

УДК 517.958+517.962.2

Быстрый алгоритм построения нестационарной векторной линейной авторегрессии

Драница Ю.П.*, Драница А.Ю.**, Алексеевская О.В.**

*МГТУ г. Мурманск, **ЗАО "Ланит" г. Москва

Разработан быстрый алгоритм построения линейной авторегрессии для векторных временных рядов нестационарных относительно статистик второго порядка. Метод основан на рекурсивной процедуре Теплица и не требует знания корреляционной матрицы данных. Выполнен сравнительный анализ методики с классическим решением этой задачи.

Метод может быть использован для оценки динамических характеристик векторных временных рядов в нестационарном случае.

Ключевые слова: Уравнение авторегрессии, векторные временные ряды, быстрые алгоритмы, функция корреляции, метод максимальной энтропии, функция частичной корреляции.

Введение

Линейные модели обычно подразделяются на модели с постоянными коэффициентами и с коэффициентами, зависящими от времени. Первая группа предназначена для описания стационарных процессов, а вторая – нестационарных. Анализ литературных данных показывает, что наиболее полная и

законченная теория в настоящее время существует только для стационарного приближения [2, 5].

Попытка учета нестационарности сопровождается резким усложнением теории метода и, соответственно, вычислительных алгоритмов. Причина этого явления заключается, вероятно, в том, что учет нестационарности, по сути дела, эквивалентен переходу к нелинейному моделированию, так как при этом в той или иной степени затруднено использование основных постулатов линейного подхода (например, нельзя применять принцип эргодичности, или суперпозиции решений). Исключения составляют случаи, когда параметры нестационарности могут быть определены из физики процесса и аппроксимированы достаточно простыми аналитическими выражениями. Однако в практических приложениях такие случаи встречаются исключительно редко.

Следует также отметить, что понятия стационарность или нестационарность – это достаточно абстрактные философские категории, сущность которых может проявляться только в статистическом смысле и для бесконечных выборок данных. Следовательно, для конечного набора данных не существует каких-либо объективных критериев, позволяющих установить стационарность либо нестационарность анализируемого процесса и имеет смысл говорить только лишь как о их некотором противопоставлении. Необходимо более конкретное наполнение этих понятий.

На практике это означает, что по ограниченным по длине выборкам данных, локальную изменчивость следует определять исходя из доступного идентификации диапазона частот процесса, а более низкие частоты, которые не доступны эмпирической оценке, следует считать трендом. Тогда процесс можно считать стационарным, если энергия этих низкочастотных составляющих намного меньше энергии идентифицируемых частот.

Рассмотрим теперь к чему может приводить неучет тренда. Эта задача тесно связана с проблемой влияния скрытых систематических ошибок моделирования на параметры идентифицируемой модели. Пусть совокупность данных описывается некоторой моделью. Будем считать, что часть этой модели нам неизвестна и представляет собой скрытую систематическую ошибку моделирования. В работе (Макузе, 1989) показано, что скрытые ошибки приводят к систематическому смещению оценок параметров модели относительно истинных значений.

Практические следствия этой проблемы могут быть весьма существенными, способными создать совершенно неадекватные представления о свойствах и параметрах изучаемого явления. Таким образом, задача объективного вы-

явления нестационарности и её учета является актуальной как с точки зрения разработки моделей с переменными коэффициентами, так и с постоянными для выработки критерия адекватности модели натурным данным.

Несмотря на всю важность влияния нестационарности на оценки параметров модели динамического процесса, вопросам её идентификации и учета в литературе уделяется незаслуженно мало внимания. Зачастую данная проблема или вообще игнорируется, или рассматривается вскользь. При теоретических исследованиях задач линейного моделирования чаще всего исходят из предположения о стационарности процессов, или возможности приведения их к этому виду какими либо другими, независимыми от разрабатываемой теории способами. При практической реализации алгоритмов линейного моделирования, при явном тренде данных, обычно рассматривается тренд процесса в основном по математическому ожиданию.

Учет же тренда по дисперсии и ковариации, в силу объективных причин, обычно не выполняется. Отсутствуют также какие-либо оценки погрешностей, обусловленных принятыми приближениями. Вполне очевидно, что для сближения формального математического аппарата с физикой изучаемого явления, учет тренда необходим. Последнее может быть достигнуто разработкой более полных и точных математических моделей.

Между тем эта проблема актуальна еще и потому, что оценка тренда представляет большой самостоятельный интерес, по крайней мере в двух аспектах. Во-первых, тренд позволяет в той или иной мере судить о низкочастотной части спектра процесса, выявление которого в силу малости выборки объективно невозможно. Во-вторых, эти оценки совершенно необходимы при экстраполяции на период времени, где влияние нестационарности существенно и ее учет объективно необходим.

1. Анализ возможностей оценки трендовой составляющей

Рассмотрим теперь способы оценки тренда параметров системы классическими методами [5, 11]. Из приведенных выше рассуждений следует, что оценка нестационарности может быть сведена к оценке тренда матрицы ковариаций вектора состояния. В общем случае необходимо рассматривать тренд по математическому ожиданию, дисперсии и по ковариации. И в связи с этим, практическое решение этой задачи может быть разбито на ряд этапов. На первом шаге оценивается тренд процесса по математическому ожиданию. Для этого обычно прибегают к аппроксимации временного ряда степенными или тригонометрическими полиномами невысокого порядка. На основе этого при-

ближения исходная информация на участке анализа центрируются, обеспечивая таким образом стационарность данных по математическому ожиданию.

Если используется прогноз за пределы участка анализа, то тренд по математическому ожиданию экстраполируется также на участок прогноза. После этого можно оценить дисперсию и ковариацию на различных отрезках временной оси и таким образом сделать оценку возможного тренда этих параметров.

Основная возникающая при этом проблема заключается в том, что для этих оценок, с достаточной для практических нужд точностью, требуются большие объемы информации. Так, например, в работе (Котюк и др., 1967) показано, что в случае разложения функции автокорреляции (ФАК) по системе затухающих косинусоид, ошибки ее оценивания представляются суммой ошибок по каждой гармонике. При этом надежное оценивание ординат ФАК возможно лишь для тех составляющих процесса, период которых в 5-10 раз меньше продолжительности наблюдений. Обозначим этот критерий аббревиатурой $KR_{1/10}$.

Кроме того, ошибки оценивания ФАК согласно статистике возрастают с увеличением временного запаздывания между функциями, следовательно, достоверные оценки ФАК могут быть получены только при небольших сдвигах. Это означает, что по ограниченным по длине данным нельзя с достаточной для практических целей точностью оценить не только тренд процесса, но и его наиболее низкочастотные компоненты.

В то же время синтез модели только по достоверным оценкам ковариационной функции неизбежно приводит к ее недостаточному разрешению в области низких частот, что снижает ценность получаемых решений. Однако, построение линейной динамической модели возможно и без знания ковариационной функции. Рассмотрим эту задачу более подробно.

2. Формальная постановка оценки коэффициентов авторегрессии

Примем к рассмотрению некоторую m -канальную линейную динамическую систему (или процесс) состояние которой меняется во времени. Пусть измерения за состоянием этой линейной системы (ЛС) осуществляются в дискретные моменты времени с постоянной дискретизации Δt . Обозначим через $\mathbf{x}(t_k)$ – m -мерную вектор-строку измерений, которую будем называть вектором состояния ЛС в момент времени t_k . Отметим, что в общем случае вектор

состояния системы являться аналоговым сигналом и дискретность измерений по времени отображает только способ регистрации данных.

Предположим, что произведено N измерений, которые в совокупности представляют матрицу данных \mathbf{X} , размерностью Nm . Пронормируем данные таким образом, чтобы столбцы матрицы \mathbf{X} имели нулевое среднее значение и единичную дисперсию. Эта нормировка не умаляет общности рассуждений, т.к. после любых линейных преобразований всегда возможен переход к естественным координатам. Определим на данных \mathbf{X} стохастическое линейное разностное уравнение с максимальным запаздыванием l

$$\mathbf{x}^T(t_k) = \sum_{i=1}^l \mathbf{A}_{bi}(t_k) \mathbf{x}^T(t_k - i\Delta t) + \mathbf{f}^T(t_k), k = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где $\mathbf{A}_{bi}(t_k)$ – матрицы размерности $m \times m$, которые, возможно, зависят от времени; $\mathbf{f}(t_k)$ – в зависимости от контекста решаемой задачи, либо неизвестный m -мерный возмущающий вектор-строка ЛС (входной сигнал), либо вектор ошибок измерений и моделирования, либо и то и другое; $(*)^T$ – оператор транспонирования матриц.

Для упрощения дальнейших выкладок, будем предполагать, что постоянная дискретизации $\Delta t=1$. Условие $\Delta t=1$ является непринципиальным и переход к естественным значениям параметров ЛС, при другом значении дискретизации, является тривиальным [9]. Примем, что начальное значение независимой переменной равно $t_1=0$. Это условие также является непринципиальным и всегда может быть удовлетворено совмещением начала временной оси с нулем. При сделанных предположениях дискретный параметр времени t_i будет принимать целочисленные значения и уравнение (1) можно упростить

$$\mathbf{x}^T(k) = \sum_{i=1}^l \mathbf{A}_{bi}(k) \mathbf{x}^T(k - i) + \mathbf{f}^T(k), \quad (2)$$

где $k=1,2,\dots,N$ - дискретный целочисленный параметр времени. Уравнение (2) называется моделью состояния системы. Это линейное разностное уравнение порядка ml . С другой стороны, эта модель является уравнением векторной линейной авторегрессии, или одношаговым линейным предсказателем. Это уравнение позволяет предсказать значение вектора состояния $\mathbf{x}(k)$ в момент времени k по его значениям в прошлые моменты времени: $\mathbf{x}(k - 1)$, $\mathbf{x}(k - 2)$, ... , $\mathbf{x}(k - l)$. Число l участвующих в прогнозе значений вектора

состояния называется лагом модели. Часто модель (2) рассматривают как физически реализуемый линейный цифровой фильтр.

В практических приложениях иногда рассматривают физически нереализуемые фильтры, которые позволяют предсказать текущие значения вектора состояния по его l будущим значениям. Модель такого фильтра может быть представлена выражением, аналогичным соотношению (2)

$$\mathbf{x}^T(k) = \sum_{i=1}^l \mathbf{A}_{pi}(k) \mathbf{x}^T(k+i) + \mathbf{f}^T(k), k = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

В частном случае, когда матрицы $\mathbf{A}_{bi}(k)$, $\mathbf{A}_{pi}(k)$ не меняются во времени, модели (2-3) описывают стационарную во времени систему. Если состояние ЛС описывается скалярной переменной, т.е. при $m = 1$, модели (2-3) упрощаются. Вектора $\mathbf{x}(k)$ превращаются в скалярные величины $x(k)$, вектора $\mathbf{f}(k)$ – в случайные функции времени $f(k)$, а совокупность матриц \mathbf{A} – в вектор-строки. Модель (2) часто называют перспективным предсказанием, а (3) – ретроспективным предсказанием (или прогнозом в прямом и обратном времени).

Модели (2-3) получили широкое распространение в приложениях, например: при изучении спектральных характеристик ЛС параметрическими методами [9], фильтрации и аппроксимации данных, прогностических схемах [11] и решении других задач. Начальной задачей применения этих методик является адекватная идентификации параметров модели (2-3). Частное решение этой задачи для стационарных скалярных временных рядов в литературе хорошо известно [6]. Мы будем рассматривать случай векторных нестационарных относительно статистик второго порядка временных рядов [3].

Классический подход к решению задачи. Задача идентификации линейных моделей (2-3) заключается в определении матриц $\mathbf{A}_i(k)$ и лага l по априорным или экспериментальным данным. При известной ФАК данных \mathbf{X} и в стационарном приближении, решение этой задачи хорошо известно [12].

Если вектор состояния $\mathbf{x}(k)$ системы непосредственно измеряем (именно этот случай мы будем рассматривать), то его матрица автокорреляций может быть оценена по экспериментальным данным и эта информация является необходимой и достаточной для полного описания ЛС.

Таким образом, для полного описания любой стационарной ЛС требуется знание ее ФАК, т.е. статистик второго порядка. Как указывалось выше,

основная возникающая при этом проблема заключается в том, что для этих оценок, с достаточной для практических нужд точностью, требуются большие объемы информации – выполнение критерия $KR_{1/10}$ и учет увеличения погрешностей оценок ФАК при больших задержках аргумента.

Это означает, что по ограниченным по длине данным нельзя с нужной точностью оценить наиболее низкочастотные и, как правило, наиболее информативные компоненты процесса. Другими словами, синтез модели только по достоверным оценкам ФАК неизбежно приводит к ее недостаточному разрешению в области низких частот, что снижает ценность получаемых решений. Другая проблема заключается в том, что при отсутствии априорной информации лаг модели также заранее неизвестен, а должен быть сам оценен по экспериментальным данным.

С другой стороны, эмпирические оценки ФАК должны обладать определенными свойствами для того, что бы соответствовать реальному физическому процессу [4]. Одним из важнейших требований является положительная определенность матриц, составленных на основе ФАК. Эмпирическая оценка ФАК, не удовлетворяющая этому требованию дает, например, отрицательные значения спектра мощности для некоторых частот, не позволяет получить оптимальные решения при решении задач методом наименьших квадратов.

Классическим подходом к оценке коэффициентов авторегрессии в стационарном приближении является метод Юла-Уокера [12]. Однако при этом приходится обращать матрицу размерности $(ml)^2 = T^2$ – так называемую матрицу Теплица, которая представляет композицию оценок ФАК. Известно, что прямое обращение матриц связано с вычислительными затратами, которые пропорциональны значению T^3 [3], что представляет определенные трудности даже при относительно небольших значениях параметров m и l . Все перечисленные проблемы сильно ограничивают возможности определения параметров моделей (2, 3) по методу непосредственной эмпирической оценки ФАК.

Для скалярных временных рядов и в стационарном приближении синтез моделей (2-3) возможен и при неизвестной матрице ФАК [6]. Основная идея этого метода была разработана Дж. Бургом для расчета спектров высокого разрешения и заключалась в симметричном использовании как перспективных, так и ретроспективных предсказаний. Важным достоинством этого подхода, по сравнению с классическими схемами, является возможность построение моделей с лагами, превышающими область достоверных оценок ФАК. Последнее достигается благодаря статистически достоверной экстраполяции

параметров модели. Преимущества этого метода особенно полезны при работе с короткими выборками, на которых общепринятые статистические методы часто оказываются неприемлемыми геофизически.

Эта ситуация хорошо была изучена Дж. Бургом, в результате чего он использовал некоторые специфические свойства матриц Теплица для разработки своей процедуры максимально-энтропийного оценивания спектра и параметров авторегрессионной линейной стационарной модели. Кроме того, вычислительная эффективность метода основана на рекурсии Левинсона, которая позволяет строить очень экономичные вычислительные алгоритмы. Рекурсия Левинсона для временной области имеет такое же важное значение как и быстрое преобразование Фурье для частотной. Отметим также, что полученная в ходе вычислений информация может быть использована затем для более корректной эмпирической оценки ФАК вектора состояния ЛС и статистически обоснованного выбора лага динамической модели. Подробное описание рекурсии Левинсона приведено в [1].

3. Предлагаемая методика динамического моделирования

Распространим идею Бурга на синтез моделей (2-3) по экспериментальным данным на векторные временные ряды [3]. При этом будем предполагать, что ФАК динамической системы неизвестна, а моделируемый линейный динамический процесс нестационарен относительно статистик второго порядка. Синтез модели будем осуществлять методом последовательных итераций, с увеличением на каждом шаге лага модели на единицу.

Рассмотрим перспективное и ретроспективное предсказание. Согласно рекурсивному методу Теплица сначала будем находить уравнения авторегрессии (2-3) единичного лага, затем, используя найденные соотношения, строим модель с двумя задержками и т.д. пока не будет достигнута желаемая точность аппроксимации. На каждом шаге итерации будем вычислять погрешность прогноза, информацию о которой можно использовать для определения эффективного лага модели. Отметим также, что рекурсия Теплица является классической рекурсией, встречающаяся в теории полиномов, ортогональных на единичном круге. Итак, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{bi}(k) &= \mathbf{x}_{pi}(k-i+1) \mathbf{C}_{bi} + \mathbf{b}_i(k), \\ \mathbf{x}_{pi}(k-i+1) &= \mathbf{x}_{bi}(k) \mathbf{C}_{pi} + \mathbf{p}_i(k-i+1), \end{aligned} \quad (4)$$

здесь \mathbf{C}_{bi} , \mathbf{C}_{pi} – пока неизвестные матрицы частных производных размерно-

сти $m \times m$ (переходные матрицы); $\mathbf{b}_i(k)$, $\mathbf{p}_i(k)$ – вектор-строки квазислучайных невязок с математическим ожиданием, равным $E(\mathbf{b}_i) = E(\mathbf{p}_i) = \mathbf{0}$ и размера m на данном шаге итерации; значки "b", "p" обозначают принадлежность этих матриц или векторов состояния соответственно для перспективного и ретроспективного прогноза; второй нижний индекс у этих матриц означает номер итерации; $k = i, (i + 1), \dots, N$ – целочисленный параметр времени; $i = 1, 2, \dots, l$ – номер итерации; $\mathbf{x}_{bi}(k)$, $\mathbf{x}_{pi}(k)$ – значение фазового вектора, полученного соответственно в процессе перспективного и ретроспективного прогнозов; $\mathbf{0}$ – нулевая вектор-строка размерности m .

Из формул (4) видно, что для прогноза текущего вектора состояния на любой итерации используется всего один прошлый (будущий) вектор, сдвинутый относительно прогнозируемой величины на $|i - 1|$ тактов, где i – номер итерации. Таким образом, модели (2-3) одношагового прогноза заменены частными последовательностями (4), представляющими предсказатели с переменным шагом. Согласно соотношениям (4), алгоритм использует переходные матрицы независимые от времени. Однако предполагается, что учет нестационарности будет осуществляться за счет несимметрического продолжения в процессе итераций переходных матриц \mathbf{C}_{bi} , \mathbf{C}_{pi} .

Соотношения (4) удобно представить в матричном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{bi} &= \mathbf{X}_{pi} \mathbf{C}_{bi} + \mathbf{V}_i, \\ \mathbf{X}_{pi} &= \mathbf{X}_{bi} \mathbf{C}_{pi} + \mathbf{P}_i, \end{aligned} \quad (5)$$

где \mathbf{X}_{bi} , \mathbf{X}_{pi} , \mathbf{V}_i , \mathbf{P}_i – матрицы размера $(N - i + 1)m$, смысл которых определяется выражением (4). Задача состоит в определении оптимальных (по некоторому критерию) значений матриц \mathbf{C}_{bi} , \mathbf{C}_{pi} . В качестве критерия оптимальности примем сумму квадратов невязок модели (5) – так называемые квадратические формы

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{C}_{bi}) &= \min\{(\mathbf{X}_{bi} - \mathbf{X}_{pi} \mathbf{C}_{bi})^T (\mathbf{X}_{bi} - \mathbf{X}_{pi} \mathbf{C}_{bi})\}, \\ J_2(\mathbf{C}_{pi}) &= \min\{(\mathbf{X}_{pi} - \mathbf{X}_{bi} \mathbf{C}_{pi})^T (\mathbf{X}_{pi} - \mathbf{X}_{bi} \mathbf{C}_{pi})\}, \end{aligned} \quad (6)$$

Нам необходимо найти такие оценки \mathbf{C}_{bi} , \mathbf{C}_{pi} параметров модели (5), которые удовлетворяли бы условию (6). Для раскрытия экстремума функций $J_1(\mathbf{C}_{bi})$, $J_2(\mathbf{C}_{pi})$ воспользуемся правилами векторного дифференцирования [10]. Пусть \mathbf{Z} , \mathbf{A} , \mathbf{B} – матрицы или вектор-столбцы. Тогда имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned}\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{Z}) / \partial \mathbf{Z} &= \partial(\mathbf{Z}^T \mathbf{B}) / \partial \mathbf{Z} = \mathbf{B}, \quad \partial(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}) / \partial \mathbf{Z} = 2\mathbf{Z}, \\ \partial(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}) / \partial \mathbf{Z} &= \mathbf{A}^T \mathbf{B}, \quad \partial(\mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}) / \partial \mathbf{Z} = 2\mathbf{A} \mathbf{Z}.\end{aligned}\quad (7)$$

Используя эти соотношения, находим необходимое условие экстремума квадратических форм (6)

$$\begin{aligned}\partial(J_1) / \partial \mathbf{C}_{bi} &= -\mathbf{X}_{bi}^T \mathbf{X}_{pi} + \mathbf{X}_{pi}^T \mathbf{X}_{pi} \mathbf{C}_{bi} = \mathbf{0}, \\ \partial(J_2) / \partial \mathbf{C}_{pi} &= -\mathbf{X}_{pi}^T \mathbf{X}_{bi} + \mathbf{X}_{bi}^T \mathbf{X}_{bi} \mathbf{C}_{pi} = \mathbf{0},\end{aligned}\quad (8)$$

откуда имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{pi}^T \mathbf{X}_{pi} \mathbf{C}_{bi} &= \mathbf{X}_{bi}^T \mathbf{X}_{pi}, \\ \mathbf{X}_{bi}^T \mathbf{X}_{bi} \mathbf{C}_{pi} &= \mathbf{X}_{pi}^T \mathbf{X}_{bi}.\end{aligned}\quad (9)$$

Условием минимума квадратичных форм J_1 , J_2 означает, что матрицы $\mathbf{X}_{pi}^T \mathbf{X}_{pi}$ и $\mathbf{X}_{bi}^T \mathbf{X}_{bi}$ должны быть положительно определены [2]. Выражение (9) представляет собой матричную запись так называемой нормальной системы уравнений метода наименьших квадратов (МНК). С другой стороны, выражение (9) представляет систему линейных алгебраических уравнений, которая, в случае отсутствия сингулярности у матриц $\mathbf{X}_{bi}^T \mathbf{X}_{bi}$, $\mathbf{X}_{pi}^T \mathbf{X}_{pi}$, имеет единственное решение следующего вида

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{bi} &= (\mathbf{X}_{pi}^T \mathbf{X}_{pi})^{-1} \mathbf{X}_{bi}^T \mathbf{X}_{pi}, \\ \mathbf{C}_{pi} &= (\mathbf{X}_{bi}^T \mathbf{X}_{bi})^{-1} \mathbf{X}_{pi}^T \mathbf{X}_{bi},\end{aligned}\quad (10)$$

где $(*)^{-1}$ – операция вычисления обратной матрицы. Множители в скобках правой части соотношений (10) представляют матрицы дисперсий, а произведение двух последних множителей – матрицы взаимных корреляций между будущими и прошлыми значениями вектора состояний.

Как следует из формул (4, 5), матрицы дисперсий рассчитываются на разных временных базах: для перспективного прогноза используется база $1 \leq k \leq (N - i + 1)$, а для ретроспективного – $(i + 1) \leq k \leq N$. Временная несовместимость этих баз зависит от номера итерации и в целом составляет $2i$

отсчетов данных. Аналогичная временная несовместимость баз имеет место и для матриц взаимных корреляций.

Упростим выражение (10). Для этого введем следующие обозначения, смысл которых легко установить при анализе предыдущих формул

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{bi}^T \mathbf{X}_{pi} &= \mathbf{R}_{bpi}, \quad \mathbf{X}_{pi}^T \mathbf{X}_{bi} = \mathbf{R}_{pbi}, \\ \mathbf{X}_{pi}^T \mathbf{X}_{pi} &= \mathbf{D}_{pi}, \quad \mathbf{X}_{bi}^T \mathbf{X}_{bi} = \mathbf{D}_{bi}, \end{aligned} \quad (11)$$

тогда соотношения (10), с учетом обозначений (11), могут быть переписаны в более компактном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{bi} &= (\mathbf{D}_{pi})^{-1} \mathbf{R}_{bpi}, \\ \mathbf{C}_{pi} &= (\mathbf{D}_{bi})^{-1} \mathbf{R}_{pbi}. \end{aligned} \quad (12)$$

Известно, что решение (12) может иметь вычислительные трудности при обращении матриц дисперсий \mathbf{D} , если они вырождены или плохо обусловлены. Это является достаточно серьезным ограничением, которое может разрушить сходимость итерационного процесса. Одним из методов решения этой проблемы является сингулярный анализ [12], или метод регуляризации [13]. Имея оценки переходных матриц (12), можно выполнить прогноз фазового вектора, который будем обозначать значком $\hat{\ast}$, по следующим формулам

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{bi}(k) &= \mathbf{x}_{pi}(k - i + 1) \mathbf{C}_{bi}, \\ \hat{\mathbf{x}}_{pi}(k - i + 1) &= \mathbf{x}_{bi}(k) \mathbf{C}_{pi}. \end{aligned} \quad (13)$$

Формулы (4) и (13) позволяют получить ошибки (невязки) предсказания и ретроспекции по следующим соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i(k) &= \hat{\mathbf{x}}_{bi}(k) - \mathbf{x}_{pi}(k - i + 1) \mathbf{C}_{bi}, \\ \mathbf{p}_i(k - i + 1) &= \hat{\mathbf{x}}_{pi}(k - i + 1) - \mathbf{x}_{bi}(k) \mathbf{C}_{pi}. \end{aligned} \quad (14)$$

Расчет невязок (14) завершает очередную итерацию. Для перехода к следующей итерации переопределим данные следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{b(i+1)}(k) &= \mathbf{b}_i(k), \\ \mathbf{x}_{p(i+1)}(k - i + 1) &= \mathbf{p}_i(k - i + 1), \end{aligned} \quad (15)$$

выполним пункты (4, 12-15) в ходе выполнения очередной итерации и так далее до достижения условий окончания работы алгоритма. Для старта итерационного процесса определим начальные условия следующим образом: $\mathbf{C}_{b0} = \mathbf{C}_{p0} = \mathbf{I}$, где \mathbf{I} – единичная матрица размера $m \times m$; $\mathbf{x}_{b0}(k) = \mathbf{x}_{p0}(k) = \mathbf{x}(k)$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Поясним физическую сущность введенных выше соотношений. С учетом обозначений (11) и невязок (14), матрицы \mathbf{D}_{bi} , \mathbf{D}_{pi} интерпретируются как матрицы дисперсий ошибок предсказания и ретроспекции (с размерностями $m \times m$). Вектора $\mathbf{b}_i(k)$ и $\mathbf{p}_i(k)$ интерпретируются соответственно как ошибки предсказания и ретроспекции на i -ом шаге в k -ой временной точке после учета линейных связей предыдущих ($i-1$) итераций.

Матрицы \mathbf{R}_{bpi} и \mathbf{R}_{pbi} представляют взаимные функции частных автокорреляций составляющих фазового вектора (ФЧК) соответственно для предсказания и ретроспекции на i -ом сдвиге. И в этом случае, как видно из формул (12), матрицы \mathbf{C}_{bi} , \mathbf{C}_{pi} можно трактовать, с учетом принятой нормировки, как нормированные значения ФЧК. Мы используем понятие частных автокорреляций, чтобы подчеркнуть тот факт, что алгоритм на i -ой временной задержке учитывает только те линейные связи, которые еще остались после устранения линейности при более ранних запаздываниях.

Как видно из приведенного алгоритма, при аппроксимации моделей (4) введены перекрестные связи, которые обеспечивают взаимообусловленность моделей прямого (2) и обратного времени (3). Эти перекрестные связи обеспечиваются при вычислении невязки перспективного (ретроспективного) прогноза использованием информации, полученной как для прямого, так и для обратного времени. Перекрестные связи, с одной стороны, обеспечивают сходимость итераций и согласование моделей в прямом и обратном времени, а с другой стороны – гарантируют минимальное их отличие. В этом случае наличие значимой разности между этими двумя моделями сигнализирует о нестационарности параметров процесса.

Важно отметить, что при построении модели алгоритм не использует никакой априорной информации, а только текущие данные, которые содержит временной ряд, т.е. метод не использует статистически не обоснованной информации. Более того, оптимизация производится на каждом итерационном шаге, поэтому итоговую модель можно рассматривать как кусочно-линейную.

В то же время классический МНК использует уже готовые оценки дисперсионных и корреляционных матриц, которые, как показано выше, могут содержать значимые ошибки. Кроме того, оптимизация по МНК выполняет-

ся только один раз, т.е. обеспечивает средне взвешенный оптимум по всему набору параметров модели, однако известно, что кусочно-линейная модель дает более точные и гибкие решения.

Другое существенное отличие предложенного подхода от метода Дж. Бурга заключается в способе формирования матриц. В методе Дж. Бурга предполагается равноправность прямого и обратного времени. Алгоритмически это требование реализуется заменой соответствующих матриц их средним значением. Так, например, в случае скалярного временного ряда коэффициенты (12) вычисляются следующим образом [6]

$$C_{bi} = C_{pi} = C_i = \frac{R_{pbi} + R_{bpi}}{D_{bi} + D_{pi}}, \quad (16)$$

что обеспечивает равноправность (по статистикам) прямого и обратного времени.

Для стационарного по статистикам второго порядка временного ряда теоретические дисперсии являются постоянными, а между ФЧК существуют простые зависимости [6]. В целом все эти условия можно описать соотношениями A, B, C

$$A : \mathbf{D}_b = \mathbf{D}_p; \quad B : \mathbf{R}_{bp}(-\tau) = \mathbf{R}_{pb}^T(\tau); \quad C : \mathbf{C}_b = \mathbf{C}_p. \quad (17)$$

Рассмотрим вариант метода для скалярного временного ряда. В этом случае все матрицы из выражений (17) вырождаются в числа. Из выражения В-17 следует, что ФЧК в случае скалярных данных является четной функцией и, следовательно, для любого процесса (с трендом или без него) выполняется равенство $\mathbf{R}_{bp} = \mathbf{R}_{pb}$. При практической реализации алгоритмов в классическом варианте выполнение соотношения А-17 достигается за счет усреднения дисперсий ошибок предсказания и ретроспекции по формуле (16).

Анализ формул (12) показывает, что при выполнении равенств А-17 и В-17, автоматически выполняется и соотношение С-17. Векторный стационарный случай не имеет в этом отношении принципиальных отличий от скалярного. Таким образом, для стационарного случая, при выполнении требований статистики (например, использование достаточно длинных выборок), практическая реализация условий (17) никаких проблем не имеет.

Рассмотрим нестационарный процесс сначала в скалярном варианте. В этом случае теоретические дисперсии являются функциями времени и, следо-

вательно, равенство А-17 должно нарушаться. В данном алгоритме теоретические дисперсии предсказания и ретроспекции уже не считаются равными. Практические оценки этих дисперсий также будут различными, так как они вычисляются по формулам (11), которые имеют разные временные базы для прямого и обратного времен. Здесь имеются в виду статистически значимые отличия, достоверность которых может быть оценена по соответствующему критерию. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и относительно корреляционных матриц в целом. Следовательно, в нестационарном приближении в общем случае выполнение равенств (17) не соблюдается даже в скалярном случае.

Этот вывод еще в большей степени применим к векторному случаю, как к объекту более сложной природы. Оценка и учет этого расхождения, по нашему мнению, и позволяют смоделировать параметры возможного тренда. Практическая реализация этой идеи заключается в раздельной оценке матриц \mathbf{D}_b и \mathbf{D}_p по неполностью совмещенным временным интервалам. При этом степень расхождения моделей прямого и обратного времени, выраженная в переходных матрицах $\mathbf{C}_b, \mathbf{C}_p$ определяется лагом модели l .

Итак, после первой итерации получаем матрицы $\mathbf{C}_{b1}, \mathbf{C}_{p1}$, вектора остатков $\mathbf{V}_1(k)$ и $\mathbf{P}_1(k)$, а также оценки дисперсий этих векторов \mathbf{D}_{b1} и \mathbf{D}_{p1} и ФЧК $\mathbf{R}_{bp1}, \mathbf{R}_{pb1}$. При необходимости выполняем вторую итерацию. Для этого рассчитаем по формуле (12) матрицы $\mathbf{C}_{b2}, \mathbf{C}_{p2}$. При этом вместо векторов $\mathbf{X}_{b2}(k), \mathbf{X}_{p2}(k)$ используем вектора остатков $\mathbf{V}_1(k)$ и $\mathbf{P}_1(k)$ соответственно, полученных по формулам (14). После применения выражения (5), а затем (13) к этим векторам вновь получаем остатки $\mathbf{V}_2(k)$ и $\mathbf{P}_2(k)$, но уже после второй итерации и т.д. На l -ом шаге получаем матрицы \mathbf{C}_{bl} и \mathbf{C}_{pl} , вектора невязок $\mathbf{V}_l(k), \mathbf{P}_l(k)$, оценки их дисперсий и ФЧК.

Полученная совокупность матриц $\mathbf{C}_{bi}, \mathbf{C}_{pi}$ ($i = 1, 2, \dots, l$) является только частью решения поставленной выше задачи, т.к. модели (2, 3) явно еще не определены. Для явного определения параметров этих моделей требуется вычислить последовательность матриц $\mathbf{A}_{bi}, \mathbf{A}_{pi}$ по ранее полученным матрицам $\mathbf{C}_{bi}, \mathbf{C}_{pi}$, т.е. нужно перейти от частных моделей (4) к обобщенным (2, 3). Для этого воспользуемся рекуррентной формулой Теплица для одномерного случая (Клаербоут, 1981), которая позволяет по коэффициентам $\mathbf{A}_{bi}, \mathbf{A}_{pi}$ модели $(l-1)$ порядка получить соответствующие коэффициенты модели l -ого порядка, если известны матрицы $\mathbf{C}_{bl}, \mathbf{C}_{pl}$. Обозначим полученные ранее матрицы модели $(l-1)$ порядка следующим образом: $\mathbf{A}_{bi,(l-1)}, \mathbf{A}_{pi,(l-1)}, i=1,2,\dots,(l-1)$. В этом случае матрицы модели (2, 3) l -ого порядка, по аналогии со скалярным

случаем, могут быть вычислены по следующим формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{bi,l} &= \mathbf{A}_{bi,(l-1)} - \mathbf{C}_{pl}\mathbf{A}_{bi,(l-1)}, \\ \mathbf{A}_{pi,l} &= \mathbf{A}_{pi,(l-1)} - \mathbf{C}_{bl}\mathbf{A}_{pi,(l-1)}, \\ \mathbf{A}_{bl,l} &= \mathbf{C}_{pl}, \quad \mathbf{A}_{pl,l} = \mathbf{C}_{bl}, \\ i &= 2, 3, \dots, (l-1), \text{ членов нет, если } l = 1. \end{aligned} \quad (18)$$

После l -ой итерации получаем также ковариационные матрицы ошибок прогноза \mathbf{D}_{bl} и ретроспекции \mathbf{D}_{pl} , достигнутые на l -ом шаге итерации. Совокупность этой информации несет разнообразную и обобщенную информацию относительно синтезируемой модели. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Если принятая к рассмотрению модель адекватна анализируемому процессу, то при увеличении ее порядка l , элементы матриц \mathbf{C}_{bl} , \mathbf{C}_{pl} (а также \mathbf{A}_{bl} , \mathbf{A}_{pl}), \mathbf{D}_{bl} , \mathbf{D}_{pl} должны стремиться к постоянным величинам. Значительные колебания элементов этих матриц свидетельствуют или о малости принятого лага модели, или о нелинейности связей между исходными данными, либо о неполном информационном базисе. Последовательно увеличивая лаг модели можно решить эту проблему более однозначно. Матрицы \mathbf{D}_{bl} , \mathbf{D}_{pl} характеризуют немоделируемую часть исходных данных, другими словами отображают шум модели. Стабилизация оценок этих матриц свидетельствует о том, что достигнута предельная точность выбранной модели и дальнейшее увеличение ее лага уже не может привести к существенному улучшению оценок, а иногда и ухудшают их.

В целом анализ этой информация может быть полезен при уточнении модели и определении ее порядка. След дисперсионных матриц позволяет судить о достигнутой точности модели как по отдельным координатам вектора состояния, так и о суммарной (усредненной) точности. Внедиагональные элементы характеризуют статистические связи ошибок прогноза фазового вектора и также имеют простую интерпретацию. При увеличении лага модели происходит постепенный учет линейных связей данных при различных временных сдвигах, а невязки становятся все более некоррелируемыми и непредсказуемыми. При адекватной модели, в пределе эти невязки должны принимать характер белого шума, т.е. матрицы \mathbf{D} должны стремиться к диагональному виду. Наличие значимых внедиагональных элементов сигнализирует о наличии нелинейных связей между составляющими временного ряда, или о неполном информационном базисе.

Но особенно хорошим индикатором тренда являются нормированные ФАК, имеющих ясный физический смысл и анализ которых наиболее прост и нагляден. Допустим, что известна последовательность $R(0), R(1), \dots, R(l-1)$. Для скалярного и стационарного случая Дж. Бургом показано, что эти параметры связаны следующим соотношением [6]

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(-1) & \dots & R(-l) \\ R(1) & R(0) & \dots & R(-(l-1)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(l) & R(l-1) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ A_{1l} \\ \dots \\ A_{ll} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_l \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $R(i)$ – значение функции автокорреляции при i -ом сдвиге, D_l – ошибка прогноза на l -ой итерации. Умножая последнюю строку корреляционной матрицы на вектор коэффициентов авторегрессии, будем иметь

$$R(l) = - \sum_{i=1}^l R(l-i) A_{il}, \tag{19}$$

т.е. выполним оценку $R(l)$.

Этот алгоритм легко обобщить на векторные данные и нестационарный случай. Допустим, что уже имеются оценки матриц $\mathbf{R}(0), \mathbf{R}(1), \dots, \mathbf{R}(l-1)$ – оценки ФАК про перспективном прогнозе и требуется оценить матрицу $\mathbf{R}(l)$. По аналогии со скалярным случаем, это можно сделать по следующей формуле

$$\mathbf{R}(l) = - \sum_{i=1}^l \mathbf{R}(l-i) A_{bi,l}. \tag{20}$$

Аналогичным образом можно определить матрицу $\mathbf{R}(-l)$ – при ретроспективном прогнозе, если известны матрицы $\mathbf{R}(0), \mathbf{R}(-1), \dots, \mathbf{R}(-l+1)$ [6]

$$\mathbf{R}(-l) = - \sum_{i=1}^l \mathbf{R}(i-l) A_{pi,l-i}. \tag{21}$$

Как видно из приведенного алгоритма, для начального старта метода требуется знать матрицу $\mathbf{R}(0)$, а остальные могут быть получены по формулам

(20), (21). Матрица $\mathbf{R}(0)$ в данном алгоритме вычисляется по стандартным методикам. Практические расчеты корреляционных матриц по алгоритмам (20), (21) совмещены с последовательностью вычисления матриц \mathbf{A}_{bl} , \mathbf{A}_{pl} по формулам (18), что способствует минимизации затрат общего времени расчетов.

Как следует из формул (20), (21), для случая с трендом ФАК, рассчитанные для прямого и обратного времени будут несколько рассогласованы. Это явление можно объяснить как несоответствие статистической структуры процесса в прямом и обратном времени за счет несимметричности матриц \mathbf{A}_{bl} и \mathbf{A}_{pl} . Этот факт кажется почти тривиальным, если принять во внимание, что прогнозируемость информации зависит от целого ряда статистических факторов, которые могут по разному локализоваться во времени, определяя неравноправность прямого и обратного прогнозов. В частности, одной из причин, во многом определяющим прогнозируемость процесса, является тренд статистик второго порядка.

В данной статье рассмотрен одношаговый предсказатель, однако метод легко может быть изменен и для прогноза с большей задержкой. Действительно, пусть требуется осуществить прогноз на s шагов ($s > 1$). Для этого достаточно в качестве стартовой итерации выбрать итерацию с номером $i = s + 1$ (напомним, что для одношагового прогноза стартовая итерация равна $i = 1$). Далее вся приведенная выше методика может быть использована без изменений.

Отметим, что стандартные методы решения этой задачи методом Юла-Уокера требуют затрат времени ЭВМ пропорционально $(ml)^3$ и объемов машинной памяти пропорционально величине $(ml)^2$ [6]. Для матриц Теплица, свойства которых использованы в данном алгоритме, требуется затрат машинного времени пропорционально $2lm^3$ и объемов памяти пропорционально величине $2lm^2$.

Особенно эффективен алгоритм в сочетании с методом нейророботного моделирования, где компактность и быстродействие играют решающую роль. Так как при моделировании попутно вычисляются автокорреляционные матрицы, методика позволяет успешно решать и задачи векторного спектрального анализа. Более того, как и в одномерном случае [9], векторный спектр может быть построен на основе матриц \mathbf{A}_b , \mathbf{A}_p .

4. Апробация методики на модельных данных

При классической оценке ФАК принято использовать два метода. Первый метод основан на несмещенной оценке ФАК, которая в предельном случае определяется по формуле

$$g(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n - |\tau|} \right) \sum_{k=0}^{n-|\tau|} x_k x_{k+\tau}, \tau = 0, 1, \dots, l.$$

Физически эта формула оценивает подобие временного ряда относительно своей копии, сдвинутой относительно него на величину τ . При практическом вычислении ФАК на дискретной последовательности данных, при конечном значении числа отсчетов n , предыдущая формула заменяется оценкой следующего вида, представляющей так называемый эмпирический коэффициент корреляции

$$\hat{q}(\tau) = \frac{1}{n - |\tau|} \sum_{k=0}^{n-|\tau|} x_k x_{k+\tau}, \tau = 0, 1, \dots, l. \quad (22)$$

Из этой формулы видно, что из-за ограниченности числа наблюдений n число усредняемых произведений $x_k x_{k+\tau}$ с ростом задержек временного ряда τ непрерывно уменьшается вместе со статистической достоверностью оценок $\hat{q}(\tau)$. Отметим, что несмещенные оценки ФАК имеют полное теоретическое обоснование в рамках теории вероятности и математической статистики.

Альтернативой несмещенной оценки ФАК являются так называемые смещенные оценки, которых может быть бесконечное множество. Одна из наиболее популярных смещенных оценок основана на следующей формуле

$$r(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-|\tau|} x_k x_{k+\tau}, \tau = 0, 1, \dots, l, \quad (23)$$

которая связана с предыдущим соотношением

$$r(\tau) = \frac{n - \tau}{n} \hat{q}(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{n} \right) \hat{q}(\tau). \quad (24)$$

Так как смещение оценки (22) равно нулю, то из формулы (24) следует следующее смещение оценки (23)

$$r(\tau) = \frac{n - \tau}{n} \hat{q}(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{n} \right) \hat{q}(\tau). \quad (25)$$

При $n \rightarrow \infty$ это смещение стремится к нулю и оценка асимптотически стремится к несмещенной, т.е. при больших выборках они практически эквивалентны. Но при ограниченных n и при τ близком к n , величина смещения может быть весьма значительной.

Необходимость смещенной оценки ФАК следует из следующих рассуждений. Известно, что если закон распределения измеренных значений нормальный и для каждой задержки τ величина $r(\tau)$ представляет собой эмпирический коэффициент корреляции, оцененный по формуле (22), погрешность оценки ФАК можно найти как [5]

$$\sigma_r(\tau) = (1 - r(\tau)^2)/\sqrt{n - \tau}, \quad (26)$$

соответственно, для смещенной оценки ФАК (23), по аналогии с формулой (26), ошибка оценивания будет выражаться формулой

$$\sigma_r(\tau) = (1 - r(\tau)^2)/\sqrt{n}. \quad (27)$$

Делители $\sqrt{n - \tau}$ и \sqrt{n} в этих формулах явно представляют веса оценок в зависимости от числа наблюдений и аргумента ФАК. Из формулы (26) следует, что при увеличении аргумента ФАК погрешность ее оценивания растет по мере увеличения задержки. Для смещенной оценки этот коэффициент не зависит от сдвига и, при прочих равных условиях, имеет меньшее значение дисперсии оценивания. Из сравнения формул (22) и (23) видно, что несмещенная оценка ФАК приводит к более медленному затуханию функции по мере роста ее аргумента по сравнению с несмещенным оцениванием. Важнейшим преимуществом смещенной оценки ФАК с точки зрения приложений является ее положительная полуопределенность [2].

Таким образом, для одного и того же ряда наблюдений имеется возможность построить несколько существенно различных оценок ФАК. С одной стороны это говорит о неоднозначности решения задачи, а с другой – дает возможность выбора для получения наилучшего решения. Очевидно, что с точки зрения приложений оптимальной оценкой ФАК следует признать ту, которая более соответствует наблюдаемым данным, т.е. смещенную оценку.

Формулы (26) и (27) позволяют решать ряд других задач, в частности, находить статистически надежные значения коэффициентов корреляции и его доверительные интервалы. При нормальном распределении измеренных значений, надежным значением $r(\tau)$ для 95 %-ной доверительной вероятности является такая величина, для которой

$$\begin{aligned} |r(\tau)| &> 1.96\sigma_r = 1.96(1 - r(\tau)^2)/\sqrt{n - \tau}, \\ |r(\tau)| &> 1.96\sigma_r = 1.96(1 - r(\tau)^2)/\sqrt{n}. \end{aligned} \quad (28)$$

Разрешив неравенства (28) относительно n или $n - \tau$, можно определить критическое значение коэффициента корреляции, при данном числе наблюдений и задержке. В частности расчеты показывают, что надежным значением ФАК при $n=200$ являются величины $|r(\tau)| > 0.15$. Другими словами, при значениях оценок $|r_o(\tau)| < 0.15$ с точки зрения статистики линейные связи отсутствуют и коэффициент корреляции неотличим от нуля.

Определения (22) и (23) являются частным случаем так называемой эмпирической функции взаимной корреляции (ФВК), которая устанавливает линейную связь между временным рядом $\mathbf{x}(k)$ и $\mathbf{y}(k)$, сдвинутого относительно первого на величину τ . По аналогии с (22-23), эмпирический коэффициент корреляции соответственно несмещенной и смещенной функции ФВК вычисляется по формулам

$$\begin{aligned} r_{xy}(\tau) &= \frac{1}{n - |\tau|} \sum_{k=1}^{n-|\tau|} x_k y_{k+\tau}, \\ r_{xy}(\tau) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-|\tau|} x_k y_{k+\tau}, \tau = 0, 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (29)$$

Очевидная методическая связь формул (22-23) с соотношениями (29) позволяет практически без изменений перенести всю теорию относительно ФАК на ФВК, в том числе теорию погрешностей оценок. Отметим, что для ФВК имеет место следующее соотношение

$$r_{xy}(-\tau) = r_{yx}(\tau). \quad (30)$$

Рассмотрим двухканальный временной ряд, компоненты которого представлены на рис. 1. Эта временная последовательность была сгенерирована сверткой двух относительно высокочастотных сигналов с двумя различными последовательностями типа белого шума. По каждому каналу было сгенерировано $n=201$ синхронных дискретных отсчетов данных.

Отметим, что по способу построения эти данные не должны содержать явного тренда входных сигналов. Другая серия исследований будет заключаться в изучении влияния тренда по дисперсии исходных данных на оценки статистик (для краткости будем обозначать этот факт термином – данные с трендом). Для этого, при необходимости, будем преобразовывать данные первого канала по формуле (оставляя данные второго канала неизменными)

$$x_{1m}(k) = (1 + (k - 1)/(n - 1))x_1(k), k = 1, 2, \dots, n, \quad (31)$$

где $x_1(k)$ - исходные данные по первому каналу без трендовой составляющей.

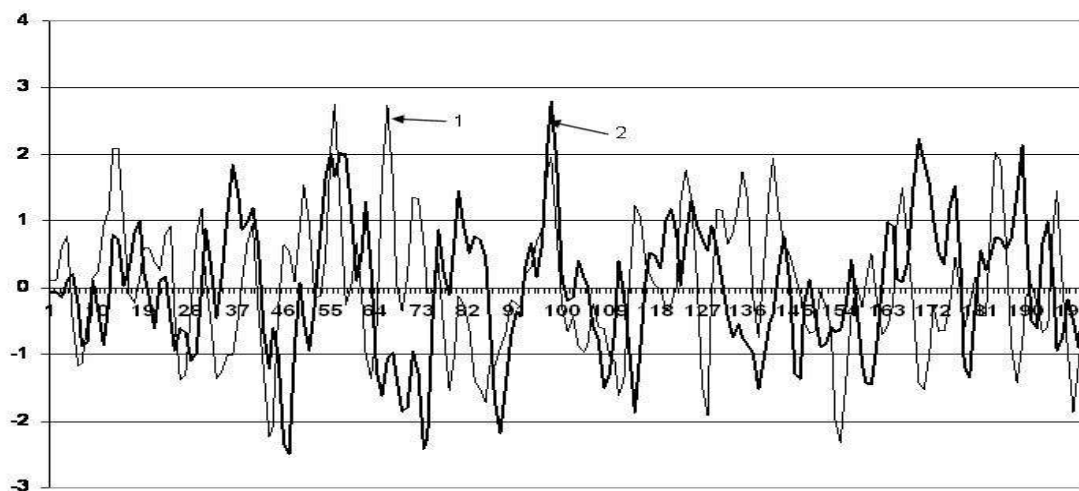


Рис. 1. Модельные данные. 1, 2 – соответственно информация по первому и второму каналам.

Согласно формуле (31) амплитуда колебаний преобразованных данных, по сравнению с исходным сигналом, линейно увеличивается на области определения функции от 1 до 2. Следовательно, будет наблюдаться квадратичный рост локальной дисперсии данных, что должно обнаружиться на оценках статистик по первому каналу.

4.1. Одноканальный вариант методики

Рассмотрим результаты обработки в одноканальном варианте, т.е. будем предполагать, что данные каждого канала исследуются независимо друг от друга. Полученные результаты будем сравнивать с точки зрения классического подхода и разработанной методики. Лаг модели примем равным $l=61$. Сначала будем исследовать данные без трендовой составляющей.

На рис. 2-3 представлены оценки ФАК, рассчитанные отдельно по каждому каналу. Кривые 1 на этих изображениях является оценкой ФАК компонент временного ряда, рассчитанных по несмещенной оценке (22). Две других кривых представляют расчеты по разработанной методике, а именно: оценка ФАК, полученная в результате перспективного прогноза – кривая 2 и ретроспективного – кривая 3.

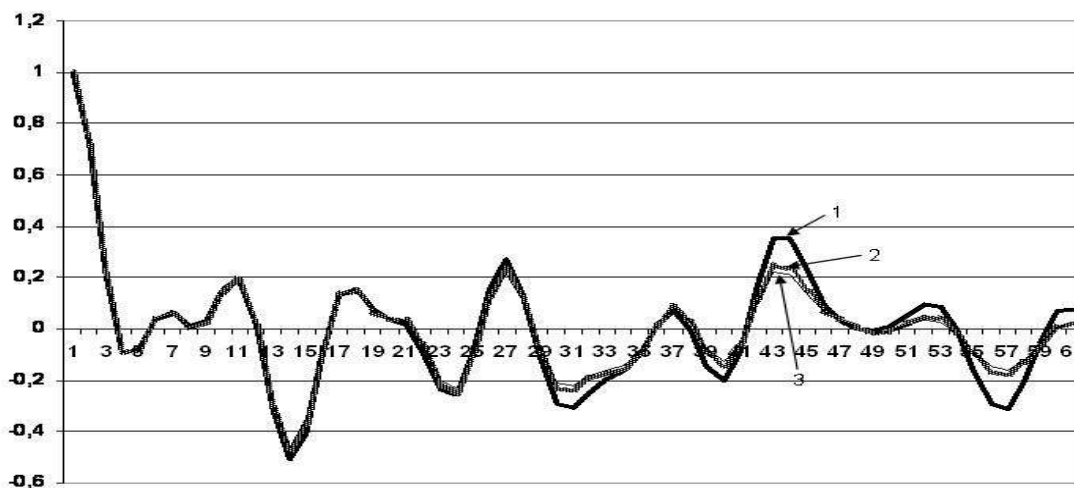


Рис. 2. ФАК первого канала. 1 – расчеты по формуле (22); 2, 3 – ФАК по разработанной методике, полученные соответственно в результате перспективного и ретроспективного прогнозов .

Отметим, что особые точки ФАК, т.е. ее нули и экстремумы, позволяют грубо оценить основные периоды колебаний (видимые периоды) измеренных сигналов. Анализ этой информации показывает, что на вход первого канала воздействует сигнал с видимым периодом равным примерно 9-10 отсчетам, а по второму – примерно 19-21 отсчетам.

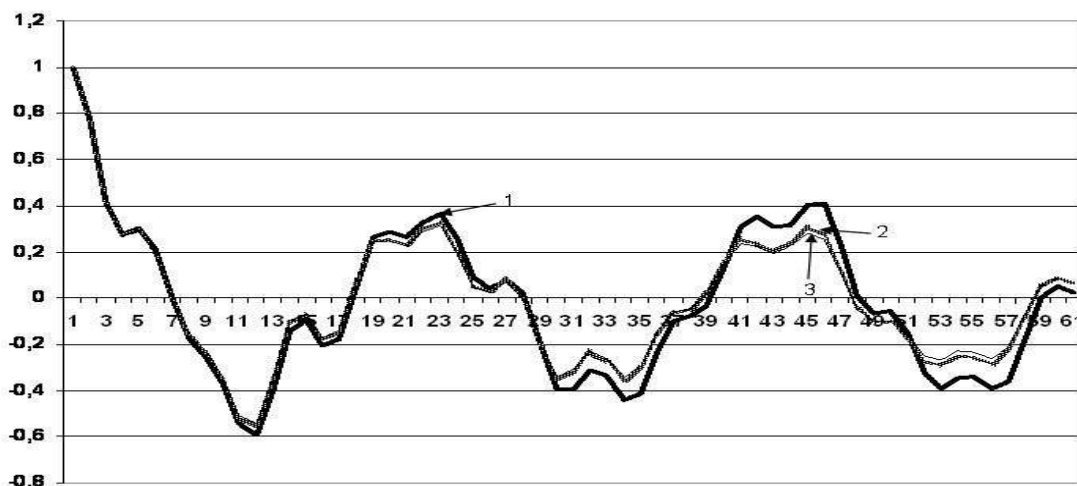


Рис. 3. ФАК второго канала. Обозначения аналогичны рис. 2.

Согласно критерию $KR_{1/10}$, по данной длине временного ряда с достаточной степенью точности могут быть оценены частоты процесса с периодом порядка 20 отсчетов и менее. Примем эту величину за характерный период корреляции. Таким образом, видимые и более высокие частоты обоих ФАК могут быть оценены, согласно вышеприведенному критерию, с достаточно высокой точностью.

Сравнение зависимостей 1-3 на рис. 2-3 показывает, что на начальной наиболее достоверной части (20 отсчетов) ход этих кривых достаточно близок. При более длительных задержках классические несмещенные оценки ФАК и по данной методике начинают различаться существенней и могут превышать ошибку оценивания $r_o(\tau)$. На изображениях хорошо видно, что оценки ФАК по разработанной методике по мере увеличения лага закономерно стремятся к нулю. Классические несмещенные оценки ФАК при увеличении лага имеют неоправданно большие выбросы относительно нуля. Последнее, как указывалось выше, связано с неадекватностью несмещенной оценки при больших сдвигах функций.

На рис. 4-5 изображены оценки ФАК, аналогичные предыдущему случаю, но с заменой классической несмещенной оценки (22) на смещенную (23).

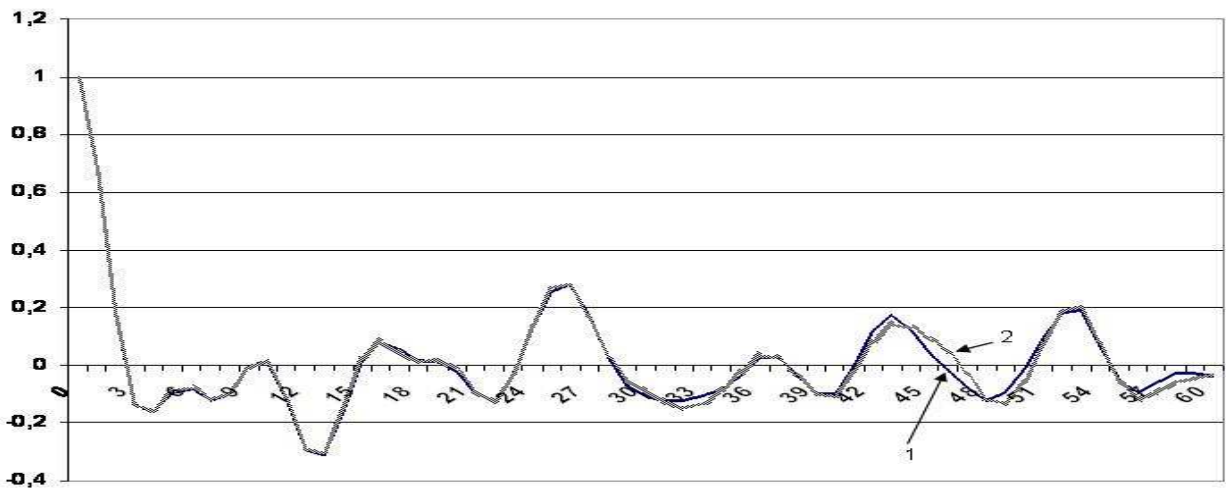


Рис. 4. ФАК первого канала. 1 – смещенная оценка (23); 2 – ФАК, полученная в результате перспективного прогноза.

Анализ полученных изображений показывает, что различие оценок, полученных по формуле (23) и разработанной методике существенно меньше предыдущего случая и практически не превышают величины $r_o(\tau)$ даже при достаточно высоких сдвигах аргумента.

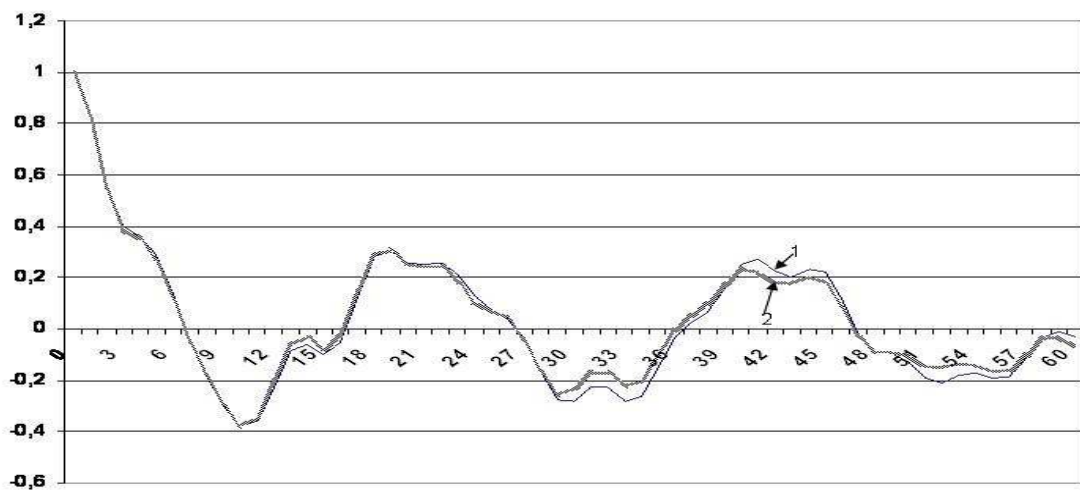


Рис. 5. ФАК второго канала. Обозначения, аналогичны рис. 4.

Таким образом, более реалистические оценки ФАК с помощью смещенных оценок близки к оценкам, полученным по разработанной методике. Этот факт является косвенным подтверждением того, что оценки ФАК по разра-

ботанной методике являются более адекватными, чем несмещенные классические оценки.

Другая особенность расчетов по данной методике заключается в малых отличиях оценок ФАК, полученных в результате перспективного и ретроспективного прогнозов. Среднее квадратическое отклонение (СКО) этой разности для обоих каналов составляет величину $\sigma_1 \approx 0.01$, что намного меньше ошибки оценивания $r_o(\tau)$. Следовательно, можно предположить, что действительно сгенерирована стационарная последовательность данных.

Поведение дисперсий оценок прогноза D_{bl} , D_{pl} (11) в зависимости от задержек, изображены на рис. 6.

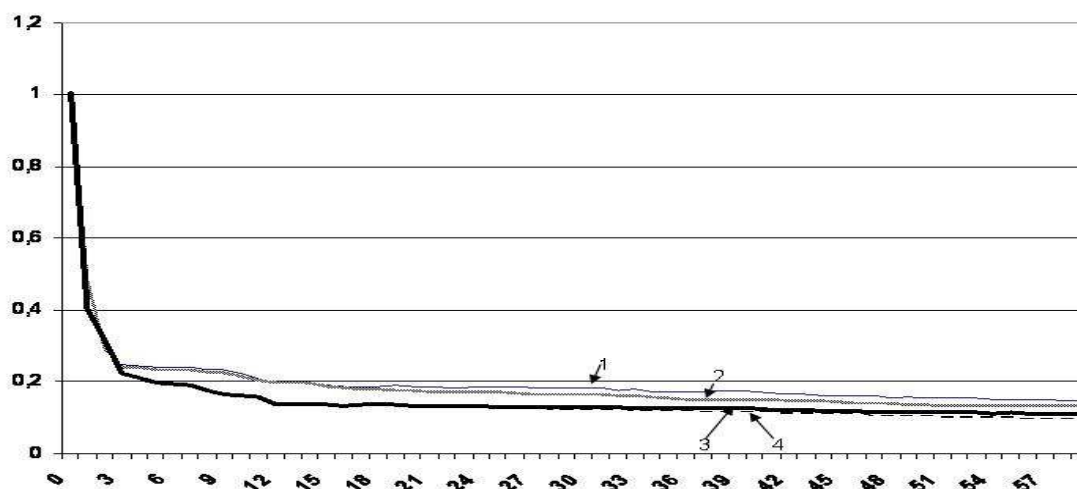


Рис. 6. Оценка дисперсий прогноза. 1, 2 – дисперсия по первому каналу соответственно в прямом и обратном времени; 3, 4 – дисперсия по второму каналу соответственно в прямом и обратном времени.

Все кривые на этом графике характеризуются резким спадом функций в начале координат и при больших значениях аргумента – слабым убыванием практически по линейной зависимости. Из рис. 6 видно, что для второго канала дисперсии оценок в перспективном и ретроспективном времени более консолидированы и имеют меньшее значение, чем для первого канала. Этот факт можно объяснить следующим образом. Как отмечалось выше, данные по второму каналу более низкочастотны, т.е. более детерминированы и лучше прогнозируются, чем по первому каналу.

Рассмотрим влияние определенного выше тренда данных на оценки некоторых вычисляемых параметров. Очевидно, что при отдельной обработке статистики второго канала не изменяться и рассматриваться не будут.

Дисперсии оценок прогноза первого канала в прямом и обратном времени для данных с трендом изображены на рис. 6.1 (кривые 3-4). Для сравнения здесь же представлены дисперсии невязок, полученные для случая данных без тренда (кривые 1,2, рис. 6).

Из рис. 6.1 видно, что на малых задержках все кривые практически идентичны. На более значимых сдвигах введенный тренд привел к существенному рассогласованию дисперсий невязок в прямом и обратном времени, по сравнению со случаем без тренда. Причем, дисперсия, определенная по ретроспекции более выположена и имеет большее значение, чем для перспективного прогноза. Как отмечалось выше, причина этого рассогласования очевидна: оценка дисперсий осуществляется на разнесенных временных базах. При этом для ретроспекции используются данные с более высокой дисперсией, чем для перспективного прогноза.

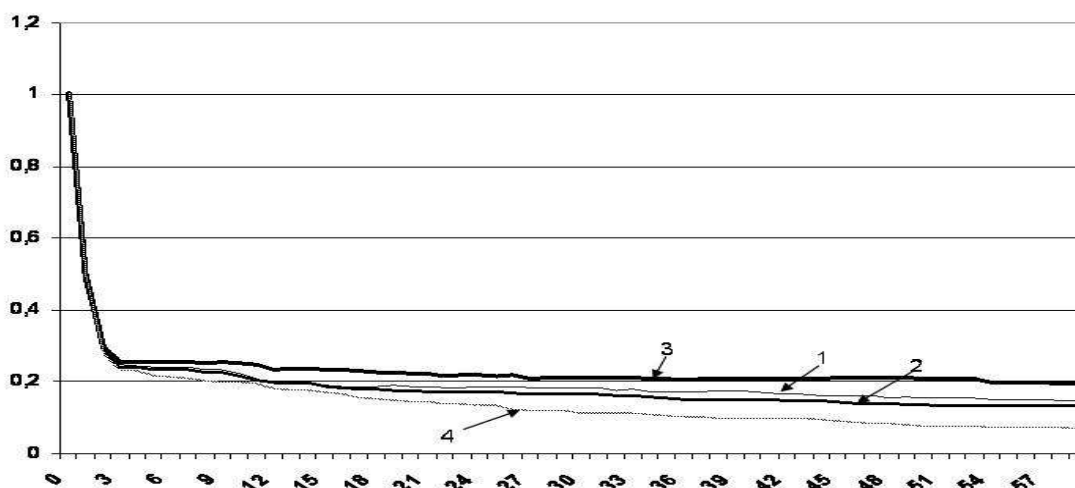


Рис. 6.1. Оценка дисперсий прогноза. 1, 2 – дисперсия по первому каналу соответственно в прямом и обратном времени для данных без тренда; 3,4 – для данных с трендом.

Таким образом расхождение оценок дисперсий прогноза в прямом и обратном времени может случить индикатором наличия тренда по статистикам второго порядка. Исследуем влияние тренда в данных на ФАК.

Классические оценки ФАК, вычисленные по формуле (23) для данных без тренда изображены на рис. 7 – кривая 1, с трендом – кривая 2. Из рис. 7 следует, что тренд привел к некоторому сглаживанию ФАК на малых задержках сигнала. Другой особенностью полученных зависимостей является то, что тренд привел к некоторому изменению частотного состава ФАК, т.к.

изменились особые точки функций. Качественный анализ особых точек ФАК показывает, что в целом тренд привел к обогащению низкочастотной составляющей функции, ее сглаживанию и более быстрому затуханию при больших задержках сигнала. Некоторое сглаживание ФАК и усиление в данных низкочастотной составляющей при введении тренда, в данном случае можно объяснить линейным ростом огибающей сигнала.

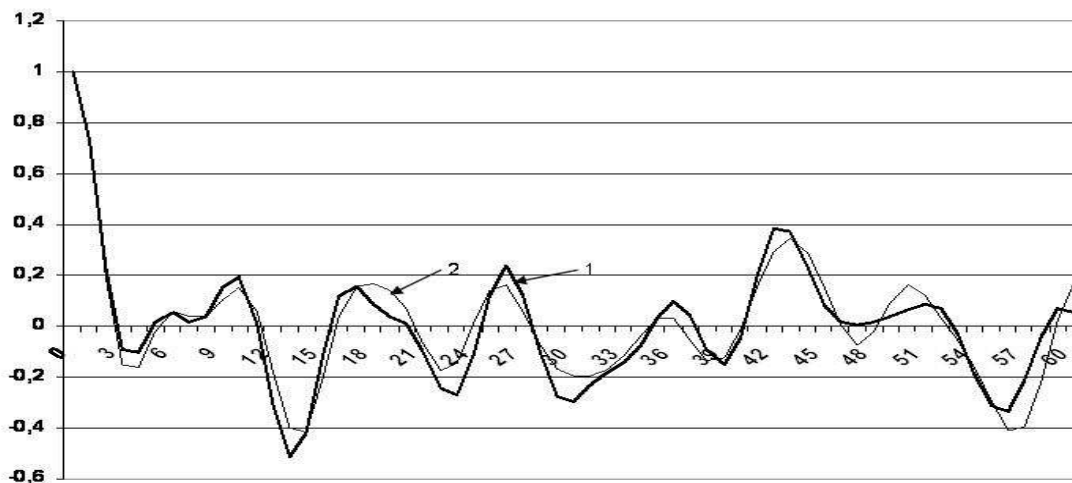


Рис. 7. ФАК первого канала. 1 – смещенная оценка (23) для данных без тренда; 2 – ФАК для данных с трендом.

На рис. 7.1. изображены оценки ФАК для данных с трендом для случаев: по формуле (23) (кривая 1), при ретроспективном (кривая 2) и перспективном (кривая 3) прогнозах, рассчитанных по данной методике. Из представленных изображений видно, что ФАК, рассчитанные по формуле (23) и полученная в результате ретроспективного прогноза различаются не более ошибки оценивания для всех сдвигов функций. Оценки ФАК, полученные в результате перспективного прогноза при больших сдвигах аргумента имеют значительное отличие от первых двух кривых.

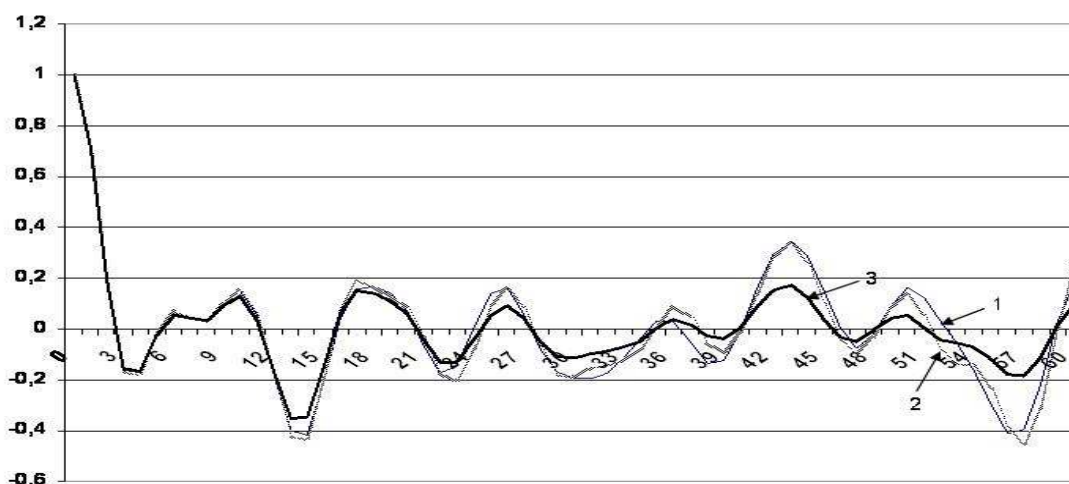


Рис. 7.1. ФАК первого канала для данных с трендом, рассчитанный по (23). 1 – смещенная оценка (23); 2,3 – ФАК, рассчитанная соответственно для ретроспективного и перспективного прогнозов по разработанной методике.

Анализ показывает, что подобие кривых 1 и 2 (рис. 7.1.) определяется одинаковыми временными отрезками временного ряда, используемых для оценки ФАК по обоим методикам. Для оценки ФАК при перспективном прогнозе используются данные с меньшей дисперсией, чем при ретроспекции, что и объясняет рассогласование кривых.

В результате проведенных исследований в одноканальном варианте можно сделать следующие заключения. Оценки ФАК для данных без тренда по классической формуле (22) при больших значениях сдвига являются не адекватными. Предложенные оценки ФАК на больших значениях аргумента близки к оценкам со смещением (23), более адекватных с точки зрения статистических методов. Введение в данные тренда смещает оценки ФАК в более низкочастотную область по обоим методикам, однако классический подход не имеет методических средств для диагностирования тренда. Предложенная методика позволяет выявить трендовую составляющую статистик второго порядка.

4.2. Векторный вариант методики

Выполненные оценки дисперсий невязок, а также ФАК для скалярного и векторного временных рядов в случае тренда и его отсутствия, в пределах ошибки оценивания, практически идентичны. Однако в случае векторной обработки появляется дополнительная информация в виде ФВК между компонентами временного ряда, которую мы в основном и будем изучать.

Расчеты показывают, что смещенные оценки ФВК для данных без тренда по формуле (29) и разработанной методике, при сдвиге данных второго канала относительно первого имеет значение меньше, чем ошибка оценивания. С практической точки зрения это свидетельствует о том, что низкочастотный характер данных второго канала в информации первого канала не обнаруживаются.

Оценки ФВК при сдвиге данных первого канала относительно второго, представлены на рис. 8. Анализ этих изображений показывает, что полученная ФВК имеет на некоторых сдвигах значимые значения. Это свидетельствует о том, что низкочастотный сигнал второго канала обогащен также высокочастотной составляющей, которая также присутствует в первом канале. Отличие ФВК по классической и разработанной методикам меньше, чем ошибка оценивания. Однако это можно объяснить малым значением ФВК на различных сдвигах.

Оценки ФВК по разработанной методике в прямом и обратном времени достаточно консолидированы и их разница меньше, чем ошибки оценивания, поэтому оценка ФВК в обратном времени на рисунке не изображена. Следовательно, в пределах ошибки оценивания классические оценки ФВК и по разработанной методике (в разном времени) для данных без тренда практически совпадают.

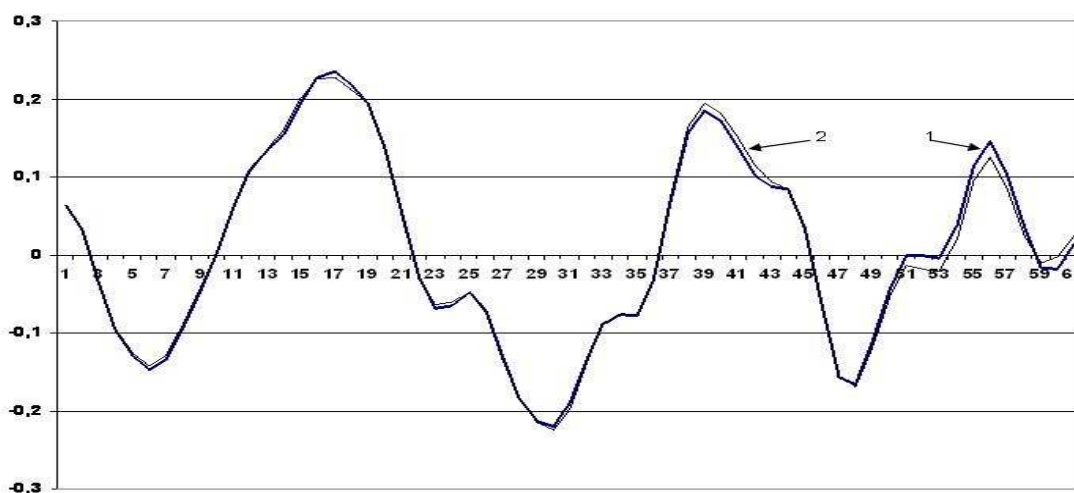


Рис. 8. ФВК при сдвиге данных первого канала относительно второго для данных без тренда. Смещенная оценка по формуле (29) – кривая 1; 2 – ФВК, рассчитанная в результате перспективного прогноза.

Особые точки ФВК несут полезные сведения о временных соотношениях между компонентами временного ряда. Например, экстремумы дают информации о запаздывании компонент временного ряда относительно друг друга. На полученных рисунках хорошо видно, что местоположения этих экстремальных точек практически идентичны для всех кривых. Таким образом, классические оценки ФВК и по предложенной методикам в пределах ошибок их оценивания, в случае отсутствия тренда в данных, несут практически идентичную информацию.

Рассмотрим влияние тренда в данных на оценки статистик. На рис. 8.1 представлены изображения ФВК в случае тренда первого параметра, а именно: кривая – смещенная оценка ФВК по формуле (29), а кривая 2 – в прямом времени по разработанной методике при сдвиге сигнала первого канала относительно второго.

Анализ представленных изображений и его сравнение с рис. 8 показывает, что тренд приводит к некоторому сглаживанию кривых ФВК, а экстремальные точки кривых практически совпадают для обоих методик. Разность ФВК по различным методикам не превышает ошибки оценивания.

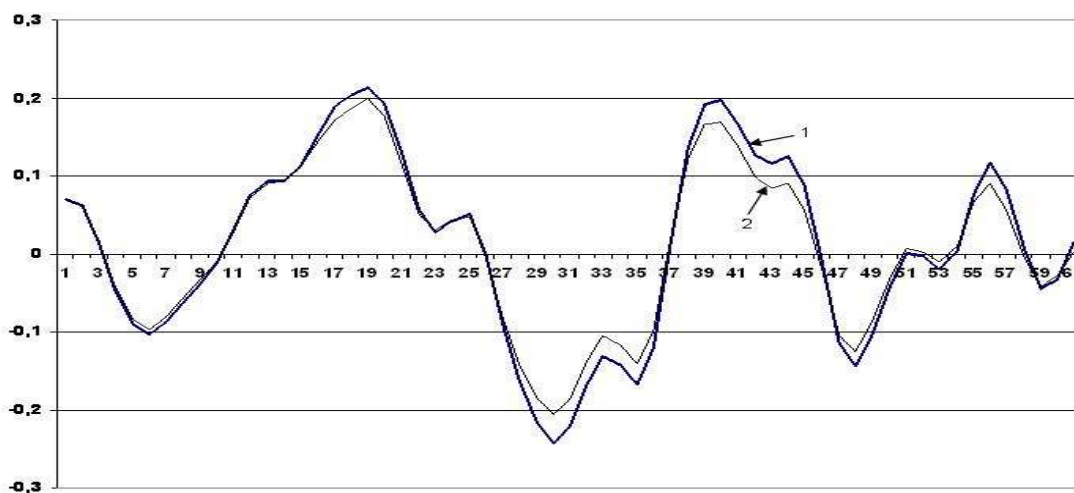


Рис. 8.1. ФВК при сдвиге данных первого канала относительно второго для данных с трендом. Смещенная оценка по формуле (29) – кривая 1; 2 – ФВК, рассчитанная в результате перспективного прогноза по разработанной методике.

Таким образом, проведенный анализ ФВК показывает, что оценки, выполненные по разработанной методике для данных без тренда в пределах ошибки оценивания совпадают с классическими расчетами. Тренд в данных

приводит к сглаживанию и некоторому рассогласованию оценок ФАК, выполненных по данной методике в прямом и обратном времени. Причем величина этого рассогласования превышает ошибку оценивания. Соответствующее рассогласование для ФВК не превышает ошибку оценивания. Отметим, что сделанные выводы оправданы только в случае выполнения критерия $KR_{1/10}$.

4.3. Случай низкочастотного сигнала

Рассмотренные выше результаты были получены в предположении выполнения критерия $KR_{1/10}$. Рассмотрим случай, когда условие между числом отсчетов временного ряда и периодом видимой частоты ФАК не удовлетворяют указанному выше требованию.

Соответствующий двухкомпонентный временной ряд представлен на рис. 9. Анализ экстремальных точек этого изображения показывает, что по второму каналу наблюдается наиболее низкочастотный процесс, насчитывающий 5-6 видимых колебаний функции. По первому каналу таких колебаний наблюдается примерно в два раза больше.

Для получения более подробной частотной структуры сигналов, было выполнено их преобразование Фурье, нормированные изображения которых представлены на рис. 10. Отметим, что сигналы были продолжены нулями до 256 отсчетов, что позволило воспользоваться быстрым преобразованием Фурье (БПФ). Следовательно, при использовании БПФ длительность сигналов (период) принималась равной $T_0=256$ отсчетов. В качестве аргумента на рис. 10 принята величина c/π – число колебаний затухающей гармоник на период наблюдения, т.е. T_0 . Так, например, максимум по первому каналу наблюдается на отсчете, равном $N_{m1}=11$. Это означает, что данная гармоника имеет период в 23.3 отсчета, и укладывается на времени $T_0=256$ примерно 11 раз.

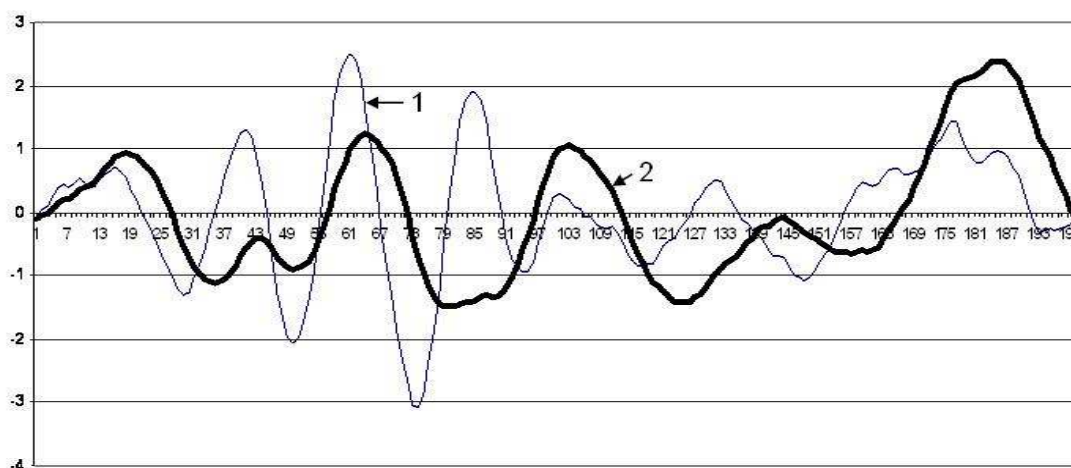


Рис. 9. Низкочастотный сигнал; 1, 2 – соответственно данные по первому и второму каналам.

Следовательно, основная энергонесущая частота по первому каналу имеет значение $\omega_{10}=11$ ц/п, а по второму $\omega_{20}=6$ ц/п. Указанным частотам соответствуют следующие периоды колебаний: для первого канала $T_{10} \approx 23.3$ отсчетов и $T_{20} \approx 42.2$ – для второго.

Как следует из рис.10, энергия по первому каналу практически полностью сосредоточена на основной энергонесущей частоте, т.е. $\omega_{10}=11$ ц/п. В контексте рассматриваемого подхода это означает, что данные представляют свертку практически одиночной затухающей гармоники с некоторым сигналом. В то же время, энергия по второму каналу распределена более неравномерно и имеет значимые отсчеты и на других, более низких, частотах. Так, например, сумма энергий на частотах $\omega_{21}=3$ ц/п и $\omega_{22}=1$ ц/п даже превышает энергию на частоте максимума спектра.

Таким образом, для первого канала критерий $KR_{1/10}$ находится на границе его выполнения, а по второму – наблюдается его существенное нарушение. Рассмотрим влияние этого обстоятельства на оценки ФАК в 2-х канальном варианте.

На рис. 11 представлены оценки ФАК по первому каналу, выполненные по формуле (23) и данной методике в прямом времени. Оценка ФАК в обратном времени не приводится, т.к. она практически совпадает с оценкой ФАК в прямом времени. Анализ этих изображений показывает, что классические смещенные оценки отличаются от оценок по разработанной методике в пределах ошибки оценивания. В то же время стоит отметить, что классиче-

ские смещенные оценки дают более высокое затухание функции на больших задержках сигнала. Анализ особых точек ФАК показывает их удовлетворительное согласование по различным методикам.

Оценки ФАК по второму каналу представлены на рис. 12. Анализ графиков показывает, что только на начальной части этих кривых расхождение между классическими оценками и по разработанной методике является относительно удовлетворительным. На больших задержках сигнала эти расхождения приобретают значимый характер. Отличаются и оценки по методике, вычисленные в прямом и обратном времени. Последнее, вероятно, можно объяснить тем, что при свертке сигналов начинают играть роль граничные условия.

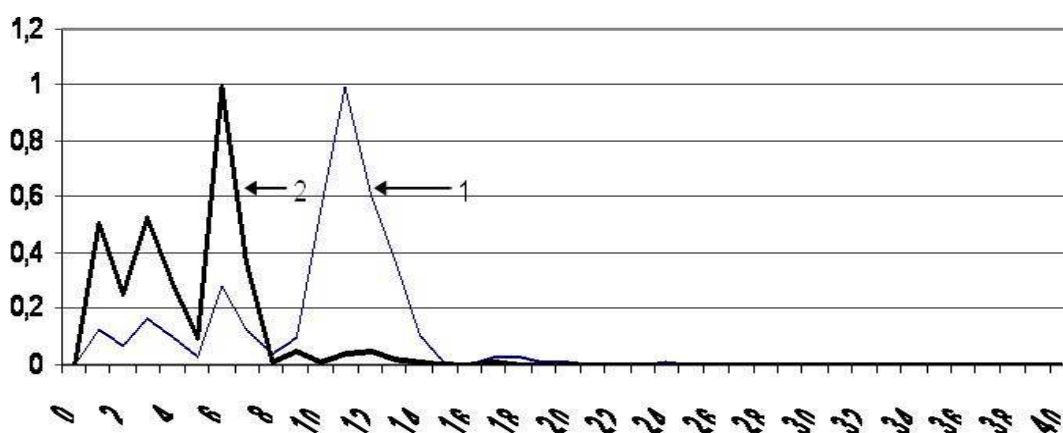


Рис. 10. Спектр Фурье для данных первого (кривая 1) и второго (кривая 2) каналов.

Отчетливо видно, что классические оценки дают более затухающие функции и более высокочастотный состав сигнала, чем по разработанной методике. Более подробное моделирование показывает, что чем больше наблюдаются отклонения данных от критерия $KR_{1/10}$, тем более значимые отличия оценок ФАК, полученных по формуле (23) и разработанной методике.

Анализ случая с низкочастотным сигналом. Смещенные оценки ФАК представляют собой затухающие функции, и поэтому они всегда положительно определены. Однако если случайный процесс $x(t)$ содержит синусоидальные колебания, то эти колебания будут представлены в смещенных оценках ФАК в искаженном виде с уменьшенным периодом и с увеличенной

скоростью затухания. В спектральной области это приводит к сдвигу соответствующих пиков в сторону более высоких частот и к их расширению.

Проанализируем эту ситуацию более подробно. Пусть мы имеем на интервале времени $t \in [0, 1]$ некоторый стационарный эргодический процесс $x(t)$, представляющий собой затухающее гармоническое колебание с периодом $P = 2\pi/\omega$. Тогда истинная ФАК этого процесса может быть представлена в виде [2, 5]

$$g(t) = \sigma^2 \exp(-\alpha t) \cos(\omega t), t \in [0, 1]. \quad (32)$$

Поскольку интервал наблюдений ограничен, то выборочная несмещенная оценка $g(t)$, вычисленная по формуле (22), не будет совпадать с истинной функцией (32), поэтому

$$\hat{g}(t) = g(t) + \mu(t), t \in [0, 1], \quad (33)$$

где $\mu(t)$ – ошибка оценивания ФАК, вызванная конечностью анализируемых данных. Как показано выше, ошибка оценивания $\mu(t)$ возрастает с увеличением сдвига t . Чтобы уменьшить эту ошибку, будем использовать смещенную оценку ФАК типа (23), которую можно представить в непрерывном виде

$$\hat{g}(t) = (1 - t)\hat{g}(t) = (1 - t)g(t) + (1 - t)\mu(t). \quad (34)$$

Пренебрегая здесь ошибкой $(1 - t)\mu(t)$, находим

$$\hat{g}(t) = \sigma^2(1 - t) \exp(-\alpha t) \cos(\omega t), t \in [0, 1]. \quad (35)$$

Выясним теперь, сохраняется ли период гармонического колебания в полученных оценках ФАК? Будем определять этот период как расстояние между последовательными максимумами ФАК. Для истинной оценки ФАК (32) условие экстремума имеет вид

$$dg(t)/dt = -\sigma^2 \exp(-\alpha t) \alpha \cos(\omega t) - \sigma^2 \exp(-\alpha t) \omega \sin(\omega t) = 0, \quad (36)$$

или

$$t_n = \frac{\pi n}{\omega} - \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{\omega}\right) = \frac{\pi n}{\omega} - f(\alpha, \omega), \quad (37)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ – номер экстремума. Обозначая период колебания P_n как расстояние между последовательными одноименными экстремумами (максимумами или минимумами), имеем с помощью соотношения (37):

$$P_n = t_{n+2} - t_n = \frac{2\pi}{\omega} = P = \text{const}, \quad (38)$$

т.е. период осцилляций ФАК (32) постоянен и равен истинному периоду гармонических колебаний исходного случайного процесса. Для смещенной оценки ФАК (35) условие экстремума имеет вид

$$d\hat{g}(t)/dt = -\cos(\omega t) - \alpha(1-t)\cos(\omega t) - (1-t)\omega \sin(\omega t) = 0, \quad (39)$$

или

$$t_n = \frac{\pi n}{\omega} - \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + \alpha(1-t_n)}{\omega(1-t_n)}\right) = \frac{\pi n}{\omega} - f_n(\alpha, \omega), \quad (40)$$

Детальный анализ этого нелинейного уравнения [2] показывает, что $f_n(\alpha, \omega) > 0$ и $f_n(\alpha, \omega) > f_{n+1}(\alpha, \omega)$, поэтому его корни t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) располагаются на оси t неравномерно, все более сдвигаясь к началу интервала $[0, 1]$. В связи с этим период P_n всегда меньше истинного периода осцилляции исходного процесса:

$$P_n = t_{n+2} - t_n = P - [f_{n+2}(\alpha, \omega) - f_n(\alpha, \omega)] < P, \quad (41)$$

а разность между последовательными периодами всегда отрицательна.

Учитывая, что смещенная оценка ФАК считается обычно равнозначной для всех t , сдвиг ее экстремумов, особенно значительный для последних колебаний, неизбежно должен приводить к заниженным значениям среднего периода гармонического колебания, который определяется путем модельной аппроксимации. Очевидно также, что смещенная оценка ФАК дает совершенно искаженное значение для коэффициента затухания, так как она даже незатухающее колебание превращает в затухающее. Соответствующий ей коэффициент всегда больше (по модулю) истинного, что автоматически приводит

к расширению спектрального пика. Оба эти явления особенно отчетливо проявляются на рис. 12.

Анализ спектрограммы (рис. 9, кривая 1) показывает, что энергия первого канала в основном сосредоточена на одной частоте, т.е. сигнал является узкополосным. Спектрограмма второго канала (рис. 9, кривая 2) показывает, что он более широкополосный, чем первый и смещен в сторону низких частот.

Согласно критерия $KR_{1/10}$, оценки ФАК всех основных энергонесущих частот, рассчитанных по классической методике, содержат большие погрешности. Приведенный выше анализ показывает, что классическая смещенная оценка ФАК дает завышенные (по модулю) оценки коэффициента затухания функции и завышенные частоты. Все эти дефекты ФАК, рассчитанные по классической смещенной оценке, отчетливо видны на изображениях (рис.11, 12).

В то же время видно, что оценки ФАК, выполненные по разработанной методике, лишены указанных недостатков и более соответствуют наблюдаемым данным. Более того, эти оценки обладают всеми требуемыми свойствами, предъявляемыми к ФАК. Действительно, как показано в работе [4], оценки ФАК, выполненные по данной методике, представляют взвешенную сумму затухающих экспонент и затухающих по экспоненте гармоник. Как известно [2], эти функции генерируют положительно определенные матрицы и их спектр мощности положительно определен на всех частотах.

В настоящей работе оценки ФАК, ФВК и коэффициентов авторегрессии основаны на аппроксимации последовательности данных регрессионной моделью, которая является прямым аналогом обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [4]. Такой подход позволяет изначально учитывать факт дискретизации данных, что приводит к более адекватному отображению частотного состава сигнала. Но самое главное дает метод оценок статистик по коротким рядам.

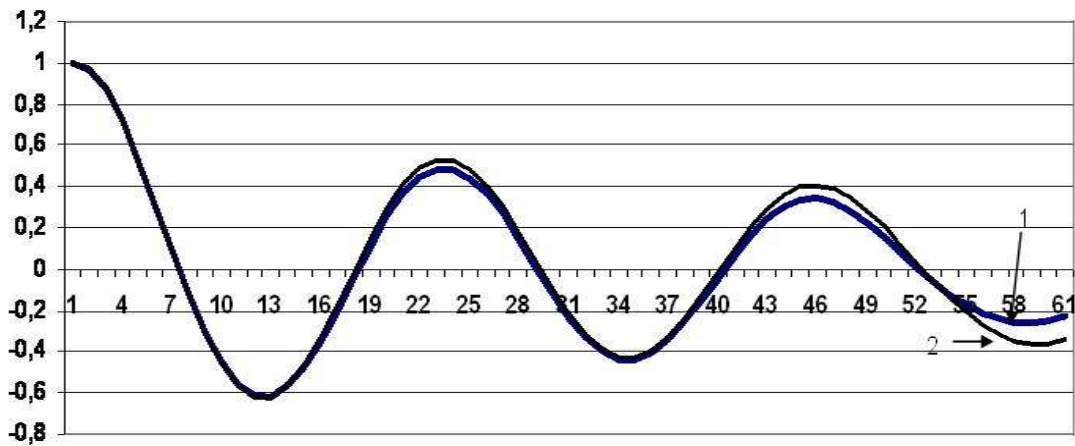


Рис. 11. Оценки ФАК при значении критерия $K R_{1/10}$, близком к порогу; классическая смещенная оценка (1), оценка по методике, выполненная в прямом времени – 2.

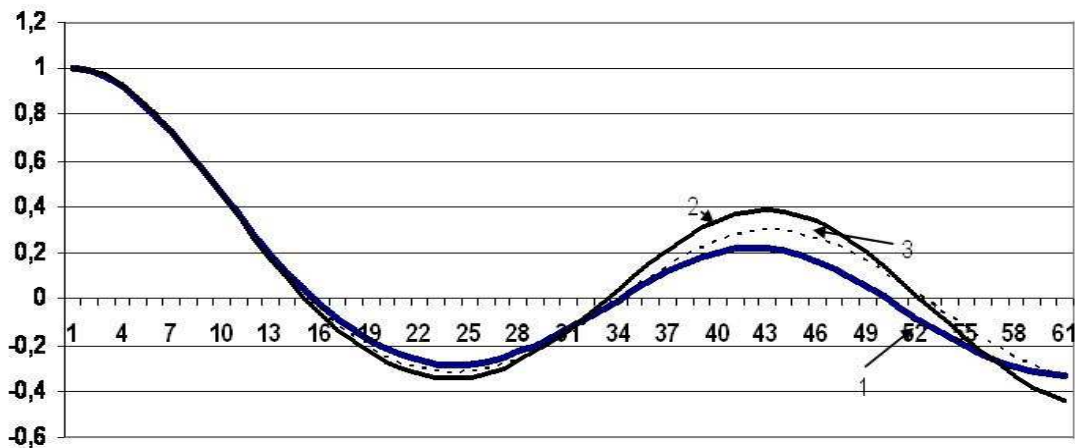


Рис. 12. Оценки ФАК при значении критерия $K R_{1/10}$, превышающего порог; классическая смещенная оценка (1), оценка по методике, выполненная в прямом (2) и обратном времени (3).

Взаимный спектральный анализ на низких частотах. Проанализируем особенности ФВК в случае нарушения критерия $K R_{1/10}$. На рис. 13 представлена ФВК между первым и вторым каналом.

Анализ этого изображения показывает, что в пределах ошибки оценивания все три кривых практически подобны. Большие по модулю значения ФВК

говорит о наличии в обоих сигналах низкочастотной составляющей с довольно высокой энергией. Об этом свидетельствует и спектральная характеристика сигналов (рис. 10). Наблюдается сдвиг этой низкочастотной составляющей сигналов по каналам, составляющий 5 отсчетов.

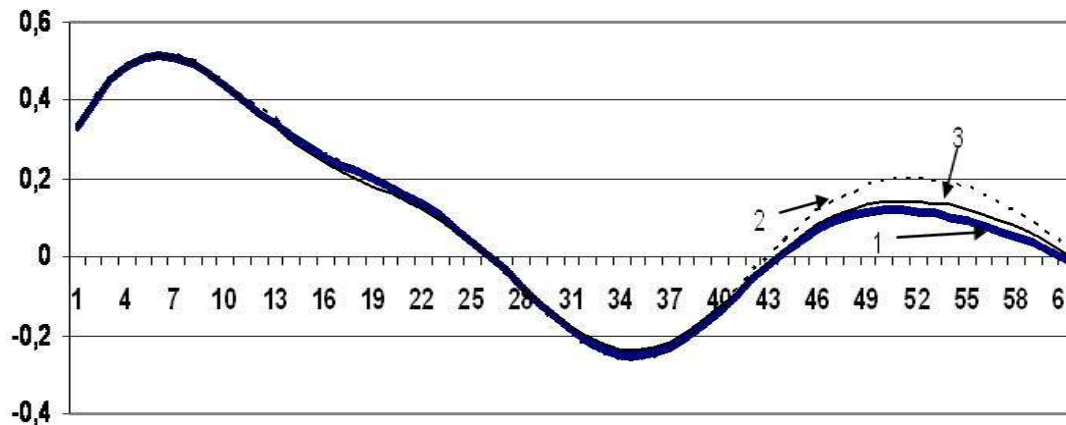


Рис. 13. ФВК между первым и вторым каналами. Классическая смещенная оценка (1), по методике в прямом (2) и обратном (3) времени.

Отметим лишь более сильное затухание функции и ее смещение в область высоких частот, оцененное по классической методике, по сравнению с предлагаемыми оценками. Объяснить этот эффект, очевидно, можно теми же причинами, что и для ФАК.

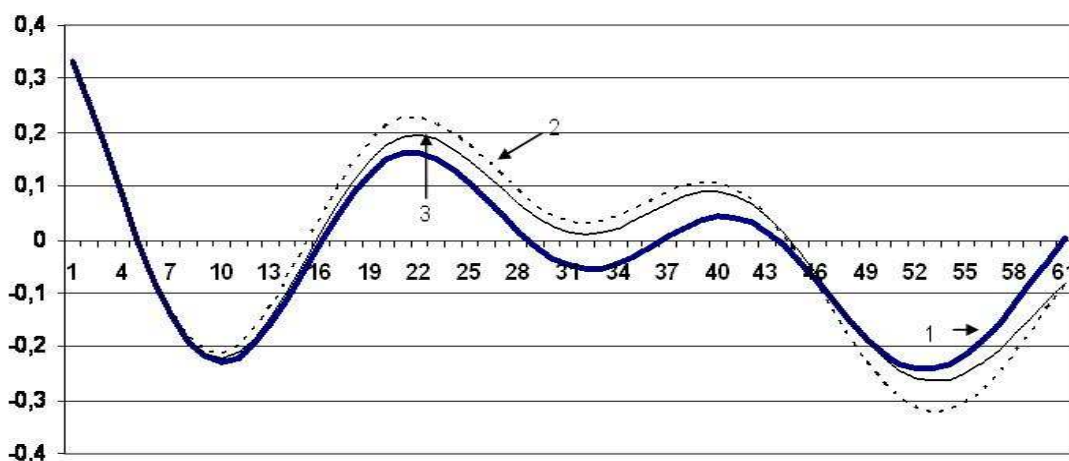


Рис. 14. ФВК между вторым и первым каналами. Классическая смещенная

оценка (1), по методике в прямом (2) и обратном (3) времени.

На рис. 14 изображена ФВК между вторым и первым каналами. Анализ этого изображения показывает, что здесь представлено распределение по каналам более высокочастотных составляющих сигнала. Из анализа изображения видно, что энергия высокочастотных составляющих более низкая, чем низкочастотных компонент. Кроме того, отсутствует задержка высокочастотной составляющей сигнала по разным каналам. В целом, учитывая ошибку оценивания, ФВК по разным методикам являются относительно подобными функциями.

5. Заключение

Как следует из приведенных исследований, предложенные оценки ФАК и ФВК, при выполнении критерия $KR_{1/10}$ и стационарности временного ряда по статистикам второго порядка соответствует классическим смещенным оценкам этих параметров. Разработан метод обнаружения тренда по статистикам второго порядка, основанный на неравноправности оценок параметров линейной модели в прямом и обратном времени.

При нарушении требований критерия $KR_{1/10}$, область идентичности оценок функций, рассчитанных по классической смещенной модели и разработанной методике уменьшается. При этом степень рассогласования этих оценок увеличивается по мере ухудшения условий выполнения критерия.

В отличие от классических методов оценок ФАК и ФВК, разработанный подход позволяет диагностировать в данных тренд статистик второго порядка. Гибкий и мощный аппарат ОДУ, используемый в настоящей работе позволил не только на принципиально новой основе решить задачу оценки статистик второго порядка, но и продвинул ее решение для коротких выборок.

Выполненные исследования и сравнения результатов являются частным случаем разработанного метода аппроксимации линейной векторной авторегрессии. Хорошее совпадение оценок статистик второго порядка по разработанной методике с классическими вычислениями при выполнении требований стационарности временного ряда по статистикам второго порядка и критерия $KR_{1/10}$ свидетельствует о адекватности оценок коэффициентов авторегрессии.

Сделанные сравнения позволяют утверждать, что разработан метод адекватной оценки как статистик второго порядка, так и коэффициентов авторе-

грессии для векторных временных рядов.

Список литературы

- [1] Блейхунд Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989.
- [2] Губанов В.С. Обобщенный метод наименьших квадратов. СПб.: Наука, 1997.
- [3] Драница Ю.П. Об одном методе моделирования нестационарных динамических систем и процессов. // Вестник МГТУ. Тр. Мурман. гос. технич. ун-та. Т. 3, N 1, 2000.
- [4] Драница Ю.П., Драница А.Ю., Алексеевская О.В. Задача корректной оценки и алгоритмы манипулирования функцией автокорреляции на основе линейной модели. // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. Тверь, 2009. Выпуск №3 (14). С. 67-80.
- [5] Жуковский Е.Е., Киселева Т.Л., Мандельштам С.М. Статистический анализ случайных процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1976.
- [6] Ф. Клаербоут Джон Теоретические основы обработки геофизической информации. М.: Недра, 1981.
- [7] Котюк А.Ю., Ольшевский В.В., Цветков Э.И. Методы и аппаратура для анализа характеристик случайных процессов. М.: Энергия, 119 с., 1967.
- [8] Макузе Ю. И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ. М.: Недра, 1989.
- [9] С.Л. Марпл-мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
- [10] Рао С.П. Линейные статистические методы и их применение М.: Наука, 1968.
- [11] Рожков В.А., Трапезников Ю.А. Вероятностные модели океанологических процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1990.

- [12] Тербиж В.Ю. Введение в статистическую теорию обратных задач. М.: Физматлит, 2005.
- [13] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.