)_{i\in\overline{1,r_2}} \in (r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]$ имеем, что векторная к.-а. мера

$$\mathbf{J}\left((f_i)_{i\in\overline{1,r_2}}\right) = (f_i * \eta_2)_{i\in\overline{1,r_2}} \in \Sigma_{r_2}[E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathbb{F}_2]$$

реализует следующее равенство

$$\widehat{\mathcal{A}}_2\left((f_i)_{i\in\overline{1,r_2}}\right) = \mathbb{Q}\left(\mathbf{J}\left((f_i)_{i\in\overline{1,r_2}}\right)\right),$$

а тогда согласно (6.11) справедливо неравенство $\|\widehat{\mathcal{A}}_2\left((f_i)_{i\in\overline{1,r_2}}\right)\|^{(\mathbf{k}_2)} \leqslant \alpha_2$ и, как следствие, имеем (см. (6.12)) включение

$$\widehat{\mathcal{A}}_2\left((f_i)_{i\in\overline{1,r_2}}\right) \in V.$$

Поскольку выбор $(f_i)_{i\in\overline{1,r_2}}$ был произвольным, установлено, что

$$\widehat{\mathcal{A}}_2 : (r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2] \to V. \tag{6.17}$$

Будем использовать $\widehat{\mathcal{A}}_2$ в качестве отображения h [3, §2]. Итак, отображения g, h [3, §2] конкретизируются далее в следующем виде

$$(g, h) = (\widehat{\mathcal{A}}_1, \widehat{\mathcal{A}}_2).$$

Известно [8], что произведение топологий (6.9), (6.14) есть метризуемая топология: порождающая эту топологию метрика ρ_3 множества $U \times V$ может быть определена, в частности, условием

$$\rho_3((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \triangleq \sup\left(\{\rho_1(u_1, u_2); \rho_2(v_1, v_2)\}\right) = \\ = \sup\left(\left\{\|u_1 - u_2\|^{(\mathbf{k}_1)}; \|v_1 - v_2\|^{(\mathbf{k}_2)}\right\}\right),$$

где $u_1 \in U$, $v_1 \in V$, $u_2 \in U$, $v_2 \in V$. Итак, метрика $\rho_3 : (U \times V) \times (U \times V) \to [0, \infty[$ порождает стандартное произведение $\tau^0_{\rho_1}[U] \otimes \tau^0_{\rho_2}[V]$ топологий $\tau^0_{\rho_1}[U]$, $\tau^0_{\rho_2}[V]$.

Всюду в дальнейшем фиксируем (непрерывную) в/з функцию

$$\mathbf{f} : U \times V \to \mathbb{R}, \tag{6.18}$$

которая используется для построения критерия игровой задачи. Заметим, что в силу компактности топологий (6.9) и (6.14) имеем свойство:

$$\left(U \times V, \tau^0_{\rho_1}[U] \otimes \tau^0_{\rho_2}[V]\right)$$

есть непустой метризуемый компакт; иными словами, $(U \times V, \rho_3)$ есть метрический компакт, а функция $\mathbf{f}$ (6.18) равномерно непрерывна на этом компакте. С помощью $\mathbf{f}$ мы определяем функцию платы

$$\left((f_i^{(1)})_{i \in \overline{1,r_1}}, (f_j^{(2)})_{j \in \overline{1,r_2}}\right) \mapsto \mathbf{f}\left(\widehat{\mathcal{A}}_1((f_i^{(1)})_{i \in \overline{1,r_1}}), \widehat{\mathcal{A}}_2((f_j^{(2)})_{j \in \overline{1,r_2}})\right) :$$
$$(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1] \times (r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2] \to \mathbb{R}, \quad (6.19)$$

обозначаемую далее через $\mathfrak{F}$. Полагаем, что игрок I стремится минимизировать, а игрок II – максимизировать значение функции $\mathfrak{F}$, что на содержательном уровне отражается в виде

$$\downarrow_{(f_i^{(1)})_{i \in \overline{1,r_1}}} \mathfrak{F}\left((f_i^{(1)})_{i \in \overline{1,r_1}}, (f_j^{(2)})_{j \in \overline{1,r_2}}\right) \uparrow_{(f_j^{(2)})_{j \in \overline{1,r_2}}} .$$

При этом выбор игроками своих (программных) стратегий стеснен «асимптотическими» ограничениями в виде множеств из $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$ соответственно. Каждой паре (Z_1, Z_2), $Z_1 \in \mathcal{Z}_1$, $Z_2 \in \mathcal{Z}_2$, отвечает своя игровая задача (мы будем рассматривать всякий раз задачу на максимин $\mathfrak{F}$).

Заметим, что U и V – суть непустые компакты (и, в частности, замкнутые множества) в конечномерных арифметических пространствах. Поэтому при $H \in \mathcal{P}(U)$ $\mathrm{cl}(H, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}) \subset U$, а тогда [19, (2.3.13)]

$$\mathrm{cl}(H, \tau_{\rho_1}^0[U]) = \mathrm{cl}(H, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}|_U) = \mathrm{cl}(H, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}) \cap U = \mathrm{cl}(H, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}). \qquad (6.20)$$

Из (6.16) и (6.20) следует, в частности, что

$$\mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_1^1(Z), \tau_{\rho_1}^0[U]) = \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_1^1(Z), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}) \ \ \forall\, Z \in \mathcal{Z}_1. \qquad (6.21)$$

Поэтому (см. (3.3), (5.51), (5.54), (6.21)) имеем цепочку равенств

$$(\mathbf{as})[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]; U; \tau_{\rho_1}^0[U]; \widehat{\mathcal{A}}_1; \mathcal{Z}_1] = \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}_1} \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_1^1(Z), \tau_{\rho_1}^0[U]) =$$
$$= \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}_1} \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_1^1(Z), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}) = (\mathbf{as})[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]; \mathbb{R}^{\mathbf{k}_1}; \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}; \widehat{\mathcal{A}}_1; \mathcal{Z}_1] =$$
$$= \mathbb{P}^1(\mathfrak{M}). \quad (6.22)$$

Аналогичным образом, при $\mathbb{H} \in \mathcal{P}(V)$ имеем свойство $\mathrm{cl}(\mathbb{H}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}) \subset V$, а потому [19, (2.3.13)]

$$\mathrm{cl}(\mathbb{H}, \tau_{\rho_2}^0[V]) = \mathrm{cl}(\mathbb{H}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}|_V) = \mathrm{cl}(\mathbb{H}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}) \cap V = \mathrm{cl}(\mathbb{H}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}). \qquad (6.23)$$

Из (5.51), (6.17) и (6.23) вытекает, что

$$\mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_2^1(Z), \tau_{\rho_2}^0[V]) = \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_2^1(Z), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}) \ \ \forall\, Z \in \mathcal{Z}_2. \tag{6.24}$$

Как следствие (см. (3.3), (5.51), (5.55), (6.24)) получаем цепочку равенств

$$(\mathbf{as})[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]; V; \tau_{\rho_2}^0[V]; \widehat{\mathcal{A}}_2; \mathcal{Z}_2] = \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}_2} \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_2^1(Z), \tau_{\rho_2}^0[V]) =$$
$$= \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}_2} \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_2^1(Z), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}) = (\mathbf{as})[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]; \mathbb{R}^{\mathbf{k}_2}; \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}; \widehat{\mathcal{A}}_2; \mathcal{Z}_2] =$$
$$= \mathbb{Q}^1(\mathfrak{N}). \tag{6.25}$$

Итак, из (6.22) и (6.25) получаем следующие два равенства

$$\Big((\mathbf{as})[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]; U; \tau_{\rho_1}^0[U]; \widehat{\mathcal{A}}_1; \mathcal{Z}_1] = \mathbb{P}^1(\mathfrak{M})\Big) \ \&$$
$$\& \Big((\mathbf{as})[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]; V; \tau_{\rho_2}^0[V]; \widehat{\mathcal{A}}_2; \mathcal{Z}_2] = \mathbb{Q}^1(\mathfrak{N})\Big). \tag{6.26}$$

При этом [3, предложения 1, 2] имеем следующие эквиваленции

$$(\mathcal{Z}_1 \in \beta_0[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]]) \Leftrightarrow \big(\mathbb{P}^1(\mathfrak{M}) \neq \varnothing\big), \tag{6.27}$$

$$(\mathcal{Z}_2 \in \beta_0[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]]) \Leftrightarrow \big(\mathbb{Q}^1(\mathfrak{N}) \neq \varnothing\big); \tag{6.28}$$

мы учли (6.26). Как следствие, имеем по свойствам операции взятия образа эквиваленции

$$(\mathcal{Z}_1 \in \beta_0[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]]) \Leftrightarrow (\mathfrak{M} \neq \varnothing); \tag{6.29}$$

$$(\mathcal{Z}_2 \in \beta_0[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]]) \Leftrightarrow (\mathfrak{N} \neq \varnothing). \tag{6.30}$$

С учетом (6.29), (6.30) полагаем в дальнейшем, что

$$(\mathfrak{M} \neq \varnothing) \ \& \ (\mathfrak{N} \neq \varnothing). \tag{6.31}$$

Как следствие из (6.29), (6.31) получаем, что $\mathcal{Z}_1 \in \beta_0[(r_1 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1]]$ и, в частности,

$$Z \neq \varnothing \ \ \forall\, Z \in \mathcal{Z}_1. \tag{6.32}$$

Аналогичным образом (см. (6.30), (6.31)) имеем, что $\mathcal{Z}_2 \in \beta_0[(r_2 - \mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2]]$ и, в частности,

$$Z \neq \varnothing \ \ \forall\, Z \in \mathcal{Z}_2. \tag{6.33}$$

Из (6.32) вытекает, что $\widehat{\mathcal{A}}_1^1(Z) \neq \varnothing \ \forall\, Z \in \mathcal{Z}_1$. Поскольку $(U, \tau_{\rho_1}^0[U])$ есть непустой компакт, то $\mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_1^1(Z), \tau_{\rho_1}^0[U])$ есть при $Z \in \mathcal{Z}_1$ непустое компактное в смысле $\tau_{\rho_1}^0[U]$ п/м U. Далее из (6.33) вытекает, что $\widehat{\mathcal{A}}_2^1(Z) \neq \varnothing \ \forall\, Z \in \mathcal{Z}_2$.

Поскольку $(V, \tau_{\rho_2}^0[V])$ есть непустой компакт, то $\mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_2^1(Z), \tau_{\rho_2}^0[V])$ есть при $Z \in \mathcal{Z}_2$ непустое компактное в $\tau_{\rho_2}^0[V]$ п/м V.

Из свойства непрерывности $\mathbf{f}$ вытекает, что при $y \in V$ отображение

$$x \mapsto \mathbf{f}(x, y) : U \to \mathbb{R},$$

обозначаемое ниже через $\mathbf{f}(\cdot, y)$ непрерывно (в смысле топологии $\tau_{\rho_1}^0[U]$), а тогда в силу (6.32) корректно определяется значение $\min\limits_{x \in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_1^1(Z), \tau_{\rho_1}^0[U])} \mathbf{f}(x, y) \in \mathbb{R} \ \ \forall\, Z \in \mathcal{Z}_1$. Более того (см. [3, (2.16)]), имеем, что

$$\mathbf{F}_Z \triangleq \left(\min_{x \in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_1^1(Z), \tau_{\rho_1}^0[U])} \mathbf{f}(x, y) \right)_{y \in V} \in \mathbb{C}(V, \tau_{\rho_2}^0[V]) \ \ \forall\, Z \in \mathcal{Z}_1 \tag{6.34}$$

(доказательство см. в [3, с. 108]). Поэтому (см. (6.33)) корректно определяется

$$\max_{y \in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_2^1(Z''), \tau_{\rho_2}^0[V])} \ \min_{x \in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_1^1(Z'), \tau_{\rho_1}^0[U])} \mathbf{f}(x, y) =$$
$$= \max_{y \in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_2^1(Z''), \tau_{\rho_2}^0[V])} \mathbf{F}_{Z'}(y) \in \mathbb{R} \ \ \forall\, Z' \in \mathcal{Z}_1 \ \forall\, Z'' \in \mathcal{Z}_2. \tag{6.35}$$

Мы получили зависимость

$$(Z', Z'') \mapsto \max_{y \in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_2^1(Z''), \tau_{\rho_2}^0[V])} \ \min_{x \in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_1^1(Z'), \tau_{\rho_1}^0[U])} \mathbf{f}(x, y) : \mathcal{Z}_1 \times \mathcal{Z}_2 \to \mathbb{R}. \tag{6.36}$$

Отметим очевидное аппроксимативное свойство: если $Z \in \mathcal{Z}_1$, то $\widehat{\mathcal{A}}_1^1(Z) \in \mathcal{P}'(U)$, откуда следует, что при $y \in V$ множество $\{\mathbf{f}(x, y) : x \in \widehat{\mathcal{A}}_1^1(Z)\}$ непусто и ограничено в $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, а потому определена его (конечная) точная нижняя грань и при этом (см. [3, (2.22)])

$$\inf_{(f_i)_{i \in \overline{1, r_1}} \in Z} \mathbf{f}(\widehat{\mathcal{A}}_1^1((f_i)_{i \in \overline{1, r_1}}), y) = \inf_{x \in \widehat{\mathcal{A}}_1^1(Z)} \mathbf{f}(x, y) = \min_{x \in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}_1^1(Z), \tau_{\rho_1}^0[U])} \mathbf{f}(x, y) = \mathbf{F}_Z(y). \tag{6.37}$$

Как следствие мы получаем (поскольку выбор Z и y был произвольным), что

$$\mathbf{F}_Z = \left(\inf_{(f_i)_{i \in \overline{1, r_1}} \in Z} \mathbf{f}(\widehat{\mathcal{A}}_1^1((f_i)_{i \in \overline{1, r_1}}), y) \right)_{y \in V} \in \mathbb{C}(V, \tau_{\rho_2}^0[V]) \ \ \forall\, Z \in \mathcal{Z}_1. \tag{6.38}$$

С учетом (6.35), (6.37) и (6.38) мы получаем в силу компактности пространства $(V, \tau^0_{\rho_2}[V])$, что при $Z' \in \mathcal{Z}_1$ множество $\{\mathbf{F}_{Z'}(y) \; : \; y \in V\} = \left\{ \inf\limits_{(f_i)_{i\in\overline{1,r_1}}\in Z'} \mathbf{f}(\widehat{\mathcal{A}}^1_1((f_i)_{i\in\overline{1,r_1}}), y) : y \in V \right\}$ непусто и ограничено, а потому корректно определяется (см. (6.33))

$$\sup_{y\in\widehat{\mathcal{A}}^1_2(Z'')} \mathbf{F}_{Z'}(y) = \sup\Big(\{\mathbf{F}_{Z'}(y) : y \in \widehat{\mathcal{A}}^1_2(Z'')\}\Big) =$$
$$= \sup\Big(\{\mathbf{F}_{Z'}(\widehat{\mathcal{A}}^1_2((f_j)_{j\in\overline{1,r_2}})) : (f_j)_{j\in\overline{1,r_2}} \in Z''\}\Big) =$$
$$= \sup_{(f^{(2)}_j)_{j\in\overline{1,r_2}}\in Z''} \; \inf_{(f^{(1)}_i)_{i\in\overline{1,r_1}}\in Z'} \mathbf{f}(\widehat{\mathcal{A}}_1((f^{(1)}_i)_{i\in\overline{1,r_1}}), \widehat{\mathcal{A}}_2((f^{(2)}_j)_{j\in\overline{1,r_2}})) \in \mathbb{R} \;\; \forall\, Z'' \in \mathcal{Z}_2. \tag{6.39}$$

С учетом (6.39) введем при $Z_1 \in \mathcal{Z}_1$ и $Z_2 \in \mathcal{Z}_2$ обозначение

$$\mathfrak{V}(Z_1, Z_2) =$$
$$= \sup_{(f^{(2)}_j)_{j\in\overline{1,r_2}}\in Z_2} \; \inf_{(f^{(1)}_i)_{i\in\overline{1,r_1}}\in Z_1} \mathbf{f}(\widehat{\mathcal{A}}_1((f^{(1)}_i)_{i\in\overline{1,r_1}}), \widehat{\mathcal{A}}_2((f^{(2)}_j)_{j\in\overline{1,r_2}})) \;\forall\, Z_1 \in \mathcal{Z}_1 \;\forall\, Z_2 \in \mathcal{Z}_2. \tag{6.40}$$

Из (6.39) и (6.40) получаем, в частности, что

$$\mathfrak{V}(Z_1, Z_2) = \sup_{y\in\widehat{\mathcal{A}}^1_2(Z_2)} \mathbf{F}_{Z_1}(y) \;\; \forall\, Z_1 \in \mathcal{Z}_1 \;\forall\, Z_2 \in \mathcal{Z}_2. \tag{6.41}$$

При этом согласно [3, (2.34)] справедливы равенства

$$\mathfrak{V}(Z_1, Z_2) = \max_{y\in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}^1_2(Z_2), \tau^0_{\rho_2}[V])} \mathbf{F}_{Z_1}(y) \;\; \forall\, Z_1 \in \mathcal{Z}_1 \;\forall\, Z_2 \in \mathcal{Z}_2. \tag{6.42}$$

Напомним, что согласно (6.37) и (6.38) $\mathbf{F}_Z(y) = \min\limits_{x\in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}^1_1(Z), \tau^0_{\rho_1}[U])} \mathbf{f}(x, y) \;\; \forall\, Z \in \mathcal{Z}_1 \;\forall\, y \in V$. Поэтому (см. (6.42)) имеем систему равенств

$$\mathfrak{V}(Z_1, Z_2) = \max_{y\in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}^1_2(Z_2), \tau^0_{\rho_2}[V])} \; \min_{x\in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}^1_1(Z_1), \tau^0_{\rho_1}[U])} \mathbf{f}(x, y) \;\; \forall\, Z_1 \in \mathcal{Z}_1 \forall\, Z_2 \in \mathcal{Z}_2. \tag{6.43}$$

Итак, мы получили зависимость (см. (6.43))

$$(Z_1, Z_2) \mapsto \mathfrak{V}(Z_1, Z_2) : \mathcal{Z}_1 \times \mathcal{Z}_2 \to \mathbb{R}. \tag{6.44}$$

В следующем разделе будет установлено существование и конкретное представление такого числа $æ \in \mathbb{R}$, что $\forall\, \varepsilon \in]0,\infty[\ \exists\, Z_1^{(\varepsilon)} \in \mathcal{Z}_1\ \exists\, Z_2^{(\varepsilon)} \in \mathcal{Z}_2\ \forall\, Z_1 \in \mathcal{Z}_1\ \forall\, Z_2 \in \mathcal{Z}_2$

$$\Big((Z_1 \subset Z_1^{(\varepsilon)})\Big)\ \&\ \Big((Z_2 \subset Z_2^{(\varepsilon)})) \Rightarrow (|\mathfrak{V}(Z_1, Z_2) - æ| < \varepsilon\Big). \tag{6.45}$$

Разумеется, æ в (6.45) имеет смысл обобщенного предела зависимости (6.44) по специальному направленному множеству, а, точнее, по направленному произведению, подобному используемому в [21].

7 Обобщенная игровая задача.

В настоящем разделе мы рассматриваем вопрос о существовании и конкретном представлении значения æ, обладающего свойством (6.45). Более того, данное представление будет универсальным по отношению к семействам $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ (5.51), обладающим свойствами (6.32), (6.33) соответственно. Учитываем при этом (5.45), (5.49) и конструкции [3, § 3].

Напомним, что согласно (5.21), (6.5) и (6.6) $\mathbb{P}^1(\mathfrak{M}) \subset U$ и, более того, (см. (6.31)),

$$\mathbb{P}^1(\mathfrak{M}) \in \mathcal{P}'(U). \tag{7.1}$$

Заметим, что согласно (5.19) $\mathcal{S}_1$ есть непрерывное, в смысле топологий $\tau_\Sigma^*[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1 \mid r_1]$ и $\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n}_1)}$, отображение из $\Sigma_{r_1}[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1]$ в $\mathbb{R}^{\mathbf{n}_1}$. С учетом этого и замкнутости $\mathbb{Y}_1$ получаем, что $\mathfrak{M}$ замкнуто в $\tau_\Sigma^*[E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathbb{F}_1 \mid r_1]$, как всякий непрерывный прообраз замкнутого множества. Заметим, что замкнутость $\mathfrak{M}$ (в компакте (5.13)) вытекает также из (5.33), поскольку каждое МП в этом компакте замкнуто. С учетом компактности ТП (5.13) получаем, что $\mathfrak{M}$ компактно в этом ТП. С учетом (5.42) имеем, что $\mathbb{P}^1(\mathfrak{M})$ есть множество, компактное в $(\mathbb{R}^{\mathbf{k}_1}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)})$, как непрерывный образ компактного множества [8]. В частности, $\mathbb{P}^1(\mathfrak{M})$ есть множество замкнутое в $(\mathbb{R}^{\mathbf{k}_1}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)})$, содержащееся (см. (7.1)) в множестве U. Тогда [19, (2.3.4)] $\mathbb{P}^1(\mathfrak{M})$ замкнуто в $(U, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)}|_U)$ или, что то же самое, в ТП

$$(U, \tau_{\rho_1}^0[U]). \tag{7.2}$$

Последнее, как уже отмечалось, есть метризуемый компакт. Поэтому $\mathbb{P}^1(\mathfrak{M})$ есть непустое (см. (7.1)) компактное (в смысле (7.2)) п/м U. Поэтому с учетом непрерывности $\mathbf{f}(\cdot, y)$ при $y \in V$ корректно определяется

$$\min_{x \in \mathbb{P}^1(\mathfrak{M})} \mathbf{f}(x, y) \in \mathbb{R}.$$

В этом случае при $y \in V$ функционал $\mu \mapsto \mathbf{f}(\mathbb{P}(\mu), y) : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ также достигает (по определению $\mathbb{P}^1(\mathfrak{M})$) минимума и при этом

$$\min_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{f}(\mathbb{P}(\mu), y) = \min_{x \in \mathbb{P}^1(\mathfrak{M})} \mathbf{f}(x, y). \tag{7.3}$$

С учетом (7.3) определяем функцию $\mathbf{F} : V \to \mathbb{R}$ по правилу

$$\mathbf{F}(y) \triangleq \min_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{f}(\mathbb{P}(\mu), y) \ \ \forall\, y \in V. \tag{7.4}$$

Разумеется, из (7.3), (7.4) вытекает, что справедливо

$$\mathbf{F}(y) \triangleq \min_{x \in \mathbb{P}^1(\mathfrak{M})} \mathbf{f}(x, y) \ \ \forall\, y \in V. \tag{7.5}$$

Подобно [3, с. 111] имеем свойство непрерывности $\mathbf{F}$: $\mathbf{F} \in \mathbb{C}(V, \tau^0_{\rho_2}[V]$. С учетом (6.14) имеем свойство $\mathbf{F} \in \mathbb{C}(V, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}|_V)$.

Напомним, что согласно (5.22) $\mathfrak{N}$ есть прообраз $\mathbb{Y}_2$ при действии $\mathcal{S}_2$, где $\mathbb{Y}_2$ есть замкнутое п/м $\mathbb{R}^{\mathbf{n}_2}$. Оператор $\mathcal{S}_2$ непрерывен как отображение из компакта (5.14) в $(\mathbb{R}^{\mathbf{n}_2}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n}_2)})$, а тогда прообраз замкнутого п/м $\mathbb{R}^{(\mathbf{n}_2)}$ замкнут в компакте (5.14). Заметим, что замкнутость $\mathfrak{N}$ в компакте (5.14) следует также из (5.34): каждое МП в этом компакте замкнуто. Таким образом, $\mathfrak{N}$ замкнуто в компакте (5.14) и, следовательно, компактно в смысле (5.14). С учетом (6.31) получаем в виде $\mathfrak{N}$ непустое компактное множество в пространстве (5.14). Тогда $\mathbb{Q}^1(\mathfrak{N})$ компактно в $(\mathbb{R}^{\mathbf{k}_2}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)})$, как непрерывный образ компактного множества. В частности, $\mathbb{Q}^1(\mathfrak{N})$ замкнуто в $(\mathbb{R}^{\mathbf{k}_2}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)})$. Согласно (6.11), (6.12) $\mathbb{Q}^1(\mathfrak{N}) \subset V$. Следовательно, $\mathbb{Q}^1(\mathfrak{N})$ есть непустое замкнутое в $(\mathbb{R}^{\mathbf{k}_2}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)})$ п/м V, а тогда $\mathbb{Q}^1(\mathfrak{N})$ замкнуто в $\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)}|_V$, т.е. $\mathbb{Q}^1(\mathfrak{N})$ замкнуто (см. (6.14)) в $(V, \tau^0_{\rho_2}[V])$ и, стало быть, компактно в этом ТП. В силу непрерывности $\mathbf{F}$ имеем свойство: функция $\mathbf{F}$ достигает своего максимума на $\mathbb{Q}^1(\mathfrak{N})$:

$$\max_{y \in \mathbb{Q}^1(\mathfrak{N})} \mathbf{F}(y) = \max_{y \in \mathbb{Q}^1(\mathfrak{N})} \min_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{f}(\mathbb{P}(\mu), y).$$

Это означает, что зависимость $\nu \mapsto \mathbb{F}(\mathbb{Q}(\nu)) : \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$ достигает своего максимума и при этом

$$\mathbf{V} \triangleq \max_{\nu \in \mathfrak{N}} \mathbf{F}(\mathbb{Q}(\nu)) = \max_{\nu \in \mathfrak{N}} \min_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{f}(\mathbb{P}(\mu), \mathbb{Q}(\nu)) \in \mathbb{R}. \tag{7.6}$$

Из (5.54) и (7.3) получаем, что при $y \in V$

$$\min_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{f}(\mathbb{P}(\mu), y) = \min_{x \in (\mathbf{as})[(r_1-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_1|E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1];\mathbb{R}^{\mathbf{k}_1};\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)};\widehat{\mathcal{A}}_1;\mathcal{Z}_1]} \mathbf{f}(x, y). \tag{7.7}$$

В связи с (7.7) следует учитывать [3, (2.6), (3.2), (3.3)], а также (7.4). Из (7.4) и (7.7) вытекает, что при $y \in V$

$$\mathbf{F}(y) = \min_{x \in (\mathbf{as})[(r_1-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_1|E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1];\mathbb{R}^{\mathbf{k}_1};\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)};\widehat{\mathcal{A}}_1;\mathcal{Z}_1]} \mathbf{f}(x,y). \tag{7.8}$$

С учетом (5.55) и (7.8) получаем, что

$$\max_{y \in \mathbb{Q}^1(\mathfrak{N})} \mathbf{F}(y) =$$

$$= \max_{y \in (\mathbf{as})[(r_2-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_2|E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2];\mathbb{R}^{\mathbf{k}_2};\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)};\widehat{\mathcal{A}}_2;\mathcal{Z}_2]} \ \min_{x \in (\mathbf{as})[(r_1-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_1|E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1];\mathbb{R}^{\mathbf{k}_1};\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)};\widehat{\mathcal{A}}_1;\mathcal{Z}_1]} \mathbf{f}(x,y). \tag{7.9}$$

С учетом (7.6) и (7.9) мы получаем следующее равенство

$$\mathbf{V} = \max_{y \in (\mathbf{as})[(r_2-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_2|E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2];\mathbb{R}^{\mathbf{k}_2};\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_2)};\widehat{\mathcal{A}}_2;\mathcal{Z}_2]} \ \min_{x \in (\mathbf{as})[(r_1-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_1|E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1];\mathbb{R}^{\mathbf{k}_1};\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k}_1)};\widehat{\mathcal{A}}_1;\mathcal{Z}_1]} \mathbf{f}(x,y). \tag{7.10}$$

Заметим, что значения (6.40) играют роль величин $\mathfrak{V}(S,T)$ работы [3, (2.34)]. Поэтому с учетом (7.10) и [3, теорема 1] получаем, что

$$\forall \varepsilon \in]0,\infty[\ \exists Z_1^{(\varepsilon)} \in \mathcal{Z}_1\ \exists Z_2^{(\varepsilon)} \in \mathcal{Z}_2 : |\mathfrak{V}(Z_1,Z_2) - \mathbf{V}| < \varepsilon$$
$$\forall Z_1 \in \mathcal{Z}_1 \cap \mathcal{P}(Z_1^{(\varepsilon)}) \forall Z_2 \in \mathcal{Z}_2 \cap \mathcal{P}(Z_2^{(\varepsilon)}). \tag{7.11}$$

Тем самым установлено (6.45) для случая æ $= \mathbf{V}$. Значение $\mathbf{V}$ было определено как максимин в обобщенной задаче (см. (5.21), (5.22), (7.6)) и от конкретного выбора $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$ не зависит. Для справедливости (7.11) существенными являются условия (5.52), (5.53). Стало быть (см. (7.11)), установлена импликация

$$((\mathfrak{A}_1 \dashv \mathcal{Z}_1)\ \&\ (\mathcal{Z}_1 \dashv \mathfrak{B}_1)\ \&\ (\mathfrak{A}_2 \dashv \mathcal{Z}_2)\ \&\ (\mathcal{Z}_2 \dashv \mathfrak{B}_2)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall \varepsilon \in]0,\infty[\ \exists Z_1^{(\varepsilon)} \in \mathcal{Z}_1\ \exists Z_2^{(\varepsilon)} \in \mathcal{Z}_2 : |\mathfrak{V}(Z_1,Z_2) - \mathbf{V}| < \varepsilon$$
$$\forall Z_1 \in \mathcal{Z}_1 \cap \mathcal{P}(Z_1^{(\varepsilon)})\ \forall Z_2 \in \mathcal{Z}_2 \cap \mathcal{P}(Z_2^{(\varepsilon)})). \tag{7.12}$$

Коль скоро выбор семейств (5.51) был произвольным, установлено, что справедлива следующая

Теорема 1 *Если* $\widetilde{\mathcal{Z}}_1 \in \beta[(r_1-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_1 \mid E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1]]$ *и* $\widetilde{\mathcal{Z}}_2 \in \beta[(r_2-\mathrm{adm})[\mathbb{F}_2 \mid E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2]]$, *то истинна импликация* $((\mathfrak{A}_1 \dashv \widetilde{\mathcal{Z}}_1)\ \&\ (\widetilde{\mathcal{Z}}_1 \dashv \mathfrak{B}_1)\ \&\ (\mathfrak{A}_2 \dashv \widetilde{\mathcal{Z}}_2)\ \&\ (\widetilde{\mathcal{Z}}_2 \dashv \mathfrak{B}_2)) \Rightarrow (\forall \varepsilon \in]0,\infty[\ \exists Z_1^{(\varepsilon)} \in \widetilde{\mathcal{Z}}_1\ \exists Z_2^{(\varepsilon)} \in \widetilde{\mathcal{Z}}_2 :\ |\mathfrak{V}(Z_1,Z_2) - \mathbf{V}| < \varepsilon\ \forall Z_1 \in \widetilde{\mathcal{Z}}_1 \cap \mathcal{P}(Z_1^{(\varepsilon)})\ \forall Z_2 \in \widetilde{\mathcal{Z}}_2 \cap \mathcal{P}(Z_2^{(\varepsilon)}))$.

Напомним, что ранее были установлены свойства

$$(\mathfrak{A}_1 \dashv \mathfrak{B}_1)\ \&\ (\mathfrak{A}_2 \dashv \mathfrak{B}_2). \tag{7.13}$$

Кроме того, отметим, что семейства $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ направлены (см. (5.23), (5.24), (5.31), (5.32). Поэтому из теоремы 7.1 и (7.13) извлекаются следствия.

Следствие 1 *Значение* $\mathbf{V}$ *определяет асимптотику зависимости* $(Z_1, Z_2) \mapsto \mathfrak{V}(Z_1, Z_2) : \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \to \mathbb{R}$, *а именно:* $\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists Z_1^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{A}_1\ \exists\, Z_2^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{A}_2$:

$$|\mathfrak{V}(Z_1, Z_2) - \mathbf{V}| < \varepsilon\ \forall\, Z_1 \in \mathfrak{A}_1 \cap \mathcal{P}(Z_1^{(\varepsilon)})\ \forall\, Z_2 \in \mathfrak{A}_2 \cap \mathcal{P}(Z_2^{(\varepsilon)})).$$

Следствие 2 *Значение* $\mathbf{V}$ *определяет асимптотику зависимости* $(Z_1, Z_2) \mapsto \mathfrak{V}(Z_1, Z_2) : \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{B}_2 \to \mathbb{R}$, *поскольку* $\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists Z_1^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{A}_1\ \exists\, Z_2^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{B}_2$:

$$|\mathfrak{V}(Z_1, Z_2) - \mathbf{V}| < \varepsilon\ \forall\, Z_1 \in \mathfrak{A}_1 \cap \mathcal{P}(Z_1^{(\varepsilon)})\ \forall\, Z_2 \in \mathfrak{B}_2 \cap \mathcal{P}(Z_2^{(\varepsilon)})).$$

Следствие 3 *Значение* $\mathbf{V}$ *определяет асимптотику зависимости* $(Z_1, Z_2) \mapsto \mathfrak{V}(Z_1, Z_2) : \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{A}_2 \to \mathbb{R}$, *а именно:* $\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists Z_1^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{B}_1\ \exists\, Z_2^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{A}_2$:

$$|\mathfrak{V}(Z_1, Z_2) - \mathbf{V}| < \varepsilon\ \forall\, Z_1 \in \mathfrak{B}_1 \cap \mathcal{P}(Z_1^{(\varepsilon)})\ \forall\, Z_2 \in \mathfrak{A}_2 \cap \mathcal{P}(Z_2^{(\varepsilon)})).$$

Следствие 4 *Значение* $\mathbf{V}$ *определяет асимптотику зависимости* $(Z_1, Z_2) \mapsto \mathfrak{V}(Z_1, Z_2) : \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \to \mathbb{R}$, *а именно:* $\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists Z_1^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{B}_1\ \exists\, Z_2^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{B}_2$:

$$|\mathfrak{V}(Z_1, Z_2) - \mathbf{V}| < \varepsilon\ \forall\, Z_1 \in \mathfrak{B}_1 \cap \mathcal{P}(Z_1^{(\varepsilon)})\ \forall\, Z_2 \in \mathfrak{B}_2 \cap \mathcal{P}(Z_2^{(\varepsilon)})).$$

В свою очередь, из (5.7), (5.8), (5.23), (5.24) и следствия 1 получаем, что

$$\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists\, \delta \in]0, \infty[:\ |\mathfrak{V}(((\mathbf{n}_1, r_1) - \mathrm{ADM})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathcal{O}_\zeta^{(\mathbf{n}_1)}[\mathbb{Y}_1]; S^{(1)}],$$
$$((\mathbf{n}_2, r_2) - \mathrm{ADM})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \mathcal{O}_\zeta^{(\mathbf{n}_2)}[\mathbb{Y}_2]; S^{(2)}]) - \mathbf{V}| < \varepsilon\ \forall\, \zeta \in]0, \delta[. \tag{7.14}$$

Аналогичным образом, из (5.7), (5.8), (5.23), (5.32) и следствия 2 вытекает, что

$$\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists\, \delta \in]0, \infty[:\ |\mathfrak{V}(((\mathbf{n}_1, r_1) - \mathrm{ADM})[\mathbb{F}_1 \mid E_1; \mathcal{L}_1; \eta_1; \mathcal{O}_\zeta^{(\mathbf{n}_1)}[\mathbb{Y}_1]; S^{(1)}],$$
$$((\mathbf{n}_2, r_2) - \mathrm{ADM})[\mathbb{F}_2 \mid E_2; \mathcal{L}_2; \eta_2; \widehat{\mathcal{O}}_\zeta^{(\mathbf{n}_2)}[\mathbb{Y}_2 \mid M_2]; S^{(2)}]) - \mathbf{V}| < \varepsilon\ \forall\, \zeta \in]0, \delta[. \tag{7.15}$$

Кроме того, из (5.7), (5.8), (5.24), (5.31) и следствия 3 получаем, что

$$\forall\,\varepsilon\in]0,\infty[\;\exists\,\delta\in]0,\infty[:\;|\mathfrak{V}(((\mathbf{n}_1,r_1)\mathrm{-ADM})[\mathbb{F}_1\mid E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1;\widehat{\mathcal{O}}_\zeta^{(\mathbf{n}_1)}[\mathbb{Y}_1\mid M_1];S^{(1)}],$$
$$((\mathbf{n}_2,r_2)-\mathrm{ADM})[\mathbb{F}_2\mid E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2;\mathcal{O}_\zeta^{(\mathbf{n}_2)}[\mathbb{Y}_2];S^{(2)}])-\mathbf{V}|<\varepsilon\;\forall\,\zeta\in]0,\delta[.\quad(7.16)$$

Наконец, из (5.7), (5.8), (5.31), (5.32) и следствия 4 вытекает, что

$$\forall\,\varepsilon\in]0,\infty[\;\exists\,\delta\in]0,\infty[:\;|\mathfrak{V}(((\mathbf{n}_1,r_1)\mathrm{-ADM})[\mathbb{F}_1\mid E_1;\mathcal{L}_1;\eta_1;\widehat{\mathcal{O}}_\zeta^{(\mathbf{n}_1)}[\mathbb{Y}_1\mid M_1];S^{(1)}],$$
$$((\mathbf{n}_2,r_2)-\mathrm{ADM})[\mathbb{F}_2\mid E_2;\mathcal{L}_2;\eta_2;\widehat{\mathcal{O}}_\zeta^{(\mathbf{n}_2)}[\mathbb{Y}_2\mid M_2];S^{(2)}])-\mathbf{V}|<\varepsilon\;\forall\,\zeta\in]0,\delta[.\quad(7.17)$$

Список литературы

[1] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. — 456 с.

[2] *Ченцов А. Г., Шапарь Ю. В.* Конечно-аддитивные меры и расширения игровых задач с ограничениями асимптотического характера. / Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. №1. — с. 89-111, 2010.

[3] *Ченцов А. Г.* О представлении максимина в игровой задаче с ограничениями асимптотического характера. / Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. №3. — с. 104-119, 2010.

[4] *Ченцов А. Г.* К вопросу об эквивалентности по результату ограничений асимптотического характера. /Труды Института математики и механики УрО РАН. - Екатеринбург. №3. — с. 241-261, 2009.

[5] *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. - М.: Мир, 1970. — 416 с.

[6] *Келли Дж. Л.* Общая топология. - М: Наука, 1981. — 431 с.

[7] *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. - М.: Наука, 1968. — 272 с.

[8] *Энгелькинг Р.* Общая топология. - М.: Мир, 1986. — 751 с.

[9] *Ченцов А. Г.* Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения. / Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. №1. — с. 113-142, 2011.

[10] *Chentsov A. G.* Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. — New York, London and Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. 244 p.

[11] *Ченцов А. Г.* Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия. /Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, Том 13, №2. — с. 184-217, 2007.

[12] *Chentsov A. G.* Asymptotic attainability. — Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1997.- 322 p.

[13] *Ченцов А. Г.* Асимптотически достижимые элементы и их обобщенное представление. // Труды Института математики и механики УрО РАН. - Екатеринбург, 1995.— Т.3 — №2. — с. 211-244.

[14] *Ченцов А. Г.* Векторные конечно-аддитивные меры и вопросы регуляризации задачи о построении множеств асимптотической достижимости. // Труды Института математики и механики УрО РАН. - Екатеринбург, 1996.— Т.4 — №2. — с. 266-295.

[15] *Ченцов А. Г.* Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. - Екатеринбург: РИО УГТУ-УПИ, 2008. — 388 с.

[16] *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей. - М.: Мир, 1969. — 309 с.

[17] *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. - М.: Издательство иностранной литературы, 1962. — 895 с.

[18] *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. — 624 с.

[19] *Chentsov A. G., Morina S. I.* Extensions and Relaxation. — Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 408p.

[20] *Ченцов А. Г.* Обобщенные множества притяжения и приближенные решения, их формирующие. // Труды Института математики и механики УрО РАН. - Екатеринбург, 2004.— Т.10 — №2. — с. 266-295.

[21] *Ченцов А. Г.* Расширения в классе конечно-аддитивных мер и условия асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений. / Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. №1. — с. 131-152, 2009.