ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2014
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

О ГРУППОВОМ АНАЛИЗЕ ГОЛОМОРФНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.Н. Горбузов

Гродненский государственный университет
230023, Гродно, ул. Ожешко, 22
e-mail: gorbuzov@grsu.by

В.Ю. Тыщенко

Гродненский государственный университет
230023, Гродно, ул. Ожешко, 22
e-mail: valentinet@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются вещественные голоморфные дискретные динамические системы, образованные одним биголоморфизмом. В статье получены функциональные представления для произвольных абсолютных и относительных инвариантов дискретных динамических систем данного класса. Описан алгоритм построения всего множества голоморфных систем уравнений Пфаффа (в том числе и вполне интегрируемых), допускающих заданный биголоморфизм. Также получен алгоритм построения всего множества голоморфных автономных систем уравнений в полных дифференциалах (в том числе и вполне разрешимых), допускающих заданный биголоморфизм. Выполнено построение всего множества локальных однопараметрических групп Ли, допускаемых исследуемым классом дискретных динамических систем. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Abstract

We consider real holomorphic discrete dynamic systems generated by one biholomorphysm. For arbitrary absolute and relative invariants of discrete dynamic systems of a given class functional representations are received. The algorithm of construction of the whole set of holomorphic systems of Pfaffian equations (including completely integrated) admitting the given biholomorphism is described. In the paper the algorithm of construction of the whole set of holomorphic systems of autonomous equations in total differentials (including completely solvable) admitting the given biholomorphism is described. The construction of the whole set of local one-parameter Lie groups assumed by the investigated class of discrete dynamic systems is fulfilled. The examples illustrating the obtained results are given.

Для дифференциальных уравнений основы теории группового анализа были заложены С. Ли [1] и за весь период исследования было получено достаточно большое количество результатов (см., например, монографии [2 – 5]). В то же время аналогичные задачи для дискретных динамических систем почти не рассматривались. В настоящей работе предметом исследования будут являться дискретные динамические системы, образованные одним биголоморфизмом.

1. Постановка задачи и основные понятия. Рассмотрим дискретную динамическую систему (D), образованную биголоморфизмом

$$f : U \to \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

где область $U \subset \mathbb{R}^n,\ n > 1$.

Определение 1.1. *Дискретную динамическую систему* (D) *будем называть* ***положительно ориентированной****, если положительно ориентирован определяющий ее биголоморфизм* (1.1). *В противном случае дискретную динамическую систему* (D) *будем называть* ***отрицательно ориентированной****.*

Определение 2.1. *Будем говорить, что дискретная динамическая система* (D) **допускает** *однопараметрическую группу биголоморфизмов (локальную группу Ли) g_α, определяемую соотношениями $g(x, \alpha)$, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \Theta \subset \mathbb{R}$, $g(x, \alpha_0) = x$, $\forall x \in U$, $\alpha_0 \in \Theta$, с инфинитезимальным оператором $\mathfrak{L}(x, \partial x) = (\xi(x), \partial x)$, где $\xi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_n(x))$, $\partial x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, $(\cdot, \cdot)$ есть операция скалярного произведения, если определяющий ее биголоморфизм* (1.1) *инвариантен относительно этой группы, т.е. $g_\alpha \circ f \circ g_\alpha^{-1}(x) = f(x)$, $\forall x \in U$.*

Предложение 1.1 [6]. *Дискретная динамическая система* (D) *допускает группу Ли g_α с инфинитезимальным оператором $\mathfrak{L}$ тогда и только тогда, когда имеют место тождества*

$$(\mathfrak{L}f(x), \partial x) = (\mathfrak{L}x|_{x=f(x)}, \partial x),\ \forall x \in U. \tag{2.1}$$

Определение 3.1. *Голоморфную функцию $I : U \to \mathbb{R}$ будем называть* **абсолютным инвариантом** *дискретной динамической системы* (D), *если $I(f(x)) = I(x),\ \forall x \in U$.*

Определение 4.1. *Инъективную (по всем существенно входящим в задание аргументам при фиксированных значениях остальных) голоморфную функцию $I : U \to \mathbb{R}$ будем называть* **невырожденным абсолютным инвариантом** *дискретной динамической системы* (D), *если $I(f(x)) = I(x),\ \forall x \in U$. При этом наименьшее возможное число функционально независимых невырожденных абсолютных инвариантов системы* (D) *будем называть* **базисом невырожденных абсолютных инвариантов**, *а само число –* **размерностью базиса**.

Определение 5.1. *Абсолютный инвариант дискретной динамической системы* (D), *не являющийся невырожденным, будем называть* **вырожденным**.

Определение 6.1. *Дискретную динамическую систему* (D) *будем называть* **невырожденной**, *если биголоморфизм $f(x) \neq id$ – тождественному отображению, $\forall x \in U$.*

Предложение 2.1 [6]. *Размерность базиса невырожденных абсолютных инвариантов невырожденной дискретной динамической системы* (D) *равна $n-1$.*

Лемма 1.1. *Пусть*

$$I_k,\ k = \overline{1, n-1}, \tag{3.1}$$

есть базис невырожденных абсолютных инвариантов невырожденной положительно ориентированной дискретной динамической системы (D). *Тогда всякий другой абсолютный инвариант данной дискретной динамической системы имеет вид $\Psi(I_1, \ldots, I_{n-1}, cos(2\pi g_n), sin(2\pi g_n))$, где Ψ есть голоморфная функция своих аргументов, g есть биголоморфизм, переводящий биголоморфизм* (1.1) *в биголоморфизм*

$$x_i,\ i = \overline{1, n-1},\ x_n + 1, \tag{4.1}$$

g_n есть n–я компонента биголоморфизма g.

Доказательство. В силу хода доказательства леммы 5.5 из [6] в некоторой окрестности $O(x^0)$ точки $x^0 \in U$ биголоморфизм (1.1) биголоморфно эквивалентен заданному в окрестности начала координат пространства $\mathbb{R}^n$ биголоморфизму (4.1), имеющему невырожденные абсолютные инварианты $x_i,\ i = \overline{1, n-1}$. Нетрудно видеть, что любой абсолютный инвариант невырожденной дискретной динамической системы, образованной биголоморфизмом (4.1), имеет вид $\Phi(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_n))$, где Φ есть голоморфная функция своих аргументов, а φ есть 1–периодическая голоморфная функция. Учитывая тот факт, что любая голоморфная периодическая функция разлагается в сходящийся к ней тригонометрический ряд Фурье, приходим к представлению из данной леммы.

Лемма 2.1. *Пусть (3.1) есть базис невырожденных абсолютных инвариантов невырожденной отрицательно ориентированной дискретной динамической системы* (D). *Тогда всякий другой абсолютный инвариант данной дискретной динамической системы имеет вид* $\Psi(I_1, \ldots, I_{n-1}, cos(2\pi g_n), sin(\pi g_n))$, *где* Ψ *есть голоморфная функция своих аргументов,* g *есть биголоморфизм, переводящий биголоморфизм* (1.1) *в биголоморфизм*

$$x_i,\ i = \overline{1, n-1},\ -x_n + 1. \tag{5.1}$$

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей леммы, приходим к выводу, что в некоторой окрестности $O(x^0)$ точки $x^0 \in U$ биголоморфизм (1.1) биголоморфно эквивалентен заданному в окрестности начала координат пространства $\mathbb{R}^n$ биголоморфизму (5.1), имеющему невырожденные абсолютные инварианты $x_i,\ i = \overline{1, n-1}$. Учитывая, что всякая голоморфная функция φ, удовлетворяющая тождеству $\varphi(-x_n + 1) \equiv \varphi(x_n)$, является 2–периодической (это вытекает из соотношений $\varphi(x_n - 1) \equiv \varphi(-x_n)$ и $\varphi(x_n + 1) \equiv \varphi(-x_n)$), аналогично хода доказательства леммы 2.1 получаем, что любой абсолютный инвариант невырожденной дискретной динамической системы, образованной биголоморфизмом (5.1), имеет вид $\Psi(x_1, \ldots, x_{n-1}, cos(2\pi x_n), sin(\pi x_n))$, где Ψ есть голоморфная функция своих аргументов.

Определение 7.1. *Голоморфную функцию* $I : U \to \mathbb{R}$ *будем называть* **относительным инвариантом** *дискретной динамической системы* (D), *если* $I(f(x)) = \Phi(I(x), x),\ \Phi(0, x) = 0,\ \forall x \in U.$

Определение 8.1. *Будем говорить, что относительный инвариант* I *дискретной динамической системы* (D) *имеет* ***вес*** ν, *если* $I(f(x)) = \nu(x)I(x),\ \forall x \in U,$ *голоморфная функция* $\nu : U \to \mathbb{R}$.

Непосредственными вычислениями проверяем справедливость следующих утверждений.

Лемма 3.1. *Частное двух относительных инвариантов с одним и тем же весом является абсолютным инвариантом.*

Лемма 4.1. *Пусть I есть относительный инвариант с весом ν невырожденной положительно ориентированной дискретной динамической системы* (D), *а* (3.1) *есть базис невырожденных абсолютных инвариантов этой системы. Тогда всякий другой относительный инвариант данной дискретной динамической системы с тем же весом имеет вид $I\Psi(I_1, \ldots, I_{n-1}, cos(2\pi g_n), sin(2\pi g_n))$, где Ψ есть голоморфная функция своих аргументов, g есть биголоморфизм, переводящий биголоморфизм* (1.1) *в биголоморфизм* (4.1).

Лемма 5.1. *Пусть I есть относительный инвариант с весом ν невырожденной отрицательно ориентированной дискретной динамической системы* (D), *а* (3.1) *есть базис невырожденных абсолютных инвариантов этой системы. Тогда всякий другой относительный инвариант данной дискретной динамической системы с тем же весом имеет вид $I\Psi(I_1, \ldots, I_{n-1}, cos(2\pi g_n), sin(\pi g_n))$, где Ψ есть голоморфная функция своих аргументов, g есть биголоморфизм, переводящий биголоморфизм* (1.1) *в биголоморфизм* (5.1).

Определение 9.1. *Будем говорить, что голоморфное уравнение Пфаффа*

$$(A(x), dx) = 0, \tag{6.1}$$

(вообще говоря, не являющееся вполне интегрируемым [7, с. 75]*), где $A(x) = (A_1(x), \ldots, A_n(x)),\ dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$,* **допускает** *биголоморфизм* (1.1), *если линейная дифференциальная форма $(A(x), dx)$ инвариантна относительно этого биголоморфизма:*

$$(A(f(x)), df(x)) = (A(x), dx),\ \forall x \in U. \tag{7.1}$$

2. Построение всего множества систем уравнений Пфаффа, допускающих заданный биголоморфизм. Расссмотрим сначала вспомогательную задачу о нахождении всего множества голоморфных уравнений Пфаффа (вообще говоря, не являющихся вполне интегрируемыми), допускающих биголоморфизм (1.1).

На основании базиса (3.1) строим систему линейно несвязанных [2, с. 113

– 114] на области U точных линейных дифференциальных форм

$$dI_k,\ k=\overline{1,n-1}. \tag{1.2}$$

Нетрудно видеть, что все эти линейные дифференциальные формы инвариантны при биголоморфизме (1.1). Возьмем голоморфную функцию $I_n : U \to \mathbb{R}$, функционально независимую с базисом (3.1). В силу этого точные линейные дифференциальные формы

$$dI_k,\ k=\overline{1,n}, \tag{2.2}$$

линейно несвязаны на области U. Рассмотрим произвольную голоморфную на U линейную дифференциальную форму $(A(x),dx)$. Разложим ее по базисным линейным дифференциальным формам (2.2):

$$(A(x),dx)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)dI_k(x),\ \forall x\in U, \tag{3.2}$$

где голоморфные функции $a_k : U \to \mathbb{R},\ k=\overline{1,n}$. Учитывая указанную выше инвариантность при биголоморфизме (1.1) линейных дифференциальных форм (1.2), имеем следующие соотношения: $(A(f(x)),df(x)) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k(f(x))dI_k(x)+a_n(f(x))dI_n(f(x)),\ \forall x\in U$. Тогда на основании инвариантности при биголоморфизме (1.1) линейной дифференциальной формы $(A(x),dx)$ с учетом (5.1) получаем, что

$$\begin{gathered} a_k(f(x))=a_k(x),\ \forall x\in U,\ k=\overline{1,n-1}; \\ a_n(f(x))dI_n(f(x))=a_n(x)dI_n(x),\ \forall x\in U. \end{gathered} \tag{4.2}$$

На основании первых $n-1$ тождеств из (4.2) приходим к выводу, что голоморфные функции $a_k,\ k=\overline{1,n-1}$, являются абсолютными инвариантами биголоморфизма (1.1), а значит, в случае положительно ориентированной дискретной динамической системы (D) в силу леммы 1.1 имеют место представления

$$\begin{gathered} a_k(x)=b_k(I_1(x),\ldots,I_{n-1}(x),cos(2\pi g_n(x)),sin(2\pi g_n(x))), \\ \forall x\in U,\ k=\overline{1,n-1}, \end{gathered} \tag{5.2}$$

а в случае отрицательно ориентированной дискретной динамической системы (D) в силу леммы 2.1 имеют место представления

$$\begin{gathered} a_k(x)=b_k(I_1(x),\ldots,I_{n-1}(x),cos(2\pi g_n(x)),sin(\pi g_n(x))), \\ \forall x\in U,\ k=\overline{1,n-1}. \end{gathered} \tag{6.2}$$

В силу последнего тождества из (4.2) приходим к выводу, что существует такая голоморфная функция $\mu : U \to \mathbb{R}$, что $dI_n(f(x)) = \mu(x)dI_n(x),\ \forall x \in U$. Поэтому имеем $a_n(f(x))\mu(x) = a_n(x),\ \forall x \in U$. Это означает, что голоморфная функция a_n есть относительный инвариант биголоморфизма (1.1) с весом μ^{-1}. Поэтому в случае положительно ориентированной дискретной динамической системы (D) в силу леммы 4.1 имеют место представления

$$a_n(x) = b(x)b_n(I_1(x), \dots, I_{n-1}(x), cos(2\pi g_n(x)), sin(2\pi g_n(x))),\ \forall x \in U, \quad (7.2)$$

а в случае отрицательно ориентированной дискретной динамической системы (D) в силу леммы 5.1 имеют место представления

$$a_n(x) = b(x)b_n(I_1(x), \dots, I_{n-1}(x), cos(2\pi g_n(x)), sin(\pi g_n(x))),\ \forall x \in U, \quad (8.2)$$

где голоморфная функция $b : U \to \mathbb{R}$ есть какой–либо относительный инвариант биголоморфизма (1.1) с весом μ^{-1}.

В итоге мы пришли к следующим утверждениям.

Теорема 1.2. *Для того, чтобы голоморфное уравнение Пфаффа* (6.1) *допускало положительно ориентированный биголоморфизм* (1.1) *с базисом невырожденных абсолютных инвариантов* (3.1), *необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение* (3.2) *при представлениях* (5.2) *и* (7.2).

Теорема 2.2. *Для того, чтобы голоморфное уравнение Пфаффа* (6.1) *допускало отрицательно ориентированный биголоморфизм* (1.1) *с базисом невырожденных абсолютных инвариантов* (3.1), *необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение* (3.2) *при представлениях* (6.2) *и* (8.2).

При $m = n - 1$ система m линейно несвязанных голоморфных уравнений Пфаффа всегда вполне интегрируема. В случае же $m < n - 1$ отметим, что для нахождения всего множества вполне интегрируемых систем m линейно несвязанных голоморфных уравнений Пфаффа к теоремам 1.2 и 2.2 для полной интегрируемости надо добавить ограничения из [7, с. 91].

Кроме того, заметим, что одновременно с множеством уравнений Пфаффа (6.1), допускающих биголоморфизм (1.1) с базисом невырожденных абсолютных инвариантов (3.1), мы также получили множество голоморфных ковекторных полей A, инвариантных относительно этого биголоморфизма.

Пример 1.2. Рассмотрим положительно ориентированный биголоморфизм f_+, определяемый соотношениями $x_1 - 1,\ x_2 + 2$. В данном случае сопрягающий с биголоморфизмом $x_1,\ x_2 + 1$, вида (4.1) биголоморфизм g имеет вид $2x_1 + x_2,\ x_1 + x_2$, базис абсолютных невырожденных инвариантов

– вид $I_1 = 2x_1 + x_2$. В качестве голоморфной функции I_2 выберем $exp(x_2)$. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что $exp(-x_2)$ есть относительный инвариант биголоморфизма f_+ с весом $\mu^{-1} = exp(-2)$. Поэтому на основании теоремы 1.2 приходим к выводу, что все голоморфные уравнения Пфаффа, допускающие вышеприведенный биголоморфизм, имеют вид $a_1(2x_1+x_2, cos(2\pi(x_1+x_2)), sin(2\pi(x_1+x_2)))(2dx_1+dx_2)+exp(-x_2)a_2(2x_1+x_2, cos(2\pi(x_1+x_2)), sin(2\pi(x_1+x_2)))d(exp(x_2)) = 0$, где a_1 и a_2 есть произвольные голоморфные функции своих аргументов.

Пример 2.2. Рассмотрим отрицательно ориентированный биголоморфизм f_-, определяемый соотношениями $3x_1 + 2x_2 - 1,\ -4x_1 - 3x_2 + 2$. В данном случае сопрягающий с биголоморфизмом $x_1,\ -x_2 + 1$, вида (5.1) биголоморфизм g имеет вид $2x_1+x_2,\ x_1+x_2$, базис абсолютных невырожденных инвариантов – вид $I_1 = 2x_1 + x_2$. В качестве голоморфной функции I_2 выберем $sin(2\pi(x_1 + x_2))$. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что $sin(2\pi(x_1 + x_2))$ есть относительный инвариант биголоморфизма f_- с весом $\mu^{-1} = -1$. Поэтому на основании теоремы 2.2 приходим к выводу, что все голоморфные уравнения Пфаффа, допускающие вышеприведенный биголоморфизм, имеют вид $a_1(2x_1+x_2, cos(2\pi(x_1+x_2)), sin(\pi(x_1+x_2)))(2dx_1+dx_2)+sin(2\pi(x_1 + x_2))a_2(2x_1 + x_2, cos(2\pi(x_1 + x_2)), sin(\pi(x_1 + x_2)))d(sin(2\pi(x_1 + x_2))) = 0$, где a_1 и a_2 есть произвольные голоморфные функции своих аргументов.

3. Построение всего множества однопараметрических локальных групп Ли, допускаемых заданной дискретной динамической системой. Сначала рассмотрим вспомогательную задачу о нахождении всего множества голоморфных векторных полей

$$V(x) = (V_1(x), \ldots, V_n(x)),\ \forall x \in U, \tag{1.3}$$

допускающих биголоморфизм (1.1) (т. е. когда данные векторные поля инвариантны относительно этого биголоморфизма).

Из предыдущего пункта возьмем вспомогательную совокупность n базисных линейно несвязанных голоморфных ковекторных полей $F_k,\ k = \overline{1,n}$, инвариантных относительно биголоморфизма (1.1), соответствующих линейным дифференциальным формам $b(x)dI_n(x),\ dI_k(x),\ \forall x \in U,\ k = \overline{1, n-1}$. Поставим в биективное соответствие [7, с. 29] данной совокупности ковекторных полей множество n базисных линейно несвязанных голоморфных векторных полей $V_l,\ l = \overline{1,n}$, таким образом, что

$$(F_k(x), V_l(x)) = \delta_k^l,\ \forall x \in U,\ k = \overline{1,n},\ l = \overline{1,n}, \tag{2.3}$$

где δ_k^l есть символ Кронекера. Непосредственными вычислениями получаем следующие условия инвариантности ковекторных полей (определение 9.1) $F_k,\ k=\overline{1,n}$, и векторных полей (предложение 1.1) $V_l,\ l=\overline{1,n}$, при биголоморфизме (1.1):

$$\begin{gathered} J^T(f(x))F_k(f(x))=F_k(x),\ \forall x\in U,\ k=\overline{1,n}, \\ J^{-1}(f(x))V_l(f(x))=V_l(x),\ \forall x\in U,\ l=\overline{1,n}, \end{gathered} \tag{3.3}$$

где J есть матрица Якоби биголоморфизма (1.1), J^{-1} – матрица, обратная матрице J, T есть операция транспонирования. Теперь с учетом инвариантности при биголоморфизме (1.1) ковекторных полей $F_k,\ k=\overline{1,n}$, а также соотношений (2.3) и (3.3), приходим к выводу, что и векторные поля $V_l,\ l=\overline{1,n}$, также инвариантны при этом биголоморфизме. В силу базисности векторных полей $V_l,\ l=\overline{1,n}$, получаем, что любое голоморфное векторное поле V можно представить в виде

$$V(x)=\sum_{l=1}^{n}c_l(x)V_l(x),\ \forall x\in U, \tag{4.3}$$

где голоморфные функции $c_l:U\to\mathbb{R},\ l=\overline{1,n}$. Как и в предыдущем пункте, имеем, что при инвариантности голоморфного векторного поля V при биголоморфизме (1.1) в случае его положительной ориентации имеют место представления

$$\begin{gathered} c_l(x)=c_l(I_1(x),\ldots,I_{n-1}(x)cos(2\pi g_n(x)),sin(2\pi g_n(x))), \\ \forall x\in U,\ l=\overline{1,n}, \end{gathered} \tag{5.3}$$

и представления

$$\begin{gathered} c_l(x)=c_l(I_1(x),\ldots,I_{n-1}(x)cos(2\pi g_n(x)),sin(\pi g_n(x))), \\ \forall x\in U,\ l=\overline{1,n}, \end{gathered} \tag{6.3}$$

в случае отрицательной ориентации. Таким образом, мы получили утверждения.

Теорема 1.3. *Для того, чтобы голоморфное векторное поле* (1.3) *допускало положительно ориентированный биголоморфизм* (1.1) *с базисом невырожденных абсолютных инвариантов* (3.1), *необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение* (4.3) *при представлении* (5.3).

Теорема 2.3. *Для того, чтобы голоморфное векторное поле* (1.3) *допускало отрицательно ориентированный биголоморфизм* (1.1) *с базисом невырожденных абсолютных инвариантов* (3.1), *необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение* (4.3) *при представлении* (6.3).

На основании одного голоморфного векторного поля V, инвариантного относительно биголоморфизма (1.1), строим автономную обыкновенную дифференциальную систему $\dfrac{dx}{dt} = V(x)$, допускающую этот биголоморфизм. В случае же $m > 1$ голоморфных векторных полей $V_j,\ j = \overline{1,m}$, инвариантных относительно биголоморфизма (1.1), для построения всего множества вполне разрешимых [5, с. 17] автономных систем уравнений в полных дифференциалах $dx = \sum_{j=1}^{m} V_j(x)dt_j$, допускающих данный биголоморфизм, надо добавить условия полной разрешимости [5, с. 19]. Отметим также, что на основе голоморфных векторных полей, инвариантных относительно биголоморфизма (1.1), можно также строить голоморфные линейные однородные системы уравнений в частных производных первого порядка, допускающие этот биголоморфизм.

И, наконец, на основании предложения 1.1 и теорем 1.3 и 2.3 имеем такие утверждения.

Теорема 3.3. *Для того, чтобы положительно ориентированная дискретная динамическая система* (D)*допускала локальную группу Ли* g_α, *необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение* (4.3) *при представлении* (5.3).

Теорема 4.3. *Для того, чтобы отрицательно ориентированная дискретная динамическая система* (D)*допускала локальную группу Ли* g_α, *необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение* (4.3) *при представлении* (6.3).

Пример 1.3. Рассмотрим положительно ориентированный биголоморфизм f_+ из примера 1.2. В качестве базисных линейных дифференциальных форм, инвариантных относительно этого биголоморфизма, возьмем следующие: $2dx_1 + dx_2,\ exp(-x_2)d(exp(x_2))$. На их основе строим ковекторные поля $F_1(x) = (2,1),\ F_2(x) = (0,1)$. Непосредственными вычислениями на основании соотношений (2.3) получаем инвариантные относительно нашего биголоморфизма базисные векторные поля V_1 и V_2, определяемые линейными дифференциальными операторами $(V_1(x), \partial x) = \dfrac{1}{2}\partial_{x_1},\ (V_2(x), \partial x) = -\dfrac{1}{2}\partial_{x_1} + \partial_{x_2}$, где $\partial x = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$. Теперь на основании теоремы 1.3 приходим к выводу, что все голоморфные векторные поля, допускающие рассматриваемый нами биголоморфизм, определяются линейным дифференциальным оператором $(V(x), \partial x) = c_1(2x_1 + x_2, cos(2\pi(x_1 + x_2)), sin(2\pi(x_1 + x_2)))\dfrac{1}{2}\partial_{x_1} + c_2(2x_1 +$

$x_2, cos(2\pi(x_1+x_2)), sin(2\pi(x_1+x_2)))(-\frac{1}{2}\partial_{x_1}+\partial_{x_2})$, где c_1 и c_2 есть произвольные голоморфные функции своих аргументов. В итоге в силу теоремы 3.3 имеем, что дискретная динамическая система, определяемая биголоморфизмом f_+, допускает однопараметрическую локальную группу Ли, определяемую предыдущим линейным дифференциальным оператором.

Пример 2.3. Рассмотрим отрицательно ориентированный биголоморфизм f_- из примера 2.2. В качестве базисных линейных дифференциальных форм, инвариантных относительно этого биголоморфизма, возьмем следующие: $2dx_1 + dx_2$, $sin(2\pi(x_1 + x_2))d(sin(2\pi(x_1 + x_2)))$. На их основе строим ковекторные поля $F_1(x) = (1, -1)$, $F_2(x) = (-\frac{1}{\pi sin(4\pi(x_1+x_2))}, \frac{2}{\pi sin(4\pi(x_1+x_2))})$. Непосредственными вычислениями на основании соотношений (2.3) получаем инвариантные относительно нашего биголоморфизма базисные векторные поля V_1 и V_2, определяемые линейными дифференциальными операторами $(V_1(x), \partial x) = \partial_{x_1} - \partial_{x_2}$, $(V_2(x), \partial x) = -\frac{1}{\pi sin(4\pi(x_1+x_2))}\partial_{x_1} + \frac{2}{\pi sin(4\pi(x_1+x_2))}\partial_{x_2}$. Теперь на основании теоремы 2.3 приходим к выводу, что все голоморфные векторные поля, допускающие рассматриваемый нами биголоморфизм, определяются линейным дифференциальным оператором $(V(x), \partial x) = c_1(2x_1 + x_2, cos(2\pi(x_1 + x_2)), sin(\pi(x_1 + x_2)))(\partial_{x_1} - \partial_{x_2}) + c_2(2x_1 + x_2, cos(2\pi(x_1 + x_2)), sin(\pi(x_1 + x_2)))(-\frac{1}{\pi sin(4\pi(x_1+x_2))}\partial_{x_1} + \frac{2}{\pi sin(4\pi(x_1+x_2))}\partial_{x_2})$, где c_1 и c_2 есть произвольные голоморфные функции своих аргументов. В итоге в силу теоремы 4.3 имеем, что дискретная динамическая система, определяемая биголоморфизмом f_-, допускает однопараметрическую локальную группу Ли, определяемую предыдущим линейным дифференциальным оператором.

Литература

[1] Lie S. Über gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatted // Ark. math. og naturvidenskab. – 1882. – Bd. 7, H. 4. – S. 443 – 444.

[2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[3] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. – Москва: Наука, 1983. – 280 с.

[4] Зайцев В. Ф., Флегонтов А. В. Дискретно–групповые методы интегри-

рования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Ленинград: ЛИИ-АН, 1991. – 240 с.

[5] Горбузов В. Н. Интегралы дифференциальных систем. – Гродно: ГрГУ, 2006. – 447 с.

[6] Тыщенко В. Ю. Инварианты голоморфных многомерных дискретных динамических систем // Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.math.spbu.ru/diffjournal). – 2013. – № 2. – С. 12 – 50.

[7] Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. – Москва – Ленинград: ГИТТЛ, 1947. – 355 с.