

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ  
N 2, 2016

Электронный журнал,  
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010  
ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>  
e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Групповой анализ дифференциальных уравнений

Моделирование динамических систем

Методика преподавания

Информационные материалы

## НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

## СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

## И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Материалы научной ЮБИЛЕЙНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ГЕРЦЕНОВСКИЕ  
ЧТЕНИЯ – 2016»,

посвящённой 70-летию профессора

Валентина Фёдоровича Зайцева

11–15 апреля 2016 г.

# LXIX

Санкт-Петербург

2016

**Редакционная коллегия:** д. ф. -м. н., профессор **Зайцев В. Ф.**  
д. ф. -м. н., профессор **Будаев В. Д.**  
д. ф. -м. н., профессор **Флегонтов А. В.**

**Рецензенты:** д. ф. -м. н., профессор **Ханин С. Д.**  
д. ф. -м. н., профессор **Широков Н. А.**

ISBN 978-5-8064-2234-8

Материалы 69-ой научной конференции “Герценовские чтения”, проходившей при кафедре математического анализа и кафедре компьютерной инженерии и программотехники РГПУ им. А. И. Герцена 11–15 апреля 2016 г. Представленные статьи подготовлены по наиболее содержательным докладам четырёх основных секций: “Современные проблемы теории дифференциальных уравнений”, “Современные проблемы теории функций и функционального анализа”, “Актуальные проблемы математического образования” и “Актуальные информационные системы и технологии моделирования”.

Результаты работ рекомендуется использовать при чтении спецкурсов, а также как материал для научной работы аспирантов, магистрантов, студентов старших курсов математических факультетов.

# История и современность

УДК 929

## АРЕШКИН ГЕОРГИЙ ЯКОВЛЕВИЧ (К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

Алексюк В. Н., Исаков В. Н., Попов В. А.  
Сыктывкарский государственный университет  
им. Питирима Сорокина  
Сыктывкар

**Aleksyuk V. N., Isakov V. N., Popov V. A. Areshkin George Yakovlevich (To centenary anniversary of his birth).** About the life, activity and creativity of Professor G. Ya. Areshkin.

О жизни, деятельности и творчестве профессора Г. Я. Арешкина.

Весьма краткие сведения о Г. Я. Арешкине даны в фундаментальных работах [1], [2] и [3]. В обзорной статье [4] ему посвящён один абзац. Персонально о нём нашлись лишь две публикации: [5] – о руководстве им научным семинаром аспирантов, и [6].

Георгий Яковлевич Арешкин родился 18(5) мая 1916 г. в городе Тифлис (ныне Тбилиси). Здесь же он провел детские и юношеские годы, получил образование и стал кандидатом наук. Его родители: отец – Арешкин Яков Семёнович (1883–1969), кадровый рабочий (столяр-краснодеревщик), мать – Арешкина Тамара Иосифовна (1884–1970), домохозяйка. В семье было трое детей, из них Георгий был младшим.

Хотя учёба в школе давалась Георгию легко, вначале он не помышлял о занятиях наукой. С целью скорейшего получения рабочей профессии в 1930 г. он поступил в Тбилисский железнодорожный техникум, который окончил с отличием в 1933 году. С дипломом техника 1-го ранга по изысканию и строительству железнодорожных путей он был направлен в Закавказский научно-исследовательский институт искусственных сооружений. Поработав там один год в должности техника-испытателя в отделе сопротивления материалов, в 1934 г. он стал студентом горного факультета Грузинского политехнического института.

В политехническом институте ярко проявились математические способности Георгия. В 1936 году, когда он оканчивал второй курс, одна из преподавателей убедила его перейти учиться в Тбилисский государственный уни-

верситет. Он так и сделал. Отметим при этом, что хотя имелась возможность поступить сразу на второй курс университета, Георгий проявил свой характер и решил получать университетское математическое образование с первого курса.

В университете Г. Я. Арешкин учился успешно (был сталинским стипендиатом), окончил его с отличием в 1941 г. и был направлен в аспирантуру Математического института имени А. М. Размадзе АН Грузинской ССР.



Началась Великая Отечественная война. По состоянию здоровья (полученная в детстве травма позвоночника) Г. Я. Арешкин не был на фронте, однако все тяготы трудовых будней ради Победы и ради выживания семьи в полной мере коснулись и его. В частности, он вел преподавательскую работу в Тбилисском госуниверситете (1941–1943), в Грузинском политехническом

институте (1943–1948) и в Тбилисском пединституте (1944–1949). В то же время, как аспирант, он продолжал осваивать необходимые учебные курсы и работать по теме кандидатской диссертации.

В аспирантуре молодого ученого привлекло одно из актуальнейших направлений математических исследований того времени – теория меры и интеграла. Интерес к нему резко возрос после появления в начале XX века интеграла и меры Лебега над полем действительных чисел и последовавшего затем потока работ по распространению и обобщению интеграционных идей Лебега на различные классы подынтегральных функций и функций множества. Эта тематика во многом определила направление последующей деятельности Г. Я. Арешкина как учёного и как воспитателя научных кадров.

В 1944 году в журнале “Сообщения АН ГрССР” была опубликована первая его работа, посвященная кратному интегрированию на абстрактных множествах. После окончания аспирантуры и успешной защиты кандидатской диссертации “Вполне аддитивные функции множества и интеграл Лебега–Радона” (1945) он был оставлен в Математическом институте им. А. М. Размадзе в качестве научного сотрудника.

Диссертационное исследование Г. Я. Арешкина вместе с последующими его результатами по условиям предельного перехода под знаком интеграла Лебега–Радона (1949) и изучению криволинейного интеграла Лебега (1950) сыграли заметную роль в развитии теории интегрирования в целом. Об этом, в частности, говорится в [7, с. 538] и [8, с. 382].

После защиты диссертации Г. Я. Арешкин основное внимание начал уделять проблеме структурирования компактных и локально-бикompактных топологических пространств, а также локально-компактных топологических групп. В течение пяти лет, с 1948 года по 1953 год, он получил ряд блестящих результатов по этой теме, опубликованных в цикле из 10 статей в Докладах АН СССР и в академическом журнале “Математический сборник”.

В 1950 г. Георгий Яковлевич был прикомандирован в докторантуру при Ленинградском (ныне Санкт-Петербургском) отделении Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (МИАН). Его работами там заинтересовался известный математик Андрей Андреевич Марков (младший), который в то время был заместителем директора МИАН по Ленинградскому отделению. Он же взялся за официальное научное консультирование докторанта. В 1953 г. Г. Я. Арешкин успешно защитил в диссертационном совете МИАН докторскую диссертацию “Структурный метод в теории топологических пространств”.

Его вклад в изучение свободных дистрибутивных структур, а также конгруэнций в дистрибутивных структурах с нулевым элементом и их связях с идеалами этих структур отмечен в [7, с. 364].

В 1953 году Георгий Яковлевич переехал на постоянное жительство в г. Ленинград (ныне Санкт-Петербург) и начал заведовать кафедрой математики Высшего инженерно-технического училища ВМФ СССР (с 1997 г. – Военный инженерно-технический университет (ВИТУ)), в 1954 году утвержден в звании профессора, и до самого конца своей жизни преподавал высшую математику – ключевую дисциплину для военных инженеров-строителей. При этом в течение 35 лет он заведовал этой кафедрой (её основал в 1939 г. и руководил ею до конца Великой Отечественной войны инженер-подполковник, профессор, доктор физико-математических наук Л. В. Канторович, ставший впоследствии академиком АН СССР, лауреатом Сталинской, Ленинской и Нобелевской премий).

Г. Я. Арешкин был прекрасным лектором, его занятия производили большое впечатление на слушателей. Многие выпускники ВИТУ в своих воспоминаниях особо отмечают высокую квалификацию и методическое мастерство “корифея математики” профессора Г. Я. Арешкина. Им были написаны лично или с его участием учебные пособия для курсантов и адъюнктов по различным разделам математики и по компьютерным методам решения инженерных задач.

Как отмечено в [6], “в ВИТУ Г. Я. Арешкин вел активную научную и научно-методическую работу в интересах Министерства обороны СССР, был руководителем ряда тем НИР. С 1973 по 1990 год являлся заместителем председателя предметной комиссии по математике при ГУВУЗ МО СССР и тем самым влиял на постановку математического образования во всех военных вузах страны”.

Несмотря на большую нагрузку по месту основной работы Г. Я. Арешкин стал руководить (по совместительству) по тематике теории меры и интеграла аспирантами в Ленинградском педагогическом институте им. М. Н. Покровского, который в 1957 году вошел в состав ЛГПИ им. А. И. Герцена.

На кафедре математического анализа Герценовского пединститута под его руководством подготовили и защитили кандидатские диссертации 8 человек: Пантелеев Владимир Петрович, Алексюк Владимир Николаевич, Ягшимуратов Сарыджа, Клишкин Виктор Михайлович, Попов Вячеслав Александрович, Гусельников Николай Степанович, Шкерина (Агафонова) Людмила Васильевна, Семенова (Сидорина) Татьяна Алексеевна. Все они состоялись

как преподаватели вузов, были, или до сих пор являются профессорами, заведующими кафедрами, деканами, проректорами, а Н. С. Гусельников в течение 12 лет был ректором Ишимского государственного пединститута.

В руководстве аспирантами в полной мере проявился научно-педагогический талант Г. Я. Арешкина. Он всегда был предельно доброжелательным к ученикам, исподволь прививал им такие необходимые для исследователя качества, как скрупулезность, трудолюбие и научная честность. Встречи с ним часто проходили в его квартире, за чашкой чая. Когда собиралось сразу несколько человек, домашнее чаепитие превращалось в неформальное заседание научного семинара. И таких заседаний было много, поскольку к нему могли приходиться не только его аспиранты, но и ученики его учеников, оппонлируемые им диссертанты и т. д. Принимала в них участие и Аглая, дочь Г. Я. Арешкина, ныне кандидат физико-математических наук, доцент РГПУ им. А. И. Герцена.

Сформировалась научная школа Г. Я. Арешкина, основными составляющими которой являются две ветви: сыктывкарская (В. Н. Алексюк и др.) и самарская (В. М. Клишкин и др.). Мы помним, как радовался Георгий Яковлевич нашим научным успехам. К примеру, он считал крупными достижениями такие результаты, как построенный в 1972 году В. А. Поповым первый пример субмеры без аддитивных минорант (патологическая субмера), как выполненную В. Н. Алексюком редукцию проблемы Магарам к булевым алгебрам счетного веса (1974) и им же разработанное векторное интегрирование по мере с помощью интегралов по субмерам (1981), как построение В. Н. Исаковым теории абсолютного интегрирования в абстрактных пространствах (с применением интеграционной идеи В. Н. Алексюка), которая позволила, в частности, существенно продвинуть изучение свойств билинейного векторного интеграла Бартла (1985).

Один из авторов данной статьи был в гостях у Г. Я. Арешкина 19 марта 2003 г. Как всегда при встречах со своими учениками, Георгий Яковлевич был бодр и жизнерадостен, подробно расспрашивал о знакомых ему сыктывкарцах, о математических событиях в Коми пединституте и Сыктывкарском университете. Было видно, что сам он еще полон замыслов и энергии.

Насколько творчески активен был и в то время наш учитель, стало известно позже. Оказывается, 26 мая 2003 г. им была подана заявка на изобретение: “Способ преобразования энергии электромагнитного поля в тепловую энергию”, на которое после соответствующей экспертизы был оформлен патент № 2258327 с указанием автора – Арешкин Г. Я., даты публикации – 27 ноября

2004 г. и патентообладателя – ВИТУ (см., например, <http://bankpatentov.ru/node/77780>).

К сожалению, получить патент на руки в виде реального документа Георгий Яковлевич не успел. Он ушел из жизни 17 февраля 2005 года.

За свой плодотворный и многогранный труд Г. Я. Арешкин награжден семью медалями, среди которых медаль “За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.”, и почетными званиями “Почетный профессор ВИТУ” (1977), “Заслуженный работник Высшей школы Российской Федерации” (1999).

### Основные научные публикации Г. Я. Арешкина (публикации 1–23 см. в [1], [2])

24. О сходимости абсолютно непрерывных функций и их производных II / (соавтор С. Ягшимурадов) // Уч. записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. 1968. – Т. 387.

25. Об одном обобщении теоремы Витали о переходе к пределу под знаком интеграла / (соавтор: В. М. Клишкин) // Уч. записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. 1968. – Т. 387, с. 79–91.

26. О сходимости абсолютно непрерывных функций и их производных III / (соавторы С. Ягшимурадов, В. М. Клишкин) // Уч. записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. 1970. – Т. 404.

27. О некоторых свойствах векторнозначных мер / (соавторы: В. Н. Алексюк, В. М. Клишкин) // Уч. записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. 1971. – Т. 404, с. 298–321.

28. О некоторых свойствах семейства  $N$ -треугольных функций множества / (соавтор: Н. С. Гусельников) // Московский обл. пед. ин-т. Сборник трудов. Математический анализ и теория функций. Вып. 1, 1973, с. 211–219.

29. Продолжение квазилипшицевой функции множества с алгебры на  $\sigma$ -алгебру / (соавторы: В. Н. Алексюк, Н. С. Гусельников). – В сб.: Функциональный анализ. Ульяновск, 1973, вып. 1, с. 214–225.

30. О продолжении векторных мер и связанных с ними внешних мер / (соавтор: М. Н. Лубышев). – В сб.: Функциональный анализ. Ульяновск, 1974. Вып 3, с. 13–23.

31. О слабой равностепенной плотности и компактности семейства квазилипшицевых функций множества / (соавтор: Н. С. Гусельников) // В сб.: Функциональный анализ. – Ульяновск, 1975, вып. 5, с. 3–12.



32. Компактные семейства функций множества / (соавтор: В. Н. Алексюк) // ЛГПИ им. А. И. Герцена. Теория функций и функциональный анализ. Сб. научн. трудов, 1975.
33. Давид Фомич Харазов (некролог) / (соавторы: В. П. Ильин, Б. В. Хведелидзе, Г. С. Чогошвили). УМН, 30:6(186) (1975), с. 153–157.
34.  $\Delta$ -функционалы и интеграл по непрерывной внешней мере / (соавтор В. А. Попов). Изв. вузов. Матем., 1976, № 8, с. 3–8.
35. Свойство Дарбу для  $N$ -треугольных функций множества / (соавтор: Л. В. Агафонова) // Функциональный анализ. Линейные пространства и теория меры. – Ульяновск, 1978, вып. II, с. 15–23.
36. К теории интеграла Колмогорова / (соавтор: Л. Г. Королева) // Функциональный анализ. Линейные операторы. – Ульяновск, 1983.
37. К теории спектров локально бикомпактных пространств // Функциональный анализ. Линейные пространства. – Ульяновск, 1985.
38. Объёмы и регулярные меры на предельных локально бикомпактных  $T_2$  пространствах / (соавтор: Т. А. Сидорина) // Функциональный анализ. Линейные пространства. – Ульяновск, 1985, с. 14–24.
39. Функциональные операторы и семейства функций множества // Зап. научн. сем. ЛОМИ, 159 (1987), с. 113–118.
40. Функциональные операторы и семейства функций множества  $\Pi$  / (соавтор: Т. А. Сидорина) // Функциональный анализ. Спектральная теория. – Ульяновск, 1987.
41. Решение линейных уравнений с помощью полиномов Фурье / (соавтор: А. Г. Арешкина) // Деп. ВИНТИ, №3460–В89, 24.05.89.
42. Решение линейных уравнений с помощью полиномов Фурье / (соавтор: А. Г. Арешкина) // Математический анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания. Межвузовский сборник научных трудов. – Ленинград: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1989, с. 63–68.
43. Алгоритмы приближенного решения линейных уравнений с помощью полиномов Фурье / (соавтор: А. Г. Арешкина) // Математический анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания. Межвузовский сборник научных трудов. – Ленинград: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990.
44. О счетной аддитивности произведения мер / (соавтор: В. Н. Исаков) // Деп. ВИНТИ, №954–В94, 1994, с. 1–11.
45. Замена меры и переменной под знаком интеграла по векторной мере

// Математика и информатика: педагогические инновации и научные разработки. – РГПУ им. А. И. Герцена, 1995, с. 59–60.

46. К теории объемов и регулярных борелевских мер на обратных спектрах локально компактных пространств / (соавтор: Т. А. Семенова) // Математика и информатика: педагогические инновации и научные разработки. – РГПУ им. А. И. Герцена, 1995.

47. О дифференцировании аддитивных векторных мер // Деп. ВИНТИ, 08.07.96, №2212–В96, с. 1–51.

48. Теорема о представлении линейных непрерывных операторов и некоторые ее следствия // Теоретические и методологические проблемы подготовки учителя в системе непрерывного образования. Межвуз. сборн. науч. тр., посвященный 200-летию РГПУ им. А. И. Герцена. – Мурманск, 1997, с. 133–139.

49. Применение интегралов от скалярных функций по векторной мере к некоторым вопросам функционального анализа и теории линейных интегральных уравнений // Исследования по линейным операторам и теории функций. Зап. научн. сем. ПОМИ. – Санкт-Петербург, 1998, т. 255, с. 5–16.

50. О решении функциональных уравнений 1-го и 2-го рода, ядром которых являются преобразования с ортогональными координатами // Зап. научн. сем. ПОМИ, 271 (2000), с. 56–62.

51. О некоторых свойствах линейных непрерывных преобразований гильбертовых пространств // Изв. вузов. Математика, 2001, № 8, с. 29–37.

## Список литературы

- [1] Математика в СССР за сорок лет. 1917–1957: в 2-х т. / гл. ред. А. Г. Курош. – М.: ГИФМЛ, 1959. – Т. 2. Библиография. – 823 с.
- [2] Математика в СССР 1958–1967: в 2-х т. / отв. ред. С. В. Фомин и Г. Е. Шилов. – М.: Наука, 1969. – Т. 2. Библиография. Ч. 2. – 762 с.
- [3] История отечественной математики: в 4 т. – Киев: Наукова думка, 1970. – Т. 4. Кн. 2 (1917–1967). – 668 с.
- [4] Одинец В. П. К 75-летию кафедры математического анализа РГПУ им. А. И. Герцена. Зарисовки истории. Век XX // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2012. – СПб.: БАН, 2012. – С. 3–18.

- [5] Попов В. А. Об одном научном семинаре кафедры математического анализа ЛГПИ им. А. И. Герцена в 1970–1973 гг. // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2012. – СПб.: БАН, 2012. – С. 19–22.
- [6] Памяти Георгия Яковлевича Арешкина (1916–2005 гг.) // В сборнике докладов семинара “Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе”, Вып. 7. – СПб.: Военный инженерно-технический университет, 2005. – 188 с.
- [7] История отечественной математики: в 4 т. – Киев: Наукова думка, 1968. – Т. 3. (1917–1967). – 725 с.
- [8] Медведев Ф. А. Развитие понятия интеграла / Физико-математическое наследие: математика (история математики). – М.: Наука, 1974. – 424 с.; изд. 2-е: 2013. – 424 с.

## О НЕКОТОРЫХ РОДСТВЕННИКАХ АКАДЕМИКА А. Н. КОЛМОГорова

Гушель Р. З.

Ярославский государственный педагогический  
университет им. К. Д. Ушинского

Ярославль

e-mail: gushelr@yandex.ru

**Gushel R. Z. On some relatives of Academician A. N. Kolmogorov.** The article is devoted to some relatives of Acad. A. N. Kolmogorov.

В статье рассказывается о некоторых родственниках академика А. Н. Колмогорова.

Выдающийся математик, академик Андрей Николаевич Колмогоров родился 25 апреля (н. ст.) 1903 года. Его родители жили в гражданском браке, и мальчик получил фамилию матери. Его раннее детство прошло в Ярославской губернии.

Отец Андрея Николаевича **Николай Матвеевич Катаев** (род. ок. 1865 г.) был сыном сельского священника Вятской губернии. После окончания Петровской (ныне – Тимирязевской) сельскохозяйственной академии он служил губернским агрономом в Курске. Впоследствии он был приглашён на ту же должность в Ярославль [1, С. 23–24].

Мать Андрея Николаевича **Мария Яковлевна Колмогорова** (1871–1903) была дочерью известного ярославского общественного деятеля, Угличского уездного предводителя дворянства, почётного смотрителя Ярославского трёхклассного городского училища, одного из членов-учредителей Ярославской губернской учёной архивной комиссии **Якова Степановича Колмогорова** (1837–1909). Родами сына она умерла.



Андрей Николаевич Колмогоров

Некоторые найденные нами материалы о семье Колмогоровых в Ярославской губернии опубликованы в Трудах Четвёртых и Пятых Колмогоровских чтений [2, 3] и ещё в нескольких работах. Здесь же хотелось бы обратить главное внимание на супругу Я. С. Колмогорова и её родственников.

Женой Якова Степановича была **Юлия Ивановна Колмогорова** (урождённая Трапезникова). Их свадьба состоялась в 1860 году.



Юлия Ивановна Колмогорова

Отец невесты, Иван Михайлович Трапезников, родился около 1785 года в семье обер-офицера. Скорее всего, семья жила тогда на Урале, так как службу юноша начал в 1797 году унтер-шихтмейстером 3 класса в Екатеринбургской экспедиции мраморных ломок. В феврале 1805 года он уже унтер-шихтмейстер 1 класса на гранильной фабрике, в 1807 году – коллежский регистратор.

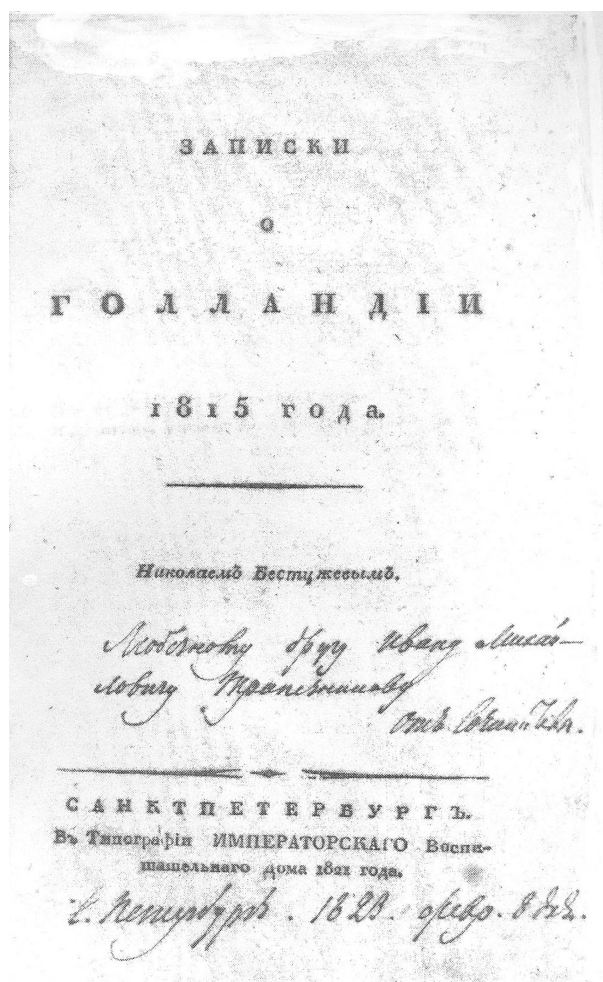
1 марта 1809 года И. М. Трапезников «определён в Кабинет Её Императорского Величества по горной экспедиции». И служит уже в С.-Петербурге; 1 июня 1810 г. произведён в губернские секретари. В 1812 году, в связи с началом войны с Наполеоном, Иван Михайлович «определён в С.-Петербургское ополчение с переименованием в подпоручики» [4, Л. 5]. После окончания войны он остался в армии и служил до 1822 года, когда «был уволен за ранюю майором с мундиром и пенсионом полного жалования» [5, Л. 2].

В формулярном списке, данном И. М. Трапезникову при отставке, он был признан «к повышению чина достойным . . . по службе вёл себя усердно, способности имеет хорошие, пьянству и игре не предан». Там же указано, что 6 октября 1812 г. он участвовал в штурме г. Полоцка, «где за отличие объявлено Высочайшее благоволение. . . 1 и 2 ноября в сильном сражении при Мызе Смолянах. . . ранен в левую ногу выше колена ружейною пулею и награждён орденом Св. Анны 4 класса . . . » [4, Л. 5–5об.].

В 1824 году прадед А. Н. Колмогорова был назначен чиновником по особым поручениям в Ярославскую казённую палату, но через год вернулся в армию, откуда был окончательно уволен в отставку в 1832 году в чине подполковника и поселился в Ярославле [там же, Л. 3].

В фонде редкой книги Ярославского музея-заповедника хранятся две книги, вышедшие в первой четверти XIX века. Одна из них – альманах «По-

лярная звезда» за 1823 год, издававшийся А. Бестужевым и К. Рылеевым, вторая – «Записки о Голландии. 1815 год» Н. Бестужева, опубликованные в 1821 году. Обе книги надписаны. На первой надписано: «Ивану Михайловичу Трапезникову. Старинному другу от издателей. Санктпетербург, 8 февраля 1823 года». На второй имеется такая надпись: «Любезному другу Ивану Михайловичу Трапезникову от сочинителя». Дата указана та же. Вот какие люди называли И. М. Трапезникова своим другом! Возможно, они служили вместе.



В 1833 году И. М. Трапезников женился на дочери подпоручика артиллерии, Николая Фёдоровича Бычкова, Марии (1804–1871).

У Трапезниковых были две дочери: Лидия (1842 г. рожд.) и Юлия (1843–ок. 1920). Младшая дочь и стала впоследствии бабушкой А. Н. Колмогорова. В 1849 году Трапезниковы получили потомственное дворянство.

Отец Марии Николаевны в мае 1818 года обратился в Ярославское дворянское депутатское собрание с прошением о выдаче его дочери Марии «надлежащего свидетельства» для поступления «в какое-либо казённое училище

на воспитание». Просимое свидетельство было ему выдано [6, Л. 19–19об.].

Мы не располагаем сведениями о том, поступила ли девочка учиться, и, если поступила, то в какое учебное заведение. Но уже то, что её отец хлопотал об этом, говорит о многом. В первой четверти XIX века даже мужские гимназии были полупустыми, а уж об образовании девочек и речи практически не было.

И. М. Трапезников скончался в 1851 году, а его жена – в январе 1871 года. В ноябре того же 1871 года у их дочери Юлии родилась дочь, ставшая впоследствии матерью А. Н. Колмогорова. Есть все основания считать, что имя Мария ей было дано в память бабушки.

У Марии Николаевны Трапезниковой (Бычковой) была большая родня. Отметим некоторых. Бычковы – старинный ярославский дворянский род. Первый Бычков (князь И. В. Бычков-Ростовский) был женат вторым браком на сестре Дмитрия Донского [7, С. 5]. В XIX веке родовые земли Бычковых находились, преимущественно, в Рыбинском уезде Ярославской губернии.

У старшего брата М. Н. Трапезниковой Фёдора Николаевича Бычкова, кадрового офицера, вышедшего в отставку в чине генерал-лейтенанта, было несколько детей. Его сын Афанасий (1818–1899) с отличием окончил в 1836 году Ярославскую гимназию, а через четыре года – первое отделение философского факультета Московского университета со степенью кандидата. Служба его проходила в С.-Петербурге.

В 1840 году Афанасий Фёдорович поступил в археографическую комиссию, а в 1844 году он был назначен хранителем отделения рукописей Публичной библиотеки.

Впоследствии А. Ф. Бычков стал крупным учёным, академиком по отделению русского языка и словесности (в 1869 г.; в 1855 г. избран членом-корреспондентом). В 1868 году он был назначен помощником директора Императорской Публичной библиотеки, а в 1882 году стал её директором и оставался в этой должности до конца своих дней.

А. Ф. Бычков занимался изучением и изданием русских летописей, принял активное участие в редактировании «Полного собрания русских летописей», опубликованного археографической комиссией. Под его руководством вышли VII, VIII, IX, XV, XVI и XVII тома этого собрания. Им были изданы первые четыре тома работы «Письма и бумаги Петра Великого» (1887–1900 гг.). Назовём ещё несколько публикаций А. Ф. Бычкова.



Афанасий Фёдорович Бычков

- Указатель к Актам историческим, изданным археографическою комиссиею. – СПб. – 1843. – 218 с.
- Повесть о убиении царевича Димитрия // Чтения в Московском обществе истории и древностей. – М. – 1864. – Кн. IV. – Отд. V. – С. 1–4.
- О баснях Крылова в переводах на иностранные языки // Записки Академии наук. – СПб. – 1869. – Т. XV. – Книга I. – С. 33–60.
- Записка об учёных трудах профессора Московского университета С. М. Соловьёва // Записки Императорской Академии наук. – СПб. –



1872. – Т. XX. – Книга II. – С. 383–396.

- Письма и бумаги императрицы Екатерины II, хранящиеся в Императорской Публичной библиотеке. – СПб. – 1873. – 174 с.
- Путешествие Евгения Онегина. Вновь открытые строфы романа А. С. Пушкина // Русская старина. – 1888. – Т. LVII. – С. 233–258.

В 1890 г. Афанасий Фёдорович был назначен членом Государственного совета, в 1891 г. его избрали председателем археографической комиссии, а в 1893 г. он стал председательствующим отделения русского языка и словесности Академии наук.

Чин действительного статского советника Афанасий Фёдорович получил в 1859 году, тайного советника – в 1870, а в 1887 году он стал действительным тайным советником (II класс в Табели о рангах).

Служба А. Ф. Бычкова была отмечена орденами: Св. Александра Невского с бриллиантовыми украшениями, Белого Орла, Св. Владимира 2-й, 3-й и 4-й степени и другими [8].

Афанасию Фёдоровичу Бычкову как учёному, издателю и руководителю, посвящено немало работ. К пятидесятилетию его учёной деятельности (1840–1890 гг.) вышла статья в журнале «Русская старина» (№ 10 за 1890 год), содержащая, в частности, «список сочинений, переводов и изданий» юбиляра. В этом списке указано 136 названий.

Старший сын учёного Иван Афанасьевич (1858–1944) пошёл по стопам отца. Он также работал в Публичной библиотеке. Им продолжено начатое его отцом издание многотомника «Письма и бумаги Петра Великого». В 1903 году И. А. Бычков был избран членом-корреспондентом Академии наук.

Младший сын А. Ф. Бычкова Фёдор Афанасьевич (1861–1909) в 1886–1890 гг. был редактором неофициальной части «Ярославских губернских ведомостей», состоял чиновником по особым поручениям при ярославском губернаторе, составил родословную своей семьи (1880 г.), служил в земстве, был автором большого числа статей и заметок на исторические темы, опубликованных как в С.-Петербурге, так и в Ярославле. В последние годы жизни он служил в департаменте земледелия.

Ф. А. Бычков был одним из членов-учредителей Ярославской губернской учёной архивной комиссии, созданной в 1889 году.

Наш интерес к А. Ф. Бычкову и его сыновьям объясняется, в частности, тем, что Афанасий Фёдорович был двоюродным братом бабушки А. Н. Колмогорова Юлии Ивановны. Есть свидетельства, что семьи поддерживали род-

ственные отношения.

Когда решался вопрос о реставрации дворца царевича Димитрия в Угличе, была создана специальная комиссия по осмотру дворца. Возглавил её предводитель угличского дворянства Я. С. Колмогоров, а среди членов комиссии был чиновник по особым поручениям при губернаторе Ф. А. Бычков.

Торжественное открытие дворца после реставрации состоялось 3 июня 1892 года. В его помещении был создан Угличский музей древностей. Академик А. Ф. Бычков был одним из почётных членов этого музея.

Когда Фёдор Афанасьевич работал над родословной своей семьи, Яков Степанович Колмогоров помогал ему в сборе материалов, за что и отмечен благодарностью в предисловии к книге [7].

В ноябре 1883 года Ю. И. Колмогорова и А. Ф. Бычков, часто посещавший Ярославль, были восприемниками при крестинах дочери ярославского нотариуса М. Н. Горошкова, одноклассника поэта Н. А. Некрасова, учившегося в Ярославской гимназии несколькими классами моложе А. Ф. Бычкова [9, Л. 18].

У Афанасия Фёдоровича был младший брат Фёдор Фёдорович, родившийся в 1831 году. Он окончил физико-математический факультет С.-Петербургского университета и к 1880 году имел чин статского советника и состоял директором частной гимназии Ф. Ф. Бычкова в С.-Петербурге.

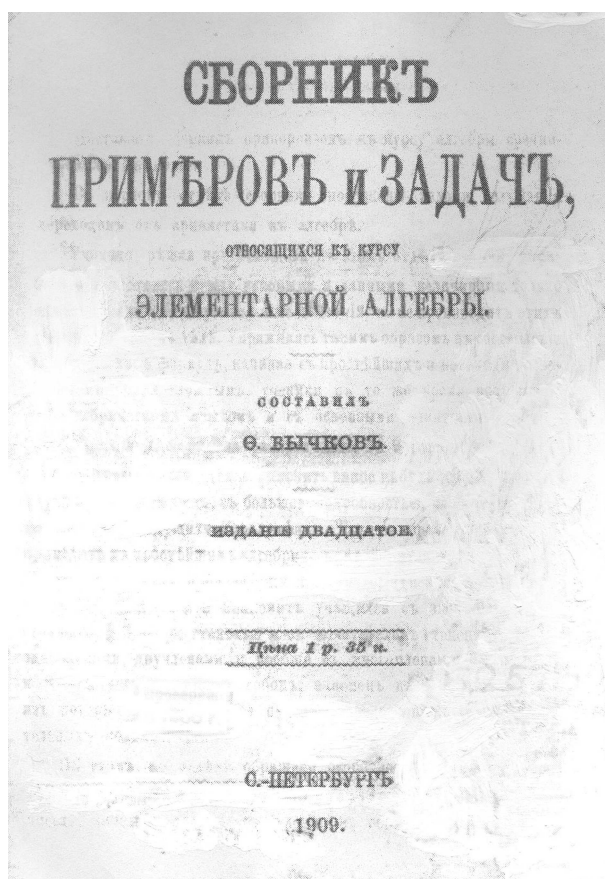
Среди выпускников этой гимназии был и будущий почётный член Академии наук СССР Д. А. Граве (1863–1939), считавший своего педагога выдающимся учителем [10, С. 219–220].

Ф. Ф. Бычкову принадлежит «Сборник примеров и задач, относящихся к курсу элементарной алгебры». Первое издание этой книги вышло в 1868 году в С.-Петербурге. Она заслужила положительную оценку члена Учёного комитета Министерства народного просвещения, академика П. Л. Чебышева. Рецензент писал: «... В настоящем виде этот сборник задач может быть с пользой употребляем при уроках алгебры, а потому я полагал бы допустить эту книгу как пособие для гимназий» [11, С. 364]. В 1909 году задачник Ф. Ф. Бычкова вышел уже двадцатым изданием.

Поддерживал ли Ф. Ф. Бычков отношения со своей двоюродной сестрой из Ярославля, мы не знаем.

Почему факт родства А. Н. Колмогорова с семьёй А. Ф. Бычкова представляется нам важным? Известно, что Андрей Николаевич в юности интересовался историей Руси. Даже поступив на физико-математический факуль-

тет Московского университета, он активно участвовал в научном семинаре по отечественной истории, которым руководил известный историк, профессор Московского университета, ученик В. О. Ключевского С. В. Бахрушин (1882–1950). И первый научный доклад А. Н. Колмогорова, и первая его публикация были посвящены земельным отношениям в Новгороде в XV веке. Академик В. Л. Янин высоко оценил эту работу, считавшуюся утраченной и найденную только после кончины Андрея Николаевича. В. Л. Янин писал: «История потеряла гениального исследователя, математика навсегда приобрела его» [12]. Интерес к истории сохранился у А. Н. Колмогорова на всю оставшуюся жизнь.



Возникает следующее предположение. Если А. Ф. Бычков общался со своими ярославскими родственниками, не исключено, что он дарил им свои книги. И именно эти книги, вместе с рассказами о родственниках, могли пробудить у юноши интерес к отечественной истории. Разумеется, это только гипотеза, и сегодня нельзя её проверить.

Нами указаны только несколько человек из родни А. Н. Колмогорова по линии Юлии Ивановны. Все они были людьми талантливыми, высокообразованными, творческими. Несомненно, отдельные семейные черты были

свойственны и самой Юлии Ивановне. Это не могло не отразиться на её детях и особенно ярко проявилось в воспитанном ею внуке Андрее.

## Список литературы

- [1] Вестник Ярославского земства. – 1899. – № 327–330.
- [2] Гушель Р. З. О семье Колмогоровых в Ярославской губернии // Труды Четвёртых Колмогоровских чтений. – Ярославль, 2006. – С. 58–64.
- [3] Гушель Р. З. Новые архивные материалы о семье Колмогоровых в Ярославской губернии // Труды Пярых Колмогоровских чтений. – Ярославль, 2007. – С. 30–35.
- [4] Государственный архив Ярославской области (ГАЯО). – Ф. 582. – Оп. 2. – Дело 62.
- [5] ГАЯО. – Ф. 213. – Оп. 1. – Дело 2882.
- [6] ГАЯО. – Ф. 213. – Оп. 1. – Дело 1022.
- [7] Родословная рода князей и дворян Бычковых-Ростовских / сост. Ф. А. Бычков. – СПб., 1880.
- [8] Формулярный список о службе директора Императорской Публичной библиотеки Действительного тайного советника Афанасия Фёдоровича Бычкова // ГАЯО. – Ф. 213. – Оп. 1. – Дело 1022. – Л. 7–39.
- [9] ГАЯО. – Ф. 213. – Оп. 1. – Дело 1285.
- [10] Граве Д. А. Моя жизнь и научная деятельность // ИМИ, 1993. – Вып. XXXIV.
- [11] Чебышёв П. Л. Полное собрание сочинений. – М., 1951. – Т. V.
- [12] Янин В. Л. А. Н. Колмогоров как историк // УМН. – 1988. – Т. 43. – Вып. 6.

ДАВИД ФОМИЧ ХАРАЗОВ  
(К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

Одинец В. П.

Сыктывкарский государственный университет

им. Питирима Сорокина

Сыктывкар

e-mail: w.p.odyniec@mail.ru

**Odyniec W. P. David Fomich Kharazov. (By the centennial anniversary of his birth).** Life and mathematical works of Professor David Kharazov are presented.

Представлены жизнь и математические работы профессора Давида Фомича Харазова.

Давид Фомич Харазов родился 1 июля 1915 года (по новому стилю) в Тифлисе в семье Фомы Давидовича Харазова (1897–1947) и Александры Андреевны Луценко (1898–1975). Родители Д. Ф. Харазова вскоре развелись, и его воспитывал отчим – известный юрист Захар Николаевич Нариманов (1892–1966).

В 1933 году Д. Ф. поступил на физико-математический факультет Тбилисского государственного университета, по окончании которого был принят в аспирантуру по специальности «Уравнения математической физики», где его научным руководителем стал Илья Несторович Векуа (1907–1977), ученик Николая Ивановича Мусхелишвили (1891–1976). Естественно, последующие научные работы Д. Ф. Харазова так или иначе перекликались с работами и Н. И. Мусхелишвили и И. Н. Векуа.

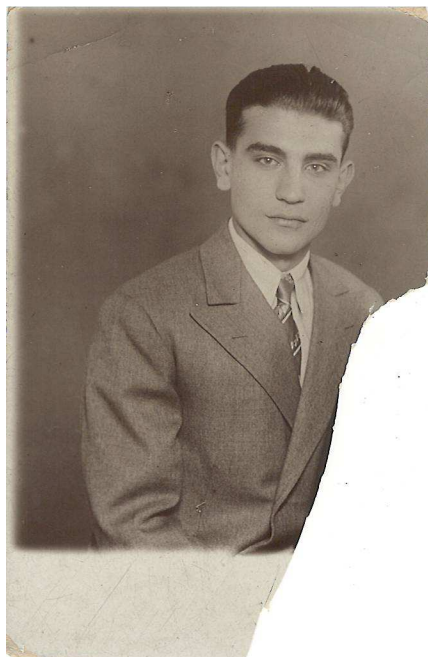
Совместно с Векуа в 1940 г. выходит первая научная работа Харазова «Замечания по поводу метода Фурье» [1]. В этой работе для эллиптического дифференциального уравнения в круговой области вида

$$\Delta^n u + a_1 \Delta^{n-1} u + \dots + a_{n-1} \Delta u + a_n u = 0, \quad (1)$$

где  $a_1, \dots, a_n$  – постоянные коэффициенты, а функция  $u$  зависит от двух переменных, решается вопрос: представляются ли все решения дифференциального уравнения в виде суммы функций вида

$$f(r)\varphi(\theta), \quad (2)$$

где  $r$  и  $\theta$  – полярные координаты точки на плоскости.



Д. Ф. Харазов – студент Тбилисского университета.

Решён этот вопрос был положительно. Думается, что Векуа только поставил задачу, но саму статью, вероятно, не читал. Иначе бы не пропустил такой фразы: «Пользуясь работами И. Н. Векуа, представляется . . .». Автор о себе так не пишет. Кроме того, цитируется только одна работа Векуа 1939 года.

В следующей статье [2], уже только самого Д. Ф. Харазова, результат первой статьи распространён на многосвязную область, что потребовало применения сложного аппарата и тонких вычислений. На основе этих двух работ в 1942 г. Д. Ф. Харазов защищает в Тбилисском университете кандидатскую диссертацию «Некоторые вопросы теории эллиптических дифференциальных уравнений» (замечу, что Векуа к тому моменту уже был утверждён в звании профессора, и ему была присуждена степень доктора наук – всё в 1940 г.).

Заметим, что с момента зачисления в аспирантуру (1939), и до 1961 года, основным местом работы Д. Ф. Харазова становится Математический институт им. А. М. Размадзе<sup>1</sup>, основанный в 1933 году Н. И. Мухелишвили (первоначально в рамках Тбилисского университета, а с 1935 г. – в системе Академии Наук СССР (с 1941 г. – в системе АН Грузинской ССР)). По сов-

---

<sup>1</sup> Андрей Михайлович Размадзе (1890–1929), выпускник Московского университета (1910), PhD (Париж, 1925) «О разрывных решениях в вариационном исчислении», один из организаторов Тбилисского университета, профессор. Автор первых учебников математического анализа на грузинском языке. Умер в Тбилиси.

местительству Давид Фомич преподаёт и в Тбилисском университете, читая и ведя занятия по курсам «Дифференциальные уравнения», «Теоретическая механика», «Функциональный анализ» и некоторым другим.

В последующие 8 лет после защиты кандидатской диссертации Харазов занимается изучением линейных интегральных уравнений с различными ядрами. Это позволило ему в дальнейшем успешно распространить теорию Гильберта–Шмидта<sup>2</sup>, в частности, на симметризуемые неограниченные операторы с дискретным спектром в гильбертовых пространствах. Итогом была докторская диссертация «О некоторых линейных уравнениях в гильбертовых пространствах», успешно защищенная в 1954 году в Тбилисском университете, одним из оппонентов которой был будущий академик Сергей Михайлович Никольский (1905–2012). Надо сказать, что Давид Фомич всю взрослую жизнь страдал от последствий полученной в юности травмы позвоночника, и очередное обострение пришлось как раз на момент защиты докторской диссертации – он делал доклад, сидя в кресле, а формулы на доске писала сотрудница его отдела.

В последующем Д. Ф. Харазову удалось распространить теорию Гильберта–Шмидта на банаховы пространства, а в последние годы жизни, совместно с Ю. Ш. Абрамовым, – и на локально выпуклые пространства.

В 1951 году выходит большая (40 страниц) работа Давида Фомича Харазова [4], позволившая решать некоторые граничные задачи, возникающие в теории дифференциальных уравнений. Она привлекла внимание многих математиков. Давид Фомич продолжил в 1955 г. эту тему в двух статьях в ДАН СССР (т. 100, № 2, с. 217–220 и № 3, с. 421–424), представленных академиком А. Н. Колмогоровым.

В 1951 г. из Тбилиси уехал Илья Несторович Векуа<sup>3</sup>. Он вернется в Грузию в 1965 г., когда там уже не будет Давида Фомича. Как говорил сам Давид Фомич, если бы Векуа вернулся на 5 лет раньше, вероятно, «мне не пришлось бы покидать Тбилиси».

Уже с конца 50-х годов Харазова звал в Ленинград Георгий Яковлевич Арешкин (1916–2005), давний студенческий друг по Тбилисскому университету, который к этому времени заведовал кафедрой высшей математики в Выс-

---

<sup>2</sup>Если дан самосопряжённый, в общем случае неограниченный оператор  $A$ , и уравнение вида  $f - \lambda Af = g$ , то под теорией Гильберта–Шмидта понимают условия, обеспечивающие существование собственного значения, разложение по Фурье для  $Af$ , формулу Шмидта для решения указанного уравнения, экстремальные свойства [3].

<sup>3</sup>В 1951–1959 гг. Векуа был заведующим кафедрой теоретической механики МФТИ, а с 1959 по 1965 гг. – первым ректором Новосибирского университета.

шем Военно-инженерном строительном училище<sup>4</sup> (ВВИСУ). Важным также было то, что училище имело служебную жилплощадь. В 1961 году Харазов решает переехать в Ленинград<sup>5</sup>.

Сразу встал вопрос – где теперь публиковаться? До этого Д. Ф. Харазов публиковался либо в Грузии, либо в Москве (ДАН СССР, либо УМН).

Профессор Валентин Петрович Ильин (1921–2001), работавший в Ленинградском отделении Математического института им. В. А. Стеклова (ЛОМИ), которого Д. Ф. Харазов заочно знал уже давно, советует в 1960 году послать статью «Спектральная теория некоторых линейных операторов, мероморфно<sup>6</sup> зависящих от параметров» за границу, в журнал, основанный Стефаном Банахом (1892–1945), “*Studia Mathematicae*”. Статья была принята (т. 20, № 1) и вышла в 1961 году. Заметим, что Д. Ф. Харазов был одним из пионеров по изучению в СССР спектральной теории операторнозначных функций. Существенные результаты по этой тематике появились у него уже в 1955 году.

В последующие годы (1962, 1964) выходят статьи Харазова в математических журналах в Сегеде (Венгрия) и в Клузе (Румыния). В 1966 году он делает доклад на XV Международном Математическом Конгрессе в Москве. Тогда же выходит его следующая большая статья в “*Studia Mathematicae*” «Симметризуемые операторы в банаховых пространствах и их приложения». Работы Давида Фомича Харазова становятся широко известными в Европе. Расширился и круг центральных отечественных журналов, где публикуется Давид Фомич: это и «Дифференциальные уравнения» и «Известия вузов. Математика» и «Математические заметки». Впрочем, две заметки (в 1962 и 1964 гг.) вышли и в Грузии.

Однако к радости успешного творчества примешивается огорчение – отсутствие учеников в военном училище, ведь курсанты приходят в училище делать военную карьеру. За 8 лет работы в военном учреждении у него был всего один адъютант. Совсем иначе представляется ситуация в гражданском вузе. И когда появляется возможность получения не служебного жилья (в 1969 г. в Ленинградском Технологическом институте им. Ленсовета (ЛТИ) сдавался дом для сотрудников этого вуза), он переходит на кафедру высшей

---

<sup>4</sup>Имя генерала армии Комаровского училище получило в декабре 1973 года.

<sup>5</sup>К переезду Д. Ф. Харазова именно в Ленинград и Мухелишвили и Векуа отнеслись с пониманием: Н. И. Мухелишвили не только окончил (1914) учебу в Санкт-Петербургском университете, но и преподавал в Петрограде до 1920 г., а И. Н. Векуа с 1930 по 1933 год учился в Ленинграде в докторантуре.

<sup>6</sup>Напомню, что мероморфная функция – это функция, определённая на всей комплексной плоскости и в конечной части плоскости не имеющая особых точек, отличных от полюсов [5].



математики ЛТИ.

На этой кафедре он сразу организует еженедельный научный семинар по функциональному анализу для молодых преподавателей. Среди этих преподавателей был и я, а также Борис Александрович Иванов, закончивший мат.-мех. ЛГУ в 1969 году. Первая книга, которая была разобрана на этом семинаре – это была книга Эйнара Хилле и Ральфа Филлипса «Функциональный анализ и полугруппы», вышедшая в США в 1957 г.<sup>7</sup>

Должен сразу сказать, что Харазову в ЛТИ не понравился казарменный дух: в течение дня преподаватель тогда был обязан писать в журнале обо всех выходах с кафедры в течение рабочих 6 часов. Вероятно, это нужно для химиков, так как они часто имеют дело с взрывчатыми или опасными материалами, но было излишне для преподавателей математики. Поэтому, когда в конце учебного 1969/70 года появилось объявление о вакансиях профессора, доцента и ассистента в Ленинградском финансово-экономическом институте им. Н. А. Вознесенского (ЛФЭИ)<sup>8</sup> по кафедре высшей математики, то подали на конкурс Харазов Д. Ф., доцент Петрова С. Г. и я, как отработавший 3 года после окончания университета, ассистентом. Всех троих приняли на работу в ЛФЭИ. Не смог перейти в ЛФЭИ тогда Б. А. Иванов, так как не отработал еще трёх лет после окончания вуза.

1 октября 1970 года в ЛФЭИ была открыта аспирантура по специальности «Математический анализ и теория функций». На две вакансии были приняты я<sup>9</sup> и выпускник мат.-меха ЛГУ Юрий Шмавович Абрамов<sup>10</sup>. На следующий (1971) год был принят в аспирантуру Иванов Б. А.<sup>11</sup>, в 1972 г. – Парфенов Георгий<sup>12</sup>, в 1973 г. – ещё один аспирант.

<sup>7</sup>Русский перевод [6].

<sup>8</sup>В 1966 году Юрий Александрович Лавриков (1927–1991), переведенный в том году из секретарей горкома Ленинграда в ректоры ЛФЭИ, стал превращать бывший третьестепенный вуз в передовой экономический вуз страны, сделав ставку на математику. Так, уже с 1970 года была открыта специальность экономист–математик, и создано новое отделение экономической кибернетики. Кафедру экономической кибернетики возглавил профессор Иван Михайлович Сыроежин (1933–1983), перешедший из ЛГУ, выпускник (1960) знаменитого «6-го курса» экономического факультета ЛГУ, стажировавшийся год в США.

С ним Д. Ф. Харазов нередко обсуждал учебные планы математических дисциплин нужных экономистам-кибернетикам. Так, с 1973 года в числе курсов, читавшихся четверокурсникам, появилась «Теория графов», и читать этот курс по предложению Давида Фомича довелось мне. Среди выпускников (1980) по этой специальности назову только ныне профессора Оксану Генриховну Дмитриеву.

<sup>9</sup>Кандидатскую диссертацию я защитил в 1975 г. в ЛГПИ им. А. И. Герцена; докторскую (хабилизация) «Минимальные проекторы в пространствах Банаха. Проблемы единственности и существования» – в 1986 г. в Варшавском университете.

<sup>10</sup>Ю. Ш. Абрамов защитил кандидатскую диссертацию в ЛОМИ в 1974 г., докторскую – по дифференциальным уравнениям в ЛГУ в 1986 г. Учредил в 2007 г. ежегодную (Абрамовскую) премию для молодых математиков.

<sup>11</sup>Б. А. Иванов (1946–1996) защитил кандидатскую диссертацию в ЛОМИ в 1979 г.

<sup>12</sup>Г. Парфенов защитил кандидатскую диссертацию в 90-е годы по экономике.

Наконец-то у Харазова появились ученики, и он с большим удовольствием беседует с ними, и не только на математические темы<sup>13</sup>. Надо отметить, что он вообще был весьма разносторонним человеком, прекрасно знающим литературу, музыку, театр, большим любителем приключенческих романов. Особенно заметно это было в дни его рождения (1 июля), когда он дома сидит во главе круглого стола, уставленного грузинскими и армянскими яствами, приготовленными его женой Русуданой Северьяновной (1921–2005). Добавлю, что Русудана Северьяновна, врач по профессии, сделала очень многое, чтобы дом Давида Фомича был уютным и комфортным и для семьи, и для гостей Харазова. За столом, как правило, сидела и дочь Харазовых Александра, которую в семье обычно звали Лялей<sup>14</sup>.

А сам Давид Фомич по-прежнему регулярно писал статьи и печатался, либо в Польше (“*Studia Mathematicae*”), либо в Грузии (в трудах Математического института), либо в Москве (в журнале «Функциональный анализ и его приложения», основанном в 1967 г. Израилем Моисеевичем Гельфандом (1913–2009)). Появилось у него и желание к написанию учебных пособий. Так в 1972–1973 гг. совместно с С. Г. Петровой в издательстве ЛФЭИ у него вышли три учебных пособия: «Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной» (127 стр.), «Обыкновенные дифференциальные уравнения» (104 стр.), «Интегральное исчисление функции одной переменной и ряды» (116 стр.). Эти пособия (тиражом от 500 до 1500 экземпляров) отражали только часть читавшихся в ЛФЭИ математических курсов, и отсутствуют в списке 57 его печатных работ [7]. У Давида Фомича были планы по написанию и других учебных пособий.

---

<sup>13</sup>Обсуждались и спектакли, и выставки, и заметные события в Ленинградском математическом обществе. Так, осенью 1972 г. в Ленинград приехал академик Павел Сергеевич Александров (1896–1982) и сделал доклад в самой большой (66) аудитории тогдашнего мат.-меха ЛГУ (10-я линия д. 33) в связи с выдвижением его на премию Н. И. Лобачевского. В конце доклада начались вопросы. Неожиданно встал профессор Н. А. Шанин (1903–1994), и, обращаясь к академику, спросил: «не считаете ли вы, что математика, которой вы занимались, я имею в виду общая топология, бессодержательна и отвлекает от настоящих математических проблем?». Александров ответил «Если вы собственную докторскую считаете бессодержательной, то я могу сообщить в ВАКе о вашей точке зрения для принятия соответствующего решения». Добавлю, что 66 аудитория была заполнена преподавателями до краев. Мы с Давидом Фомичом, придя за 20 минут до начала доклада, с трудом нашли свободное место. Выходя, Д. Ф. Харазов сказал с усмешкой: «я думал, что эпатаж серьезных людей закончился вместе с Маяковским».

<sup>14</sup>Александра Давидовна Харазова (р. 1947) стала известным ученым-биологом, д. б. н. (1999), профессором (2001); уже с 1993 года руководит кафедрой цитологии и гистологии СПбГУ, а с 2010 – декан биолого-почвенного (ныне биологического) факультета СПбГУ.



Д. Ф. Харазов в июле 1974 года; слева – дочь Александра.

К сожалению, застарелая травма позвоночника вызвала к жизни опухоль, которая в 1974 году привела Д. Ф. Харазова к потере подвижности, а 7 февраля 1975 г. – к смерти. Похоронен Давид Фомич Харазов на Богословском кладбище в Санкт-Петербурге. Рядом похоронена скончавшаяся через несколько месяцев мать Давида Фомича.

## Список литературы

- [1] Векуа И. Н., Харазов Д. Ф. Замечание по поводу метода Фурье // Сообщ. Груз. филиала АН СССР. 1940. Т. 1, № 9. – С. 647–650.
- [2] Харазов Д. Ф. Общее представление решений эллиптических дифференциальных уравнений выше второго порядка в многосвязных областях // Сообщ. АН Груз. ССР. 1941. Т. 2, № 9. – С. 799–805.
- [3] Харазов Д. Ф. О некоторых свойствах линейных операторов, обеспечивающих справедливость теории Гильберта–Шмидта // УМН. 1957. Т. 12, вып. 4(76). – С. 201–207.

- [4] Харазов Д. Ф. Приложения интегральных уравнений с ядрами, зависящими от параметра, к некоторым граничным задачам в теории дифференциальных уравнений // Труды Матем. ин-та АН Груз. ССР. 1951. Т. 18. – С. 265–306.
- [5] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969. – 577 с.
- [6] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИЛ, 1962. – 829 с.
- [7] Арешкин Г. Я., Ильин В. П., Хведелидзе Б. В., Чогошвили Г. С. Давид Фомич Харазов. Некролог // УМН. 1975. Т. 30, вып. № 6. – С. 152–157.

# Современные проблемы теории дифференциальных уравнений

УДК 517.9+532.5

## ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

Аксенов А. В., Дружков К. П.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
Москва

e-mail: aksenov.av@gmail.com, Konstantin.Druzhkov@gmail.com

**Aksenov A. V., Druzhkov K. P. Conservation laws of shallow water above irregular bottom system equations.** The system of equations of a one-dimensional of shallow water over irregular bottom is considered. All hydrodynamic conservation laws are obtained. The new conservation law additional to the two basic conservation laws is obtained.

Рассматривается система уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном. Найдены все гидродинамические законы сохранения. Получен новый закон сохранения, дополнительный к двум базовым законам сохранения.

В безразмерных переменных система уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном имеет следующий вид [1]

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \eta_x &= 0, \\ \eta_t + [(\eta + h)u]_x &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $y = -h(x)$ ,  $h(x) \geq 0$  – профиль дна,  $u = u(x, t)$  – средняя по глубине горизонтальная скорость,  $\eta = \eta(x, t)$  – отклонение свободной поверхности.

Будем искать гидродинамические законы сохранения системы уравнений (1) в виде пары функций  $P(x, t, u, \eta)$ ,  $Q(x, t, u, \eta)$ , тождественно удовлетворяющих уравнению

$$D_t(Q) + D_x(P) = 0 \quad (2)$$

на решениях системы уравнений (1). Здесь

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + \eta_t \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}$$

– операторы полной производной по соответствующей координате.

**Замечание 1.** Отметим, что оба уравнения системы уравнений (1) имеют вид (2). Соответствующие два базовых закона сохранения

$$\begin{aligned} Q_1 &= u, & P_1 &= \frac{u^2}{2} + \eta, \\ Q_2 &= \eta, & P_2 &= (\eta + h)u \end{aligned} \quad (3)$$

имеют смысл законов сохранения импульса и массы.

**Замечание 2.** Из (2) следует, что  $Q' = Q + f_x$ ,  $P' = P - f_t$  и  $Q'' = CQ$ ,  $P'' = CP$  также являются законами сохранения для произвольных функции  $f = f(x, t)$  и постоянной  $C$ . В дальнейшем законы сохранения будем находить с точностью до выписанных выше слагаемых и постоянного множителя.

Используя выражение (2) и систему уравнений (1), можно получить следующую переопределённую систему уравнений на искомые функции  $P$  и  $Q$

$$\begin{aligned} P_x &= uh'Q_\eta - Q_t, \\ P_u &= uQ_u + (\eta + h)Q_\eta, \\ P_\eta &= Q_u + uQ_\eta. \end{aligned} \quad (4)$$

Исключая из системы уравнений (4) функцию  $P$ , можно получить систему уравнений для определения функции  $Q$ . Запишем её в следующем виде

$$\begin{aligned} Q_{xu} &= uh'Q_{\eta\eta} - uQ_{x\eta} - Q_{t\eta}, \\ Q_{tu} &= -u^2h'Q_{\eta\eta} + uh'Q_{u\eta} + (u^2 - \eta - h)Q_{x\eta} + uQ_{t\eta}, \\ Q_{uu} &= (\eta + h)Q_{\eta\eta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Систему уравнений (5) можно исследовать на совместность. Приведём результаты этого исследования.

**1. Случай произвольной функции  $h(x)$ .** В этом случае решение системы уравнений (4) имеет вид

$$\begin{aligned} P &= C_1(\eta + h)(u^3 + 2u\eta) + C_2\left(\frac{u^2}{2} + \eta\right) + C_3u(\eta + h), \\ Q &= C_1[u^2(\eta + h) + \eta^2] + C_2u + C_3\eta. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $C_1, C_2, C_3$  – произвольные постоянные.

В силу замечаний 1 и 2, из решения (6) находим новый закон сохранения

$$Q_3 = u^2(\eta + h) + \eta^2, \quad P_3 = (\eta + h)(u^3 + 2u\eta),$$

дополняющий базовые законы сохранения (3).

**2. Случай линейной функции  $h(x) = a_1x + a_2$ .** В этом случае решение системы уравнений (4) имеет вид

$$P = C_1 \left( -a_1xt\beta - x\alpha(\beta + a_2) + \frac{3}{2}a_1t^2\alpha(\beta + a_2) + \frac{1}{2}t\beta^2 + a_2\beta t + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}a_1^2t^3\beta + a_2t\alpha^2 + t\alpha^2\beta \right) + a_1tQ_1 + P_1, \\ Q = C_1 \left( a_2t\alpha + t\alpha\beta - x\beta + \frac{1}{2}a_1t^2\beta \right) + Q_1.$$

Здесь  $\alpha = u - a_1t$ ,  $\beta = \eta + a_1x$ ;  $C_1$  – произвольная постоянная;  $P_1 = P_1(\alpha, \beta)$ ,  $Q_1 = Q_1(\alpha, \beta)$  – произвольное решение системы уравнений

$$P_{1\alpha} = \alpha Q_{1\alpha} + (\beta + a_2)Q_{1\beta}, \\ P_{1\beta} = Q_{1\alpha} + \alpha Q_{1\beta}.$$

**3. Случай  $h(x) = \frac{b_1}{2}x^2 + b_2x + b_3$ ,  $b_1 > 0$ .** В этом случае решение системы уравнений (4) имеет вид

$$P = C_1(\eta + h(x)) (u^3 + 2u\eta) + C_2 \left( \frac{u^2}{2} + \eta \right) + C_3u(\eta + h(x)) + \\ + C_4e^{-\sqrt{b_1}t} \left[ \left( \sqrt{b_1}u^2 + uh'(x) \right) (\eta + h(x)) + \frac{\sqrt{b_1}}{2}\eta(\eta + 2h(x)) \right] + \\ + C_5e^{\sqrt{b_1}t} \left[ \left( -\sqrt{b_1}u^2 + uh'(x) \right) (\eta + h(x)) - \frac{\sqrt{b_1}}{2}\eta(\eta + 2h(x)) \right], \\ Q = C_1 (u^2(\eta + h(x)) + \eta^2) + C_2u + C_3\eta + \\ + C_4e^{-\sqrt{b_1}t} (\sqrt{b_1}u(\eta + h(x)) + \eta h'(x)) + \\ + C_5e^{\sqrt{b_1}t} (-\sqrt{b_1}u(\eta + h(x)) + \eta h'(x)). \tag{7}$$

Здесь  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  – произвольные постоянные.

Из решения (7) находим, что в рассматриваемом случае существуют два дополнительных закона сохранения

$$Q_4 = e^{-\sqrt{b_1}t} (\sqrt{b_1}u(\eta + h(x)) + \eta h'(x)), \\ P_4 = e^{-\sqrt{b_1}t} \left[ \left( \sqrt{b_1}u^2 + uh'(x) \right) (\eta + h(x)) + \frac{\sqrt{b_1}}{2}\eta(\eta + 2h(x)) \right]$$

и

$$Q_5 = e^{\sqrt{b_1}t} (-\sqrt{b_1}u(\eta + h(x)) + \eta h'(x)),$$

$$P_5 = e^{\sqrt{b_1}t} \left[ \left( -\sqrt{b_1}u^2 + uh'(x) \right) (\eta + h(x)) - \frac{\sqrt{b_1}}{2} \eta (\eta + 2h(x)) \right].$$

**4. Случай**  $h(x) = \frac{b_1}{2}x^2 + b_2x + b_3$ ,  $b_1 < 0$ . В этом случае решение системы уравнений (4) имеет вид

$$P = C_1(\eta + h(x)) (u^3 + 2u\eta) + C_2 \left( \frac{u^2}{2} + \eta \right) + C_3u(\eta + h(x)) +$$

$$+ C_4 \left[ \sin(\sqrt{-b_1}t) \left( \sqrt{-b_1}u^2(\eta + h(x)) + \frac{\sqrt{-b_1}}{2} \eta (\eta + 2h(x)) \right) + \right.$$

$$\left. + \cos(\sqrt{-b_1}t) \cdot uh'(x)(\eta + h(x)) \right] + C_5 \left[ -\cos(\sqrt{-b_1}t) \left( \sqrt{-b_1}u^2(\eta + \right.$$

$$\left. + h(x)) + \frac{\sqrt{-b_1}}{2} \eta (\eta + 2h(x)) \right) + \sin(\sqrt{-b_1}t) \cdot uh'(x)(\eta + h(x)) \right], \quad (8)$$

$$Q = C_1 (u^2(\eta + h(x)) + \eta^2) + C_2u + C_3\eta +$$

$$+ C_4 \left( \sin(\sqrt{-b_1}t) \cdot \sqrt{-b_1}u(\eta + h(x)) + \cos(\sqrt{-b_1}t) \cdot \eta h'(x) \right) +$$

$$+ C_5 \left( -\cos(\sqrt{-b_1}t) \cdot \sqrt{-b_1}u(\eta + h(x)) + \sin(\sqrt{-b_1}t) \cdot \eta h'(x) \right).$$

Из решения (8) находим, что в рассматриваемом случае существуют два дополнительных закона сохранения

$$Q_4 = \sin(\sqrt{-b_1}t) \cdot \sqrt{-b_1}u(\eta + h(x)) + \cos(\sqrt{-b_1}t) \cdot \eta h'(x),$$

$$P_4 = \sin(\sqrt{-b_1}t) \left( \sqrt{-b_1}u^2(\eta + h(x)) + \frac{\sqrt{-b_1}}{2} \eta (\eta + 2h(x)) \right) +$$

$$+ \cos(\sqrt{-b_1}t) \cdot uh'(x)(\eta + h(x))$$

и

$$Q_5 = -\cos(\sqrt{-b_1}t) \cdot \sqrt{-b_1}u(\eta + h(x)) + \sin(\sqrt{-b_1}t) \cdot \eta h'(x),$$

$$P_5 = -\cos(\sqrt{-b_1}t) \left( \sqrt{-b_1}u^2(\eta + h(x)) + \frac{\sqrt{-b_1}}{2} \eta (\eta + 2h(x)) \right) +$$

$$+ \sin(\sqrt{-b_1}t) \cdot uh'(x)(\eta + h(x)).$$

В заключение отметим, что основным результатом работы является получение нового базового закона сохранения, дополняющего законы сохранения импульса и массы.



Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 15-01-00361, 15-01-04677.

## Список литературы

- [1] *Stoker J. J.* The formation of breakers and bores. The Theory of Nonlinear Wave Propagation in Shallow Water and Open Channels // *Comm. Pure Appl. Math.* 1948. V. 1. № 1. P. 1–87.

УДК 517.956.27

### РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Андреев В. К.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт вычислительного моделирования СО РАН  
Красноярск  
e-mail: andr@icm.krasn.ru

**Andreev V. K. Solution of some special inverse problem for the motion of viscous fluids.** A linear conjugate inverse problem for parabolic equations is investigated. This problem arises under describing of creeping 2D motions of viscous heat conducting liquids or binary mixtures in plane layers. Some a priori estimates are obtained and input data conditions when solution tends to stationary one are found. In Laplace transforms the exact solution is obtained as quadratures and some numerical results for real liquids are calculated.

**Keywords:** conjugate problem, inverse problem, a priori estimates, exponential stability.

Исследуется линейная сопряжённая обратная задача для параболических уравнений, возникающая при описании ползущих двумерных движений вязких теплопроводных жидкостей или бинарных смесей в плоских слоях. Получены априорные оценки решения и найдены условия на входные данные, когда с ростом времени решение выходит на стационарный режим. В образах по Лапласу построено точное решение в виде квадратур и приведены численные результаты для конкретных жидких сред.

**Ключевые слова:** сопряжённая задача, обратная задача, априорные оценки, экспоненциальная устойчивость.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy} + f_j(t) + g_j(y, t); \quad (1.1)$$

$$u_j(y, 0) = u_{j0}(y), \quad (1.2)$$

где  $-l_1 < y < 0$  при  $j = 1$ ,  $0 < y < l_2$  при  $j = 2$ ;

$$u_1(-l_1, t) = a_1(t), \quad \alpha u_2(l_2, t) + \beta u_{2y}(l_2, t) = a_2(t); \quad (1.3)$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad \mu_2 u_{2y}(0, t) - \mu_1 u_{1y}(0, t) = a_3(t); \quad (1.4)$$

$$\int_{-l_1}^0 u_1(y, t) dy = q_1(t), \quad \int_0^{l_2} u_2(y, t) dy = q_2(t). \quad (1.5)$$

Функции  $g_j(y, t)$ ,  $u_{j0}(y)$ ,  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $a_3(t)$ ,  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  и постоянные  $\nu_j > 0$ ,  $l_j > 0$ ,  $\mu_j > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  считаются заданными,  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ , а  $u_j(y, t)$ ,  $f_j(t)$  — искомыми; переменная  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ . Тем самым задача (1.1)–(1.5) является сопряжённой и обратной.

К задаче (1.1)–(1.5) приводит изучение двумерных ползущих движений вязкой жидкости с поверхностью раздела в канале ( $g_1 = g_2 = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ,  $q_1 = q_2 = 0$ ) [1], вязких теплопроводных жидкостей ( $g_1 \neq 0$ ,  $g_2 \neq 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $a_1 = a_2 = 0$ ,  $q_1 = q_2 = 0$ ). При  $\alpha = 0$ ,  $\beta \neq 0$  граница  $y = l_2$  может рассматриваться как свободная и на ней задано касательное напряжение, зависящее от времени. Отметим также, что  $\nu_j$  — коэффициенты кинематических вязкостей, а  $\mu_j$  — динамических, причём  $\nu_j = \rho_j \mu_j$ ,  $\rho_j$  — плотности этих жидкостей. Функция  $f_j(t)$  есть продольные вдоль канала градиенты давления.

Произведём замену

$$u_j(y, t) = v_j(y, t) + n_j(t)y^2 + m_j(t)y + d_j(t), \quad j = 1, 2, \quad (1.6)$$

тогда  $v_j(y, t)$ ,  $f_j(t)$  суть решение задачи

$$v_{jt} = \nu_j v_{jyy} + f_j(t) + h_j(y, t); \quad (1.7)$$

$$v_j(y, 0) = u_{j0}(y) - n_j(0)y^2 - m_j(0)y - d_j(0) \equiv v_{j0}(y) \quad (1.8)$$

с однородными условиями

$$\begin{aligned} v_1(-l_1, t) = 0, \quad \alpha v_2(l_2, t) + \beta v_{2y}(l_2, t) = 0, \\ v_1(0, t) = v_2(0, t), \quad \mu_2 v_{2y}(0, t) - \mu_1 v_{1y}(0, t) = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\int_{-l_1}^0 v_1(y, t) dy = 0, \quad \int_0^{l_2} v_2(y, t) dy = 0.$$

В уравнениях (1.7)

$$h_j(y, t) = g_j(y, t) - n'_j(t)y^2 - m'_j(t)y - d'_j(t) + 2v_j n_j(t),$$

где штрих означает дифференцирование по  $t$ . Функции  $n_j(t)$ ,  $m_j(t)$ ,  $d_j(t)$  — линейная комбинация функций  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ , Поэтому если  $a_k(t) \in C^1[0, T]$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $q_j(t) \in C^1[0, T]$ ,  $g_j(y, t)$  непрерывны на своих областях определения по  $y$  и  $t \in [0, T]$ , то начально-краевая задача (1.1)–(1.5) эквивалентна задаче (1.7)–(1.9).

Интегрируя уравнение (1.7) по  $y$  от  $-l_1$  до 0 при  $j = 1$  и от 0 до  $l_2$  при  $j = 2$ , найдём

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{\nu_1}{l_1} [v_{1y}(l_1, t) - v_{1y}(0, t)] - \int_{-l_1}^0 h_1(y, t) dy, \\ f_2(t) &= \frac{\nu_2}{l_2} [v_{2y}(0, t) - v_{2y}(l_2, t)] - \int_0^{l_2} h_2(y, t) dy. \end{aligned} \tag{1.10}$$

**2. Априорные оценки.** Умножение уравнений (1.7) на  $\rho_j v_j$ , затем интегрирование по областям определения и сложения результатов с использованием граничных условий (1.9) приводит к тождеству

$$\frac{dE_1}{dt} + \mu_1 \int_{-l_1}^0 v_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} v_{2y}^2 dy + \frac{\alpha\mu_2}{\beta} v_2^2 = \rho_1 \int_{-l_1}^0 h_1 v_1 dy + \rho_2 \int_0^{l_2} h_2 v_2 dy, \tag{2.1}$$

$$E_1 = \frac{\rho_1}{2} \int_{-l_1}^0 v_1^2 dy + \frac{\rho_2}{2} \int_0^{l_2} v_2^2 dy.$$

При  $\beta = 0$  последнее слагаемое в левой части (2.1) отсутствует.

Из тождества (2.1) получим неравенство  $dE_1/dt + 4\delta E_1 \leq 2H_1(t)\sqrt{E_1}$ ,  $\delta = \min(2\pi^2\nu_1/l_1^2, \nu_2/l_2^2)$ , откуда

$$E_1(t) \leq \left( \sqrt{E_1(0)} + \int_0^t H_1(\tau) e^{2\delta\tau} d\tau \right)^2 e^{-4\delta t}. \tag{2.2}$$

Поскольку  $h_j(y, t)$  непрерывны, то  $H(t)$  и  $E(t)$  непрерывны и ограничены для всех  $t \in [0, T]$ , поэтому  $L_2$ -нормы функций  $v_j(y, t)$  ограничены при  $t \in [0, T]$ .

Наряду с (2.1) имеет место и другое тождество для задачи (1.7)–(1.9):

$$\rho_1 \int v_{1t}^2 dy + \rho_2 \int_0^{l_2} v_{2t}^2 dy + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \mu_1 \int_{-l_1}^0 v_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} v_{2y}^2 dy \right] = \rho_1 \int_{-l_1}^0 h_1 v_{1t} dy + \rho_2 \int_0^{l_2} h_2 v_{2t} dy,$$

ПОЭТОМУ

$$\mu_1 \int_{-l_1}^0 v_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} v_{2y}^2 dy \leq \mu_1 \int_{-l_1}^0 v_{10y}^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} v_{20y}^2 dy + \rho_1 \int_{-l_1}^0 h_1^2 dy + \rho_2 \int_0^{l_2} h_2^2 dy \equiv V_1(t), \quad (2.3)$$

т. е. и  $L_2$ -нормы функций  $v_{jy}(y, t)$  ограничены при  $t \in [0, T]$ .

В силу неравенств (2.2), (2.3) имеем при всех  $y \in [-l_1, 0]$

$$|v_j(y, t)| \leq 8^{1/4} \left( \frac{1}{v_j} E_1(t) V_1(t) \right)^{1/4}. \quad (2.4)$$

Дифференцирование задачи (1.7)–(1.9) по  $t$  приводит к аналогичной задаче для функций  $v_{jt}(y, t)$ , где нужно  $f_j(t)$  заменить на  $f_{jt}(t)$ ,  $h_j(y, t)$  на  $h_{jt}(y, t)$ , начальные данные (1.8) на

$$v_{jt}(y, 0) = v_j v_{j0yy} + f_j(0) + h_j(y, 0) \equiv \bar{v}_{j0}(y), \quad (2.5)$$

где, согласно (1.10), значения  $f_j(0)$  известны. Значит, для  $v_{jt}(y, t)$  будут справедливы оценки (2.4) соответственно, с заменой  $E_1(t)$  на

$$E_2(t) = \frac{\rho_1}{2} \int_{-l_1}^0 v_{1t}^2 dy + \frac{\rho_2}{2} \int_0^{l_2} v_{2t}^2 dy, \quad E_2(0) = \frac{\rho_1}{2} \int_{-l_1}^0 \bar{v}_{10}^2 dy + \frac{\rho_2}{2} \int_0^{l_2} \bar{v}_{20}^2 dy$$

с данными  $\bar{v}_{j0}(y)$  из (2.5),  $V_1(t)$  заменяется на

$$V_2(t) = \mu_1 \int_{-l_1}^0 \bar{v}_{10y}^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} \bar{v}_{20y}^2 dy + \rho_1 \int_{-l_1}^0 h_{1t}^2 dy + \rho_2 \int_0^{l_2} h_{2t}^2 dy.$$

Для  $E_2(t)$  справедлива оценка (2.2), где  $H_1(t)$  надо заменить на

$$H_2(t) = \left( \rho_1 \int_{-l_1}^0 h_{1t}^2 dy \right)^{1/2} + \left( \rho_2 \int_0^{l_2} h_{2t}^2 dy \right)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$|v_{jt}(y, t)| \leq 8^{1/4} \left( \frac{1}{\nu_j} E_2(t) V_2(t) \right)^{1/4} \quad (2.6)$$

равномерно по  $y \in [-l_1, 0]$  ( $j = 1$ ),  $y \in [0, l_2]$  ( $j = 2$ ),  $t \in [0, T]$ .

Для получения оценок  $f_j(t)$  приведём отличные от (1.10) представления этих функций:

$$f_1(t) = -\frac{3}{l_1^3} \int_{-l_1}^0 (y^2 + yl_1) v_{1t} dy - \frac{3\nu_1}{l_1^2} v_1(0, t),$$

$$f_2(t) = -\frac{3}{l_2^3} \int_0^{l_2} (yl_2 - y^2) v_{2t} dy - \frac{3\nu_2}{l_2^2} [v_2(0, t) + v_2(l_2, t)].$$
(2.7)

Они находятся путём умножения уравнений (1.7) на  $y^2 + yl_1$  ( $j = 1$ ),  $yl_2 - y^2$  ( $j = 2$ ) и интегрирования с учётом граничных условий (1.9). Используя оценки (2.4), (2.6), из (2.7) выводим неравенства

$$|f_j(t)| \leq 8^{1/4} \left[ \left( \frac{1}{\nu_j} E_2(t) V_2(t) \right)^{1/4} + \frac{\varepsilon_j \nu_j}{l_j^2} \left( \frac{1}{\nu_j} E_1(t) V_1(t) \right)^{1/4} \right], \quad (2.8)$$

где  $\varepsilon_j = 3$  при  $\beta = 0$  во втором граничном условии (1.9);  $\varepsilon_1 = 3$ ,  $\varepsilon_2 = 6$  при  $\beta \neq 0$ .

**3. Достаточные условия выхода решения на стационарный режим.** Пусть  $h_j(y, t) = h_j^s(y)$  и  $v_j^s(y)$ ,  $f_j^s$  — стационарное решение задачи (1.7)–(1.9). При этом начальные данные (1.8) не ставятся. Лёгкий подсчёт показывает, что такое решение описывается формулами

$$v_1^s(y) = C_1 + C_2 y - \frac{f_1^s y^2}{2\nu_1} - \frac{1}{\nu_1} \int_{-l_1}^y (y-z) h_1^s(z) dz, \quad -l_1 < y < 0,$$

$$v_2^s(y) = D_1 + D_2 y - \frac{f_2^s y^2}{2\nu_2} - \frac{1}{\nu_2} \int_0^y (y-z) h_2^s(z) dz, \quad 0 < y < l_2,$$
(3.1)

где  $C_j$ ,  $D_j$ ,  $f_j^s$  — постоянные, зависящие от входных данных задачи:  $l_j$ ,  $\nu_j$ ,  $h_j^s(y)$ ,  $\mu_j$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .

Стационарное решение  $u_j^s(y)$  находится из преобразования (1.6) и формул (3.1):

$$u_j^s(y) = v_j^s(y) + n_j^s y^2 + m_j^s y + d_j^s, \quad (3.2)$$

где  $n_j^s, m_j^s, d_j^s$  — постоянные.

Пусть функции  $h_j(y, t)$  в задаче (1.7)–(1.9) определены для всех  $t \geq 0$ . При этом возникает вопрос об асимптотическом поведении функций  $v_j(y, t), f_j(t)$ , когда  $t \rightarrow \infty$ . В частности, при каких условиях на  $h_j(y, t)$  функции  $v_j(y, t), f_j(t)$  с ростом времени стремятся к стационарному режиму (3.1)? Для ответа на этот вопрос проведём замену

$$V_j(y, t) = v_j^s(y) - v_j(y, t), \quad F_j(t) = f_j^s - f_j(t), \quad (3.3)$$

тогда функции  $V_j(y, t), F_j(t)$  являются решением задачи (1.7)–(1.9) с заменой  $h_j(y, t)$  на

$$W_j(y, t) = h_j^s(y) - h_j(y, t) \quad (3.4)$$

и начальных данных (1.8) на

$$V_{j0}(y) = v_j^s(y) - v_{j0}(y). \quad (3.5)$$

Имеет место

**Теорема 1.** При условии сходимости интегралов

$$\int_0^\infty \left( \rho_1 \int_{-l_1}^0 W_1^2(y, t) dy \right)^{1/2} + \left( \rho_2 \int_0^{l_2} W_2^2(y, t) dy \right)^{1/2} e^{2\delta\tau} d\tau,$$

$$\int_0^\infty \left( \rho_1 \int_{-l_1}^0 h_{1t}^2(y, t) dy \right)^{1/2} + \left( \rho_2 \int_0^{l_2} h_{2t}^2(y, t) dy \right)^{1/2} e^{2\delta\tau} d\tau$$

решение задачи (1.7)–(1.9) с ростом времени  $t$  стремится к стационарному решению (3.1) по экспоненциальному закону.

*Доказательство.* Действительно, в этом случае функции  $V_j(y, t), F_j(t)$  из (3.3) удовлетворяют оценкам (2.4), (2.6), (2.8) с указанными выше заменами  $h_j(y, t)$  на  $W_j(y, t)$  из (3.4) и  $v_{j0}(y)$  на  $V_{j0}(y)$  из (3.5).

**Замечание 1.** Найдено точное решение в изображениях и проведены расчёты для конкретных жидких сред. Кроме того, доказано, что если существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_j(y, t) = g_j^s(y), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a_k(t) = a_k^s, \quad k = 1, 2, 3, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q_j(t) = q_j^s,$$

то справедливы равенства

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \hat{u}_j(y, p) = u_j^s(y), \quad \lim_{p \rightarrow 0} p \hat{f}_j(p) = f_j^s,$$

где  $u_j^s(y)$ ,  $f_j^s$  — стационарное решение задачи (1.1)–(1.5), определяемое формулами (3.2). В этом случае решение с ростом  $t$  стремится к стационарному.

## Список литературы

- [1] Andreev V. K. Unsteady 2D Motions a Viscous Fluid Described by Partially Invariant Solutions to the Navier–Stokes Equations // J. of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2015. Т. 8. № 2. – С. 140–147.

УДК 517.9

### МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ БИФУРКАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ

Бадюкина Т. Е., Бегматов А. Б., Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Юлдашев Н. Н.

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева

Саранск

e-mail: badokinate@gmail.com

Ташкентский национальный университет Узбекистана

Ташкент

begmatov\_ab@rambler.ru

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева

Саранск

kjashkin@list.ru

Ульяновский государственный технический университет

Ульяновск

bvllbv@yandex.ru

Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности

Ташкент

nurilla1956@mail.ru

**Badokina T. E., Begmatov A. B., Kyashkin A. A., Loginov B. V., Yuldashev N. N. Multiparameter bifurcation aerohydroelasticity problems.** At the application of bifurcation theory methods to nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations of the fourth and more higher order usually technical difficulties arise, connected with the determination of bifurcation manifolds, spectral investigation of the direct and conjugate linearized problems and with the proof of their Fredholm property. For their overcoming here the roots separation methods application to the relevant characteristic equations are

suggested with subsequent presentation through them critical manifolds, that allows to investigate nonlinear problems in the exact statement. Such approach is considered here on the example of two-point boundary value problem for ODE of the fourth order, describing the static bending of a part of pipeline in the form of flexible elastic hollow rod with passing inside it fluid, expressed or extending by external boundary stresses at the free fastening of the left face and rigidly ones of the right.

Применение методов теории бифуркаций к нелинейным граничным задачам для ОДУ четвертого и более высоких порядков сопряжено с техническими трудностями, связанными с исследованием спектра прямой и сопряженной линеаризованных задач, построением функций Грина и, тем самым, с определением многообразий точек бифуркации и доказательством фредгольмовости спектральных задач. Для их преодоления в работе применяются методы отделения корней соответствующих характеристических уравнений с последующим представлением через них бифуркационных многообразий, что позволяет исследовать нелинейные задачи в точной постановке. Такой подход рассмотрен здесь на примере двухточечной краевой задачи для ОДУ четвертого порядка, описывающего статический изгиб участка трубопровода в виде гибкого упругого полого стержня с протекающей внутри него жидкостью, сжимаемого или растягиваемого внешними краевыми усилиями при свободной заделке левого торца и шарнирной заделке правого.

Бифуркационные задачи, описываемые ОДУ высоких порядков, часто содержат сложную зависимость уравнений от нескольких бифуркационных и физических небифуркационных параметров, что значительно усложняет процесс выявления критических значений этих параметров, и тем самым препятствует их точному исследованию. Это явление возникает в точной постановке граничных задач для нелинейных дифференциальных уравнений гидроаэроупругости, описываемых ОДУ четвертого порядка с двумя бифуркационными (спектральными) параметрами, моделирующими дивергенцию (изгибные формы) участка трубопровода в виде гибкого полого стержня кругового сечения, внутри которого протекает жидкость [1]. Зависимость дифференциального уравнения от бифуркационных параметров выражается через корни соответствующего характеристического уравнения линеаризованной задачи, которые можно считать точно известными. Такое представление позволяет достаточно легко найти в пространстве спектральных параметров критические бифуркационные поверхности и кривые, в окрестности точек которых строятся асимптотика разветвляющихся решений в виде сходящихся по малым параметрам рядов. Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

**Замечание** В нашей работе, в отличие от работ П. А. Вельмисова и С. В. Киреева [2], выполнен учёт двух бифуркационных параметров.



Задача об изгибных формах участка трубопровода, описываемая нелинейным ОДУ с двумя бифуркационными (спектральными) параметрами:

$$EJ \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + (T + mu^2)K + kw - \theta w'' \int_0^l \left[ (1 - (w')^2)^{-1} - 1 \right] dx = 0, \quad (1)$$

где  $K = \frac{w''}{(1+(w')^2)^{3/2}}$ ,  $w = w(x)$  – прогиб трубопровода,  $0 \leq x \leq l$ ,  $l$  – длина участка трубопровода,  $R_{\text{out}}$  и  $R_{\text{in}}$  – внешний и внутренний радиусы кругового сечения,  $J = \frac{\pi}{4}(R_{\text{out}}^4 - R_{\text{in}}^4)$  – момент инерции поперечного сечения для кругового сегмента,  $EJ = D = \chi^2$  – изгибная жёсткость трубы,  $T > 0$  ( $T < 0$ ) – сжимающее (растягивающее) усилие,  $m$  – удельная масса жидкости,  $u$  – скорость её течения,  $E$  – модуль Юнга,  $K$  – кривизна,  $k$  – коэффициент жёсткости основания, интегральное слагаемое учитывает нелинейное воздействие продольного усилия.

Обезразмеривание  $\bar{x} = \frac{x}{l}$ ,  $\bar{w} = \frac{w}{l}$  ( $0 \leq \bar{x} \leq 1$ ) приводит (1) к виду:

$$\frac{\chi^2}{l^2} \left( \frac{w''}{(1 + (w')^2)^{3/2}} \right)'' + (T + mu^2) \frac{w''}{(1 + (w')^2)^{3/2}} + kl^2 w - \theta l w'' \int_0^1 \left[ (1 - (w')^2)^{-1} - 1 \right] dx = 0.$$

Общий подход к решению такого типа задач рассматривается на примере граничных условий

$$w''(0) = w^{(3)}(0) = 0, \quad w(1) = w''(1) = 0. \quad (2)$$

Для вычисления малых изгибных форм в окрестностях критических значений бифуркационных параметров – сжимающее/растягивающее усилие  $T = T_0 + \varepsilon_1$  и скорость движения жидкости  $mu^2 = mu_0^2 + \varepsilon_2$ , применяются методы теории бифуркаций [3].

Линеаризованной двухточечной граничной задаче на собственные значения

$$\frac{\chi^2}{l^2} w^{(4)} + (T + mu^2) w'' + kl^2 w = 0,$$

с граничными условиями (2), отвечает характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0, \quad a = \frac{T + mu^2}{\chi^2} l^2, \quad b = \frac{k}{\chi^2} l^4 > 0 \quad (3)$$

Соответствующая сопряжённая линеаризованная задача имеет вид

$$\frac{\chi^2}{l^2} \omega^{IV} + (T + mu^2) \omega'' + kl^2 \omega = 0$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \omega''(0) + (T + mu^2) \omega(0) &= 0, & \omega^{(3)}(0) + (T + mu^2) \omega'(0) &= 0, \\ \omega(1) &= 0, & \omega''(1) + (T + mu^2) \omega(1) &= 0 \end{aligned}$$

Согласно методу Штурма и в силу того, что характеристическое уравнение (3) является биквадратным, возможны следующие виды корней:

- A.  $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$  ( $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ );
- B.  $-\gamma \pm \delta i, \gamma \pm \delta i$  ( $\gamma, \delta > 0$ );
- C.  $\pm\delta_1 i, \pm\delta_2 i$  ( $\delta_1 > \delta_2 > 0$ );
- A-B.  $-\gamma$  кратности 2,  $\gamma$  кратности 2 ( $\gamma > 0$ );
- B-C.  $\pm\delta i$  кратности 2 ( $\delta > 0$ ).

**A.** Для случая четырёх действительных корней определитель матрицы граничных условий на множестве  $\Omega = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1 > \alpha_2 > 0\}$  удовлетворяет неравенству

$$\Delta = 2\alpha_1^2 \alpha_2^2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) ((\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{sh}(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2)) > 0.$$

Действительно,  $\frac{\Delta}{2\alpha_1^2 \alpha_2^2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} = (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{sh}(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$  при  $\alpha_1 > \alpha_2$  влечёт  $\Delta > 0$  и значит прогиб трубопровода для граничных условий (2) и корней характеристического уравнения вида A отсутствует.

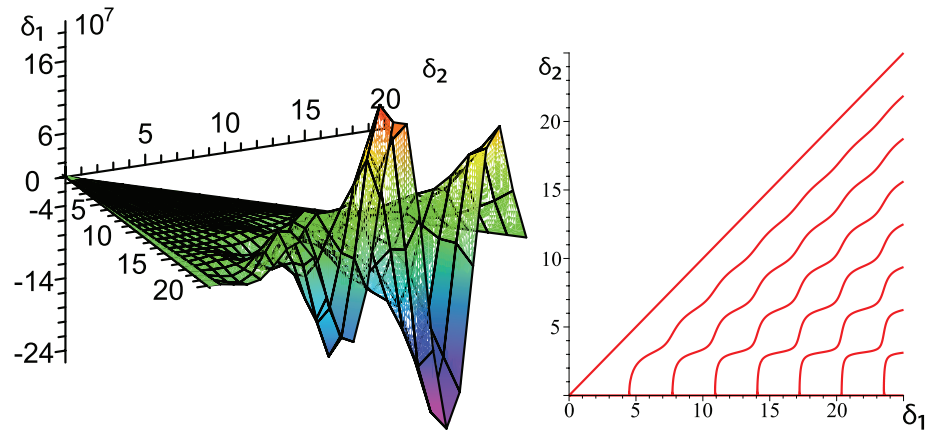
**B.** Корнями характеристического уравнения являются две пары комплексно-сопряжённых чисел  $(-\gamma \pm \delta i, \gamma \pm \delta i)$ . Неравенство  $\Delta = 2\gamma\delta(2\delta \operatorname{sh}(2\gamma) - 2\gamma \sin(2\delta)) > 0$  выполнено при  $\forall \gamma > 0, \delta > 0$ .

**C.** Характеристическое уравнение имеет четыре чисто мнимых корня и определитель матрицы граничных условий равен

$$\Delta = -\delta_1^2 \delta_2^2 (\delta_1^2 - \delta_2^2) (\delta_1 \cos \delta_1 \sin \delta_2 - \delta_2 \sin \delta_1 \cos \delta_2).$$

Существуют такие значения  $(\delta_1, \delta_2)$ , на которых  $\Delta(\delta_1^1, \delta_2^1) \cdot \Delta(\delta_1^2, \delta_2^2) < 0$  (например,  $\delta_1^1 = 4.5124, \delta_2^1 = 0.5, \delta_1^2 = 4.5121, \delta_2^2 = 0.5$ ), таким образом имеет место прогиб трубопровода.

**A-B.** Вырожденный случай, когда характеристическое уравнение имеет корни  $-\gamma$  кратности 2,  $\gamma$  кратности 2 ( $\gamma > 0$ ), приводит определитель матрицы граничных условий к виду  $\Delta = 4\gamma^5(\operatorname{sh}(2\gamma) - 2\gamma)$ , который положителен при любых  $\gamma > 0$  и, следовательно, прогиб трубопровода отсутствует.

Рис.1 – Определитель  $\Delta$  при корнях вида  $C$ 

**Замечание.** Контроль правильности вычислений осуществляется с помощью предельного перехода в соответствующих функциях от  $\mathbf{A}$  при  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ , либо от  $\mathbf{B}$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

**В-С.** Характеристическое уравнение имеет два чисто мнимых корня  $\pm \delta i$  кратности 2 ( $\delta > 0$ ). Отсутствие точек бифуркации следует из того, что при  $\delta > 0$  определитель  $\Delta = \delta^5(2\delta - \sin(2\delta)) > 0$ .

Для случая существования бифуркационной кривой построена асимптотика разветвляющихся решений по малым параметрам  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  в точке бифуркации  $(T_0, tu_0^2)$ . Фредгольмовость линеаризованной спектральной задачи, подобно [4], доказывается построением соответствующей функции Грина по схеме монографии [5], которое также выполняется с помощью выражения бифуркационных (спектральных) параметров через корни характеристического уравнения и в работе не приводится в силу ограниченности её объема.

## Список литературы

- [1] Болотин В. В., Радин В. П., Гирков В. П., Щугорев А. В. Устойчивость участка трубопровода с упругой опорой // Известия РАН. Механика твердого тела, 2009. №1. – С.174–184.
- [2] Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 524 с.
- [3] Вельмисов П. А., Киреев С. В. Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 200 с.

- [4] Loginov B. V., Badokina T. E., Makeeva O. V. Green functions construction for divergence problems in aeroelasticity // ROMAI Journal 2008, № 4(2). – PP. 33–44.
- [5] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

УДК 517.958: 530.145.6

## ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА ДЛЯ КВАНТОВОЙ ТОЧКИ

Бахматов А. Н., Коробейникова Н. И.  
Удмуртский государственный университет  
Ижевск  
e-mail: mathudgu@mail.ru

**Bakhmatov A. N., Korobeinikova N. I. Discrete Schrödinger equation for quantum dot.** In the paper consider the discrete Schrödinger equation for quantum dot. We study the common spectral properties of the discrete Schrodinger operator; we find the eigenvalues and resonances.

Рассматривается дискретное уравнение Шрёдингера для квантовой точки. В статье изучены общие спектральные свойства дискретного оператора Шрёдингера, найдены собственные значения и резонансы..

В данной работе изучается математическая модель, описывающая электрон в физической системе, состоящей из квантовой точки (точка имеет три узла), соединенной с двумя проводниками (квантовыми проволоками). Подобные модели служат для описания следующего поколения устройств, регулирующих прохождение тока через проводник (транзисторов, диодов и так далее).

Определим неориентируемый граф с вершинами  $\Gamma = \mathbb{Z} \cup M$ , где вершины  $M = \{1, 2, 3\}$ , соединенные в треугольник, соответствуют квантовой точке, а подмножества  $\mathbb{Z}$  вида  $\{-1, -2, \dots\}$  и  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , где соседние вершины соединены ребрами, левому и правому проводникам соответственно (см. рис. 1). Данная модель отвечает устройствам, использующим эффект Ааронова–Бома, в частности, квантовым интерферометрам (см. [1]).

Функции  $\psi$ , определенные на  $\Gamma$ , отождествим с парами функций  $\psi =$

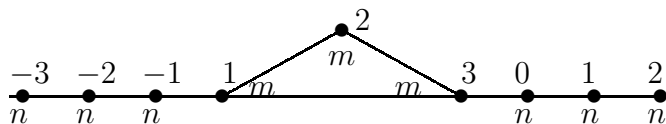


Рис. 1. Граф  $\Gamma$ .

$= (\psi_1(n), \psi_2(m))$ , где  $\psi_1(n)$  определена на  $\mathbb{Z}$ , а  $\psi_2(m)$  — на  $M$ . Рассматривается оператор Шрёдингера (гамильтониан)  $H$ , действующий в  $l^2(\Gamma) \cong \cong l^2(\mathbb{Z}) \times l^2(M) \cong l^2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}^3$ , по формуле

$$\begin{aligned} (H\psi)_1(n) &= (H_1\psi_1)(n) + (\psi_2(1) - \psi_1(0))\delta_{n,-1} + (\psi_2(3) - \psi_1(-1))\delta_{n,0}, \\ (H\psi)_2(m) &= (H_2\psi_2)(m) + \psi_1(-1)\delta_{m,1} + \psi_1(0)\delta_{m,3}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\delta_{i,j}$  — символ Кронекера,  $H_1$  — оператор в  $l^2(\mathbb{Z})$  вида

$$(H_1\psi_1)(n) = \psi_1(n + 1) + \psi_1(n - 1),$$

$H_2$  — оператор в  $\mathbb{C}^3$  вида 
$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & v & v \\ v & 0 & v \\ v & v & 0 \end{pmatrix}.$$

Ненулевой параметр  $v \in \mathbb{R}$  является амплитудой перехода ( $|v|^2$  — вероятность такого перехода) электрона на соседний узел (вершину) подграфа, отвечающего множеству  $M$ ; при этом  $v$  можно сопоставить ребрам графа. Считаем, что  $|v| < 1$ . Число 1 является амплитудой перехода для узлов, отвечающих квантовой проволоке (после соответствующей “нормировки”, и сопоставляется оставшимся ребрам исходного графа.

Пусть  $R_1 = (H_1 - \lambda I)^{-1}$  и  $R_2 = (H_2 - \lambda I)^{-1}$  резольвенты операторов  $H_1$  и  $H_2$  соответственно. Ядро резольвенты  $R_1$  будем называть функцией Грина, которая представима в виде (см. [2])

$$G_1(n - j, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \left( \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^{|n-j|}. \quad (2)$$

Сделаем замену  $\lambda = 2 \cos k$ , полагая  $\sqrt{\cos^2 k - 1} = -i \sin k$ , тогда функцию Грина оператора  $H_1$  можно записать в виде  $G_1(n - j, k) = \frac{e^{ik|n-j|}}{2i \sin k}$ . Резольвента оператора  $H_2$  является обратной матрицей  $(H_2 - \lambda I)^{-1}$  и имеет вид

$$R_2 = \frac{1}{(\lambda + v)(2v - \lambda)} \begin{pmatrix} \lambda - v & v & v \\ v & \lambda - v & v \\ v & v & \lambda - v \end{pmatrix}. \quad (3)$$

**Теорема 1.** Оператор  $H$  ограничен, самосопряжен. Отрезок  $[-2, 2]$  является существенным спектром этого оператора.

*Доказательство.* Ограниченность и самосопряженность проверяется непосредственно. Известно (см. [3, V.П.2, пример 3]), что спектр оператора  $H_1$  — это отрезок  $[-2, 2]$ . Оператор  $H$  представим в виде суммы конечномерного оператора и оператора  $\begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , действующего в  $l^2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}^3$ . Отсюда и из теоремы Вейля о существенном спектре (см. [4, XIII.4, теорема XIII.14]) вытекает второе утверждение теоремы. ■

Обозначим через  $a_{mj}$  элемент матрицы  $(\lambda + v)(2v - \lambda)(H_2 - \lambda I)^{-1}$ . Положим

$$\Delta = \begin{vmatrix} -e^{-ik} & -1 & 1 & e^{ik} \\ -1 & -e^{-ik} & e^{ik} & 1 \\ \lambda - v & v & (\lambda + v)(2v - \lambda) & 0 \\ v & \lambda - v & 0 & (\lambda + v)(2v - \lambda) \end{vmatrix} = \\ = (e^{-2ik} - 1)(2v - \lambda)(e^{-ik} + v)((\lambda + v)(2v - \lambda) + \lambda e^{ik}).$$

Для всех  $p \in \{1, 2, 3, 4\}$  определитель  $\Delta_p$  получаем из определителя  $\Delta$  заменой столбца с номером  $p$  этого определителя на столбец

$$\left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{ik|j+1|} \varphi_1(j), \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{ik|j|} \varphi_1(j), \sum_{j=1}^3 a_{1j} \varphi_2(j), \sum_{j=1}^3 a_{3j} \varphi_2(j) \right\}^T.$$

**Лемма 1.** Для любой функции  $\varphi \in l^2(\Gamma)$  положим

$$R(\lambda)\varphi = (H - \lambda I)^{-1}\varphi = \psi.$$

При  $\Delta \neq 0$  справедливы следующие формулы:

$$\psi_1(n) = \frac{1}{(2i \sin k)\Delta} \left( \Delta \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{ik|n-j|} \varphi_1(j) + (\Delta_2 - \Delta_3) e^{ik|n+1|} + (\Delta_1 - \Delta_4) e^{ik|n|} \right) \quad (4)$$

и

$$\psi_2(m) = \frac{1}{(\lambda + v)(2v - \lambda)\Delta} \left( \Delta \sum_{j=1}^3 a_{mj} \varphi_2(j) - \Delta_1 a_{m1} - \Delta_2 a_{m3} \right). \quad (5)$$

*Доказательство.* Для нахождения резольвенты  $R(\lambda) = (H - \lambda I)^{-1}$  оператора  $H$  решим уравнение  $(H - \lambda I)\psi = \varphi$  относительно  $\psi$ . Согласно (1) запишем уравнения  $(H_1 - \lambda I)\psi_1(n) = \varphi_1$  и  $(H_2 - \lambda I)\psi_2(m) = \varphi_2$  в виде

$$\begin{aligned} (H_1 - \lambda I)\psi_1(n) &= \varphi_1(n) + (\psi_1(0) - \psi_2(1))\delta_{n,-1} + (\psi_1(-1) - \psi_2(3))\delta_{n,0}, \\ (H_2 - \lambda I)\psi_2(m) &= \varphi_2(m) - \psi_1(-1)\delta_{m,1} - \psi_1(0)\delta_{m,3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя (2) и (3), находим

$$\begin{aligned} \psi_1(n) &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik|n-j|}}{2i \sin k} \varphi_1(j) + (\psi_1(0) - \psi_2(1)) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik|n-j|}}{2i \sin k} \delta_{j,-1} + \\ &+ (\psi_1(-1) - \psi_2(3)) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik|n-j|}}{2i \sin k} \delta_{j,0}, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_2(1) \\ \psi_2(2) \\ \psi_2(3) \end{pmatrix} = \frac{1}{(\lambda + v)(2v - \lambda)} \begin{pmatrix} \lambda - v & \lambda v & v \\ v & \lambda - v & v \\ v & v & \lambda - v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_2(1) - \psi_1(-1) \\ \varphi_2(2) \\ \varphi_2(3) - \psi_1(0) \end{pmatrix}.$$

Выполнив соответствующие преобразования, окончательно получим

$$\begin{aligned} \psi_1(n) &= \frac{1}{2i \sin k} \left( \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{ik|n-j|} \varphi_1(j) + \right. \\ &\left. + (\psi_1(0) - \psi_2(1))e^{ik|n+1|} + (\psi_1(-1) - \psi_2(3))e^{ik|n|} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

и

$$\psi_2(m) = \frac{1}{(\lambda + v)(2v - \lambda)} \left( \sum_{j=1}^3 a_{mj} \varphi_2(j) - \psi_1(-1)a_{m1} - \psi_1(0)a_{m3} \right). \quad (8)$$

Определим константы  $\psi_1(-1)$ ,  $\psi_1(0)$ ,  $\psi_2(1)$  и  $\psi_2(3)$ . Для этого из равенства (7) при  $n = -1$ ,  $n = 0$  и из равенства (8) при  $m = 1, 3$ , учитывая, что  $2i \sin k = e^{ik} - e^{-ik}$ , получим систему линейных уравнений относительно

НЕИЗВЕСТНЫХ КОНСТАНТ

$$\left\{ \begin{array}{l} -e^{-ik}\psi_1(-1) - \psi_1(0) + \psi_2(1) + e^{ik}\psi_2(3) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{ik|j+1|}\varphi_1(j), \\ -\psi_1(-1) - e^{-ik}\psi_1(0) + e^{ik}\psi_2(1) + \psi_2(3) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{ik|j|}\varphi_1(j), \\ (\lambda - v)\psi_1(-1) + v\psi_1(0) + (\lambda + v)(2v - \lambda)\psi_2(1) = \sum_{j=1}^3 a_{1j}\varphi_2(j), \\ v\psi_1(-1) + (\lambda - v)\psi_1(0) + (v + \lambda)(2v - \lambda)\psi_2(3) = \sum_{j=1}^3 a_{3j}\varphi_2(j). \end{array} \right. \quad (9)$$

Формулы (4) и (5) вытекают из уравнений (7) и (8) и формул Крамера, примененных к системе (9). ■

**Замечание.** Функция  $g(\lambda) = \lambda/2 - \sqrt{(\lambda/2)^2 - 1}$  является обратной к функции Жуковского  $\omega = (z + z^{-1})/2$  для  $z = \lambda/2$ . Риманова поверхность  $P$  функции  $g(\lambda)$  двулистка, причем листы склеиваются вдоль интервала  $(-2, 2)$ , а точки  $\pm 2$  являются точками ветвления. Следовательно, риманова поверхность функции Грина также двулистка относительно спектрального параметра  $\lambda$ . Выбор знака перед (арифметическим для  $|\lambda| > 2$ ) корнем в (2) отвечает экспоненциальному убыванию функции  $G_1(n - j, \lambda)$  при  $|n - j| \rightarrow \infty$  на первом листе.

**Лемма 2.** Число  $\lambda \notin [-2, 2]$  принадлежит дискретному спектру оператора  $H$  тогда и только тогда, когда  $\Delta(\lambda) = 0$ .

*Доказательство.* Это следует из теоремы 1 и леммы 1, также аналитической теоремы Фредгольма (см. [3, VI.5, теорема VI.14]). Действительно, легко подобрать функции  $\varphi_1(n)$  и  $\varphi_2(m)$  такие, что функции  $\psi_1(n)$  и  $\psi_2(m)$  будут иметь полюсы в точках  $\lambda_l$ , откуда вытекает наличие полюсов у матричных элементов функции  $G_1(n - j, \lambda)$ . ■

**Определение 1.** Будем говорить, что функция Грина  $G$  оператора  $H$  (ядро резольвенты) имеет полюс в точке  $\lambda_0 \in P$ , если имеет полюс в этой точке хотя бы одна из функций (матричных элементов)  $G((n, m), (n', m'), \lambda)$ , где  $(n, m), (n', m') \in \Gamma$ . Полюс функции  $G$  на втором листе поверхности  $P$  назовем резонансом оператора  $H$ . В точках отрезка  $[-2, 2]$ , в которых листы отождествляются, резонансом будем называть полюс, не являющийся собственным значением. Квазиуровнем оператора  $H$  будем называть его собственное значение или резонанс.



**Теорема 2.** Оператор  $H$  имеет квазиуровень в точке  $\lambda = 2v$  (резонанс).

*Доказательство.* Значение  $\lambda = 2v$  является полюсом резольвенты оператора  $H$ . Покажем, что оно не является собственным значением оператора  $H$ . Для этого рассмотрим уравнения (6) при  $\varphi = (\varphi_1(n), \varphi_2(m)) = (0, 0)$  для всех  $n \in \mathbb{Z}, m \in M$ .

Если  $\lambda = 2v$  при условии  $0 < |v| < 1$ , то  $\cos k = v$  и  $\sin k = \pm\sqrt{1 - v^2}$ . Для определенности будем считать, что  $k = \arccos v + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$  (случай когда  $k = -\arccos v + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$  рассматривается аналогично), тогда решение системы

$$\begin{cases} \psi_1(n) = \frac{1}{2i\sqrt{1-v^2}} \left( (\psi_1(0) - \psi_2(1)) \exp(i \arccos v \cdot |n+1|) + \right. \\ \left. + (\psi_1(-1) - \psi_2(3)) \exp(i \arccos v \cdot |n|) \right), \\ (H_2 - 2vI)\psi_2(m) = -\psi_1(-1)\delta_{m,1} - \psi_1(0)\delta_{m,3}, \end{cases}$$

если оно существует и отлично от нуля, будет определять собственную функцию оператора  $H$  при  $\lambda = 2v, 0 < |v| < 1$ . Второе уравнение системы является линейной неоднородной системой с матрицей системы  $(H_2 - 2vI)$ . Ранг матрицы системы равен двум, ранг расширенной матрицы будет равен двум при условии  $\psi_1(0) + \psi_1(-1) = 0$ . Общее решение второго уравнения имеет вид

$$\psi_2(1) = \alpha - \frac{2}{3v}\psi_1(0), \quad \psi_2(2) = \alpha - \frac{1}{3v}\psi_1(0), \quad \psi_2(3) = \alpha,$$

где  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Следовательно,

$$\psi_1(n) = \frac{1}{2i\sqrt{1-v^2}} \left( (\psi_1(0) - \psi_2(3) + \frac{2}{3v}\psi_1(0)) \exp(i \arccos v \cdot |n+1|) - (\psi_1(0) + \psi_2(3)) \exp(i \arccos v \cdot |n|) \right).$$

Отсюда и из равенства  $\psi_1(0) + \psi_1(-1) = 0$  получим  $\alpha = \frac{1}{3v}\psi_1(0)$ ,

$$\psi_1(n) = \frac{\psi_1(0)}{2i\sqrt{1-v^2}} \left( 1 + \frac{1}{3v} \right) (\exp(i \arccos v \cdot |n+1|) - \exp(i \arccos v \cdot |n|)).$$

Из последнего равенства получаем уравнение

$$(3v - 1)i\sqrt{1 - v^2} = (3v + 1)(v - 1),$$

которое имеет единственное решение  $v = 1$ , что приводит к противоречию.

■

## Список литературы

- [1] Moumita Dey, Santanu K. Maiti, Karmakar S. N. Spin transport through a quantum network: Effects of Rashba spin-orbit interaction and Aharonov–Bohm flux // J. of Appl. Phys. 2011. Vol. 109. – 024304 (10 p).
- [2] Baranova L. Y., Chuburin Y. P. Quasi-levels of the two-particle discrete Schrödinger operator with a perturbed periodic potential // J. Phys. A. 2008. Vol. 41. – 435205 (11 p).
- [3] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977. – 358 с.
- [4] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. – М.: Мир, 1982. – 428 с.

УДК 517.97, 512.81, 532.526

### ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОМАССОБМЕНА

Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.

Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет  
(КНИТУ – КАИ) им. А. Н. Туполева  
г. Казань

e-mail: ggbil2@gmail.com, bilchnat@gmail.com

**Bilchenko G. G., Bilchenko N. G. On an Inverse Problem of Heat and Mass Transfer.** The control law for ensuring the beforehand given local heat flow distribution (the condition for surface protection against heat destruction) from laminar boundary layer to the permeable surface is constructed for the hypersonic aircraft effusion heat protection mathematical modeling problem. The solvability questions in the cases of additional gas-dynamic restrictions (weak blowing) and/or constructive restrictions (impermeable insertions) are considered. The computational experiments results are discussed.

Для задачи математического моделирования эффузионной тепловой защиты гиперзвуковых летательных аппаратов по заданному распределению локального теплового потока (условие непрогорания поверхности) от ламинарного пограничного слоя к проницаемой поверхности строится обеспечивающий его закон управления. Рассмотрены вопросы разрешимости этой задачи при введении различных дополнительных газодинамических (слабый вдув) и/или конструкторских (непроницаемые вставки) ограничений. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

1. В практике создания *гиперзвуковых летательных аппаратов* (ГЛА) применяют различные способы пассивной и активной *тепловой защиты* (ТЗ) их поверхностей, обусловленные разнообразием их конструкций и специфическими условиями полёта в плотных слоях атмосферы (диссоциацией и ионизацией). Выбор оптимального типа системы ТЗ ГЛА определяется возможностью получить максимальную эффективность работы при выполнении им поставленной задачи (траектория полёта и параметры надёжности и безопасности заранее заданы) при минимальной массе системы. Одним из наиболее эффективных и распространённых способов активной ТЗ является тепломасообменный путём вдува газа–охладителя в *пограничный слой* (ПС) с поверхности ГЛА.

Задача оптимального теплового проектирования может рассматриваться как обратная задача теплообмена в экстремальной постановке, т. е. по известным условиям, определяющим тепловое состояние системы, необходимо найти параметры, удовлетворяющие этому состоянию и выбранному критерию оптимальности.

2. В работах [1] – [6] была рассмотрена следующая **прямая** задача. По заданному управлению  $m(x)$  (вдуву в ламинарный ПС), где  $x \in [0; 1]$ , требуется рассчитать параметры ПС и определить: локальный тепловой поток  $q(x; m)$ , локальное напряжение трения  $f_{\text{тр}}(x; m)$ , интегральный тепловой поток  $Q(m)$ , суммарную силу трения  $F_{\text{тр}}(m)$  и мощность  $N(m)$  системы, обеспечивающей вдув, т. е.

$$m \rightarrow (q, f_{\text{тр}}; Q, F_{\text{тр}}, N). \quad (1)$$

В работах [1] – [3], [6] оптимальное управление  $m(x)$  было построено, как решение экстремальной задачи

$$Q(m) \rightarrow \inf_m \quad (2)$$

(среди непрерывных  $m$ ), при условии

$$N(m) \leq N_{\text{max}}. \quad (3)$$

При различных дополнительных условиях [4], [7] – [11] были построены (в пределах машинной точности) экстремальные значения  $Q$  и соответствующие управления  $m$ . Были предложены [4], [6] специальные виды  $m(x)$ , дающие достаточно хорошие приближения к экстремальным значениям  $Q$ .

**Замечание.** При расчётах на ЭВМ вдув  $m(x)$  задавался, а  $q(x)$  и  $f_{\text{тр}}(x)$  вычислялись на сетках [11] вида

$$X = (x_j)_{j=0, \dots, n}, \quad x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1.$$

**3.** Сформулируем **обратные** по отношению к построению (1) задачи. Пусть заданы сетки  $X_1 = (x_j^\wedge)_{j=0, \dots, n_1}$  и  $X_2 = (x_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$ . Пусть на  $[0; 1]$  (по крайней мере – на  $X_1$ ) заданы функции  $b(x)$  и  $t(x)$ . Пусть на  $X_2$  задано распределение “контрольных” значений  $(q_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$ . Требуется найти задаваемое значениями  $(m_j^\sim)_{j=0, \dots, n_1}$ , удовлетворяющими условию

$$b_{j,0} = b(x_j^\wedge) \leq m_j^\sim \leq t(x_j^\wedge) = t_{j,0} \quad \text{для } j = 0, \dots, n_1, \quad (4)$$

кусочно-линейное на  $X_1$  управление  $m^\sim(x)$  такое, что вычисленные по нему на  $X_2$  значения  $(q_j^\sim)_{j=0, \dots, n_2}$ , должны быть *близкими* к  $(q_j^\vee)$ , т. е.

$$q^\vee \rightarrow m^\sim \rightarrow \left( q^\sim \approx q^\vee, f_{\text{Тр}}^\sim; Q^\sim, F_{\text{Тр}}^\sim, N^\sim \right). \quad (5)$$

**1. Случай**  $X_1 = X_2$ . Близость  $q^\sim$  к  $q^\vee$  следует понимать в *интерполяционном* смысле: в узлах  $X_2$  значения  $q^\sim$  в пределах заданной точности  $\varepsilon > 0$  должны совпадать с  $q^\vee$ :

$$\|q^\sim - q^\vee\|_\infty = \max_{j=0, \dots, n_2} |q_j^\sim - q_j^\vee| \leq \varepsilon_{\text{int}}. \quad (6)$$

Пусть  $(m^\sim; q^\sim)$  и  $(m^{\tilde{\sim}}; q^{\tilde{\sim}})$  – два решения, т. е. выполнено (6) и  $\|q^{\tilde{\sim}} - q^\vee\|_\infty \leq \varepsilon_{\text{int}}$ . Если они удовлетворяют условию

$$\|q^\sim - q^{\tilde{\sim}}\|_\infty \leq \varepsilon_{\text{eq}}, \quad (7)$$

то в пределах точности  $\varepsilon_{\text{eq}} > 0$  можно их не различать. Порядок величин  $\varepsilon_{\text{int}} > 0$  и  $\varepsilon_{\text{eq}} > 0$  ограничен снизу точностью представления вещественных чисел в ЭВМ, а также зависит от применяемых численных методов.

Таким образом, если решение, удовлетворяющее (4), существует, то оно может быть восстановлено **единственным** (в смысле (7)) образом.

**2. Случай**  $X_1 \subsetneq X_2$ . Задача является переопределённой. Близость  $q^\sim$  к  $q^\vee$  следует понимать в *аппроксимационном* смысле, т. е. для заданных  $p \in [1; +\infty)$  и набора весов  $w = (w_j)_{j=0, \dots, n_2}$ ,  $w_j > 0$ , надо искать  $(m^\sim; q^\sim)$ , где  $q^\sim$  является решением экстремальной задачи

$$R(q^\sim; q^\vee) = \|q^\sim - q^\vee\|_{p,w} = \left( \sum_{j=0}^{n_2} w_j \cdot |q_j^\sim - q_j^\vee|^p \right)^{1/p} \rightarrow \inf_{q^\sim}. \quad (8)$$

**3. Случай**  $X_1 \supsetneq X_2$ . Если интерполяционное на  $X_2$  решение  $(m^\sim; q^\sim)$ , удовлетворяющее (4), существует, то оно уже не обязано быть единственным. Для сведения к случаю “1)” можно **либо** дополнить таблицу контрольных

значений  $(q_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$  линейными аппроксимациями по точкам  $X_1 \setminus X_2$ , **либо** искать  $m^\sim$  кусочно-линейным на  $X_2$ . Возможен другой вариант – для сужения пространства решений можно на класс  $m(x)$  наложить дополнительные ограничения и/или поставить дополнительное экстремальное условие.

**Замечания.**

1. Для обеспечения физической реализуемости следует ввести ограничения [11] на разделённые разности первого порядка искомой  $m^\sim$ :

$$b_{j,1} \leq \frac{m_j^\sim - m_{j-1}^\sim}{x_j^\wedge - x_{j-1}^\wedge} \leq t_{j,1}, \quad j = 1, \dots, n_1. \quad (9)$$

2. Если известно, что “контрольные” значения  $q$  заданы с погрешностями, то даже при  $X_1 \supseteq X_2$  стоит рассматривать обратную задачу в аппроксимационной постановке (8) с дополнительными ограничениями на разделённые разности второго порядка искомой  $m^\sim$ :

$$b_{j,2} \leq \frac{1}{x_{j+1}^\wedge - x_{j-1}^\wedge} \left( \frac{m_{j+1}^\sim - m_j^\sim}{x_{j+1}^\wedge - x_j^\wedge} - \frac{m_j^\sim - m_{j-1}^\sim}{x_j^\wedge - x_{j-1}^\wedge} \right) \leq t_{j,2}, \quad j = 1, \dots, n_1 - 1. \quad (10)$$

4. Программно реализован алгоритм, который **для заданных** сеток  $X_1, X_2$ , последовательности контрольных значений  $(q_j^\vee)$ , погрешности  $\varepsilon > 0$  и ограничений  $(b_{j,k}), (t_{j,k})$ , где  $k = 0, \dots, 2$ : **либо** строит кусочно-линейное на  $X_1$  управление  $m^\sim(x)$ , удовлетворяющее условиям (4), (9), (10) и (6), **либо** сообщает о невозможности такого восстановления для заданных  $b, t, \varepsilon$  и предлагает найти аппроксимационное решение. Для задачи аппроксимации (при заданных  $p, w$  и  $\varepsilon_a > 0$ ) он **либо** строит решение, удовлетворяющее (4), (9), (10) и (8) с  $R \leq \varepsilon_a$ , **либо** сообщает о невозможности такого приближения.

Вместо последовательности  $q^\vee$  может быть использована последовательность значений локального напряжения трения  $f_{\text{Тр}}^\vee$ .

Таким образом, программа позволяет тестировать на реализуемость на поверхности ГЛА последовательности значений  $q^\vee$  локального теплового потока или последовательности напряжений трения  $f_{\text{Тр}}^\vee$ .

5. По аналогии с [4], в качестве модельных были рассмотрены “простые” законы распределения теплового потока на поверхности ГЛА. Обозначим:

$$q_{II_{\text{inv}}}(x; q^*, x^*) = \begin{cases} q^* \cdot \frac{x}{x^*}, & \text{при } x \in [0; x^*]; \\ q^*, & \text{при } x \in [x^*; 1], \end{cases}$$

$$q_{IV}(x; q_0, q_n) = q_0 \cdot (1 - x) + q_n \cdot x, \quad \text{при } x \in [0; 1].$$

Для случая цилиндрической поверхности интересными являются (параметры соответствуют [2], [4]):

1) закон с постоянным уровнем  $q_{\text{cyl}_1}(x) = \text{const} = q_{IV}(x; q_C, q_C)$ , где  $q_C = 0, 15$ ;

2) линейный закон  $q_{\text{cyl}_2}(x) = q_{IV}(x; q_0, q_n)$ , где  $q_0 = 0, 2$  и  $q_n = 0, 1$ .

Для случая сферической поверхности интересными являются (параметры соответствуют [3], [4]):

3) линейный закон  $q_{\text{sph}_1}(x) = q_{IV}(x; q_0, q_n)$ , где  $q_0 = 0$  и  $q_n = 0, 15$ ;

4) закон  $q_{\text{sph}_2}(x) = q_{II_{\text{inv}}}(x; q^*, x^*)$  с линейным ростом от  $q_0 = 0$  в  $x_0 = 0$  до  $q^* = 0, 15$  в  $x^* = 0, 5$  и поддержанием постоянного уровня  $q^*$  до  $x_n = 1$ .

Можно отметить, что восстановленные по законам  $q_{\text{cyl}_1}$  и  $q_{\text{sph}_1}$  управления, оказались очень близкими к оптимальным (или к “простому” закону – “треугольник”), а случаи  $q_{\text{cyl}_2}$  и  $q_{\text{sph}_2}$  восстановили управления близкие по виду к “простому” закону “трапеция” [4], [6].

**6.** Естественным продолжением постановок обратных задач тепломассообмена являются **комбинированные** задачи. Ограничимся случаем  $X_1 = X_2$ .

1) Пусть от точки  $x_0 = 0$  до некоторой  $x_{j^*} \in (0; 1)$  заданы контрольные значения  $(q_j^V)_{j=0, \dots, j^*}$ . Для этого участка вдув будет восстанавливаться. От  $x_{j^*} \in (0; 1)$  до  $x_n = 1$  требуется найти удовлетворяющее условиям (4) оптимальное с точки зрения интегрального теплового потока (2) управление при общем ограничении (3) на мощность системы охлаждения.

2) На конечном участке от  $x_{j^*} \in (0; 1)$  до  $x_n = 1$  по  $(q_j^V)_{j=j^*, \dots, n}$  восстановить вдув, а на начальном – от  $x_0 = 0$  до  $x_{j^*} \in (0; 1)$  оптимальное управление найти из экстремальной задачи (2) – (4).

3) На нескольких участках можно задать  $(q_j^V)$ . На них вдув надо восстановить, а на участках, дополняющих их до  $[0; 1]$  – вдув надо найти, как решение задачи (2) – (4).

## Список литературы

- [1] Гараев К. Г., Овчинников В. А., Бильченко Н. Г. Инвариантные вариационные задачи ламинарного пограничного слоя при различных режимах течения. – Казань: Изд-во КГТУ, 2003. – 123 с.
- [2] Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального

- управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта // Вестник Воронеж. Гос. Ун-та. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 83–94.
- [3] Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта // Вестник Воронеж. Гос. Ун-та. Серия: Системный анализ и информ. технологии. – 2015. – № 1. – С. 5–8.
- [4] Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения «простых» законов вдува // Вестник Воронеж. Гос. Ун-та. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 95–102.
- [5] Бильченко Н. Г. Математическое моделирование оптимальной тепловой защиты проницаемых поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов // «Устойчивость и процессы управления»: Материалы III Междунар. конф. (Санкт-Петербург, 5–9 сентября 2015 г.). – СПб: Издательский Дом Фёдоровой Г. В., 2015. – С. 299–300.
- [6] Bilchenko N. G. Permeable Surfaces Hypersonic Aircraft Optimal Heat Protection Mathematical Modeling // “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov (SCP) SCP–BDO–2015, International Conference, Russia, Saint–Petersburg, October 5–9, 2015. Proceedings. – IEEE, 2015. – P. 310–313.
- [7] Бильченко Н. Г. Применение специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. VIII междунар. конф. «ПМТУКТ – 2015». – Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2015. – С. 61–64.
- [8] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых пористых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Междунар. научно-технической конф., Воронеж, 16–18 декабря 2015 г. – Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2015. – С. 137–139.
- [9] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управ-

- ления тепломассообменом на проницаемых перфорированных поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Междунар. научно-технической конф., Воронеж, 16–18 декабря 2015 г. – Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2015. – С. 134–136.
- [10] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов // «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2016»: Материалы междунар. конф. (Воронеж, 25–31 января 2016 г.). – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 78–82.
- [11] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Классы решений задач оптимального управления пограничным слоем на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов // «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2016»: Материалы междунар. конф. (Воронеж, 25–31 января 2016 г.) – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 82–86.

УДК 517.97, 512.81, 532.526

## ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ

Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.

Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет  
(КНИТУ – КАИ) им. А. Н. Туполева  
г. Казань

e-mail: ggbil2@gmail.com, bilchnat@gmail.com

**Bilchenko G. G., Bilchenko N. G. Construction of Range of Extreme Values of Functionals.**

The hypersonic aircraft permeable surfaces effusion heat protection optimization problem is considered. The laminar boundary layer control laws giving the extremal values of total Newton friction force and total heat flow and their combinations with additional restrictions on control and its derivatives are obtained. The method of investigation of optimal solutions for multiobjective optimization problems with multivariant restrictions is suggested. The computational experiments results are discussed.



Для задачи оптимизации эффузионной тепловой защиты проницаемых поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов построены законы управления ламинарным пограничным слоем, обеспечивающие экстремальные значения интегрального теплового потока, суммарной силы ньютоновского трения, а также их комбинации при различных дополнительных ограничениях на управление и его производные. Предлагается методика изучения оптимальных решений многокритериальных задач с многовариантными ограничениями. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

**1.** Полёт в плотных слоях атмосферы на гиперзвуковых скоростях сопровождается большими аэродинамическими и термохимическими нагрузками на поверхность летательного аппарата, существенно ухудшающими его манёвренность, устойчивость, управляемость и предъявляющими более высокие требования к выбору системы *теплозащиты* (ТЗ). Одним из наиболее эффективных и распространённых способов активной ТЗ является тепломасообменный путём вдува газа–охладителя в *пограничный слой* (ПС) с поверхности *гиперзвукового летательного аппарата* (ГЛА).

Основная задача проектирования ГЛА заключается в минимизации негативных воздействий, препятствующих эффективному выполнению поставленных целей. Эту задачу целесообразно решать в рамках теории оптимального управления ПС, при этом важно оценить диапазон изменения параметров, подлежащих оптимизации: локального теплового потока и касательного напряжения трения.

Обычно рассматриваются задачи минимизации функционала, отслеживающего влияние лишь одного из них. В данной работе представлен метод изучения с целью оптимизации комбинации указанных параметров.

**2.** В прямой задаче тепломасообмена по заданному управлению  $m(x)$  – вдуву в ламинарный ПС, где  $x \in [0; 1]$ , требуется рассчитать параметры ПС и определить:

- 1) интегральный тепловой поток  $Q(m)$ ,
- 2) суммарную силу трения  $F(m)$ ,
- 3) мощность  $N(m)$  системы, обеспечивающей вдув, т. е.

$$m \rightarrow (Q(m), F(m), N(m)). \quad (1)$$

**Замечание.** Тройку значений  $(Q(m), F(m), N(m))$  в зависимости от контекста будем считать или **точкой**  $P(m) = (Q(m), F(m), N(m)) \in \mathbb{R}^3$  в аффинном, или **вектором**  $\vec{v}(m) = Q(m) \cdot \vec{i} + F(m) \cdot \vec{j} + N(m) \cdot \vec{k} \in \mathbb{V}_3$  в евклидовом пространстве со стандартным ортонормированным базисом  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ .

В работах [1] – [3] было построено оптимальное управление  $m(x)$ , как решение одной из экстремальных задач: **либо**

$$Q(m) \rightarrow \inf_m, \quad (2)$$

**либо**

$$F(m) \rightarrow \inf_m, \quad (3)$$

(среди непрерывных  $m$ ), при выполнении ограничения

$$N(m) \leq N_{\max}. \quad (4)$$

В работах [4], [5] предложены специальные виды  $m(x)$ , реализующие достаточно хорошие приближения к экстремальным значениям  $Q$  в задаче (2), (4).

**3.** Пусть для  $x \in [0; 1]$  заданы  $b(x)$  и  $t(x)$ . Пусть  $m$  такие, что

$$b(x) \leq m(x) \leq t(x). \quad (5)$$

Обозначим  $\underline{N} = N(b)$  и  $\overline{N} = N(t)$ . Для  $N_c \in [\underline{N}; \overline{N}]$  обозначим  $D(N_c)$  – множество значений  $(Q(m), F(m), N_c)$  для  $m$  таких, что  $N(m) = N_c$ . Обозначим  $E(N_c)$  – множество значений  $(Q, F, N_c)$  – решений экстремальных задач

$$\Psi(m; \varphi) = \cos \varphi \cdot Q(m) + \sin \varphi \cdot F(m) \rightarrow \inf_{m: N(m)=N_c}, \quad (6)$$

где  $\varphi \in [0; 2\pi]$ . Область экстремальных значений

$$S = \bigcup_{N_c \in [\underline{N}; \overline{N}]} E(N_c) \quad (7)$$

является боковой поверхностью множества

$$T = \bigcup_{N_c \in [\underline{N}; \overline{N}]} D(N_c)$$

всевозможных значений (1) для допустимых (5) управлений.

**Замечание.** Здесь учтено, что задачи [2], [3] были приведены к безразмерным постановкам. Это позволяет собрать изначально *различные в физическом смысле* функционалы в линейную комбинацию. Метод может быть применён в других задачах, если отнести исследуемые величины к их максимальным значениям. С математической точки зрения важно, чтобы параметр был ограниченным. В этом случае его легко привести к диапазону  $[0; 1]$ .

4. Разработаны алгоритмы приближённого построения и уточнения формы поверхности (7), её сечений и проекций. Это позволяет для разнообразных ограничений на вдув и его производные [6] – [8] эффективно исследовать разнообразные экстремальные задачи (6).

5. Для непрерывных  $m$  графики зависимостей  $Q$  от  $N_{\max}$ , как решений задачи (2), (4) в случаях цилиндрического и сферического тел (температурный фактор  $\tau_w = T_w/T_{e0} = 0,25$ , скорость набегающего потока  $M_\infty = 10$ , высота  $H = 10$  [км], равновесно диссоциирующий газ, параметры стандартной атмосферы Земли), приведены в работах [4] и [5]. Они (графики) являются частями проекций поверхностей (7) на плоскость  $(Q, N)$ .

Изучено влияние различных параметров: скорости  $M_\infty$ , температурного фактора  $\tau_w$ , высоты  $H$ , магнитного поля  $\sigma B_0^2$ .

Исследованы изменения в оптимальных управлениях  $m$  при переходе от задачи (2), (4) к задаче (3), (4).

6. Для всестороннего изучения многообразия управлений в программу заложены возможности построения аналогичных (7) геометрических объектов. Опишем обобщение п. 3 для случая трёх функционалов и одного ограничения.

Пусть в  $\mathbb{V}_3$  задана ортонормированная система векторов  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ . Будем обозначать отвечающий за ограничение функционал

$$R(m) = R(m; \vec{e}_3) = \vec{e}_3 \cdot \vec{v}(m).$$

Обозначим (и численно получим, как решения задач безусловного экстремума)

$$\underline{R} = \min_{m: b \leq m \leq t} R(m) \quad \text{и} \quad \overline{R} = \max_{m: b \leq m \leq t} R(m).$$

Для  $R_c \in [\underline{R}; \overline{R}]$  обозначим  $D(R_c; \vec{e}_3) \subset \mathbb{R}^3$  – множество точек  $P(m)$  для  $m$  таких, что  $R(m) = R_c$ . Обозначим  $E(R_c; \vec{e}_3) \subset \mathbb{R}^3$  – множество точек  $P = (Q, F, N)$  – решений экстремальных задач

$$\Psi(m; \varphi, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = \{\cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \varphi \cdot \vec{e}_2\} \cdot \vec{v}(m) \rightarrow \inf_{m: R(m)=R_c},$$

где  $\varphi \in [0; 2\pi]$ . Наконец, область экстремальных значений

$$S(\vec{e}_3) = \bigcup_{R_c \in [\underline{R}; \overline{R}]} E(R_c; \vec{e}_3)$$

является боковой (для направления  $\vec{e}_3$ ), поверхностью множества

$$T(\vec{e}_3) = \bigcup_{R_c \in [\underline{R}; \overline{R}]} D(R_c; \vec{e}_3)$$

всевозможных значений (1) для допустимых (5) управлений.

## Список литературы

- [1] Гараев К. Г., Овчинников В. А., Бильченко Н. Г. Инвариантные вариационные задачи ламинарного пограничного слоя при различных режимах течения. – Казань: Изд-во КГТУ, 2003. – 123 с.
- [2] Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта // Вестник Воронеж. Гос. Ун-та. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 83–94.
- [3] Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта // Вестник Воронеж. Гос. Ун-та. Серия: Системный анализ и информ. технологии. – 2015. – № 1. – С. 5–8.
- [4] Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения «простых» законов вдува. // Вестник Воронеж. Гос. Ун-та. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 95–102.
- [5] Bilchenko N. G. Permeable Surfaces Hypersonic Aircraft Optimal Heat Protection Mathematical Modeling // “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov (SCP) SCP–BDO–2015, International Conference, Proceedings. IEEE, 2015. – P. 310–313.
- [6] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых пористых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции. – Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2015. – С. 137–139.

- [7] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых перфорированных поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции. – Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2015. – С. 134–136.
- [8] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Классы решений задач оптимального управления пограничным слоем на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов // «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2016»: Материалы междунар. конф. Воронеж, 25–31 января 2016 г. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 82–86.

УДК (531.36+624.07):534.1

## КОНТРОЛЬ СОСТОЯНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПОЛОТНА И УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

Волосова Н. К., Вакуленко С. П., Волосов К. А.

Московский государственный университет путей сообщения

Москва

e-mail: konstantinvolosov@yandex.ru

**Volosova N. K., Vakulenko S. P., Volosov K. A. Control defects railroad tracks and Schrödinger's equation.** In this article is consider the model Rayleigh's beam theory. The method of the factorization was used. The conditions on the problem parameters, under which there is a connection with the Schrödinger's equation, by using the asymptotic method WKB–Maslov. The construction of apparatus for condition monitoring and diagnostics of 120 thousands of kilometers of railway based on the analysis of vibration spectrum of dynamic processes during rolling stock movement doesn't have any alternative methods in Russian Federation. The similar methods are used for a long time in aircrafts operation, other technical fields and biomedical science. This method can compliment the known local methods used for Russian Railways.

**Keywords:** Rayleigh's beam, Schrödinger's equation, the factorization of the PDE

Факт появления дефектов может быть обнаружен при анализе спектра колебаний возникающих при движении состава. Рассмотрена нелинейная модель «балки Рэлея» на упругом основании соответствии с гипотезой Винклера, т. е. в модель добавляются кубические слагаемые. Показано, что методом

ВКБ–Маслова для медленно меняющейся функции, которая описывает огибающую спектра колебаний асимптотическими формулами и удовлетворяет нелинейному уравнению Шрёдингера только при определённых значениях параметров исходной задачи. Появляется объяснение явлений перекачки энергии колебаний в область высоких частот за счёт модуляционной неустойчивости, в которой образуются новые резонансные пики, вызванные существующими трудно выявляемыми дефектами железнодорожного пути. Описана процедура факторизации уравнения балки Рэлея.

**Ключевые слова:** балка Рэлея, уравнение Шрёдингера, факторизация уравнения с частными производными

**1. Модель балки на упругом основании.** Наличие более 120 тысяч километров железнодорожного пути в РФ делает необходимым и важным реализацию на практике высоко технологичного комплекса постоянного контроля качества состояния пути с движущегося подвижного состава, используя настоящий уровень техники, технологий, науки, возможностей современной компьютерной техники, возможности системы ГЛОНАСС и т. д. Решить обратную очень сложную задачу обнаружения и локализации в пространстве образовавшегося дефекта железнодорожного пути современная математика не может. Дело в том, что здесь играет большую роль и значительная величина материальных и финансовых затрат. С другой стороны, математическое моделирование помогает получить подсказки о эффектах при решении прямых смешанных краевых задач. Теоретические основы метода излагаются в работах [1], [2]. Экспериментальные данные и расчеты показывают, что дефекты железнодорожного пути отражаются в более или менее явно в одном из спектрах вертикальных, продольных или поперечных колебаний в широком диапазоне частот, появляются новые максимумы (резонансы) и дисперсия в окрестности их увеличивается.

Дефектоскопия, использующая колебания разных частот, широко применяется в различных областях техники и машиностроения и на всех видах транспорта. Ультразвуковая дефектоскопия рельсов и железнодорожных путей осуществляется с тележек, передвигаемых фактически вручную с небольшой скоростью. Ремонт и контроль состояния ста двадцати тысяч километров железных дорог в РФ является большой проблемой. Заметим, что в данной работе цитируется лишь малая часть статей на эту тему. Экономический эффект от эксплуатации такого комплекса в РФ настолько велик, что в настоящий момент его трудно оценить. Затраты на проведение мониторинга за состоянием ж. д. полотна с подвижного состава несоизмеримы с затратами собственника путей по ликвидации последствий схода подвижного

состава. Разные методы диагностики трудно выявляемых дефектов должны не конкурировать, а дополнять друг друга. Методы исследования деталей, узлов и целых сложных конструкций волнами в различном диапазоне частот давно используются при эксплуатации аппаратов в разных областях техники и машиностроения. В большинстве этих методов используется внешний источник колебаний, а в предлагаемом методе в качестве источника колебаний используются колебания генерируемые самим движущимся объектом. Методика и основы анализа разных аспектов интеграции такого комплекса в единую транспортную систему должна быть изложена в отдельной статье на базе работы [3]. Основная цель данного доклада указать обнаруженные новые математические свойства основной теоретической модели балки Рэлея, играющую большую роль в расчётах, высказать мнение авторов о необходимости реализации внедрения в практику аппаратного комплекса анализа спектра колебаний с подвижного состава. В [1] изложены некоторые соображения о принципах построения такой системы.

**Замечание 1.** Отметим, что опыт компьютерной обработки и анализа крупных объёмов динамических данных со сложной трёхмерной внутренней структурой накапливается, например, при применении различных видов томографии мозга, обработке данных нейровизуализации и биоинформатики в медико-биологической сфере. При этом используются методы математической статистики и сравнение с эталонами, что приводит к успеху. Эта задача имеет много схожих черт с обсуждаемой проблемой, хотя в ней исследуются волны и колебания в другом частотном диапазоне. В этом случае, как на железнодорожном пути, используется априорная информация о строении объектов.

Объём экспериментальных и данных математического моделирования накопился большой, и наступает время, по мнению авторов, практической реализации создания системы непрерывного слежения за состоянием железнодорожного пути.

**Замечание 2.** Выдающийся математик современности А. С. Братусь высказал свою поддержку идеи создания комплекса осуществляющего слежение за состоянием железнодорожного пути с подвижного состава на основе имеющихся в данный момент в нашем распоряжении технических средств, высоких технологий, вычислительных систем, системы ГЛОНАСС и т. д. в следующей форме: “Математический расчёт течения жидкости в разветвлённых сложных трубопроводах, широком диапазоне изменения температур и давления и в настоящее время остаётся сложной задачей. Привлечение для

численных расчётов суперкомпьютеров и методов многопоточковой обработки данных связано с затратами больших сил, энергетических и финансовых ресурсов. Если бы люди ждали когда математики докажут все свои теоремы, связанные с этими задачами и водопровода сегодня бы не было”.

Известно, что задача выявления дефектов железнодорожного пути, которые являются причиной изменений в спектре продольных, вертикальных и поперечных колебаний, возникающих при прохождении подвижного состава, называется в математике “обратной”. Многомерные “прямые” краевые задачи, с различными многообразными вариантами постановки краевых условий и различных распределений в пространстве сил, являются также очень сложными. “Обратные” задачи такой сложности в настоящее время нет возможности решить. С нашей точки зрения, можно ограничиться расчетом одномерных, более простых “прямых” задач. Математическое моделирование таких моделей позволяет выявить основные эффекты и получить подсказки с помощью которых можно сделать вывод о появлении трудновыявляемых дефектов и локализовать их в пространстве. Своевременное обнаружение дефектов может помочь избежать аварий, утраты имущества, не говоря уже о потере здоровья и жизни людей. Если бы такой метод применялся, то тяжелую аварию, подобную аварии в московском метро 15 июля 2014 года удалось бы предотвратить.

Экспериментальные данные и многие расчеты, как наши, так и других авторов, показывают, что возникновение дефекта ведёт к появлению дополнительных резонансов в области более высоких частот, и дисперсия в окрестности главных максимумов увеличивается. Данные и подобные этому постоянно повторяющиеся признаки могут являться основой для метода выявления появления трудновыявляемых дефектов, указывать на факт их появления и позволяют локализовать участок пути, путем сравнения спектра поперечных, вертикальных и продольных колебаний в данный момент времени с эталонными соответствующими спектрами, полученным ранее на конкретном исправном участке, хранящимся в организованной базе данных. Некоторые примеры рассмотрены в [1].

**Замечание 3.** При численном моделировании в цитируемых работах используются неявные разностные схемы и вариационный метод Рунге для решения краевых задач. При аналитическом построении решения методом разложения в ряды Фурье, получаются ряды, которые медленно сходятся (см. [1]). Но в данном случае задача нелинейная, и метод Фурье не применим.



**Замечание 4.** Вычислительные эксперименты по решению прямых многомерных задач были проведены в ряде цитируемых в [1] работ, а также в работах, которые указывают их авторы в списке литературы. Привести их все в статье не представляется возможным.

**Замечание 5.** Здесь мы только выделим новые элементы в данной работе с точки зрения математической физики и механики балок, а именно, ими являются факторизация уравнений с частными производными модели балки Рэлея, выяснение роли уравнения Шрёдингера (НУШ), которое не использовалось ранее в работах, связанных с железнодорожной тематикой. Если читатель знает о работах, в которых реализована факторизация данной модели, то просим сообщить авторам. Молодое поколение, не зная аналитических операторных методов, сразу бросается к реализации численных методов на компьютере. В работе рассмотрена и более сложная задача с учетом демпфирования, решение которой в данной краткой заметке нет возможности привести.

Проведенная процедура факторизации даёт возможность объединить большое количество задач, которые отличаются конкретными значениями параметров (из-за различия значений физических констант) и рядом слагаемых в них, величину и влияние которых на решение можно регулировать с помощью безразмерных параметров и краевых условий.

Операторные методы изложены в работах В. П. Маслова и использованы в ряде задач [6], в списке литературы этой книги приведен список работ по этой теме.

**Замечание 6.** НУШ возникает при описании аномальной дисперсии в задачах нелинейной оптики и при описании явления самофокусировки и т. д. [7]. Оно довольно хорошо изучено и обладает бесконечным числом точных решений и возможностью применения аппарата обратной задачи рассеяния. Для НУШ известен эффект модуляционной неустойчивости, что позволяет объяснить эффект перекачки энергии в область более высоких частот. Всё это привлекло внимание авторов [4]. Обоснованию появления уравнения НУШ в теории балки Рэлея проведено на физическом уровне строгости, и ему уделено всего семь строк на стр. 22. В следующем параграфе данной работы подробно выясняются условия применения НУШ в анализе обсуждаемой проблемы. В математической литературе НУШ записывают в виде

$$i \frac{\partial V(X, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + V |V|^2 = 0. \quad (1)$$

**2. Связь уравнений модели балки Рэлея и НУШ.** Приведём уравнение, описывающее колебания в модели “балки Рэлея” на упругом основании [5] в безразмерном виде

$$\frac{\partial^2 V(X, \tau)}{\partial \tau^2} - \mu_0 \frac{\partial^4 V(X, \tau)}{\partial X^2 \partial \tau^2} + \mu_1 \frac{\partial^4 V(X, \tau)}{\partial X^4} + \Omega^2 V(X, \tau) + \Omega_1^2 V^3(X, \tau) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $V(X, \tau) = u(x, t)/U_0$  – безразмерная функция отклонения срединной линии,  $U_0$  – характерное среднее значение поперечного отклонения срединной линии от положения равновесия.  $X = x/x_0$ ,  $\tau = t/t_0$  – безразмерные координата и время, а  $x_0$ ,  $t_0$  – характерные значения задачи по пространственной координате  $x$  и времени  $t$ . Напомним, что предположение о том, что угол поворота сечения балки  $\varphi(x, t)$  связан с поперечным отклонением  $u(x, t)$  соотношением  $\varphi(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ , приводит к лагранжиану для балки Рэлея, лежащей на упругом основании.

В уравнении (1)  $\mu_0 = I_0/(Fx_0^2)$ ,  $\mu_1 = I_0 t_0^2 E/(Fx_0^2 \rho)$ ,  $\Omega^2 = ht_0^2/(F\rho)$ ,  $\Omega_1^2 = h_1 t_0^2 U_0^2/(F\rho)$  – безразмерные параметры, а  $\rho$  – удельная плотность материала,  $E$  – модуль упругости на сжатие,  $F$  – площадь поперечного сечения балки,  $I_0$  – момент инерции сечения на поворот,  $h$  – коэффициент упругости основания,  $h_1$  – поправка коэффициента упругости основания в модели Винклера. Отметим, что  $h \gg |h_1|$  и случай  $h_1 > 0$  в теории балки Рэлея называют «жестким» типом нелинейности, а случай  $h_1 < 0$  называют «мягким» типом нелинейности.

Предполагаем, что функция  $V(X, \tau)$  имеют четыре непрерывно-дифференцируемые производные по пространственной переменной.

Для уравнения (1) в цитируемых работах рассматриваются смешанные краевые задачи в разных ситуациях, на которых мы не останавливаемся.

**Теорема 1.** Пусть дано уравнение модели балки Рэлея на упругом основании (2) и функции, которая описывает одну квазигармонику с медленно меняющимися частотой и фазой вида

$$V(X, \tau) = (A(X\varepsilon, \tau\varepsilon) + iB(X\varepsilon, \tau\varepsilon)) \exp(i\omega\varepsilon t + k\varepsilon x) + \mathbf{O}(\varepsilon). \quad (3)$$

является решением уравнения НУШ (1). Тогда функция (3) является асимптотическим решением уравнения (2) по малому параметру  $\varepsilon < 1$  с точностью  $\mathbf{O}(\varepsilon)$  построенная методом ВКБ–Маслова и с необходимостью должны выполняться следующие соотношения на параметры уравнения (2):  $\Omega_1 \approx \approx \sqrt{\varepsilon}$ ,  $\mu \approx \varepsilon$ ,  $\mu_1 < 0$ .

*Доказательство.* Так как функция (3) является решением уравнения НУШ (1), то оно распадается на два уравнения. Необходимо решить два уравнения второго порядка для вещественной и мнимой части функции комплексного переменного  $V(X, \tau)$ , а именно:

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} - k\varepsilon \frac{\partial A}{\partial X} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial X^2} - B \left( \omega + \frac{k^2 \varepsilon}{2} \right) + \frac{B(A^2 + B^2)}{\varepsilon} = 0, \quad (4)$$

и

$$\frac{\partial B}{\partial \tau} - k\varepsilon \frac{\partial B}{\partial X} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} - A \left( \omega + \frac{k^2 \varepsilon}{2} \right) - \frac{A(A^2 + B^2)}{\varepsilon} = 0. \quad (5)$$

С другой стороны подставим функцию (3) в уравнение модели балки Рэлея (2) и получим соотношение, которое не приводим из-за громоздкости и будем ниже называть его следствием А. Найдем условия при которых функция (3) является главным членом асимптотического решения уравнения (2) по малому параметру  $\varepsilon < 1$  с точностью  $O(\varepsilon)$  построенная методом ВКБ–Маслова.

Выразим вторые производные  $\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}, \frac{\partial^2 B}{\partial X^2}$  из (4), (5), вычислим старшие производные и подставим их необходимое число раз в следствие А уравнения (2). Разделяем полученное соотношение по степеням малого параметра  $\varepsilon$ . Выясним, что главный член удовлетворяется, а для того, чтобы остаток был порядка  $O(\varepsilon)$  необходимо выполнение условий на параметры уравнения (2) приведенные в теореме 1.

**3. Применение метода факторизации для уравнения (2).** Большой вклад в развитие методов факторизации в различных задачах внесли В. П. Маслов, В. Ф. Зайцев, М. В. Карасев, В. Г. Данилов, ссылки на некоторые работы которых приведены в [1, 6, 8]. Целью процедуры факторизации является представление уравнения (3) в виде  $L_1 \circ (L_2 Y(x, t)) = F_i(x, t)$ . Конкретные операторы  $L_i, i = 1, 2$  и правые части  $F_i(x, t)$ , в случае модели (2), определены ниже.

**Теорема 2.** Пусть дано уравнение (2). Тогда результатом факторизации уравнения (2) является система двух уравнений с частными производными

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(X, \tau)}{\partial \tau^2} - \frac{\mu_1}{\mu_0} \frac{\partial^2 V(X, \tau)}{\partial X^2} - \frac{\mu_1}{\mu_0^2} V = \frac{\mu_1 Y}{\mu_0}, \\ \frac{\partial^2 Y(X, \tau)}{\partial X^2} - \frac{1}{\mu_0} Y = \left( \frac{1}{\mu_0} + \frac{\mu_0 \Omega^2}{\mu_1} \right) V(X, \tau) + \frac{\Omega_1^2}{\mu_1} V^3. \end{cases} \quad (6)$$

*Доказательство.* Доказательство очевидно. Проверка проводится прямой подстановкой.

## Список литературы

- [1] Волосова Н. К., Вакуленко С. П., Волосов К. А. К теории метода контроля качества состояния железнодорожного пути с движущегося состава. On the theory of method of quality control of the railroad track from a moving train. The Internatopnal conference on Quasilinear Equations, Inverse Problems and Their Applications. – Moscow Institute of Physical and Technology, Dolgoprudny. 30.11–2.12. 2015
- [2] Круглов В. М., Хохлов А. А., Саврухин А. В., Неклюдов А. Н. Метод оценки состояния железнодорожного пути // Мир транспорта. 2012, №5.
- [3] Вакуленко С. П., Ларин О. Н., Лёвин С. Б. Теоретические аспекты механизмов взаимодействия в транспортных средствах // Мир транспорта. 2014, №6. – С. 14–27.
- [4] Ерофеев В. И., Лисенкова Е. Е., Семирекова Н. П. Дисперситные зависимости и самомодуляция изгибных волн в балке Тимошенко // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006, вып. 4. – С. 27–31.
- [5] Winller E. Der Eisenbahn – Oberbau. Prag. 1871. p. 250.
- [6] Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A. Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. – Kluver Academic publishers, Dordrecht/Boston/London 1995. – 316 p.
- [7] Ахмедиев Н. Н., Анкевич А. Солитоны. – М.: Физматлит, 2003.
- [8] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. – М.: Международная программа образования, 1996. – 496 с.5.

УДК 517.9 + 532 + 536

**РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ.  
ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ.  
ГЛОБАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ**

Вязьмин А. В.\* , Сорокин В. Г.\*\*

\*Московский государственный машиностроительный университет

\*\*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
av1958@list.ru, vsesor@gmail.com

**A. V. Vyazmin, V. G. Sorokin. Delay reaction-diffusion equations of hyperbolic type. Exact solutions. Global instability.** We present exact solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations of hyperbolic type. All the equations contain arbitrary functions of one argument, and all the solutions involve free parameters (in some cases, infinitely many parameters). We found time- and space-periodic solutions, solutions that describe nonlinear interaction between a standing and a traveling wave, and some others. In addition, we establish conditions of global instability for solutions of some nonlinear delay reaction-diffusion systems.

**Keywords:** nonlinear delay reaction-diffusion equations, exact solutions, delay differential equations, global instability of solutions

Описаны точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием. Все уравнения включают в себя произвольные функции одного аргумента, а решения содержат свободные параметры (в некоторых случаях число таких параметров может быть любым). Найдены периодические решения по времени и по пространственной переменной, решения, описывающие нелинейное взаимодействие стоячей волны с бегущей волной, и др. Получены условия глобальной неустойчивости решений некоторых реакционно-диффузионных систем с запаздыванием.

**Ключевые слова:** нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием, точные решения, дифференциальные уравнения с запаздыванием, глобальная неустойчивость решений

## ВВЕДЕНИЕ

Классическое уравнение теплопроводности параболического типа обладает физически парадоксальным свойством — бесконечной скоростью распространения возмущений, что не наблюдается в природе. Этому недостатка лишено уравнение тепло- и массопереноса гиперболического типа [1–3]

$$\tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T,$$

которое даёт конечную скорость распространения возмущений при временах

релаксации  $\tau > 0$ . Тепловое и диффузионное времена релаксации могут варьироваться в чрезвычайно широких пределах от миллисекунд (и меньше) до нескольких десятков секунд [1–6].

Второй важной особенностью эволюционных процессов является то, что скорость изменения искомым величин в химических, биологических, химико-технологических, медико-биологических, экологических и других системах в общем случае зависит не только от состояния в данный момент времени, но и от всей предыдущей эволюции процесса [1, 4, 7]. Такие системы называют наследственными. В частном случае, когда состояние системы определяется не всей её эволюцией, а только каким-то конкретным моментом в прошлом, говорят о системе с запаздывающей обратной связью.

Системы с запаздывающей обратной связью часто моделируются реакционно-диффузионными уравнениями, в которых кинетическая функция  $F$  зависит как от искомой функции  $u = u(x, t)$ , так и от той же самой функции, но уже с запаздывающим аргументом  $w = u(x, t - \tau)$ . Специальный случай  $F(u, w) = f(w)$  допускает простую физическую интерпретацию: процесс массо- и теплопереноса в локально неравновесной среде обладает инерционными свойствами, т. е. система реагирует на воздействие не мгновенно, как в классическом локально-равновесном случае, а на время запаздывания  $\tau$  позже.

В статье рассматриваются нелинейные гиперболические реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием вида

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (1)$$

где  $a > 0$ ,  $\varepsilon \geq 0$ ,  $\sigma \geq 0$  ( $\varepsilon + \sigma \neq 0$ ); описывается метод построения точных решений таких уравнений, приводятся несколько примеров. Получены условия неустойчивости решений нелинейных систем гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием и показано, что при выполнении условий неустойчивости задачи с начальными данными являются некорректными по Адамару.

### ТЕРМИН “ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ”

Термин “точное решение” нелинейного уравнения в частных производных с запаздыванием применяется в случаях, когда решение [8]:

(i) может быть выражено через элементарные функции или может быть представлено в замкнутой форме;

(ii) может выражаться через решения обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием или без него (или систем таких уравнений);

(iii) может выражаться через решения линейных уравнений в частных производных.

Для поиска точных решений уравнений (1) применялись модификации методов обобщённого и функционального разделения переменных [9–10], а также метод функциональных связей [8, 11].

### МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ. ПРИМЕРЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Для определённости будем рассматривать нелинейные реакционно-диффузионные уравнения гиперболического типа с запаздыванием (1) с кинетической функцией, зависящей от одного аргумента:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(z), \quad z = z(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (2)$$

где  $z = z(u, w)$  — искомая функция.

Будем искать решения с обобщённым разделением переменных вида

$$u = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) \psi_n(t). \quad (3)$$

В простейших случаях получаем решение с мультипликативным  $u = \varphi(x)\psi(t)$  и аддитивным  $u = \varphi(x) + \psi(t)$  разделением переменных.

Вид аргумента  $z = z(u, w)$  произвольной функции  $F(z)$  определяется методом функциональных связей, который основан на поиске точных решений вида (3), удовлетворяющих одной из двух функциональных связей:

$$z(u, w) = p(x), \quad w = u(x, t - \tau); \quad (4)$$

$$z(u, w) = q(t), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (5)$$

Эти связи есть не что иное, как разностные уравнения относительно  $t$ , где  $x$  играет роль свободного параметра.

Приведем несколько примеров построения точных решений уравнений вида (2) с помощью метода функциональных связей.

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + f(u - w), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (6)$$

Функциональная связь первого рода (4) имеет вид

$$u - w = p(x), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (7)$$

Разностному уравнению (7) можно удовлетворить, взяв, например, решение с обобщённым разделением переменных

$$u = t\varphi(x) + \psi(x), \quad (8)$$

которое даёт  $p(x) = \tau\varphi(x)$ . Подставляем (8) в (6) и получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ :

$$\begin{aligned} a\varphi''(x) + b\varphi(x) &= 0, \\ a\psi''_{xx}(x) + b\psi(x) + f(\tau\varphi(x)) - \sigma\varphi(x) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Проинтегрировав первое уравнение, получаем вид функции  $\varphi(x)$ :

$$\varphi(x) = \begin{cases} C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x), & \lambda = \sqrt{b/a} \quad \text{при } b > 0; \\ C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x), & \lambda = \sqrt{-b/a} \quad \text{при } b < 0, \end{cases}$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные.

Функциональная связь второго рода (5) имеет вид

$$u - w = q(t), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (10)$$

Разностному уравнению (10) можно удовлетворить, если положить

$$u = \varphi(x) + \psi(t), \quad (11)$$

что даёт  $q(t) = \psi(t) - \psi(t - \tau)$ . Подставляем (11) в (6) и получаем уравнение для  $\varphi(x)$ , совпадающее с уравнением (9), и уравнение для  $\psi(t)$ :

$$\varepsilon\psi''(t) + \sigma\psi'(t) = b\psi(t) + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)).$$

В табл. 1 приведены некоторые точные решения, полученные описанным выше методом. Уравнения для функций, входящих в данные решения, а также другие точные решения уравнений вида (1) и более сложных уравнений можно найти в [12, 13]. Функции  $f, g, h$  являются произвольными.



Таблица 1. Точные решения уравнений  $\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, w)$

№	Кинетическая функция $F(u, w)$	Вид решения $u(x, t)$	Произвольные постоянные
1	$uf(w/u)$	$(C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x))\psi(t)$	$C_1, C_2, \lambda$
2	$uf(w/u)$	$(C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x))\psi(t)$	$C_1, C_2, \lambda$
3	$uf(w/u)$	$\exp(\alpha x + \beta t)\theta(z), \quad z = \lambda x + \gamma t$	$\alpha, \beta, \lambda, \gamma$
4	$bu + f(u - w)$	$\varphi(x) + \theta(z), \quad z = \beta x + \gamma t$	$b, \beta, \gamma$
5	$f(u - w)$	$C_1 x^2 + C_2 x + \psi(t)$	$C_1, C_2$
6	$f(u - w)$	$C_1 x^2 + C_2 x + \theta(z), \quad z = \beta x + \gamma t$	$C_1, C_2, \beta, \gamma$
7	$uf(u - kw) + wg(u - kw) + h(u - kw)$	$e^{ct} \sum_{n=1}^N (\varphi_n(x) \cos(\beta_n t) + \psi_n(x) \sin(\beta_n t)) + e^{ct} \theta(x) + \xi(x), \quad c = (\ln k)/\tau, \quad \beta_n = 2\pi n/\tau$	$k > 0, \quad N - \text{натур.}$
8	$uf(u + kw) + wg(u + kw) + h(u + kw)$	$e^{ct} \sum_{n=1}^N (\varphi_n(x) \cos(\beta_n t) + \psi_n(x) \sin(\beta_n t)) + \xi(x), \quad c = (\ln k)/\tau, \quad \beta_n = \pi(2n - 1)/\tau$	$k > 0, \quad N - \text{натур.}$

### ГЛОБАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим систему реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием следующего вида:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + bu_1 + F(u_1 - kw_1, u_2, w_2), \\ \varepsilon_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + G(u_1 - kw_1, u_2, w_2), \quad k > 0, \end{aligned} \tag{12}$$

где  $u_{1,2} = u_{1,2}(x, t), w_{1,2} = u_{1,2}(x, t - \tau); a_{1,2} > 0, \varepsilon_{1,2} \geq 0, \sigma_{1,2} \geq 0$  ( $\varepsilon_{1,2} + \sigma_{1,2} \neq 0$ );  $F, G$  — произвольные функции трёх аргументов.

В общем случае система (12) (при  $\tau \neq 0$ ) допускает простейшие решения: стационарное, однородное (не зависящее от  $x$ ) и типа бегущей волны  $u_1 = u_1(z), u_2 = u_2(z)$ , где  $z = \alpha x + \beta t$ . Устойчивость этих и некоторых других решений различных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием и систем таких уравнений рассматривается, например, в [8, 14].

**Свойство.** Пусть система (12) имеет некоторое частное решение

$$u_{10} = u_{10}(x, t), \quad u_{20} = u_{20}(x, t). \tag{13}$$

Тогда система (12) имеет также решение

$$u_1 = u_{10}(x, t) + e^{ct} V(x, t), \quad u_2 = u_{20}(x, t), \quad c = (\ln k)/\tau, \quad k > 0, \tag{14}$$

где  $V = V(x, t)$  — любое  $\tau$ -периодическое решение линейного уравнения

$$\varepsilon_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (\sigma_1 + 2\varepsilon_1 c) \frac{\partial V}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (b - \varepsilon_1 c^2 - \sigma_1 c)V, \quad V(x, t) = V(x, t - \tau). \quad (15)$$

Воспользуемся свойством для получения условий неустойчивости решений системы (12). Возьмем стационарное пространственно-периодическое решение уравнения (15):

$$V = \delta \sin(\gamma x + \mu), \quad \gamma = \sqrt{(b - \varepsilon_1 c^2 - \sigma_1 c)/a_1}, \quad b - \varepsilon_1 c^2 - \sigma_1 c \geq 0, \quad (16)$$

где  $\delta, \mu$  — произвольные постоянные.

Проанализируем формулы (13), (14) и (16). Пусть выполнено условие

$$k > 1, \quad \tau > 0, \quad b\tau^2 - \varepsilon_1(\ln k)^2 - \sigma_1\tau \ln k \geq 0. \quad (17)$$

Тогда при  $0 \leq t \leq \tau$  решения (13) и (14) для достаточно малых значений  $\delta > 0$  мало отличаются друг от друга. Однако при  $t \rightarrow \infty$  эти решения будут неограниченно расходиться за счёт экспоненциального множителя в (14). Сказанное означает, что при выполнении условий (17) любое решение  $u_{10}(x, t), u_{20}(x, t)$  системы (12) будет неустойчивым.

Условия (17) можно представить в более наглядном виде:

$$k > 1, \quad b > 0, \quad \tau \geq \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{\ln k}{2b} \left( \sigma_1 + \sqrt{\sigma_1^2 + 4\varepsilon_1 b} \right). \quad (18)$$

Таким образом, в области параметров  $k > 1, b > 0$  неустойчивость возникает за счёт запаздывания, которое должно быть достаточно большим:  $\tau \geq \tau_0$ .

Поскольку вид кинетических функций  $F$  и  $G$  не влияет на условия неустойчивости (18) решений системы (12), будем их называть глобальными условиями неустойчивости. Важно подчеркнуть, что речь идет о нелинейной неустойчивости, причем все полученные выше результаты являются точными.

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Пусть (13) — решение задачи Коши с начальными условиями

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{11}(x, t), & \partial_t u_1 &= u_{12}(x, t), \\ u_2 &= u_{21}(x, t), & \partial_t u_2 &= u_{22}(x, t) \end{aligned} \quad \text{при } 0 \leq t \leq \tau \quad (19)$$

для нелинейной системы реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием (12) на всей области изменения пространственной переменной  $-\infty < x < \infty$ . Здесь и далее  $\partial_t$  обозначает частную производную по  $t$ .

Из свойства следует, что при  $k > 0$  система (12) имеет также решение, которое определяется формулами (14) и (16):

$$\tilde{u}_1 = u_{10} + \delta e^{ct} \sin(\gamma x + \mu), \quad \tilde{u}_2 = u_{20}, \quad (20)$$

где  $\delta$  и  $\mu$  — произвольные постоянные,  $c = (\ln k)/\tau$ , а коэффициент  $\gamma$  определен в (16). Сравним решения (13) и (20) и их производные по  $t$  при  $0 \leq t \leq \tau$ :

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_1 - u_{10}| &\leq \delta e^{c\tau}, & |\partial_t \tilde{u}_1 - \partial_t u_{10}| &\leq \delta c e^{c\tau}, \\ |\tilde{u}_2 - u_{20}| &= 0, & |\partial_t \tilde{u}_2 - \partial_t u_{20}| &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

При фиксированных  $\tau$  и  $k$  (при  $k > 1$ , что соответствует  $c > 0$ ) разности (21) между решениями (13) и (20) и их производными по  $t$  можно сделать сколь угодно малыми за счет выбора  $\delta$ , т. е. начальные данные для этих решений будут мало различаться при  $0 \leq t \leq \tau$ . С другой стороны, при выполнении условий (18) и  $x = \frac{1}{\gamma}(\frac{\pi}{2} - \mu)$  имеем

$$|\tilde{u}_1 - u_{10}| = \delta e^{ct} \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

т. е. при выполнении глобальных условий неустойчивости первоначально близкие решения двух рассматриваемых задач Коши будут неограниченно расходиться с течением времени.

Указанная неустойчивость решений нелинейной системы уравнений с запаздыванием (12) относительно начальных данных делает задачу Коши для системы (12) некорректно поставленной по Адамару.

## НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И ЗАМЕЧАНИЯ

1. Полученные результаты по неустойчивости распространяются на нелинейные многокомпонентные системы вида

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_1 u + F(x, t, u_1 - kw_1, u_2, w_2, \dots, u_m, w_m), \\ \varepsilon_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + \sigma_n \frac{\partial u_n}{\partial t} &= a_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + G_n(x, t, u_1 - kw_1, u_2, w_2, \dots, u_m, w_m), \\ n &= 2, \dots, m, \quad k > 0, \end{aligned}$$

где  $u = u(x, t)$ ,  $w = u(x, t - \tau)$ ,  $u_n = u_n(x, t)$ ,  $w_n = u_n(x, t - \tau_n)$ ;  $F, G$  — произвольные функции;  $\tau, \tau_n$  — времена запаздывания (которые могут быть разными).

2. Рассмотрим одно уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu - b \left( \frac{u - kw}{1 - k} \right) + f \left( \frac{u - kw}{1 - k} \right), \quad k \neq 1, \quad (22)$$

где  $b = \text{const}$ , а  $f$  — произвольная функция. Это уравнение является частным случаем системы (12), и при отсутствии запаздывания ( $\tau = 0$  или  $k = 0$ ) оно переходит в уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u). \quad (23)$$

Любой корректной задаче Коши для уравнения (23) можно поставить в соответствие некорректную задачу с начальными данными для уравнения (22), подходящим образом выбрав параметры  $b$ ,  $k$ ,  $\tau$ .

## ВЫВОДЫ

Рассмотрены нелинейные реакционно-диффузионные уравнения гиперболического типа с запаздыванием. Найдены точные решения, периодические по времени и по пространственной переменной, описывающие нелинейное взаимодействие стоячей волны с бегущей волной, и др. Все точные решения содержат свободные параметры (в ряде случаев число таких параметров может быть любым).

Получены условия глобальной нелинейной неустойчивости систем гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием специального вида. Показано, что при выполнении условий неустойчивости соответствующие задачи с начальными данными являются некорректными по Адамару.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №16-08-01252а.

## Список литературы

- [1] Лыков А. В. Теплообмен: справочник. — М.: Энергия, 1978.
- [2] Таганов И. Н. Моделирование процессов массо- и энергопереноса. — Л.: Химия, 1979.
- [3] Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности: системно-структурный подход. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
- [4] Demirel Y. Nonequilibrium Thermodynamics: Transport and Rate Processes in Physical, Chemical and Biological Systems, 2nd ed. — Amsterdam: Elsevier, 2007.

- [5] Roetzel W., Putra N., SaritDas K. Experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with nonhomogeneous inner structure // *Int. J. Therm. Sci.* 2003. V. 42. №6. P. 541.
- [6] Полянин А. Д., Вязьмин А. В. Дифференциально-разностные модели и уравнения теплопроводности и диффузии с конечным временем релаксации // *Теор. основы хим. технологии.* 2013. Т. 47. №3. С. 271.
- [7] Jou D., Casas-Vázquez J., Lebon G. *Extended Irreversible Thermodynamics*, 4th ed. – New York: Springer, 2010.
- [8] Polyanin A. D., Zhurov A. I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2014. V. 19. №3. P. 417.
- [9] Galaktionov V. A., Svirshchevskii S. R. *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics.* – Boca Raton: Chapman & Hall / CRC Press, 2006.
- [10] Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd Edition. – Boca Raton: Chapman & Hall / CRC Press, 2012.
- [11] Polyanin A. D., Zhurov A. I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients // *Int. J. Non-Linear Mechanics.* 2014. V. 67. P. 267.
- [12] Полянин А. Д., Сорокин В. Г. Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием // *Вестник национального исследовательского ядерного университета “МИ-ФИ”.* 2014. Т. 3. №2. С. 141.
- [13] Полянин А. Д., Сорокин В. Г., Вязьмин А. В. Точные решения и качественные особенности нелинейных гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // *Теор. осн. хим. техн.* 2015. Т. 49. №5. С. 527.
- [14] Meleshko S. V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. V. 338. P. 448.

УДК 517.9

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ДВУХ  
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА,  
ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО  
ЧЕТЫРЁХМЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ ОПЕРАТОРОВ**

Гайнетдинова А. А., Газизов Р. К.

Уфимский государственный авиационный технический университет

Уфа

e-mail: aliya-oct@yandex.ru

**Gainetdinova A. A., Gazizov R. K. Integration of systems of two second-order ordinary differential equations admitting four-dimensional Lie algebras.** We consider systems of two second-order ordinary differential equations admitting four-dimensional Lie symmetry algebras and suggest the approach to their integrating. In particular, if admitted transformation group has two second-order differential invariants, one can integrate the corresponding system by quadratures using invariant representation and operator of invariant differentiation. In other cases the systems reduce to partially uncoupled forms and are also integrated by quadratures.

Исследована интегрируемость систем двух ОДУ второго порядка, допускающих четырёхпараметрическую группу Ли точечных преобразований. Показано, что если такая алгебра имеет два дифференциальных инварианта второго порядка, то, используя инвариантное представление системы и оператор инвариантного дифференцирования, можно получить выражение для первого интеграла и, как правило, записать решение системы в квадратурах. В остальных случаях система приводится к виду с отделяющимися уравнениями и интегрируется в квадратурах.

**Введение.** Методы группового анализа успешно используются для исследования и интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [1–6]. В частности, если ОДУ  $n$ -го порядка допускает достаточно широкую группу симметрий, то оно может быть проинтегрировано либо методом понижения порядка, либо используя канонические переменные. Классический метод понижения порядка использует оператор инвариантного дифференцирования и применяется к уравнениям, допускающим разрешимые алгебры Ли. Метод канонических переменных основан на использовании классификации неподобных алгебр Ли операторов. Этот метод использовался для интегрирования уравнений второго [1], третьего [7] и четвертого [8, 9] порядка.

Вместе с тем, задача интегрирования систем ОДУ методами группового анализа решена не полностью. В настоящее время эта задача привлекает внимание многих исследователей. Наиболее изучены системы ОДУ второго порядка. В частности, групповая классификация систем двух ОДУ второго порядка, допускающих трёх- и четырёхмерные алгебры Ли, проведена в работах [10, 11]. Групповая классификация систем трёх ОДУ второго порядка проведена в [12].

В [13] предложен метод понижения порядка системы двух ОДУ второго порядка с тремя симметриями, а в [14] описан алгоритм понижения порядка системы двух ОДУ второго порядка, допускающей четырёхмерную алгебру Ли операторов.

Однако предложенные методы являются обобщением классического метода понижения порядка и применимы только для систем, допускающих разрешимые алгебры Ли.

В настоящей работе предложен универсальный метод построения первых интегралов систем ОДУ. Показано, что любую систему двух ОДУ второго порядка, допускающую четырёхмерную алгебру Ли операторов, можно проинтегрировать в квадратурах.

**Описание метода.** Рассмотрим систему двух ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, y, x', y'), \\ y'' = g(t, x, y, x', y'), \end{cases} \quad (1)$$

допускающую алгебру Ли  $L_4$  с операторами

$$X_i = \xi_i(t, x, y)\partial_t + \eta_i(t, x, y)\partial_x + \zeta_i(t, x, y)\partial_y, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

Введём в рассмотрение матрицы, составленные из координат инфинитезимальных операторов  $(\Lambda_0)$ , координат их продолжений на первые  $(\Lambda_1)$  и вторые  $(\Lambda_2)$  производные.

Для четырёхмерной алгебры Ли  $L_4$  дифференциальных операторов в  $R^3$  различаются следующие ранги матриц  $\Lambda_0$ ,  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ , приведенные в таблице 1.

Таблица 2. Различные виды инвариантных систем

No.	rank $(\Lambda_0)$	rank $(\Lambda_1)$	rank $(\Lambda_2)$	$I_0$	$I_1$	$I_2$	Вид системы
1	3	3	3	–	–	–	случай $L_4$ , не реализуемый в $R^3$
2	3	3	4	0	2	1	особый случай системы (2)
3	3	4	4	0	1	2	$I_2^{(1)} = F(I_1)$ , $I_2^{(2)} = G(I_1)$
4	2	3	3	–	–	–	случай $L_4$ , не реализуемый в $R^3$

5	2	3	4	1	1	1	особый случай системы (2)
6	2	4	4	1	0	2	$I_2^{(1)} = F(I_0), I_2^{(2)} = G(I_0)$
7	1	2	3	–	–	–	случай $L_4$ , не реализуемый в $R^3$
8	1	2	4	2	0	1	особый случай системы (2)

Из таблицы 1 видно, что случаев 1, 4, 7 не существует при реализации алгебр  $L_4$  в  $R^3$ , а случаи 3 и 6 — это системы ОДУ, которые являются неособыми (регулярными) относительно допускаемых четырёхмерных алгебр Ли; они строятся согласно теореме об инвариантном представлении многообразия (см., например, [2, 3]). В случаях 2, 5 и 8 регулярное инвариантное представление систем (1) невозможно, однако можно найти особые многообразия и построить системы, являющиеся особыми (нерегулярными) относительно соответствующей группы преобразований.

*Интегрирование систем, допускающих инвариантное представление.*  
Сначала рассмотрим случай 3 из таблицы 1, где

$$\text{rank}(\Lambda_0) = 3, \text{rank}(\Lambda_1) = 4, \text{rank}(\Lambda_2) = 4.$$

Системы этого класса могут быть переписаны в виде

$$\begin{cases} I_2^{(1)} = F(I_1), \\ I_2^{(2)} = G(I_1) \end{cases} \quad (3)$$

с произвольными функциями  $F$  и  $G$ .

В силу определения оператора инвариантного дифференцирования справедливо представление

$$\lambda D_t(I_1) = \Theta(I_1, I_2^{(1)}, I_2^{(2)})$$

с некоторой функцией  $\Theta$ , а  $\lambda D_t$  — оператор инвариантного дифференцирования (см. [2]). Тогда для данной системы (3), допускающей четырёхмерную алгебру Ли с матрицей  $\Lambda_0$ , ранг которой равен трём, справедливо уравнение

$$\lambda D_t(I_1) \Big|_{(3)} = \Phi(I_1) \quad (4)$$

на инвариант  $I_1$ . Перепишем (4) в виде

$$\frac{dI_1}{\Phi(I_1)} = \frac{dt}{\lambda(t, x, y, x', y', \dots)}. \quad (5)$$



Очевидно, что левая часть этого равенства интегрируется в квадратурах. Используя результат классификации из [15], можно показать, что для всех алгебр Ли  $L_4$  операторов (2), удовлетворяющих случаю 3 из таблицы 1, правая часть этого равенства интегрируется в квадратурах, т. е. справедлива

**Теорема 1.** Если система (1) допускает четырёхмерную алгебру Ли операторов (2), удовлетворяющих условиям

$$\text{rank}(\Lambda_0) = 3, \text{rank}(\Lambda_1) = 4, \text{rank}(\Lambda_2) = 4,$$

то система (1) имеет первый интеграл, который находится из уравнения (5), и интегрируется в квадратурах.

Рассмотрим теперь системы, допускаемые операторы которых удовлетворяют случаю 6 из таблицы 1, т. е. для которых выполняются условия

$$\text{rank}(\Lambda_0) = 2, \text{rank}(\Lambda_1) = 4, \text{rank}(\Lambda_2) = 4.$$

Инвариантное представление системы для данного класса имеет вид

$$\begin{cases} I_2^{(1)} = F(I_0), \\ I_2^{(2)} = G(I_0). \end{cases} \quad (6)$$

В этом случае оператор инвариантного дифференцирования удовлетворяет условию  $\lambda D_t(I_0) = \text{const}$ , или

$$\lambda = \frac{1}{D_t(I_0)}. \quad (7)$$

Можно показать, что для всех систем данного класса всегда существуют функции  $u(t, x, y, x', y')$  такие, что

$$\lambda D_t(u) = \alpha(I_0, I_2^{(1)}, I_2^{(2)}), \quad (8)$$

где  $\alpha(I_0)$  — некоторая функция указанного аргумента.

Тогда, в силу (6), получаем

$$\lambda D_t(u) = \alpha(I_0, F(I_0), G(I_0)), \text{ или } \lambda D_t(u) = \Phi(I_0)$$

откуда, учитывая (7), имеем

$$u = \int \Phi(I_0) dI_0,$$

т. е. получили первый интеграл системы (6). Таким образом, справедлива

**Теорема 2.** Если система (1) допускает четырёхмерную алгебру Ли операторов (2), удовлетворяющих условиям

$$\text{rank}(\Lambda_0) = 2, \text{rank}(\Lambda_1) = 4, \text{rank}(\Lambda_2) = 4,$$

то существует первый интеграл, и система (1) интегрируется в квадратурах.

**Замечание.** Функция  $u(t, x, y, x', y')$  является дифференциальным инвариантом трёхмерной подалгебры допускаемой алгебры.

*Системы, особые относительно допускаемой группы преобразований.* Рассмотрим остальные случаи из таблицы 1. Можно показать, что в случаях 2 и 8 инвариантная система сводится к системе

$$\begin{cases} x'' = 0, \\ y'' = 0, \end{cases}$$

допускающей 15-мерную алгебру Ли операторов.

В случае 5 допускаемая алгебра имеет только один дифференциальный инвариант второго порядка, т. е. регулярное инвариантное представление систем (1) невозможно. При этом соответствующие системы (1) могут быть получены как особые решения системы уравнений на инварианты, т. е. как условия, при выполнении которых ранг матрицы  $\Lambda_2$  уменьшается (см. [16]). Уравнения полученных систем, допускающих канонические формы алгебр Ли, являются разделимыми, т. е. такие системы интегрируются. Таким образом, справедлива теорема.

**Теорема 3.** Пусть система (1) допускает четырёхмерную алгебру Ли операторов, и эта алгебра имеет только один дифференциальный инвариант второго порядка. Тогда всегда существует невырожденная замена переменных, в которых уравнения системы (1) отделяются, и система (1) интегрируется в квадратурах.

**Обобщение для систем ОДУ с малым параметром.** Рассмотрим теперь системы вида

$$\begin{cases} x'' = f_0(t, x, y, x', y') + \varepsilon f_1(t, x, y, x', y'), \\ y'' = g_0(t, x, y, x', y') + \varepsilon g_1(t, x, y, x', y'). \end{cases} \quad (9)$$

*Случай полного наследования алгебры.* Пусть система (9) допускает ал-

гебру Ли с операторами

$$\begin{aligned} X_i &= X_i^{(0)} + \varepsilon X_i^{(1)}, \\ X_i^{(0)} &= \xi_i^{(0)}(t, x, y)\partial_t + \eta_i^{(0)}(t, x, y)\partial_x + \zeta_i^{(0)}(t, x, y)\partial_y, \\ X_i^{(1)} &= \xi_i^{(1)}(t, x, y)\partial_t + \eta_i^{(1)}(t, x, y)\partial_x + \zeta_i^{(1)}(t, x, y)\partial_y, \quad i = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (10)$$

где операторы  $X_i^{(0)}$  образуют точную четырёхмерную алгебру Ли  $L_4$ .

Для применения вышеописанного метода найдём инвариантное представление системы. Для этого нужно решить систему уравнений

$$X_i(I) = 0, \quad (11)$$

где  $I = I^{(0)} + \varepsilon I^{(1)}$  — дифференциальный инвариант требуемого порядка. Далее необходимо найти оператор инвариантного дифференцирования  $(\lambda^{(0)} + \varepsilon\lambda^{(1)})D_t$ .

Дальнейшие шаги интегрирования систем полностью аналогичны случаю точной алгебры.

**Пример 1.** Пусть система (9) допускает операторы

$$\partial_t, \quad (t + \varepsilon)\partial_t + x\partial_x, \quad t^2\partial_t + 2tx\partial_x, \quad \varepsilon t\partial_t + \partial_y.$$

Запишем инвариантное представление системы (9)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(2xx'' - (x')^2)(1 + 2\varepsilon y) = F_0(u) + \varepsilon F_1(u), \\ x(xy'' + x'y') = G_0(u) + \varepsilon G_1(u), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{x} \left( F_0(u) + \frac{(x')^2}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{x} (F_1(u) - 2yF_0(u)), \\ y'' = \frac{1}{x^2} (G_0(u) + xx'y') + \frac{\varepsilon}{x^2} (G_1(u) - 2yG_0(u)), \end{cases} \quad (12)$$

где  $u = xy'(1 + \varepsilon y)$  — дифференциальный инвариант первого порядка.

Оператор инвариантного дифференцирования для данной алгебры имеет вид

$$\frac{xy'}{xy'' + x'y'} D_t.$$

Уравнение (4) принимает вид

$$\lambda D_t(u) \Big|_{(12)} = u + \frac{\varepsilon u^2}{G_0(u)}.$$

Решение этого уравнения имеет вид  $u = \Psi(C_1xy')$ . Отсюда можно получить  $y' = H_0(x) + \varepsilon H_1(x)$ , и система (12) переписывается в виде

$$\begin{cases} x'' = \frac{(x')^2}{2x} + K_0(x) + \varepsilon K_1(x), \\ y' = H_0(x) + \varepsilon H_1(x). \end{cases}$$

Очевидно, что эта система интегрируется в квадратурах.

*Случай неполного наследования алгебры.* Пусть система (9) допускает алгебру Ли с операторами

$$\begin{aligned} X_j &= X_j^{(0)} + \varepsilon X_j^{(1)}, \quad X_4 = \varepsilon X_4^{(0)} \\ X_i^{(0)} &= \xi_i^{(0)}(t, x, y)\partial_t + \eta_i^{(0)}(t, x, y)\partial_x + \zeta_i^{(0)}(t, x, y)\partial_y, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ X_j^{(1)} &= \xi_j^{(1)}(t, x, y)\partial_t + \eta_j^{(1)}(t, x, y)\partial_x + \zeta_j^{(1)}(t, x, y)\partial_y, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где операторы  $X_i^{(0)}$  образуют точную четырёхмерную алгебру Ли  $L_4$ .

Рассмотрим пример.

**Пример 2.** Пусть система (9) допускает операторы

$$\partial_t, \quad \partial_x, \quad \partial_y, \quad \varepsilon t\partial_t.$$

Инвариантное представление системы (9) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \frac{x''}{(x')^2} = f_0(u) + \varepsilon f_1(u, v), \\ \frac{y''}{(x')^2} = g_0(u) + \varepsilon g_1(u, v), \end{cases} \quad (13)$$

где  $u = \frac{y'}{x'}$ ,  $v = x'$  — дифференциальные инварианты первого порядка.

Оператор инвариантного дифференцирования для данной алгебры имеет вид

$$\frac{y'}{y''}D_t.$$

Уравнение (4) для данного примера запишется как

$$\frac{y'}{y''}D_t \left( \frac{y'}{x'} \right) \Big|_{(13)} = u - \frac{u^2 f_0(u)}{g_0(u)} + \frac{\varepsilon u^2}{g_0(u)} (f_1(u, v) + f_0(u)g_1(u, v)).$$

Подставляя  $u = u_0 + \varepsilon u_1$  и расщепляя по  $\varepsilon$ , получим решение для  $u$ . Из этого решения можно выразить  $y' = H_0(x') + \varepsilon H_1(x')$ , и система (13) переписывается в виде

$$\begin{cases} x'' = K_0(x') + \varepsilon K_1(x'), \\ y' = H_0(x') + \varepsilon H_1(x'). \end{cases}$$

Очевидно, что эта система интегрируется в квадратурах.

**Заключение.** В данной работе предложен универсальный метод построения первых интегралов систем ОДУ. Алгоритм интегрирования был применён к системам двух ОДУ второго порядка, допускающих четырёхмерные алгебры Ли операторов. Показано, что данный метод также может быть применён к системам с малым параметром, допускающим приближенные алгебры Ли.

Предложенный в работе алгоритм интегрирования систем двух ОДУ второго порядка с четырьмя симметриями может быть обобщён на системы  $k$  уравнений  $m$ -го порядка,  $km > 4$ , в том числе и на системы с малым параметром, допускающим приближённые алгебры Ли.

*Работа выполнена при поддержке гранта правительства Российской Федерации по постановлению №220 “О мерах по привлечению ведущих учёных в российские образовательные учреждения высшего профессионального образования” по договору № 11.ГЗ4.31.0042, заключенным между Министерством образования и науки РФ, ведущим учёным Ибрагимовым Н. Х. и ФГБОУ ВПО “Уфимский государственный авиационный технический университет”.*

## Список литературы

- [1] Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit Bekannten Infinitesimalen Transformationen. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. G. Scheffers – Leipzig: B. G. Teubner, 1891. Reprinted by Chelsea Publishing Company, New York, 1967, – p. 590.
- [2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 399 с.
- [3] Olver P. J. Applications of Lie group to differential equations. – New York: Springer, 1986. – p. 513.
- [4] Stephani H. Differential equations: their solution using symmetries. – Cambridge University Press, 1989. – p. 260.
- [5] Bluman G.W., Kumei S. Symmetries and differential equations. – Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin, 1989. – p. 412.
- [6] Ibragimov N. H. Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations – Chichester: John Wiley & Sons, 1999. – p. 366.

- [7] Ibragimov N. H., Nucci M. C. Integration of third order ordinary differential equations by Lie's method: equations admitting three-dimensional Lie algebras // Lie Groups and their Applications. – 1994. – **2**, P. 49–64.
- [8] Cerquetelli T., Ciccoli N., Nucci M. C. Four dimensional Lie symmetry algebras and fourth-order ordinary differential equations // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. – 2002. – **9/2**, P. 24–35.
- [9] Fatima A., Ayub M., Mahomed F. M. A note on four-dimensional symmetry algebras and fourth-order ordinary differential equations // Journal of Applied Mathematics. – 2013. – **2013**, 848163.
- [10] Wafo Soh C., Mahomed F. M. Canonical forms for systems of two second-order ordinary differential equations // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2001. – **34**, pp. 2883–911.
- [11] Гапонова О. В., Нестеренко М. О. Системи ЗДР другого порядку, інваріантні відносно низькорозмірних алгебр Лі // Збірник праць Інституту математики НАН України, Київ. – 2006. – **V.3, №2**, С. 71–91.
- [12] Suksern S., Moyo S., Meleshko S. V. Application of group analysis to classification of systems of three second-order ordinary differential equations // Math. Meth. Appl. Sci. – 2015. – Vol. 38, Iss. 18, P. 5097–5113.
- [13] Ayub M., Khan M., Mahomed F. M. Second-order systems of ODEs admitting three-dimensional Lie algebras and integrability // Journal of Applied Mathematics. – 2013. – **2013**, 147921.
- [14] Wafo Soh C., Mahomed F. M. Reduction of order for systems of ordinary differential equations // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. – 2004. – **11:1**, P. 13–20.
- [15] Popovich R. O., Boyko V. M., Nesterenko M. O., Lutfullin M. W. Realizations of real low-dimensional Lie algebras // Journal of Physics A. – 2003. – № 36, P. 7337–7360.
- [16] Гюнтер Н. М. Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. – Л.–М.: ОНТИ, 1934. – 359 с.

УДК 517.9

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НЕСУЩЕГО ВИНТА ВЕРТОЛЁТА

Гарипова Л. А., Кусюмов А. Н., Кусюмов С. А., Романова Е. В.

Казанский национальный исследовательский  
технический университет им. А. Н. Туполева

Казань

e-mail: [postbox7@mail.ru](mailto:postbox7@mail.ru)

**Garipova L. I., Kusyumov A. N. Kusyumov S. A. Romanova E. V. Helicopter main rotor acoustic emission modeling.** Problem of a helicopter main rotor discrete noise is considered for the thickness and aerodynamical load components of blade. Results of hover mode modeling for a far field observer are compared to experimental data.

Рассматривается задача моделирования дискретных составляющих шума, генерируемых несущим винтом вертолета: шум вытеснения (толщины) и шум нагружения (аэродинамической нагрузки на лопасть). Проводится сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными в дальнем поле для режима висения.

Математическая формулировка задачи генерации шума базируется на уравнениях Ffowcs Williams–Hawkings (FW–H) [1] с применением интегральной формулировки задачи. Для наблюдателя дальнего поля акустическое давление определяется согласно формулировке Farassat 1A [2]:

$$p'(x, t) = p'_T(x, t) + p'_L(x, t). \quad (1)$$

Шум толщины  $p'_T(x, t)$  и нагружения  $p'_L(x, t)$  определяется выражениями

$$p'_T(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{f=0} \frac{1}{|1 - M_r|} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\rho \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{V}}{L|1 - M_r|} \right]_{\text{ret}} dS; \quad (2)$$

$$p'_L(x, t) = \frac{1}{4\pi a_0} \int_{f=0} \frac{1}{|1 - M_r|} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{p \cos \theta}{L|1 - M_r|} \right]_{\text{ret}} dS. \quad (3)$$

Здесь  $a_0$  – скорость звука;  $f$  – функция поверхности источника;  $\rho$  – плотность среды;  $\mathbf{L} = (\mathbf{x} - \mathbf{y})$  – вектор источник–наблюдатель;  $\hat{\mathbf{L}}$  – единичный вектор источник–наблюдатель;  $M_r = M_i \hat{r}_i$  – число Маха источника в направлении излучения;  $r$  – дистанция между наблюдателем и источником;  $dS$  – элемент

площади поверхности лопасти винта;  $\mathbf{V}$  – вектор скорости перемещения элемента  $dS$ ;  $\cos \theta = n_i \hat{r}_i$ , т. е.,  $\theta$  – угол между нормалью к поверхности и направлением излучения  $\hat{r}_i$  в момент эмиссии. Индекс *ret* обозначает задержанное время, и интегрирование проводится на поверхности лопасти  $f = 0$ . Для подвижной поверхности задержанное время  $\tau$  определяется выражением:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|(\eta, \tau) = a_0(t - \tau).$$

где  $t$  – время излучения источника и  $\eta$  – переменная Лагранжа для поверхностной точки (рис. 1, [3]).

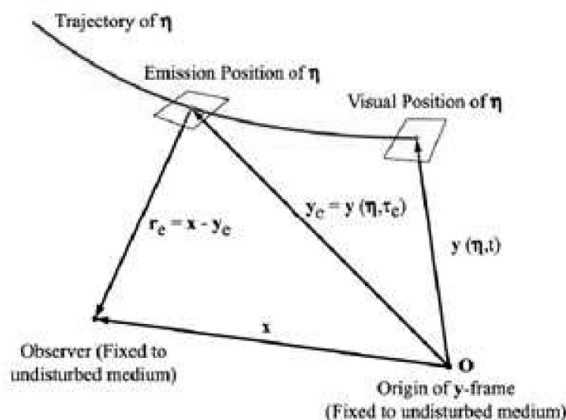


Рис. 1. Траектория движения объекта и наблюдатель.

Выражения (2), (3) перепишем в виде

$$p'_T(x, t) = p'_{TI}(x, t) + p'_{TII}(x, t), p'_L(x, t) = p'_{LI}(x, t) + p'_{LII}(x, t),$$

Здесь

$$p'_{TI}(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{f=0} \left[ \frac{\rho v_n}{|1 - M_r|^3} \frac{\partial M_r}{\partial \tau} \right]_{\text{ret}} dS; \quad (4)$$

$$p'_{TII}(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{f=0} \left[ \frac{\rho}{L|1 - M_r|^2} \frac{\partial v_n}{\partial \tau} \right]_{\text{ret}} dS; \quad (5)$$

$$p'_{LI}(x, t) = \frac{\cos \theta}{4\pi a_0 d} \int_{r=0}^R \left[ \frac{p}{|1 - M_r|^3} \frac{\partial M_r}{\partial \tau} \right]_{\text{ret}} dS; \quad (6)$$

$$p'_{LII}(x, t) = \frac{\cos \theta}{4\pi a_0 d} \int_{r=0}^R \left[ \frac{\dot{p}}{|1 - M_r|^2} \right]_{\text{ret}} dS; \quad (7)$$



В этих выражениях  $d$  – расстояние между осью винта и наблюдателем;  $v_n = \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{U}$  – местная скорость по нормали к поверхности источника;  $\mathbf{U} = \mathbf{T}^* \mathbf{V}$ ;  $\mathbf{T}$  – матрица преобразования координатных систем. Время  $t'$  в системе координат наблюдателя определяется выражением [4]

$$t' = L/a_0 + (\psi - \varphi)/\Omega = L/a_0 + \tau, \quad (8)$$

где  $\psi$  – текущий угол азимута лопасти;  $\varphi$  – угол, определяющий время задержки распространения сигнала;  $\Omega$  – угловая частота вращения винта. В выражение для расстояния  $L$  источник–наблюдатель входит текущая координата  $c_\varepsilon \in [0, c]$  на хорде лопасти  $c$ . Согласно [4], выражение (8) имеет вид

$$t' = d/a_0 + r \cos(\psi - \varphi)/a_0 + c_\varepsilon \sin(\psi - \varphi)/a_0 + (\psi - \varphi)/\Omega. \quad (9)$$

Следуя [4] интегрирование уравнений (4), (5) вдоль хорды профиля может быть выполнено независимо от интегрирования в радиальном направлении. Для интеграла вдоль хорды можно записать

$$\int_{f=0} c_\varepsilon dS = -A_\varepsilon; \quad (10)$$

Здесь  $A_\varepsilon$  – площадь аэродинамического профиля.

Аналитическое решение уравнений FW–Н приводится в [4] и использовано для моделирования работы несущего винта на режиме висения в [5]. Отличие в подходах работ [4–5] от подхода, реализованного с применением выражений (4)–(7), заключается, прежде всего, формулировками интегральных методов решения уравнений FW–Н: Farassat 1 и Farassat 1A, соответственно. Выражение для шума вытеснения на режиме висения в плоскости вращения винта ( $\theta = \pi/2$ ) может быть записано в виде [5]:

$$p'_T(x, t) = 0.5 \rho a_0^2 F_H F_\varepsilon T_M. \quad (11)$$

Здесь  $F_H = R/r_H$  – фактор дистанции;  $F_\varepsilon = A_\varepsilon/A$  – фактор формы профиля;  $T_M$  – функция “эффекта Доплера”.

Результаты моделирования уровня звукового излучения (во времени наблюдателя) представлены при условиях моделирования: профиль НАСА 0012; радиус винта  $R = 8$  м; конечное число Маха на режиме висения  $M_H = 0.82$ ; тяга винта  $T = 6$  psf (287.28125 Па); расстояние от наблюдателя (в плоскости вращения винта) до оси винта  $r_H = 800$  м.

Общая форма азимутального распределения шума вытеснения, в соответствии с работой [4], определяется функцией  $T_M$ , представленной на рис. 2.

Для сравнения на рис. 3 показана аналогичная функция, полученная в данной работе.

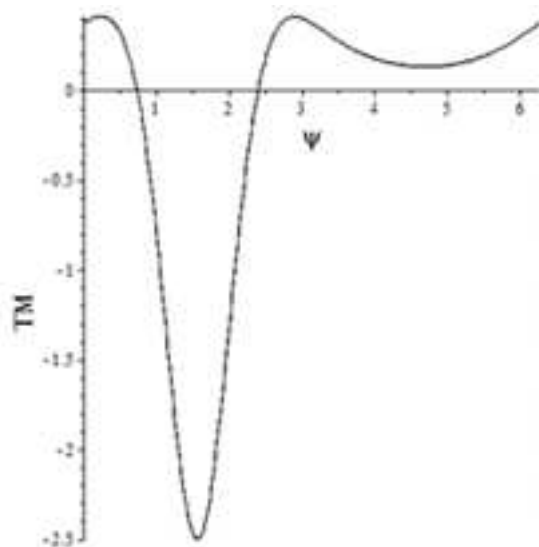


Рис. 2. Азимутальное распределение (время источника) фактора формы  $T_M$  для  $M_H=0.2$  по работе [4].

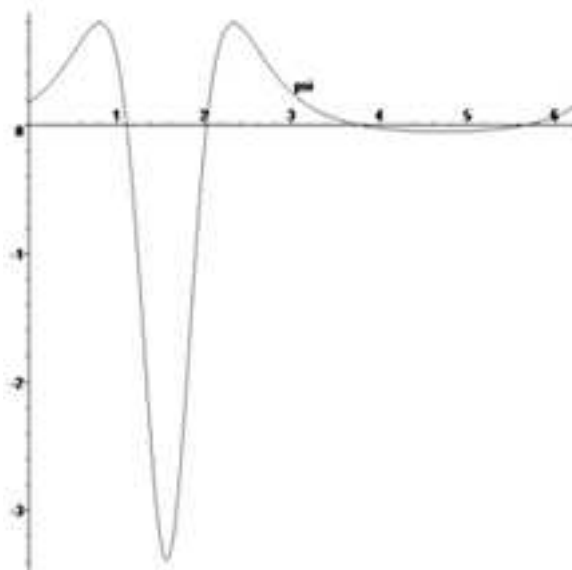


Рис. 3. Рассчитанное азимутальное распределение (время источника) фактора формы  $T_M$  для  $M_H=0.2$ .

Из сравнения данных, представленных на рис. 2, следует, что пиковые значения функции  $T_M$ , полученные в данной работе значительно выше, в сравнении с результатами, представленными в [4, 5]. Этим объясняется то обстоятельство, что согласие результатов данной работы с экспериментальными данными [6] выглядит значительно лучше (рис. 4). Условия модели-

рования соответствовали данным работы [6] и аналогичны тем, которые использовались выше при построении функции  $T_M$ .

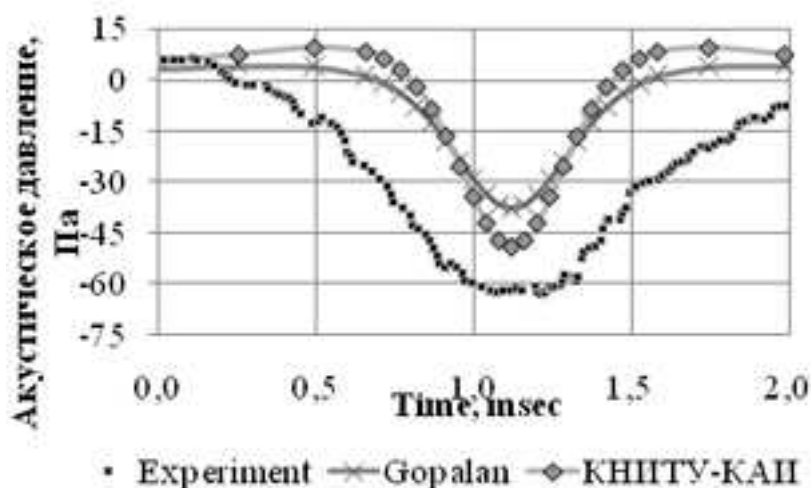


Рис. 4. Шум толщины в плоскости вращения диска по данным эксперимента и результатам моделирования.

Работа выполнена при поддержке гранта “Проектная часть государственного задания в сфере научной деятельности” (№9.1694.2014/К).

## Список литературы

- [1] Ffowcs Williams J. E., Hawkings D. L. Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion // *Philosophical Transactions of the Royal Society*. 1969. A 264 (1151). – P. 321–342.
- [2] Brentner K. S., Farassat F. Modeling aerodynamically generated sound of helicopter rotors // *Progress in Aerospace Sciences*. 2003. № 39. P. 83–120.
- [3] Farassat F. Derivation of Formulations 1 and 1A of Farassat // *NASA/TM-2007-214853*.
- [4] Gopalan G., Shmitz F. H. Understanding Far Field Near-In-Plane High Speed Harmonic Helicopter Rotor Noise in Hover: Governing Parameters and Active Acoustic Control Possibilities // *AHS Specialist’s Conference on Aeromechanics*. – San Francisco, CA, 2008.
- [5] Kusyumov A. N., Mikhailov S. A., Garipova L. I., Batrakov A. S. and Barakos G. Distribution of Acoustic Power Spectra for an Isolated Helicopter Fuselage // *Experimental Fluid Mechanics Conference*. – Chesky Crumlov, Czech Republic, 2014.
- [6] Schmitz F. H. and Yu Y. H. Theoretical Modeling of High-Speed Helicopter Impulsive Noise // *J. Am. Helicopter Soc.*, 1979. Vol. 24. № 1.

УДК 517.9

## СМЕЩЕНИЕ МИНИМУМА ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Жалова А. С.<sup>1</sup>, Зайцев В. Ф.<sup>1,2</sup>

Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена<sup>1</sup>

Санкт-Петербургский государственный университет<sup>2</sup>

Санкт-Петербург

e-mail: valentin\_zaitsev@mail.ru

**Zhalova A. S., Zaitsev V. F. The shift of the minimum of electron beams potential in curvilinear coordinates.** We consider the problem on motion of the electron beam in cylindrical and spherical areas.

Рассматривается задача о движении пучка электронов в коаксиальной цилиндрической и концентрической сферической областях.

В работе [1] рассматривается задача о прохождении потоком электронов пространства между двумя бесконечными параллельными плоскими электродами  $A$  и  $B$  или между бесконечными соосными цилиндрическими или концентрическими сферическими электродами в направлении нормали к электродам, которую можно принять за ось  $z$ . Потенциалы электродов  $A$  и  $B$  одинаковы и равны  $V_0$ , а потенциал катода  $V|_{z=0} = 0$ . Требуется найти распределение потенциала в пространстве между электродами  $A$  и  $B$  в зависимости от интенсивности потока [2].

В такой постановке задачу можно считать одномерной – в силу принятых допущений все физические величины будут зависеть лишь от осевой координаты  $z$  (в декартовых координатах) или только от радиальной координаты  $r$  (в криволинейных координатах). Потенциал внутри пространства взаимодействия описывается, в зависимости от выбора системы координат, одним

из трёх уравнений

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{j}{\epsilon_0 \sqrt{2\eta V(z)}} \quad - \text{плоский случай}, \quad (1)$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{j_0}{\epsilon_0 r \sqrt{2\eta V(r)}} \quad - \text{цилиндрический случай}, \quad (2)$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{j_0}{\epsilon_0 r^2 \sqrt{2\eta V(r)}} \quad - \text{сферический случай}. \quad (3)$$

где  $V$  – потенциал,  $j$  – плотность электронного тока. Уравнения учитывают специфику – линии тока в криволинейных координатах, вообще говоря, не являются параллельными, и плотность тока  $j = j(r)$  [3, 4]. Общее решение уравнения (1) хорошо известно [2], к тому же известен и первый интеграл. Для уравнения (2) решение в замкнутой форме получить до сих пор не удалось, а для уравнения (3) общее решение может быть найдено в параметрической форме в терминах функций Бесселя мнимого аргумента [5]. Заметим, что уравнения (2) и (3) легко приводятся к частным случаям уравнения Эмдена–Фаулера [1].

Для определения потенциала пучка надо решить уравнения (1)–(3) с краевыми условиями  $V|_A = V|_B = V_0$ . Основное затруднение состоит в том, что **решение не единственно**. В случае декартовых координат три ветви решения находятся в явном виде, так как общее решение представляет собой алгебраическую кривую третьего порядка (рис. 1).

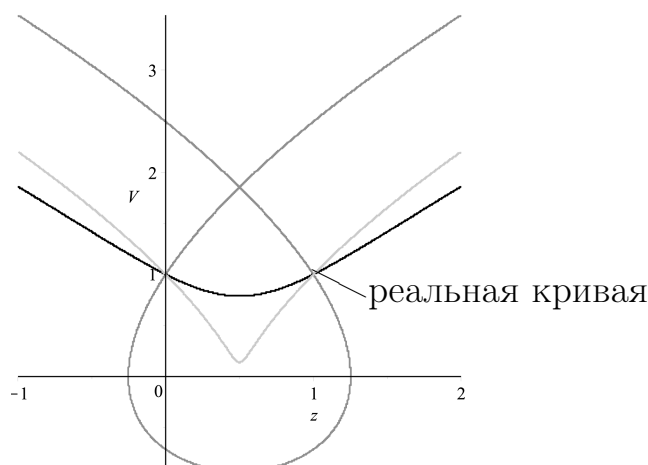


Рис. 1. Три решения краевой задачи в плоском случае.

Соответствующая физической постановке задачи реальная кривая выделяется условиями  $V_0/4 < V_{\min} < V_0$ ,  $V'' > 0$  (в докритической области значений

$j_0$ ) [2]. При этом в силу симметрии точка минимума потенциала неподвижна ( $z_{\min} = 1/2$  на рис. 1), “срыв” потока происходит при достижении потенциалом в минимуме значения  $V_0/4$ .

В криволинейных координатах аналогичное исследование выполнить значительно сложнее. Несмотря на то, что общая картина аналогична плоскому случаю [1], имеется ряд принципиальных отличий: во-первых, общее решение не является алгебраической кривой (а в цилиндрическом случае характер кривой вообще неизвестен), а во-вторых, точка минимума потенциала не является неподвижной – происходит её “сползание” в сторону катода при увеличении плотности тока электронного пучка и, в-третьих, не известен первый интеграл. Поэтому даже в сферическом случае известное общее решение уравнения (3)

$$\begin{cases} r = a\tau^{2/3}Z^2, \\ V = b\tau^{-4/3}Z^{-2} \left( \tau Z' + \frac{1}{3}Z \right)^2, \end{cases} \quad (4)$$

где  $Z = C_1 I_{1/3}(\tau) + C_2 K_{1/3}(\tau)$ ,  $I_\nu, K_\nu$  – функции Бесселя мнимого аргумента,  $\tau$  – параметр, не даёт возможности описать полную картину изучаемого процесса. Вычисление искомой интегральной кривой, удовлетворяющей краевым условиям  $V|_{r=r_1} = V|_{r=r_2} = V_0$ , может быть проведено лишь численно, так как для этого надо найти константы  $C_1, C_2$  из системы

$$\begin{cases} r_1 = a\tau_1^{2/3}Z^2(\tau_1), \\ V_0 = b\tau_1^{-4/3}Z^{-2}(\tau_1) \left( \tau_1 Z'(\tau_1) + \frac{1}{3}Z(\tau_1) \right)^2, \\ r_2 = a\tau_2^{2/3}Z^2(\tau_2), \\ V_0 = b\tau_2^{-4/3}Z^{-2}(\tau_2) \left( \tau_2 Z'(\tau_2) + \frac{1}{3}Z(\tau_2) \right)^2. \end{cases} \quad (5)$$

Ситуация осложняется тем, что мы не можем использовать точку минимума потенциала в качестве “опорной”, так как она медленно “сползает” в сторону катода при увеличении тока. Применение команды `fsolve` пакета MAPLE даёт физический значимый результат лишь при относительно небольших значениях тока, а при его увеличении соответствуют другой (не имеющей физического смысла) ветви решения.

Тем не менее удалось построить зависимости потенциала в точке минимума от тока практически до точки “срыва” в обоих случаях (рис. 2)

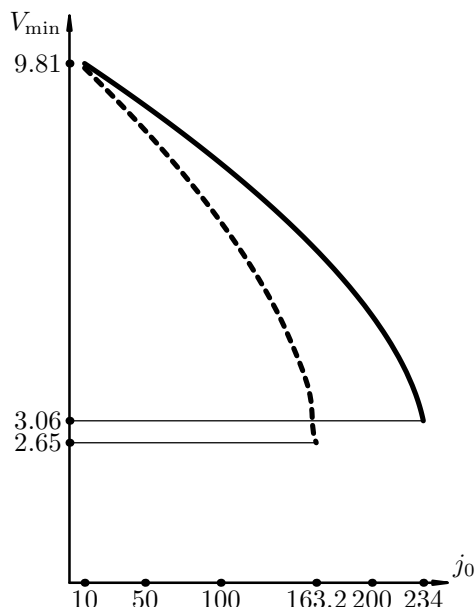


Рис. 2. “Провисание” потенциала в цилиндрическом (пунктир) и в сферическом (сплошная линия) случаях.

и, соответственно, зависимости координаты точки минимума от тока (рис. 3).

Заметим, что полученный результат имеет и практическое значение – найден диапазон плотностей тока ( $0 < j_0 < j_{\text{крит.}}$ ), в котором пучок электронов остаётся управляемым, и определена область минимума потенциала, в которой может быть установлен дополнительный корректирующий электрод для стабилизации пучка. Эти параметры играют важную роль при разработке различных электронных и ионных устройств – как современных электронных ламп (как правило, цилиндрической конфигурации), так и источников радиоактивного излучения в радиомедицине (как правило, с точечным источником излучения).

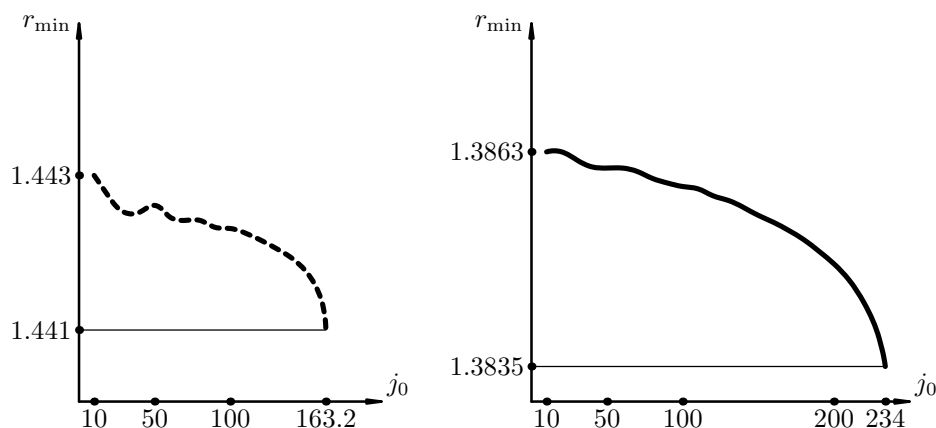


Рис. 3. “Сползание” точки минимума потенциала к катоду в цилиндрическом (слева) и в сферическом (справа) случаях.

## Список литературы

- [1] Зайцев В. Ф., Подклетнова А. А. Электронные пучки в криволинейных координатах // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения–2014». – СПб.: РГПУ, 2014. – С. 63–65.
- [2] Зинченко Н. С. Курс лекций по электронной оптике. – Харьков: изд. ХГУ, 1958. – 275 с.
- [3] Langmuir I., Blodgett K. // Phys. Rev. 22, 347, 1923.
- [4] Langmuir I., Blodgett K. // Phys. Rev. 24, 49, 1924.
- [5] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

УДК 517.9

### ШЕСТЬ НОВЫХ ФАКТОРИЗУЕМЫХ КЛАССОВ ОДУ 2-го ПОРЯДКА

Зайцев В. Ф.<sup>1</sup>, Линчук Л. В.<sup>2</sup>

Санкт-Петербургский государственный университет<sup>1</sup>

Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена<sup>1</sup>

Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет<sup>2</sup>

Санкт-Петербург

e-mail: valentin\_zaitsev@mail.ru<sup>1</sup>

e-mail: lidiya\_linchuk@mail.ru<sup>2</sup>

**Zaitsev V. F., Linchuk L. V. Six new factorized classes of the 2nd order ODEs.** We consider some reverse problems for exponential nonlocal operator in non-canonical form.

Рассматриваются некоторые обратные задачи для экспоненциального нелокального оператора, записанного в неканонической форме.

Рассматриваются экспоненциальные векторные поля [1] – частный случай нелокальных симметрий, допускаемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Мы будем использовать разные формы записи



экспоненциального нелокального оператора (ЭНО), в частности, “геометрическую”

$$X = [\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y]\Omega \quad (1)$$

и “каноническую”

$$\hat{X} = [\eta(x, y) - y'\xi(x, y)]\Omega \partial_y = G(x, y, y')\Omega \partial_y, \quad (2)$$

где  $\Omega = \exp \int \zeta(x, y) dx$ .

Пока мы ограничимся уравнениями 2-го порядка

$$y'' = F(x, y, y'). \quad (3)$$

В работе [2] доказано, что для описания **всех** уравнений вида (3), допускающих факторизацию<sup>1</sup>, достаточно рассматривать операторы типа (1) или (2).

Заметим, что случай  $\xi \equiv 0$  уже рассматривался ранее [3], он приводит (с точностью до очевидной группы эквивалентности) к обобщению уравнения Ермакова, поэтому мы будем считать, что  $\xi \not\equiv 0$ .

В общем случае уравнения (3) условие инвариантности для оператора (2) имеет вид

$$\begin{aligned} &\eta_{xx} + \eta_x \zeta + \eta \zeta^2 + (\eta \zeta)_x + [2\eta_{xy} - \xi_{xx} + (\eta \zeta)_y - (\xi \zeta)_x + \eta_y \zeta - \xi_x \zeta - \xi \zeta^2] y' + \\ &+ [\eta_{yy} - 2\xi_{xy} - (\xi \zeta)_y - \xi_y \zeta] (y')^2 - \xi_{yy} (y')^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 2\xi \zeta - 3\xi_y y') F - \\ &- \xi F_x - \eta F_y - [\eta_x + \eta \zeta + (\eta_y - \xi_x - \xi \zeta) y' - \xi_y (y')^2] F_{y'} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Если  $F = F(x, y)$ , то определяющая система имеет вид

$$\begin{cases} \xi_{yy} = 0, \\ \eta_{yy} - 2\xi_{xy} - (\xi \zeta)_y - \xi_y \zeta = 0, \\ 2\eta_{xy} - \xi_{xx} + (\eta \zeta)_y - (\xi \zeta)_x + \eta_y \zeta - \xi_x \zeta - \xi \zeta^2 - 3\xi_y F = 0, \\ \eta_{xx} + \eta_x \zeta + \eta \zeta^2 + (\eta \zeta)_x + (\eta_y - 2\xi_x - 2\xi \zeta) F - \xi F_x - \eta F_y = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Из первого уравнения следует, что  $\xi = a(x)y + b(x)$ , из второго можно выразить  $\eta$  через частный интеграл от функции  $\zeta$  по  $y$ :

$$\eta = (ay + b)z + a'y^2 + c(x)y + d(x),$$

<sup>1</sup>Под факторизацией мы понимаем декомпозицию исходного уравнения до системы двух уравнений 1-го порядка, одно из которых может решаться независимо от другого (в общем случае можно считать факторизацию широким обобщением понятия “понижение порядка”).

где

$$z = \int \zeta dy.$$

Решение обратной задачи проводится по двум существенно различным алгоритмам [4]: при  $\xi_y \neq 0$  из третьего уравнения находится  $F(x, y)$ , а четвёртое служит условием совместности; при  $\xi_y = 0$  третье уравнение является условием совместности, а четвёртое – линейное УЧП 1-го порядка – даёт  $F(x, y)$  с однофункциональным произволом.

В настоящей работе мы рассматриваем лишь случай  $\xi_y = 0$ , т. е.  $\xi = b(x)$ . Три оставшихся уравнения системы (5) будут иметь вид

$$\begin{cases} \eta_{yy} - b\zeta_y = 0, \\ 2\eta_{xy} - b'' + (\eta\zeta)_y - (b\zeta)_x + \eta_y\zeta - b'\zeta - b\zeta^2 = 0, \\ \eta_{xx} + \eta_x\zeta + \eta\zeta^2 + (\eta\zeta)_x + (\eta_y - 2b' - 2b\zeta)F - bF_x - \eta F_y = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Первое уравнение легко интегрируется, и

$$\zeta = \frac{\eta_y}{b} + p(x).$$

Второе уравнение

$$\eta\eta_{yy} + \eta_y^2 + b\eta_{xy} - b'\eta_y - 2bb'p - b^2p' - b^2p^2 - bb'' = 0$$

может быть один раз проинтегрировано по переменной  $y$ :

$$\eta\eta_y + b\eta_x - b'\eta - b(2b'p + bp' + bp^2 + b'')y + q(x) = 0. \quad (7)$$

Третье уравнение является линейным уравнением с частными производными 1-го порядка относительно искомой функции  $F$ :

$$b^3F_x + b^2\eta F_y + b^2(\eta_y + 2bp + 2b')F = b\eta\eta_{xy} + \eta\eta_y^2 + (2bp - b')\eta\eta_y + b^2p^2\eta + 2b\eta_x\eta_y + 2b^2p\eta_x + b^2p'\eta + b^2\eta_{xx}. \quad (8)$$

Очевидно, что для любого решения уравнения (7) уравнение (8) становится вполне определённым, и его решение даёт класс уравнений (3), допускающий конкретный ЭНО (1) с  $\xi = b(x)$ , для которого могут быть вычислены инварианты. Рассмотрим этапы этой процедуры подробнее.

К сожалению, уравнение (7) в общем виде пока проинтегрировать не удастся, поэтому рассмотрим частные случаи.

1. Пусть  $2b'p + bp' + bp^2 + b'' = 0$ . Тогда произвольная функция  $p(x)$  может быть явно выражена через  $b(x)$ :

$$p(x) = -\frac{b'}{b} + \frac{1}{x + C}, \quad (9)$$

а решение уравнения (7) в неявном виде будет

$$x \left( \int \frac{q(x) dx}{b(x)^2} + \frac{\eta(x, y)}{b(x)} \right) + \Phi \left( \int \frac{q(x) dx}{b(x)^2} + \frac{\eta(x, y)}{b(x)} \right) - \iint \frac{q(x) dx dx}{b(x)^2} - y = 0. \quad (10)$$

2. Если выполнено (9) и  $q(x) \equiv 0$ , то решение уравнения (7) имеет более простой вид, но также выражается неявно

$$y - \frac{x\eta(x, y)}{b(x)} - \Phi \left( \frac{\eta(x, y)}{b(x)} \right) = 0. \quad (11)$$

Заметим, что уравнение (11) является, по существу, уравнением относительно  $\eta_1 = \frac{\eta(x, y)}{b(x)}$ , т. е., с учётом формулы (9) мы получаем оператор

$$\begin{aligned} X_1 &= b(x) [\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y] \exp \int (\eta_y + p(x)) dx = \\ &= b(x) [\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y] \exp \int \left( \eta_y - \frac{b'(x)}{b(x)} + \frac{1}{x + C} \right) dx = \\ &= [\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y] \exp \int \left( \eta_y + \frac{1}{x + C} \right) dx. \end{aligned}$$

Таким образом оказывается, что найденные операторы эквивалентны друг другу при различных функциях  $b(x)$ , и без ограничения общности мы можем рассматривать полученный оператор при  $b(x) \equiv 1$ , т. е. вместо (11) определять  $\eta(x, y)$  из более простой формулы

$$y - x\eta(x, y) - \Phi(\eta(x, y)) = 0. \quad (12)$$

Неявное задание функции  $\eta$  уравнением (12) значительно затрудняет дальнейший анализ. Поэтому рассмотрим те случаи, когда эта функция может быть определена явно.

**1.** Пусть  $\Phi(\eta(x, y)) = 2\eta^2(x, y)$ . Тогда  $\eta(x, y) = \sqrt{x^2 + 2ay} - x$ , и допускаемый оператор имеет вид

$$X = \left[ a\partial_x + (\sqrt{x^2 + 2ay} - x)\partial_y \right] \exp \int \left( \sqrt{x^2 + 2ay} + \frac{1}{x + b} \right) dx. \quad (13)$$

Оператор (13) допускается классом уравнений

$$y'' + \frac{\Psi_1(\sqrt{x^2 + 2ay} - x)}{(x + b)^2 \sqrt{x^2 + 2ay}} = 0, \quad (14)$$

где  $\Psi_1$  – произвольная функция своего аргумента. Подстановка инвариантов найденного оператора

$$(x + b)y' - \frac{x}{a}(\sqrt{x^2 + 2ay} - x) = u(t), \quad \sqrt{x^2 + 2ay} - x = t$$

приводит к уравнению 1-го порядка

$$\dot{u} = \frac{(au - bt)t - a\Psi_1(t)}{a(au - bt)}, \quad (15)$$

Преобразование  $au(t) - bt = w(t)$ ,  $\frac{t^2}{2} - bt + c = \tau$  приводит уравнение (15) к уравнению Абеля 2-го рода в каноническом виде

$$\frac{dw}{d\tau} - w = \mp \frac{\Psi_1(b \pm \sqrt{b^2 - 2c + 2\tau})}{\sqrt{b^2 - 2c + 2\tau}}.$$

Можно рассматривать допускаемый оператор и в виде

$$X = \left[ a\partial_x + (\sqrt{x^2 + 2ay} - x) \partial_y \right] \exp \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2ay}} \quad (13')$$

(т. е. формально при  $b \rightarrow \infty$ ), тогда оператор (13') допускается классом уравнений

$$y'' + \frac{\Psi_2(\sqrt{x^2 + 2ay} - x)}{\sqrt{x^2 + 2ay}} = 0, \quad (14')$$

где  $\Psi_2$  – произвольная функция своего аргумента. Подстановка инвариантов найденного оператора

$$y' = u(t), \quad \sqrt{x^2 + 2ay} - x = t$$

приводит к уравнению 1-го порядка

$$\dot{u} = \frac{\Psi_2(t)}{au - t}, \quad (15')$$

которое преобразованием  $au - t = -w(t)$  приводится к уравнению Абеля 2-го рода

$$w\dot{w} - w = a\Psi_2(t).$$

**2.** Пусть  $\Phi(\eta(x, y)) = \frac{a}{2}\eta^{-1}(x, y)$ . Тогда  $\eta = \frac{y + \sqrt{y^2 - 2ax}}{2x}$ . В этом случае оператор имеет вид

$$X = \left( \partial_x + \frac{(y + \sqrt{y^2 - 2ax})}{2x} \partial_y \right) \exp \int \left( \frac{y + \sqrt{y^2 - 2ax}}{2x\sqrt{y^2 - 2ax}} + \frac{1}{x + b} \right) dx, \quad (16)$$

он допускает классом уравнений

$$y'' + \frac{\Psi_3(y - \sqrt{y^2 - 2ax})}{(x + b)^2 \sqrt{y^2 - 2ax}} = 0, \quad (17)$$

Подстановка инвариантов

$$a(x + b)y' - \frac{a}{2} (y + \sqrt{y^2 - 2ax}) = u(t), \quad y - \sqrt{y^2 - 2ax} = t$$

приводит к уравнению

$$\dot{u} = \frac{a^2 \Psi_3(t)}{a^2 b - tu} + \frac{a}{2}. \quad (18)$$

Аналогично п. 1, переходя в операторе (16) формально к пределу  $b \rightarrow \infty$ , получаем оператор

$$X = \left( \partial_x + \frac{(y + \sqrt{y^2 - 2ax})}{2x} \partial_y \right) \exp \int \frac{y + \sqrt{y^2 - 2ax}}{2x\sqrt{y^2 - 2ax}} dx, \quad (16')$$

допускаемый классом уравнений

$$y'' + \frac{\Psi_4(y - \sqrt{y^2 - 2ax})}{\sqrt{y^2 - 2ax}} = 0. \quad (17')$$

Подстановка инвариантов

$$y' = u(t), \quad y - \sqrt{y^2 - 2ax} = t$$

приводит к уравнению

$$\dot{u} = \frac{\Psi_4(t)}{a - tu}. \quad (18')$$

**3.** Пусть  $\Phi(\eta(x, y)) = a\eta^{1/2}(x, y)$ . Тогда

$$\eta = \frac{a}{2x^2} (a + \sqrt{a^2 + 4xy}) + \frac{y}{x},$$

оператор имеет вид

$$X = \left[ \partial_x + \left( \frac{a}{2x^2} (a + \sqrt{a^2 + 4xy}) + \frac{y}{x} \right) \partial_y \right] \times \\ \times \exp \int \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + 4xy}}{x \sqrt{a^2 + 4xy}} + \frac{1}{x + b} \right) dx \quad (19)$$

и допускаются классом уравнений

$$y'' = \frac{\Psi_5 \left( \frac{y}{\sqrt{a^2 + 4xy} - a} \right)}{(x + b)^2 \sqrt{a^2 + 4xy}}. \quad (20)$$

Подстановка инвариантов

$$(x + b)y' - \frac{y\sqrt{a^2 + 4xy}}{\sqrt{a^2 + 4xy} - a} = u(t), \quad \frac{y}{\sqrt{a^2 + 4xy} - a} = t$$

приводит к уравнению

$$\dot{u} + \frac{2\Psi_5(t)}{u - 4bt^2 - at} + a = 0. \quad (21)$$

Аналогично п. 1, переходя в операторе (19) формально к пределу  $b \rightarrow \infty$ , получаем оператор

$$X = \left[ \partial_x + \left( \frac{a}{2x^2} (a + \sqrt{a^2 + 4xy}) + \frac{y}{x} \right) \partial_y \right] \exp \int \frac{a + \sqrt{a^2 + 4xy}}{x \sqrt{a^2 + 4xy}} dx, \quad (19')$$

который допускаются классом уравнений

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4xy}} \Psi_6 \left( \frac{y}{\sqrt{a^2 + 4xy} - a} \right). \quad (20')$$

Подстановка инвариантов

$$y' = u(t), \quad \frac{y}{\sqrt{a^2 + 4xy} - a} = t$$

даёт уравнение

$$\dot{u} + \frac{2\Psi_6(t)}{u - 4t^2} = 0. \quad (21')$$

Таким образом, найдены 6 новых классов ОДУ вида  $y'' = F(x, y)$ , допускающих факторизацию – классы (14), (14'), (17), (17'), (20), (20') с однофункциональным произволом (функции  $\Psi_i$ ,  $i = \overline{1, 6}$  соответственно) каждый. При этом разрешимость одного из уравнений фактор-системы даёт нам понижение порядка исходного уравнения на единицу. В данном случае уравнения относительно функции  $u(t)$  (15), (15'), (18), (18'), (21), (21') являются уравнениями Абеля второго рода. К настоящему времени описано более 1000 интегрируемых уравнений такого типа, поэтому для такого же количества представителей каждого из найденных выше классов уравнений 2-го порядка мы можем выписать первый интеграл, т. е. реально понизить порядок.

В качестве примера рассмотрим уравнение (14'). Оно факторизуется до системы

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\Psi_2(t)}{au - t}, \\ y' = u(t), \\ \sqrt{x^2 + 2ay} - x = t \end{cases} \quad (22)$$

(второе и третье уравнения системы (22) представляются собой, по существу, одно – “внутреннее” уравнение, в котором правая часть записана в параметрической форме). Пусть известно общее решение “внешнего” (первого) уравнения системы  $u(t) = U(t, C)$ . Тогда оставшиеся уравнения представляют собой **первый интеграл** исходного уравнения (14'), записанный в параметрической форме:

$$y' = U(t, C), \quad \sqrt{x^2 + 2ay} - x = t.$$

**Замечание 1.** Очевидно, представление исходного уравнения в виде фактор-системы позволяет реализовать **два различных способа понижения порядка**:

1) если интегрируется второе (“внутреннее”) уравнение, мы получаем классический метод понижения порядка – с той лишь разницей, что применение ЭНО существенно обобщает результаты, которые даёт применение точечных операторов (хорошим примером является обобщение уравнения Ермакова [3]);

2) если интегрируется первое (“внешнее”) уравнение, мы получаем первый интеграл исходного уравнения – этот подход не имеет классических аналогов, результаты его применения изложены в настоящей работе.

**Замечание 2.** Особый случай класса уравнений (20) найден ещё в 1994 г.

[4] – это класс уравнений

$$F = (b_1x + b_0)^{-2}y^{-1/2}\Psi(y^{1/2} - x) + 2,$$

где  $\Psi$  – произвольная функция. Инвариантами являются функции

$$t = y^{1/2} - x, \quad u = (b_1x + b_0)y' - 2(b_1x + b_0)y^{1/2}.$$

Исходное уравнение записывается в инвариантах как

$$u \frac{du}{dt} - 2(b_1t - b_0)u = 2\Psi(t)$$

и также является уравнением Абеля второго рода.

## Список литературы

- [1] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 640 с.
- [2] Зайцев В. Ф., Линчук Л. В. Дифференциальные уравнения (структурная теория), часть III. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – 120 с.
- [3] Зайцев В. Ф. Обобщения и аналоги уравнения Ермакова // Моделирование процессов управления и обработки информации. – М.: МФТИ, 1996. – С. 170–173.
- [4] Зайцев В. Ф. Нелокальные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений // Моделирование процессов управления и обработки информации. – М.: МФТИ, 1994. – С. 190–199.



УДК 517.9

## ГРУППЫ ЛИ, ДОПУСКАЕМЫЕ УРАВНЕНИЯМИ ДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Клебанов И. И.<sup>1,2</sup>, Иванов С. А.<sup>2</sup>, Старцун О. В.<sup>1</sup>

Челябинский государственный педагогический университет<sup>1</sup>

Южно-уральский государственный университет<sup>2</sup>

Челябинск

e-mail: klebanov.igor2010@yandex.ru

**Klebanov I. I., Ivanov S. A., Startsun O. V. The Lie group admitted by equations of the dynamics of self-gravitating perfect fluid.** It is established that the dynamic equations of non-relativistic self-gravitating ideal fluid with state equation of general type admits a infinite-dimensional Lie algebra with four arbitrary functions of time.

Установлено, что система уравнений динамики идеальной нерелятивистской самогравитирующей жидкости с уравнением состояния общего вида допускает бесконечномерную алгебру Ли с четырьмя произвольными функциями времени.

Рассматривается система уравнений динамики идеальной нерелятивистской самогравитирующей жидкости с уравнением состояния общего вида, являющаяся базисной при моделировании крупномасштабной структуры Вселенной и в теории образования звёзд [1, 2]. Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} + \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \\ \Delta \Phi = 4\pi\gamma\rho, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \nabla p + A(\rho, p) \nabla \vec{v} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $p$  – давление,  $\Phi$  – гравитационный потенциал,  $\vec{v}$  – скорость,  $\gamma$  – гравитационная постоянная,  $\nabla$  – оператор Гамильтона,  $\Delta$  – оператор Лапласа. Произвольная функция  $A(\rho, p) = \rho c^2$ , где  $c$  – скорость звука, считается заданной и определяется уравнением состояния [3].

Наша цель – вычисление алгебры Ли, допускаемой системой (1) (случай  $p = 0$  рассмотрен в работах [4, 5]). Перепишем систему уравнений (1) (в

безразмерных переменных) в декартовых координатах

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + \rho(u_x + v_y + \omega_z) + up_x + vp_y + \omega p_z = 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + \omega u_z + \Phi_x + p_x/\rho = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \omega v_z + \Phi_y + p_y/\rho = 0, \\ \omega_t + u\omega_x + v\omega_y + \omega\omega_z + \Phi_z + p_z/\rho = 0, \\ \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} - \rho = 0, \\ p_t + up_x + vp_y + \omega p_z + A(p, \rho)(u_x + v_y + \omega_z) = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $x, y, z$  – декартовы координаты,  $t$  – время,  $u, v, \omega$  – компоненты вектора скорости. Генератор группы будем искать в виде

$$X = \xi^{(x)}\partial_x + \xi^{(y)}\partial_y + \xi^{(z)}\partial_z + \xi^{(t)}\partial_t + \eta^{(\Phi)}\partial_\Phi + \eta^{(\rho)}\partial_\rho + \eta^{(p)}\partial_p + \eta^{(u)}\partial_u + \eta^{(v)}\partial_v + \eta^{(\omega)}\partial_\omega, \quad (3)$$

где компоненты касательного векторного поля  $\xi$  и  $\eta$  являются функциями всех зависимых и независимых переменных [6].

Расчет по стандартному алгоритму Ли–Овсянникова [6] с применением пакета GeM [7] приводит в случае произвольной функции  $A(p, \rho)$  к определяющим уравнениям

$$\begin{aligned} \eta_\Phi^{(\Phi)} &= \eta_p^{(\Phi)} = \eta_\rho^{(\Phi)} = \eta_u^{(\Phi)} = \eta_v^{(\Phi)} = \eta_\omega^{(\Phi)} = 0, \\ \eta^{(\rho)} &= \eta^{(p)} = 0, \\ \eta_x^{(u)} &= \eta_y^{(u)} = \eta_z^{(u)} = \eta_p^{(u)} = \eta_\rho^{(u)} = \eta_\Phi^{(u)} = \eta_u^{(u)} = 0, \\ \eta_x^{(v)} &= \eta_y^{(v)} = \eta_z^{(v)} = \eta_p^{(v)} = \eta_\rho^{(v)} = \eta_\Phi^{(v)} = \eta_v^{(v)} = 0, \\ \eta_x^{(\omega)} &= \eta_y^{(\omega)} = \eta_z^{(\omega)} = \eta_p^{(\omega)} = \eta_\rho^{(\omega)} = \eta_\Phi^{(\omega)} = \eta_\omega^{(\omega)} = 0, \\ \xi_x^{(t)} &= \xi_y^{(t)} = \xi_z^{(t)} = \xi_t^{(t)} = \xi_u^{(t)} = \xi_v^{(t)} = \xi_\omega^{(t)} = \xi_p^{(t)} = \xi_\rho^{(t)} = \xi_\Phi^{(t)} = 0, \\ \xi_x^{(x)} &= \xi_u^{(x)} = \xi_v^{(x)} = \xi_\omega^{(x)} = \xi_p^{(x)} = \xi_\rho^{(x)} = \xi_\Phi^{(x)} = 0, \\ \xi_y^{(y)} &= \xi_u^{(y)} = \xi_v^{(y)} = \xi_\omega^{(y)} = \xi_p^{(y)} = \xi_\rho^{(y)} = \xi_\Phi^{(y)} = 0, \\ \xi_z^{(z)} &= \xi_u^{(z)} = \xi_v^{(z)} = \xi_\omega^{(z)} = \xi_p^{(z)} = \xi_\rho^{(z)} = \xi_\Phi^{(z)} = 0, \\ \eta_{tv}^{(u)} &= \eta_{t\omega}^{(u)} = \eta_{t\omega}^{(v)} = \eta_{vv}^{(u)} = \eta_{v\omega}^{(u)} = \eta_{\omega\omega}^{(u)} = \eta_{\omega\omega}^{(\omega)} = 0, \\ \xi_x^{(y)} &= -\eta_v^{(u)}, \quad \xi_x^{(z)} = -\eta_\omega^{(u)}, \quad \eta_x^{(\Phi)} = -\eta_t^{(u)}, \quad \xi_y^{(x)} = \eta_v^{(u)}, \\ \xi_y^{(z)} &= -\eta_\omega^{(v)}, \quad \eta_y^{(\Phi)} = -\eta_t^{(x)}, \quad \xi_z^{(x)} = \eta_\omega^{(u)}, \quad \xi_z^{(y)} = \eta_\omega^{(v)}, \\ \eta_t^{(\Phi)} &= -\eta_t^{(\omega)}, \quad \eta_u^{(v)} = -\eta_v^{(u)}, \quad \eta_u^{(\omega)} = -\eta_\omega^{(u)}, \quad \eta_v^{(\omega)} = -\eta_\omega^{(v)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_t^{(x)} &= -v\eta_v^{(u)} - \omega\eta_\omega^{(u)} + \eta^{(u)}, \\ \xi_t^{(y)} &= u\eta_v^{(u)} - \omega\eta_\omega^{(v)} + \eta^{(v)}, \\ \xi_t^{(z)} &= u\eta_\omega^{(u)} + v\eta_\omega^{(v)} + \eta^{(\omega)},\end{aligned}$$

решение которых даёт бесконечномерную алгебру Ли с генераторами

$$\begin{aligned}X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \partial_y, \\ X_3 &= \partial_z, \\ X_4 &= \partial_t, \\ X_5 &= y\partial_z - z\partial_y + v\partial_\omega - \omega\partial_v, \\ X_6 &= z\partial_x - x\partial_z + \omega\partial_u - u\partial_\omega, \\ X_7 &= x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, \\ X_\infty^{(1)} &= -F_{1,tt}x\partial_\Phi + F_{1,t}\partial_u + F_1(t)\partial_x, \\ X_\infty^{(2)} &= -F_{2,tt}y\partial_\Phi + F_{2,t}\partial_v + F_2(t)\partial_y, \\ X_\infty^{(3)} &= -F_{3,tt}z\partial_\Phi + F_{3,t}\partial_\omega + F_3(t)\partial_z, \\ X_\infty^{(4)} &= F_4(t)\partial_\Phi,\end{aligned}\tag{4}$$

где  $F_i(t)$  – произвольные функции. Генераторы  $X_1, X_2, X_3, X_4$  соответствуют трансляциям,  $X_5, X_6, X_7$  – вращениям,  $X_\infty^{(1)}, X_\infty^{(2)}, X_\infty^{(3)}$  являются обобщёнными преобразованиями Галилея,  $X_\infty^{(4)}$  означает калибровочную инвариантность. В случае  $F_1(t) = F_2(t) = F_3(t) = t, F_4(t) = 0$  алгебра Ли (4) переходит в алгебру Ли группы Галилея, что является необходимым условием механической обоснованности модели. Групповая классификация системы (2), состоящая в нахождении всех возможных функций  $A(p, \rho)$ , допускающих расширение алгебры Ли, является предметом отдельного рассмотрения.

Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации, грант №2807.

## Список литературы

- [1] Вайнберг С. Космология. – М: УРСС, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 608 с.
- [2] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Строение и эволюция Вселенной. – М: Наука, 1975. – 732 с.

- [3] Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 336 с.
- [4] Klebanov I., Startsun O., Ivanov S. Model of the Newtonian cosmology: Symmetries, invariant and partially invariant solutions, Submitted to Communications to Nonlinear Science and Numerical Simulation <http://elib.cspu.ru/xmlui/handle/123456789/663>, 2015.
- [5] Клебанов И. И., Старцун О. В., Иванов С. А. Групповой анализ модели “Ньютоновская космология” // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. “Герценовские чтения – 2015”, материалы 68-ой научной конференции. – СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 33–36.
- [6] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М: Наука, 1978. – 399 с.
- [7] Shevyakov A. F. Symbolic Computation of Local Symmetries of Nonlinear and Linear Partial and Ordinary Differential Equations // Math. Comput. Sci., 2010; 4, pp. 203–222.

УДК 517.9

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ  
РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЙ ШРЁДИНГЕРА,  
ОПИСЫВАЮЩАЯ РЕАКЦИЮ МЕЖДУ ДВУМЯ  
НЕЙТРАЛЬНЫМИ БЕССПИНОВЫМИ ЧАСТИЦАМИ**

Лагодинский В. М.

Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения

Санкт-Петербург

e-mail: lagodinskiy@mail.ru

**Lagodinskiy V. M. The boundary problem for sistem of two relativistic Shrödinger equation describing the reaction between two neutral particles of zero spin.** The boundary problem for sistem of rwo relativistic Shrödinger equation describing the reaction between two neutral particles of zero spin, accompanied by the birth of two new neutral particles of zero spin formulated and solved.

Сформулирована и решена краевая задача для системы двух релятивистских уравнений Шрёдингера, описывающая взаимодействие двух нейтральных бесспиновых частиц, сопровождающееся рождением двух новых нейтральных бесспиновых частиц.

Задача о взаимодействии двух частиц с их превращением в новую пару частиц имеет, очевидно, важнейшее значение для квантовой теории. В настоящей работе она ставится и решается средствами релятивистской квантовой механики, основанной на определении квадратного корня из дифференциального оператора, предложенном автором в работе [1].

Рассмотрим следующую систему двух дифференциальных уравнений бесконечного порядка (двухчастичных стационарных одномерных релятивистских уравнений Шрёдингера):

$$\left( \varepsilon - \sqrt{m_{k1}^2 - \partial_x^2} - \sqrt{m_{k2}^2 - \partial_x^2} \right) \psi_k(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  — энергия физической системы,  $m_{kl}$ ,  $k, l = 1, 2$  — строго положительные параметры (массы покоя частиц),  $x$  — разность координат  $x_1 - x_2$ , где  $x_1$  — координата частиц с массами  $m_{k1}$ , а  $x_2$  — с массами  $m_{k2}$ .  $\partial_x \equiv d/dx$ , матрица  $G = \{g_{kl}\}$  — эрмитова:  $g_{11}, g_{22} \in \mathbb{R}$ ,  $g_{22} \neq 0$ , с неравным нулю определителем, а квадратный корень из дифференциального оператора определяется в соответствии с определением функции оператора, предложенным автором настоящей работы в работе [1]. Это определение сопоставляет оператору  $D$  и функции комплексного переменного  $f(z)$  (голоморфной на всей комплексной плоскости за исключением конечного числа полюсов, точек ветвления и разрывов, соединяющих каждую из точек ветвления с бесконечно удаленной точкой, а продолжения этих разрывов пересекаются в начале координат, где функция  $f(z)$  голоморфна) оператор, который любой функции  $u(x)$ , такой, что множество предельных точек последовательности

$$\{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ |(D^n u)(x)|^{1/n} \exp\left(i \frac{\varphi_n}{n}\right) \right\},$$

где  $\varphi_n = \arg(D^n u)(x)$ , при любом  $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$  ограничено и включает лишь те точки, в которых функция  $f(z)$  голоморфна, сопоставляет функцию, определенную на  $(a, b)$  и принимающую в каждой точке  $x \in (a, b)$  значения, получающиеся из функции

$$(f(\alpha D)u)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \alpha^n (D^n u)(x), \quad \forall x \in (a, b)$$

аналитическим продолжением по вещественному параметру  $\alpha$  от  $\alpha = 0$  до  $\alpha = 1$ . Это соответствие между множеством функций  $F = \{f(z)\}$  и множеством дифференциальных операторов (вообще говоря) бесконечного порядка  $\hat{F} = \{f(D)\}$  есть изоморфизм коммутативных колец: сумме функций  $f_1(z) +$

$+f_2(z)$  соответствует сумма операторов  $f_1(D)+f_2(D)$ , а произведению функций  $f_1(z)f_2(z)$  — произведение операторов  $f_1(D)f_2(D) = f_1(D)f_2(D)$  (т. е. их последовательное действие). В частности, если  $u(x) = \exp(ikx) \forall x \in (a, b)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} (H_m u)(x) &= \sqrt{m^2 - \partial_x^2} u(x) = \sqrt{m^2 + k^2} \exp(ikx), & \forall x \in (a, b), \\ (H_m^{-1} u)(x) &= (m^2 - \partial_x^2)^{-1/2} u(x) = (m^2 + k^2)^{-1/2} \exp(ikx), & \forall x \in (a, b), \\ (V_m u)(x) &= -i (m^2 - \partial_x^2)^{-1/2} \partial_x u(x) = \frac{k}{\sqrt{m^2 + k^2}} \exp(ikx), & \forall x \in (a, b). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что  $H_m$  — оператор энергии свободной частицы массы  $m$ , движущейся параллельно оси  $X$ , а  $V_m$  — оператор скорости такой частицы (используем систему единиц, в которой скорость света  $c$  и постоянная Планка  $\hbar$  равны единице). Нетрудно показать, что справедливо равенство операторов:

$$H_m = (m^2 - \partial_x^2) H_m^{-1}. \quad (2)$$

Если же  $w(x) = \exp(\chi x)$ ,  $\forall x \in (a, b)$ ,  $\chi \in \mathbb{R}$ ,  $|\chi| \geq m$ , то функции  $(H_m w)(x)$ ,  $(H_m^{-1} w)(x)$  и  $(V_m w)(x)$  не определены на  $(a, b)$ .

Каждое из уравнений системы (1) есть двухчастичное свободное релятивистское уравнение Шрёдингера в инерциальной системе отсчёта, в которой импульсы частиц одинаковы по абсолютной величине и противоположно направлены. Взаимодействие между частицами, соответствующее двухчастичной реакции, вводим, задавая, кроме условия непрерывности решения, ещё условия:

$$i \lim_{\delta \rightarrow 0} [((V_{m_{k1}} + V_{m_{k2}})\psi_k)(\delta) - ((V_{m_{k1}} + V_{m_{k2}})\psi_k)(-\delta)] = \sum_{l=1,2} g_{kl} \psi_l(0), \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

Кроме этих условий будем ещё требовать ограниченности решения на  $\mathbb{R}$ .

Подставим в (1)  $\psi_k(x) = A_k \exp(\chi_k x)$ ,  $A_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1, 2$ :

$$\left( \varepsilon - \sqrt{m_{k1}^2 - \partial_x^2} - \sqrt{m_{k2}^2 - \partial_x^2} \right) A_k \exp(\chi_k x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

Функция  $\exp(\chi_k x)$  входит в область определения обоих операторов в левой части  $k$ -го уравнения лишь при  $\chi_k \leq \min(m_{k,1}, m_{k,2})$ . Это значит, что

если  $\varepsilon < (|m_{k1}^2 - m_{k2}^2|)^{1/2}$ , из  $k$ -го равенства следует  $A_k = 0$ . Если же  $\varepsilon \geq (|m_{k1}^2 - m_{k2}^2|)^{1/2}$ , из (4) получаем характеристические уравнения:

$$\varepsilon - \sqrt{m_{k1}^2 - \chi_k^2} - \sqrt{m_{k2}^2 - \chi_k^2} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

Эти уравнения легко решаются:

$$\chi_k = \pm(2\varepsilon)^{-1} \sqrt{4\varepsilon^2 m_{k2}^2 - (m_{k1}^2 + m_{k2}^2 - \varepsilon^2)^2}. \quad (6)$$

Легко видеть, что при  $\varepsilon \leq m_{k1} + m_{k2}$   $\chi_k$  вещественно, в противоположном случае — чисто мнимо. Общее решение  $k$ -го уравнения имеет вид:

$$\psi_k(x) = A_k \exp(\chi_k x) + B_k \exp(-\chi_k x). \quad (7)$$

Но если  $\chi_k \in \mathbb{R}$ ,  $|\chi_k| > \min(m_{k1}, m_{k2})$ , в (7)  $A_k = B_k = 0$  (решение только тривиальное). Используя (7) и (2), при  $|\chi_k| \leq \min(m_{k1}, m_{k2})$  получаем:

$$\psi_k(x) = \sqrt{m_{kl}^2 - \chi_k^2} H_{m_{kl}}^{-1} \psi_k(x) = \varepsilon_{kl} H_{m_{kl}}^{-1} \psi_k(x), \quad k, l = 1, 2. \quad (8)$$

Покажем, что граничные условия (3) приводят к вещественности спектра нашей краевой задачи, если матрица  $G$  эрмитова (доказательство вполне аналогично доказательству вещественности спектра задачи Штурма–Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка [2]). Предположим, что мнимая часть спектрального параметра  $\varepsilon$  не равна нулю. Пусть функции  $\psi_k(x)$ ,  $k = 1, 2$  составляют решение нашей задачи с комплексным значением  $\varepsilon$ , тогда комплексно сопряжённые функции  $\psi_k^*(x)$ ,  $k = 1, 2$  — составляют решение этой задачи с комплексно сопряжённым значением  $\varepsilon^*$ :

$$\left( \varepsilon - \sqrt{m_{k1}^2 - \partial_x^2} - \sqrt{m_{k2}^2 - \partial_x^2} \right) \psi_k(x) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$\left( \varepsilon^* - \sqrt{m_{i1}^2 - \partial_x^2} - \sqrt{m_{i2}^2 - \partial_x^2} \right) \psi_i^*(x) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Отсюда получаем:

$$\psi_k^*(x) \left( \varepsilon - \sqrt{m_{k1}^2 - \partial_x^2} - \sqrt{m_{k2}^2 - \partial_x^2} \right) \psi_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (11)$$

$$\psi_k(x) \left( \varepsilon^* - \sqrt{m_{k1}^2 - \partial_x^2} - \sqrt{m_{k2}^2 - \partial_x^2} \right) \psi_k^*(x) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (12)$$

Вычтем (12) из (11):

$$\begin{aligned}
 & (\varepsilon - \varepsilon^*)\psi_k^*(x)\psi_k(x) - \\
 & - \psi_k^*(x)(H_{m_{k1}} + H_{m_{k2}})\psi_k(x) + \psi_k(x)(H_{m_{k1}} + H_{m_{k2}})\psi_k^*(x) = 0, \quad k = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Воспользуемся равенством (2):

$$\begin{aligned}
 \psi_k^*(x)H_{m_{kl}}\psi_k(x) &= m_{kl}^2\psi_k^*(x)H_{m_{kl}}^{-1}\psi_k(x) - \psi_k^*(x)\partial_x^2 H_{m_{kl}}^{-1}\psi_k(x) = \\
 &= m_{kl}^2\psi_k^*(x)H_{m_{kl}}^{-1}\psi_k(x) + [\partial_x\psi_k^*(x)][\partial_x H_{m_{kl}}^{-1}\psi_k(x)] - \partial_x[\psi_k^*(x)\partial_x H_{m_{kl}}^{-1}\psi_k(x)].
 \end{aligned}$$

Отсюда с помощью (8) получаем:

$$\begin{aligned}
 \psi_k^*(x)H_{m_{kl}}\psi_k(x) - \psi_k(x)H_{m_{kl}}\psi_k^*(x) &= \\
 &= (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*)[m_{kl}^2|(H_{m_{kl}}^{-1}\psi_k(x))^2 + |V_{m_{kl}}\psi_k(x)|^2] - \\
 &\quad + i\partial_x[\psi_k^*(x)V_{m_{kl}}\psi_k(x) - \psi_k(x)V_{m_{kl}}\psi_k^*(x)],
 \end{aligned}$$

Так как  $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}$ , отсюда и из (13) следует

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1,2} \sum_{l=1,2} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*)[|\psi_k(x)|^2 + m_{kl}^2|H_{m_{kl}}^{-1}\psi_k(x)|^2 + |V_{m_{kl}}\psi_k(x)|^2] = \\
 = i\partial_x \sum_{k=1,2} \sum_{l=1,2} [\psi_k^*(x)V_{m_{kl}}\psi_k(x) - \psi_k(x)V_{m_{kl}}\psi_k^*(x)].
 \end{aligned}$$

Проинтегрировав обе части этого равенства от  $-\infty$  до  $\infty$ , получим:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1,2} \sum_{l=1,2} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) \int_{-\infty}^{\infty} [|\psi_k(x)|^2 + m_{kl}^2|H_{m_{kl}}^{-1}\psi_k(x)|^2 + |V_{m_{kl}}\psi_k(x)|^2] dx = \\
 = i \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1,2} \sum_{l=1,2} [\psi_k^*(x)V_{m_{kl}}\psi_k(x) - \psi_k(x)V_{m_{kl}}\psi_k^*(x)] \Big|_{-\delta}^{\delta} \tag{14}
 \end{aligned}$$

(здесь учтено, что ограниченные решения нашей задачи, соответствующие не вещественным значениям  $\varepsilon$ , при  $x \rightarrow \pm\infty$  стремятся к нулю со всеми своими производными). Используя граничные условия (3), получаем, что если матрица  $G$  эрмитова, правая часть равенства (14) равна нулю, следовательно, равна нулю и левая часть. Но интеграл отличен от нуля, значит  $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^*$ ,  $k, l = 1, 2$ . Вещественность спектра доказана.

Нетрудно видеть, что функция

$$\sum_{k=1,2} \sum_{l=1,2} [\psi_k^*(x)V_{m_{kl}}\psi_k(x) - \psi_k(x)V_{m_{kl}}\psi_k^*(x)]$$



аналогична вронскиану в теории дифференциальных уравнений конечного порядка. С точки зрения физики знаменательно, что в неё входят операторы скорости, поэтому её можно рассматривать как плотность потока. Легко показать, что наши граничные условия приводят к ортогональности системы решений нашей задачи в смысле скалярного произведения

$$\sum_{k=1,2} \sum_{l=1,2,-\infty}^{\infty} \int [|\psi_k(x)|^2 + m_{kl}^2 |H_{m_{kl}}^{-1} \psi_k(x)|^2 + |V_{m_{kl}} \psi_k(x)|^2] dx.$$

Теперь мы можем рассматривать решения нашей задачи лишь при вещественных значениях энергии  $\varepsilon$ . Из определения квадратного корня из оператора следует, что при  $\varepsilon < |m_{k1}^2 - m_{k2}^2|^{1/2}$   $k$ -ое уравнение системы (1) имеет лишь тривиальное решение. Следовательно, спектр нашей задачи ограничен снизу, и трудности, неизбежные при использовании уравнений Клейна–Гордона и Дирака, здесь не возникают. Без ограничения общности примем, что  $|m_{11}^2 - m_{12}^2|^{1/2} \leq |m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2}$ . Тогда при  $\varepsilon < |m_{11}^2 - m_{12}^2|^{1/2}$  система (1) имеет лишь тривиальное решение. При  $|m_{11}^2 - m_{12}^2|^{1/2} < \varepsilon < |m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2}$  непрерывное и ограниченное на  $\mathbb{R}$  решение системы (1) имеет вид:

$$\psi_1(x) = A_1 \exp(-\chi_1|x|), \quad \psi_2(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

где  $\chi_1 \in \mathbb{R}$ , определяется формулой (6). Если же  $|m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2} < \varepsilon < \min(m_{11} + m_{12}, m_{21} + m_{22})$ , непрерывное решение системы (1) имеет вид:

$$\psi_1(x) = A_1 \exp(-\chi_1|x|), \quad \psi_2(x) = A_2 \exp(-\chi_2|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

где  $\chi_k \in (0, \infty)$ ,  $k = 1, 2$  определяются формулой (6).

Рассмотрим сначала случай, когда  $m_{11} + m_{12} < |m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2}$ . Используя (15) и граничное условие (3), получим:

$$2\chi_1 \left[ (m_{11}^2 - \chi_1^2)^{-1/2} + (m_{21}^2 - \chi_1^2)^{-1/2} \right] = g_{11}. \quad (17)$$

Левая часть этого уравнения монотонно возрастает от нуля до бесконечности при возрастании  $\chi_1$  от нуля до  $\min(m_{11}, m_{12})$ , поэтому при  $g_{11} > 0$  оно имеет единственное решение  $\chi_1 = \chi_{10}$ , которое может быть найдено численно. Соответствующее значение энергии

$$\varepsilon_0 = \sqrt{m_{11}^2 - \chi_{10}^2} + \sqrt{m_{k2}^2 - \chi_{10}^2} \quad (18)$$

является единственным собственным значением точечного спектра нашей задачи в случае  $m_{11} + m_{12} < |m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2}$ . Если же  $g_{11} < 0$ , в этом случае точечный спектр пуст.

Пусть теперь  $m_{11} + m_{12} \geq |m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2}$ . При  $|m_{11}^2 - m_{12}^2|^{1/2} < \varepsilon < |m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2}$  решение системы имеет вид (15), а из граничных условий следует (17), а при  $|m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2} < \varepsilon < m_{11} + m_{12}$  — решение имеет вид (16), а из граничных условий следует система:

$$2\chi_1 \left[ (m_{11}^2 - \chi_1^2)^{-1/2} + (m_{21}^2 - \chi_1^2)^{-1/2} \right] A_1 = g_{11}A_1 + g_{12}A_2, \quad (19)$$

$$2\chi_2 \left[ (m_{21}^2 - \chi_2^2)^{-1/2} + (m_{22}^2 - \chi_2^2)^{-1/2} \right] A_1 = g_{21}A_1 + g_{22}A_2. \quad (20)$$

Теперь когда  $\varepsilon$  возрастает от  $|m_{11}^2 - m_{12}^2|^{1/2}$  до  $|m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2}$ , левая часть уравнения (19) монотонно убывает, и если она при каком-то значении  $\varepsilon$  она принимает значение  $g_{11}$ , это значение  $\varepsilon$  и является единственным собственным значением точечного спектра нашей задачи. В противном случае это значение принадлежит промежутку  $(|m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2}, m_{11} + m_{12})$ , и решение имеет вид (16).

Итак, мы получаем, что точечный спектр нашей задачи при  $g_{11} < 0$  пуст, а при  $g_{11} \geq 0$  включает лишь одно собственное значение, которое может быть найдено численно. Если оно принадлежит промежутку  $(|m_{11}^2 - m_{12}^2|^{1/2}, |m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2})$ , решение системы имеет вид (15). С точки зрения физики это должно означать, что в этом состоянии системы существует только одна пара частиц, именно пара частиц с массами  $m_{11}$  и  $m_{12}$ , причём в так называемом “виртуальном состоянии”. Возможно, его можно рассматривать как композитную частицу с массой (энергией) покоя, равной этому собственному значению. Аналогично, если собственное значение находится в промежутке  $(|m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2}, m_{11} + m_{12})$ , решение (16) можно интерпретировать как “виртуальное состояние” обеих пар, или тоже как композитную частицу.

Пусть теперь  $m_{11} + m_{12} < |m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2}$ ,  $m_{11} + m_{12} < \varepsilon < |m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2}$ . Предполагая, что частица с массой  $m_{11}$  налетает слева, выберем решение системы в виде:

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \exp(ipx) + A \exp(-ipx), & \forall x < 0, \\ B \exp(ipx) & \forall x > 0, \end{cases} \quad \psi_2(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

где

$$p = (2\varepsilon)^{-1} \sqrt{(m_{11}^2 - m_{12}^2 - \varepsilon^2)^2 - 4\varepsilon^2 m_{12}^2}. \quad (21)$$

Используя граничные условия (3), получаем:

$$1 + A = B, \quad ip \left[ (m_{11}^2 + p^2)^{-1/2} + (m_{12}^2 + p^2)^{-1/2} \right] (A - 1 + B) = g_{11}B.$$

Решение этой системы имеет вид:

$$A = \frac{g_{11}}{2ip [(m_{11}^2 + p^2)^{-1/2} + (m_{12}^2 + p^2)^{-1/2}] - g_{11}},$$

$$B = \frac{2ip [(m_{11}^2 + p^2)^{-1/2} + (m_{12}^2 + p^2)^{-1/2}]}{2ip [(m_{11}^2 + p^2)^{-1/2} + (m_{12}^2 + p^2)^{-1/2}] - g_{11}}.$$

Таким образом, все значения этого диапазона принадлежат непрерывному спектру нашей задачи. Легко видеть, что справедливо равенство:

$$|A|^2 + |B|^2 = 1.$$

Это позволяет интерпретировать величину  $R = |A|^2$  как вероятность упругого отражения одной из частиц (масс  $m_{11}$ ,  $m_{12}$ ) от другой. Пусть  $m_{11} + m_{12} > |m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2}$  и  $m_{21} + m_{22} > \varepsilon > |m_{21}^2 - m_{22}^2|^{1/2}$ . Теперь нетривиальные решения имеют оба уравнения системы (1):

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \exp(ipx) + A_1 \exp(-ipx), & \forall x < 0, \\ B_1 \exp(ipx), & \forall x > 0, \end{cases} \quad \psi_2(x) = \begin{cases} A_2 \exp(\chi x), & \forall x < 0, \\ B_2 \exp(-\chi x), & \forall x > 0, \end{cases}$$

где  $p$  определяется формулой (21), а

$$\chi = (2\varepsilon)^{-1} \sqrt{4\varepsilon^2 m_{22}^2 - (m_{21}^2 - m_{22}^2 - \varepsilon^2)^2}.$$

Из граничных условий (3) следует система уравнений:

$$1 + A_1 = B_1, \quad ip \left( \frac{1}{\sqrt{m_{11}^2 + p^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_{12}^2 + p^2}} \right) (A_1 - 1 + B_1) = g_{11}B_1 + g_{12}B_2,$$

$$A_2 = B_2, \quad -\chi \left( \frac{1}{\sqrt{m_{21}^2 - \chi^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_{22}^2 - \chi^2}} \right) (A_2 + B_2) = g_{21}B_1 + g_{22}B_2.$$

Решение этой системы имеет вид:

$$A_1 = \frac{Q(\varepsilon)}{iP(\varepsilon) - Q(\varepsilon)}, \quad B_1 = \frac{iP(\varepsilon)}{iP(\varepsilon) - Q(\varepsilon)}, \quad A_2 = B_2 = -\frac{iR(\varepsilon)P(\varepsilon)}{iP(\varepsilon) - Q(\varepsilon)},$$

где

$$P(\varepsilon) = 2p \left( \frac{1}{\sqrt{m_{11}^2 + p^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_{12}^2 + p^2}} \right), \quad Q(\varepsilon) = \frac{g_{11}S(\varepsilon) + d}{S(\varepsilon) + g_{22}}, \quad (22)$$

$$S(\varepsilon) = 2\chi \left( \frac{1}{\sqrt{m_{21}^2 - \chi^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_{22}^2 - \chi^2}} \right), \quad R(\varepsilon) = \frac{g_{21}}{S(\varepsilon) + g_{22}}, \quad (23)$$

$d = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$  — определитель матрицы  $G$ . Таким образом, и этот диапазон энергий принадлежит непрерывному спектру. Теперь  $|A_1|^2 + |B_1|^2 = 1$ , и вероятность упругого отражения  $R = |A_1|^2$ . Пара частиц, соответствующая второму из уравнений (1), находится в “виртуальном состоянии”. Нетрудно видеть, что при  $g_{22} < 0$  отражение имеет резонансный характер.

Пусть теперь  $\varepsilon > m_{21} + m_{22}$ . Считая, что исходными являются частицы с массами  $m_{11}$  и  $m_{12}$ , решение выберем в виде:

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \exp(ipx) + A_1 \exp(-ipx), & \forall x < 0, \\ B_1 \exp(ipx), & \forall x > 0, \end{cases} \quad \psi_2(x) = \begin{cases} A_2 \exp(-iqx), & \forall x < 0, \\ B_2 \exp(iqx), & \forall x > 0, \end{cases}$$

где

$$q = (2\varepsilon)^{-1} \sqrt{(m_{21}^2 - m_{22}^2 - \varepsilon^2)^2 - 4\varepsilon^2 m_{22}^2}.$$

Граничные условия (3) приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} 1 + A_1 = B_1, \quad ip \left( \frac{1}{\sqrt{m_{11}^2 + p^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_{12}^2 + p^2}} \right) (A_1 - 1 + B_1) &= g_{11}B_1 + g_{12}B_2, \\ A_2 = B_2, \quad iq \left( \frac{1}{\sqrt{m_{21}^2 + q^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_{22}^2 + q^2}} \right) (A_2 + B_2) &= g_{21}B_1 + g_{22}B_2. \end{aligned}$$

Решение запишем в виде:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{iW(\varepsilon)g_{11} - d}{d - P(\varepsilon)W(\varepsilon) - i[P(\varepsilon)g_{22} + W(\varepsilon)g_{11}]}, \\ A_2 = B_2 &= \frac{iP(\varepsilon)g_{11}}{d - P(\varepsilon)W(\varepsilon) - i[P(\varepsilon)g_{22} + W(\varepsilon)g_{11}]}, \\ B_1 &= \frac{P(\varepsilon)W(\varepsilon) - iP(\varepsilon)}{d - P(\varepsilon)W(\varepsilon) - i[P(\varepsilon)g_{22} + W(\varepsilon)g_{11}]}, \end{aligned}$$

где  $P(\varepsilon)$  определяется первым из равенств (22), а

$$W(\varepsilon) = 2q \left( \frac{1}{\sqrt{m_{21}^2 + q^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_{22}^2 + q^2}} \right).$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} p \left( \frac{1}{\sqrt{m_{11}^2 + p^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_{12}^2 + p^2}} \right) (1 - |A_1|^2 - |B_1|^2) &= \\ &= q \left( \frac{1}{\sqrt{m_{21}^2 + q^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_{22}^2 + q^2}} \right) (|A_2|^2 + |B_2|^2). \end{aligned}$$

Это показывает, что сумма потоков непрореагировавших частиц, упруго отразившихся частиц и образовавшихся в результате реакции частиц равна потоку исходных частиц, что и естественно. Если определитель  $d$  положителен, реакция носит резонансный характер.

Итак, наша задача действительно описывает двухчастичную реакцию с двумя каналами: упругим и неупругим.

## Список литературы

- [1] Лагодинский В. М. Голоморфные функции дифференциальных операторов и дифференциальные уравнения бесконечного порядка. Дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. — СПб: 2005.
- [2] Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — М., 1970.
- [3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М., 2010.

УДК 517.956

### ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Миронов А. Н., Миронова Л. Б.

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

Елабужский институт

Елабуга

e-mail: miro73@mail.ru

**Mironov A. N., Mironova L. B. Laplace invariants for one class of equations with partial derivatives.** We construct Laplace invariants for equations with leading derivative containing a multiple of differentiation.

Построены инварианты Лапласа для уравнений с доминирующей частной производной, которая содержит кратное дифференцирование по одной из переменных.

Речь идет об уравнениях вида

$$D_1u + D_2u = f,$$

где  $D_1u$  — частная производная функции  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  по переменным  $x_1, \dots, x_n$ , линейный дифференциальный оператор  $D_2$  содержит только производные, получаемые отбрасыванием в  $D_1u$  по крайней мере одного дифференцирования,  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  — заданная функция.

Инвариантами Лапласа называют инварианты преобразования

$$u = \lambda(x_1, \dots, x_n)v,$$

где  $v$  — новая неизвестная функция.

Приложения инвариантов Лапласа для уравнения

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0$$

хорошо известны [1, с. 116–125], [2].

В работах [3]–[5] построены инварианты Лапласа для уравнений с доминирующей частной производной с двумя независимыми переменными третьего и четвёртого порядка. Инварианты Лапласа позволяют выделять классы эквивалентных по функции уравнений с определёнными свойствами (в частности, допускающих алгебры Ли наибольшей размерности).

В качестве примера приведем инварианты Лапласа для обобщённого уравнения Аллера, изучавшегося, в частности, в работах [6]–[10],

$$u_{xxy} + a_{20}(x, y)u_{xx} + a_{11}(x, y)u_{xy} + a_{10}(x, y)u_x + a_{01}(x, y)u_y + a_{00}(x, y)u = 0, \quad (1)$$

которые имеют вид

$$\begin{aligned} h_1 &= 2a_{20x} + a_{20}a_{11} - a_{10}, \quad h_2 = a_{11y} + a_{20}a_{11} - a_{10}, \quad h_3 = a_{11x} + \frac{a_{11}^2}{2} - 2a_{01}, \\ h_4 &= 2a_{20xx} - a_{20}a_{11}^2 + 2a_{20}a_{01} + a_{11}a_{10} - 2a_{00}, \\ h_5 &= a_{11xy} - a_{20}a_{11}^2 + 2a_{20}a_{01} + a_{11}a_{10} - 2a_{00}. \end{aligned}$$

Для аналога уравнения (1) с тремя независимыми переменными [11], [12]

$$\begin{aligned} &u_{xxyz} + a_{210}(x, y)u_{xxy} + a_{201}(x, y)u_{xxz} + a_{111}(x, y)u_{xyz} + \\ &+ a_{200}(x, y)u_{xx} + a_{110}(x, y)u_{xy} + a_{101}(x, y)u_{xz} + a_{011}(x, y)u_{yz} + \\ &+ a_{100}(x, y)u_x + a_{010}(x, y)u_y + a_{001}(x, y)u_z + a_{000}(x, y)u = 0 \end{aligned}$$

получен следующий список инвариантов Лапласа

$$\begin{aligned}
 h_1 &= a_{210y} + a_{210}a_{201} - a_{200}, & h_2 &= a_{201z} + a_{210}a_{201} - a_{200}, \\
 h_3 &= 2a_{210x} + a_{210}a_{111} - a_{110}, & h_4 &= a_{111z} + a_{210}a_{111} - a_{110}, \\
 h_5 &= 2a_{201x} + a_{201}a_{111} - a_{101}, & h_6 &= a_{111y} + a_{201}a_{111} - a_{101}, \\
 & & h_7 &= \frac{1}{2}a_{111x} + \frac{1}{4}a_{111}^2 - a_{011}, \\
 h_8 &= 2a_{210xy} + a_{200}a_{111} + a_{201}a_{110} + a_{210}a_{101} - 2a_{210}a_{201}a_{111} - a_{100}, \\
 h_9 &= 2a_{201xz} + a_{200}a_{111} + a_{201}a_{110} + a_{210}a_{101} - 2a_{210}a_{201}a_{111} - a_{100}, \\
 h_{10} &= a_{111yz} + a_{200}a_{111} + a_{201}a_{110} + a_{210}a_{101} - 2a_{210}a_{201}a_{111} - a_{100}, \\
 h_{11} &= a_{210xx} + a_{210}a_{011} + \frac{1}{2}a_{111}a_{110} - \frac{1}{2}a_{210}a_{111}^2 - a_{010}, \\
 h_{12} &= \frac{1}{2}a_{111xz} + a_{210}a_{011} + \frac{1}{2}a_{111}a_{110} - \frac{1}{2}a_{210}a_{111}^2 - a_{010}, \\
 h_{13} &= a_{201xx} + a_{201}a_{011} + \frac{1}{2}a_{111}a_{101} - \frac{1}{2}a_{201}a_{111}^2 - a_{001}, \\
 h_{14} &= \frac{1}{2}a_{111xy} + a_{201}a_{011} + \frac{1}{2}a_{111}a_{101} - \frac{1}{2}a_{201}a_{111}^2 - a_{001}, \\
 h_{15} &= a_{210xxy} + a_{210}a_{001} + a_{201}a_{010} + \frac{1}{2}a_{111}a_{100} + \frac{1}{2}a_{110}a_{101} + a_{200}a_{011} - \\
 & \quad - a_{210}a_{111}a_{101} - a_{201}a_{111}a_{110} - 2a_{210}a_{201}a_{011} - \\
 & \quad - a_{201}a_{110} - \frac{1}{2}a_{200}a_{111}^2 + \frac{3}{2}a_{210}a_{201}a_{111}^2 - a_{000}, \\
 h_{16} &= a_{201xxz} + a_{210}a_{001} + a_{201}a_{010} + \frac{1}{2}a_{111}a_{100} + \frac{1}{2}a_{110}a_{101} + a_{200}a_{011} - \\
 & \quad - a_{210}a_{111}a_{101} - a_{201}a_{111}a_{110} - 2a_{210}a_{201}a_{011} - \\
 & \quad - a_{201}a_{110} - \frac{1}{2}a_{200}a_{111}^2 + \frac{3}{2}a_{210}a_{201}a_{111}^2 - a_{000}, \\
 h_{17} &= \frac{1}{2}a_{111xyz} + a_{210}a_{001} + a_{201}a_{010} + \frac{1}{2}a_{111}a_{100} + \frac{1}{2}a_{110}a_{101} + a_{200}a_{011} - \\
 & \quad - a_{210}a_{111}a_{101} - a_{201}a_{111}a_{110} - 2a_{210}a_{201}a_{011} - \\
 & \quad - a_{201}a_{110} - \frac{1}{2}a_{200}a_{111}^2 + \frac{3}{2}a_{210}a_{201}a_{111}^2 - a_{000}.
 \end{aligned}$$

## Список литературы

- [1] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
- [2] Ибрагимов Н. Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // УМН – 1992. – Т. 47, вып. 4. – С. 83–144.
- [3] Миронов А. Н., Миронова Л. Б. Об инвариантах Лапласа для одного уравнения четвертого порядка с двумя независимыми переменными // Изв. вузов. Математика. – 2014. – № 10. – С. 27–34.
- [4] Миронов А. Н., Миронова Л. Б. Об инвариантах Лапласа для обобщенного уравнения Буссинеска-Лява // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 1. – С. 131–135.

- [5] Миронов А. Н., Миронова Л. Б. Об инвариантах Лапласа для уравнения с доминирующей частной производной третьего порядка с двумя независимыми переменными // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99, № 1. – С. 89–96.
- [6] Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // ДАН СССР. – 1987. – Т. 297, № 3. – С. 547–552.
- [7] Джураев Т. Д., Попёлек Я. О канонических видах уравнений с частными производными третьего порядка // УМН – 1989. – Т. 44, вып. 4. – С. 237–238.
- [8] Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 10. – С. 73–76.
- [9] Джохадзе О. М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // Матем. заметки. – 2003. – Т. 74, вып. 4. – С. 517–528.
- [10] Уткина Е. А. Об одном уравнении в частных производных с сингулярными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 9. – С. 67–70.
- [11] Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном уравнении в частных производных четвёртого порядка с тремя независимыми переменными // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 1. – С. 93–97.
- [12] Жегалов В. И., Миронов А. Н. О задачах Коши для двух уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 5. – С. 23–30.



УДК 539.374

УДК 517.9

**ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ  
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Сенашов С. И., Филюшина Е. В.

Сибирский Государственный Аэрокосмический Университет

Красноярск

e-mail: sen@sibsau.ru, filyushina@sibsau.ru

**Senashov S. I., Filyushina E. V. Integral representation of the solution of a linear system of differential equations.** We construct conservation laws for linear systems of differential equations. With their help, constructed the integral representation of the solution of a linear system of differential equations of elliptic.

**Keywords:** Linear system of elliptic equations, integral representation of solutions, conservation laws

Построены законы сохранения для линейной системы дифференциальных уравнений. С их помощью построено интегральное представление решения линейной системы дифференциальных эллиптических уравнений.

**Ключевые слова:** Линейная система эллиптических уравнений, интегральное представление решений, законы сохранения

Рассмотрим систему эллиптических уравнений

$$F_1 = u_x + v_y - f(x, y) = 0, \quad F_2 = u_y - v_x - g(x, y) = 0, \quad (1)$$

заданную в некоторой области  $S$ . Пусть на её границе заданы краевые условия

$$u|_{\partial S+} = U(x, y), \quad v|_{\partial S+} = V(x, y), \quad (2)$$

Найдем законы сохранения, которые позволят решить задачу (1)–(2).

Ищем их в виде

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (3)$$

где  $A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1$ ,  $B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2$ ,  $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$  – функции только от  $x, y$ .

Из (3) получаем

$$\begin{aligned} \alpha_x^1 + \beta_y^1 &= 0, & \alpha_y^1 - \beta_x^1 &= 0, \\ \alpha^1 &= -\beta^2 = \omega_1, & \alpha^2 &= \beta^1 = \omega_2, \\ \gamma_x^1 + \gamma_y^2 &= \omega_1 f + \omega_2 g, \end{aligned} \quad (4)$$

из (3) и (4) получаем

$$\oint_{\partial S} A dy - B dx = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим следующее решение первых двух уравнений (4)

$$\alpha_1^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta_1^1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

и окружность  $\Gamma: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ , тогда имеем

$$\oint_{\partial S} A^1 dy - B^1 dx = \oint_{\Gamma} A^1 dy - B^1 dx = -2\pi u(x_0, y_0). \quad (6)$$

Эта формула дает интегральное представление решения в точке  $(x_0, y_0)$ .

Аналогично рассмотрим решение уравнений (4) в виде

$$\alpha_2^1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta_2^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

получим интегральное представление второй функции

$$\oint_{\partial S} A^2 dy - B^2 dx = \oint_{\Gamma} A^2 dy - B^2 dx = -2\pi v(x_0, y_0). \quad (7)$$

Получена теорема

**Теорема.** Формулы (6), (7) дают интегральное представление решений уравнений (1) для произвольной кусочно гладкой границы.

**Замечание.** Этот результат можно без труда обобщить и на другие системы эллиптических уравнений.

**Заключение.** Формулы (6), (7) дают удобный способ решение задачи (1), (2) и заслуживают включения их в переиздания великолепных справочников, написанных В. Ф. Зайцевым и его соавторами.

*Работа поддержана министерством образования и науки РФ (проект № Б 189/14).*

УДК 517.95

**К УСЛОВИЯМ РАЗРЕШИМОСТИ  
ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В КВАДРАТУРАХ  
ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ  
С КРАТНЫМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ**

Созонтова Е. А.

ЕИ КФУ (г. Елабуга)

e-mail: sozontova-elena@rambler.ru

**Sozontova E. A. On the conditions of solvability of a characteristic problem in quadratures for a system of equations with multiple differentiation.** In this paper we consider characteristic problem for a system of equations with multiple differentiation. In terms of the coefficients of this system we obtained sufficient conditions of solvability in quadratures for this problem.

В данной работе рассматривается характеристическая задача для системы уравнений с кратным дифференцированием. В терминах коэффициентов этой системы получены достаточные условия разрешимости указанной задачи в квадратурах.

В работе рассматривается задача

**Задача 1.** В области  $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$  найти регулярное решение системы

$$\begin{cases} u_{1(2,0)} + \sum_{i=0}^1 \left( a_{11}^{(i,0)} u_{1(i,0)} + a_{12}^{(i,0)} u_{2(i,0)} \right) = f_1, \\ u_{2(0,2)} + \sum_{j=0}^1 \left( a_{21}^{(0,j)} u_{1(0,j)} + a_{22}^{(0,j)} u_{2(0,j)} \right) = f_2, \end{cases} \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u_{1(0,0)}(x_0, y) &= \varphi_1(y), & u_{2(0,0)}(x, y_0) &= \psi_1(x), \\ \left( u_{1(1,0)} + a_{12}^{(1,0)} \right) (x_0, y) &= \varphi_2(y), & \left( u_{2(0,1)} + a_{21}^{(0,1)} \right) (x, y_0) &= \psi_2(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагается, что  $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\overline{X})$ ,  $\psi_1, \psi_2 \in C^1(\overline{Y})$  ( $X, Y$  – стороны характеристического прямоугольника  $D$  при  $x = x_0, y = y_0$  соответственно),  $u_{(i,j)} = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j}$ .

Известно [1], что задача (1) – (2) является однозначно разрешимой. Целью нашего исследования является выделение случаев разрешимости поставлен-

ной задачи в квадратурах. Полученные результаты могут быть сформулированы в терминах следующих тождеств

$$a_{1kx}^{(1,0)} - a_{1k}^{(0,0)} \equiv 0, \quad a_{2ky}^{(0,1)} - a_{2k}^{(0,0)} \equiv 0, \quad k = 1, 2 \quad (3)$$

и соотношений

- 1)  $a_{22x}^{(0,1)} - a_{11y}^{(1,0)} - (\ln a_{12}^{(1,0)})_{xy} + a_{21}^{(0,1)} a_{12}^{(1,0)} \equiv 0;$
- 2)  $a_{21}^{(0,1)} \equiv 0;$
- 3)  $a_{22x}^{(0,1)} - a_{11y}^{(1,0)} - (\ln a_{12}^{(1,0)})_{xy} \equiv 0,$   
 $- a_{22x}^{(0,1)} + a_{11y}^{(1,0)} + (\ln a_{12}^{(1,0)})_{xy} - a_{21}^{(0,1)} a_{12}^{(1,0)} \equiv \xi_0(x) \eta_0(y) \neq 0;$
- 4)  $2[-a_{22x}^{(0,1)} + a_{11y}^{(1,0)} + (\ln a_{12}^{(1,0)})_{xy}] \equiv a_{21}^{(0,1)} a_{12}^{(1,0)},$   
 $- a_{22x}^{(0,1)} + a_{11y}^{(1,0)} + (\ln a_{12}^{(1,0)})_{xy} \equiv \xi_1(x) \eta_1(y) \neq 0;$
- 5)  $a_{22x}^{(0,1)} - a_{11y}^{(1,0)} - (\ln a_{12}^{(1,0)})_{xy} \equiv a_{21}^{(0,1)} a_{12}^{(1,0)} \equiv \xi_2(x) \eta_2(y) \neq 0;$
- 6)  $m[a_{22x}^{(0,1)} - (\ln a_{12}^{(1,0)})_{xy}] - a_{11y}^{(1,0)} \equiv$   
 $\equiv m a_{11y}^{(1,0)} - a_{22x}^{(0,1)} + (\ln a_{12}^{(1,0)})_{xy} \equiv (m - 1)(a_{21}^{(0,1)} a_{12}^{(1,0)} - a_{11y}^{(1,0)});$
- 7)  $\sigma_k = \frac{2s'_k(x)t'_k(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2}, [s_k(x) + t_k(y)](m - 2)s'_k(x)t'_k(y) \neq 0, k = 1, 2.$

(4)

- 1)  $a_{12}^{(1,0)} \equiv 0;$
- 2)  $- a_{22x}^{(0,1)} + a_{11y}^{(1,0)} - (\ln a_{21}^{(0,1)})_{xy} + a_{21}^{(0,1)} a_{12}^{(1,0)} \equiv 0;$
- 3)  $a_{22x}^{(0,1)} - a_{11y}^{(1,0)} + (\ln a_{12}^{(1,0)})_{xy} \equiv 0,$   
 $- a_{21}^{(0,1)} a_{12}^{(1,0)} \equiv \xi_0(x) \eta_0(y) \neq 0;$
- 4)  $- a_{22x}^{(0,1)} + a_{11y}^{(1,0)} - (\ln a_{21}^{(0,1)})_{xy} \equiv a_{21}^{(0,1)} a_{12}^{(1,0)} \equiv \xi_1(x) \eta_1(y) \neq 0;$
- 5)  $2[a_{22x}^{(0,1)} - a_{11y}^{(1,0)} + (\ln a_{12}^{(1,0)})_{xy}] \equiv a_{21}^{(0,1)} a_{12}^{(1,0)},$   
 $a_{22x}^{(0,1)} - a_{11y}^{(1,0)} + (\ln a_{12}^{(1,0)})_{xy} \equiv \xi_2(x) \eta_2(y) \neq 0;$
- 6)  $m a_{22x}^{(0,1)} - a_{11y}^{(1,0)} + (\ln a_{12}^{(1,0)})_{xy} \equiv$   
 $\equiv m(a_{11y}^{(1,0)} - (\ln a_{12}^{(1,0)})_{xy}) - a_{22x}^{(0,1)} \equiv (m - 1)(a_{21}^{(0,1)} a_{12}^{(1,0)} - a_{22x}^{(0,1)});$
- 7)  $\sigma_k = \frac{2s'_k(x)t'_k(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2}, [s_k(x) + t_k(y)](m - 2)s'_k(x)t'_k(y) \neq 0, k = 1, 1.$

(5)

Здесь  $\xi_k, \eta_k \in C^1 (k = \overline{0, 2}), s_k, t_k, m \in C^2 (k = 1, 2), \sigma_1, \sigma_2$  равны соответственно левым частям тождеств 1), 2) рассматриваемой совокупности.

**Теорема 1.** Пусть при выполнении тождеств (3) и неравенства  $a_{12}^{(1,0)} \neq 0$  (неравенства  $a_{21}^{(0,1)} \neq 0$ ) или удовлетворяется одно из тождеств 1), 2) совокупности (4) (совокупности (5)), или существуют такие функции  $m, \xi_k, \eta_k (k = \overline{0, 2}), s_k, t_k (k = 1, 2)$  указанных выше классов, что для совокупности (4)

(совокупности (5)) либо выполнена одна из трёх групп соотношений 3)– 5), либо вместе с тождеством 6) имеет место представление 7) для одной из двух функций  $\sigma_1, \sigma_2$ . Тогда задача 1 разрешима в квадратурах.

## Список литературы

- [1] Миронова Л. Б. О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными // Вестник СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 2006. Вып. 43. – С. 31–37.

УДК 517.95

### ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ГУРСА В КВАДРАТУРАХ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ $n$ -ГО ПОРЯДКА

Созонтова Е. А.

ЕИ КФУ (г. Елабуга)

e-mail: sozontova-elena@rambler.ru

**Sozontova E. A. About conditions of solvability of the Goursat problem in quadratures for a system of equations  $n$ -th order.** In this paper we consider Goursat problem for a system of equations  $n$ -th order. In terms of the coefficients of this system we obtained sufficient conditions of solvability in quadratures for this problem.

В данной работе рассматривается задача Гурса для системы уравнений  $n$ -го порядка. В терминах коэффициентов этой системы получены достаточные условия разрешимости указанной задачи в квадратурах.

В работе рассматривается задача

**Задача 1.** В области  $D = \{x_1^0 < x_1 < x_1^1, x_2^0 < x_2 < x_2^1, \dots, x_n^0 < x_n < x_n^1\}$  найти регулярное решение системы

$$u_{k(r,s)} + \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^s (a_{k1}^{(i,j)} u_{1(i,j)} + a_{k2}^{(i,j)} u_{2(i,j)}) = f_k, \quad (1)$$

$$k = 1, 2, \quad i > 1, \quad j > 1, \quad i + j < r + s,$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u_{k(0,0)}(x_0, y) &= \varphi_k(y), & u_{k(0,0)}(x, y_0) &= \psi_k(x), \\ u_{k(p,0)}(x_0, y) &= \chi_{kp}(y), & u_{k(0,m)}(x, y_0) &= \theta_{km}(x), \\ k &= 1, 2, & p &= \overline{1, r-1}, & m &= \overline{1, s-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагается, что  $\chi_{kp} \in C^1(\overline{X})$ ,  $\theta_{km} \in C^1(\overline{Y})$ ,  $\varphi_k \in C^s(\overline{X})$ ,  $\psi_k \in C^r(\overline{Y})$  ( $X, Y$  – стороны характеристического прямоугольника  $D$  при  $x = x_0, y = y_0$  соответственно),  $u_{(i,j)} = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j}$ , и выполняются условия согласования  $\varphi_k(y_0) = \psi_k(x_0)$ ,  $\chi_{kp}(y_0) = \psi_k^{(p)}(x_0)$ ,  $\theta_{km}(x_0) = \varphi_k^{(m)}(y_0)$  ( $k = 1, 2, p = \overline{1, r-1}, m = \overline{1, s-1}$ ).

Целью нашего исследования является выделение случаев разрешимости поставленной задачи в квадратурах. Полученные результаты могут быть сформулированы в терминах следующих тождеств

$$\begin{aligned} C_{s-1}^j \frac{\partial^{s-1-j}}{\partial y^{s-1-j}} (a_{kl}^{(i,s-1)} - h_1(s-1)a_{kly}^{(i,s)}) - a_{kl}^{(i,j)} &\equiv 0, \\ i = \overline{0, r} \wedge j = 0, & j = \overline{1, s-2} \wedge i = r; \\ C_{s-1}^{s-j} \frac{\partial^{s-j}}{\partial y^{s-j}} a_{kl}^{(i,s)} + C_{s-1}^j \frac{\partial^{s-1-j}}{\partial y^{s-1-j}} (a_{kl}^{(i,s-1)} - (s-1)a_{kly}^{(i,s)}) - a_{kl}^{(i,j)} &\equiv 0, \\ i = \overline{0, r-1} \wedge j = \overline{1, s-2}; & \\ C_{r-1}^i \frac{\partial^{r-1-i}}{\partial x^{r-1-i}} (a_{kl}^{(r-1,s)}) - a_{kl}^{(i,s)} &\equiv 0, \quad i = \overline{0, r-2}; \\ C_{r-1}^i \frac{\partial^{r-1-i}}{\partial x^{r-1-i}} [a_{kl}^{(r-1,s-1)} - (s-1)a_{kly}^{(r-1,s)} - (r-1)a_{klx}^{(r,s-1)}] + & \\ + h_2 C_{r-1}^{r-i} \frac{\partial^{r-i}}{\partial x^{r-i}} (a_{kl}^{(r,s-1)}) - (a_{kl}^{(i,s-1)} - (s-1)a_{kly}^{(i,s)}) &\equiv 0, \quad i = \overline{0, r-2}, \\ k = 1, 2, & l = 1, 2 \end{aligned} \quad (3)$$

и соотношений

- 1)  $a_{22x}^{(r,s-1)} - a_{11y}^{(r-1,s)} - (\ln a_{12}^{(r-1,s)})_{xy} + a_{21}^{(r,s-1)} a_{12}^{(r-1,s)} \equiv 0;$
- 2)  $a_{21}^{(r,s-1)} \equiv 0;$
- 3)  $a_{22x}^{(r,s-1)} - a_{11y}^{(r-1,s)} - (\ln a_{12}^{(r-1,s)})_{xy} \equiv 0,$   
 $-a_{22x}^{(r,s-1)} + a_{11y}^{(r-1,s)} + (\ln a_{12}^{(r-1,s)(r-1,s)})_{xy} - a_{21}^{(r,s-1)} a_{12}^{(r-1,s)} \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0;$
- 4)  $2[-a_{22x}^{(r,s-1)} + a_{11y}^{(r-1,s)} + (\ln a_{12}^{(r-1,s)})_{xy}] \equiv a_{21}^{(r,s-1)} a_{12}^{(r-1,s)},$   
 $-a_{22x}^{(r,s-1)} + a_{11y}^{(r-1,s)} + (\ln a_{12}^{(r-1,s)})_{xy} \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0;$
- 5)  $a_{22x}^{(r,s-1)} - a_{11y}^{(r-1,s)} - (\ln a_{12}^{(r-1,s)})_{xy} \equiv a_{21}^{(r,s-1)} a_{12}^{(r-1,s)} \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0;$

$$\begin{aligned}
 & 6) m[a_{22x}^{(r,s-1)} - (\ln a_{12}^{(r-1,s)})_{xy}] - a_{11y}^{(r-1,s)} \equiv \\
 & \quad \equiv ma_{11y}^{(r-1,s)} - a_{22x}^{(r,s-1)} + (\ln a_{12}^{(r-1,s)})_{xy} \equiv (m-1)(a_{21}^{(r,s-1)}a_{12}^{(r-1,s)} - a_{11y}^{(r-1,s)}); \\
 & 7) \sigma_k = \frac{2s'_k(x)t'_k(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2}, [s_k(x) + t_k(y)](m-2)s'_k(x)t'_k(y) \neq 0, k = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 & 1) a_{12}^{(r-1,s)} \equiv 0; \\
 & 2) -a_{22x}^{(r,s-1)} + a_{11y}^{(r-1,s)} - (\ln a_{21}^{(r,s-1)})_{xy} + a_{21}^{(r,s-1)}a_{12}^{(r-1,s)} \equiv 0; \\
 & 3) a_{22x}^{(r,s-1)} - a_{11y}^{(r-1,s)} + (\ln a_{12}^{(r,s-1)})_{xy} \equiv 0, \\
 & \quad -a_{21}^{(r,s-1)}a_{12}^{(r-1,s)} \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0; \\
 & 4) -a_{22x}^{(r,s-1)} + a_{11y}^{(r-1,s)} - (\ln a_{21}^{(r,s-1)})_{xy} \equiv a_{21}^{(r,s-1)}a_{12}^{(r-1,s)} \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0; \\
 & 5) 2[a_{22x}^{(r,s-1)} - a_{11y}^{(r-1,s)} + (\ln a_{12}^{(r,s-1)})_{xy}] \equiv a_{21}^{(r,s-1)}a_{12}^{(r-1,s)}, \\
 & \quad a_{22x}^{(r,s-1)} - a_{11y}^{(r-1,s)} + (\ln a_{21}^{(r,s-1)})_{xy} \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0; \\
 & 6) ma_{22x}^{(r,s-1)} - a_{11y}^{(r-1,s)} + (\ln a_{21}^{(r,s-1)})_{xy} \equiv \\
 & \quad \equiv m(a_{11y}^{(r-1,s)} - (\ln a_{21}^{(r,s-1)})_{xy}) - a_{22x}^{(r,s-1)} \equiv (m-1)(a_{21}^{(r,s-1)}a_{12}^{(r-1,s)} - a_{22x}^{(r,s-1)}); \\
 & 7) \sigma_k = \frac{2s'_k(x)t'_k(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2}, [s_k(x) + t_k(y)](m-2)s'_k(x)t'_k(y) \neq 0, k = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь  $\xi_k, \eta_k \in C^1 (k = \overline{0, 2})$ ,  $s_k, t_k, m \in C^2 (k = 1, 2)$ ,  $\sigma_1, \sigma_2$  равны соответственно левым частям тождеств 1), 2) рассматриваемой совокупности,  $h_1 = 0$ , если  $i = r$  и  $h_1 = 1$  в остальных случаях,  $h_2 = 0$ , если  $i = 0$  и  $h_2 = 1$  в остальных случаях.

**Теорема 1.** Если наряду с выполнением тождеств (3) и неравенства  $a_{12}^{(r-1,s)} \neq 0$  (неравенства  $a_{21}^{(r,s-1)} \neq 0$ ) или удовлетворяется одно из тождеств 1), 2) совокупности (4) (совокупности (5)), или существуют такие функции  $m, \xi_k, \eta_k (k = \overline{0, 2})$ ,  $s_k, t_k (k = 1, 2)$  указанных выше классов, что для совокупности (4) (совокупности (5)) либо выполнена одна из трех групп соотношений 3) – 5), либо вместе с тождеством 6) имеет место представление 7) для одной из двух функций  $\sigma_1, \sigma_2$ , то задача 1 разрешима в квадратурах.

В заключении отметим, что изложенные результаты получены путем развития основной идеи из [1].

## Список литературы

- [1] Созонтова Е. А. Об условиях разрешимости задачи Гурса в квадратурах для гиперболической системы второго порядка // Материалы XII

молодежной научной школы-конференции “Лобачевские чтения – 2015”.  
– Казань, 2015. – С. 140–143.

УДК: 517.958:512.816

## SYMMETRIES OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE KRAMERS EQUATION

Stogniy V. I., Kovalenko S. S., Kopas I. N.

National Technical University of Ukraine “KPI”, Kyiv, Ukraine

CoreValue, Poltava, Ukraine

e-mail: valeriy\_stogniy@mail.ru, kovalenko@imath.kiev.ua, innak@net.ua

**Стогний В. И., Коваленко С. С., Копась И. Н. Симметрии фундаментальных решений уравнения Крамерса.** В этом докладе рассматривается уравнение Крамерса. Используя алгоритм Аксёнова–Береста, найдена алгебра инвариантности фундаментальных решений этого уравнения. С помощью операторов этой алгебры построено его инвариантное фундаментальное решение.

**Ключевые слова:** уравнение Крамерса, алгебра инвариантности, инвариантное фундаментальное решение.

In our talk, the Kramers equation is considered. By using the Aksenov–Berest algorithm, the invariance algebra of fundamental solutions of the equation is found. Basing on the operators of this algebra, it was constructed the invariant fundamental solution.

**Kywords:** Kramers equation, algebra of invariance, invariant fundamental solution.

In our talk, the equation

$$u_t = u_{yy} - yu_x + (\omega^2 x + y)u_y + u \quad (1)$$

is considered. In this equation we use the following designations:  $u = u(t, x, y)$  is the unknown function to be found,  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ;  $\omega$  is an arbitrary real constant fulfilling the condition  $\omega^2 < \frac{1}{4}$ .

Note that equation (1) is the particular case of the known Kramers equation [1]

$$u_t = u_{yy} - (yu)_x + ((V'(x) + y)u)_y, \quad (2)$$

describing the motion of a particle in the fluctuating environments with the external potential  $V(x)$ .



By using the methods of group-theoretical analysis of differential equations, an investigation of equation (2) was initiated in papers [2, 3], where the free Kramers equation ( $V'(x) = 0$ ) was a subject of studying, namely, the maximal algebra of invariance of the equation was found and several exact invariant solutions were also constructed. In paper [4], the group classification of equations (2) was carried out. By using the results of this papers, one can easy establish that the maximal algebra of invariance  $A^{\max}$  of equation (1) is generated by the operators

$$X_i = e^{\mu_i t}(\partial_x + \mu_i \partial_y), \quad X_{i+2} = e^{-\mu_i t}(\partial_x - \mu_i \partial_y + (\mu_i y - \omega^2 x)u \partial_u),$$

$$X_5 = \partial_t, \quad X_6 = u \partial_u, \quad X_\infty = \beta(t, x, y) \partial_u,$$

where  $\mu_i$  ( $i = 1, 2$ ) are the roots of the equation  $\mu^2 + \mu + \omega^2 = 0$ ,  $\beta = \beta(t, x, y)$  is an arbitrary smooth solution of equation (1).

One of the most important application of the symmetry properties of linear partial differential equation is the construction of their fundamental solutions in explicit form.

The fundamental solution of equation (1) was found in explicit form by Chandrasekhar in his famous article [5]:

$$u = \frac{\theta(t) e^t}{2\pi\sqrt{\Delta}} \cdot \exp \left\{ -\frac{A(t) x^2 + B(t) xy + C(t) y^2}{2\Delta} \right\}, \quad (3)$$

where  $\theta = \theta(t)$  is the Heaviside function; the functions  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ , and  $\Delta$  are equal respectively

$$A(t) = 4\omega^2 e^t + (1 - 4\omega^2) e^{2t} + \mu_1 e^{-2\mu_2 t} + \mu_2 e^{-2\mu_1 t},$$

$$B(t) = 4e^t - 2e^{-2\mu_2 t} - 2e^{-2\mu_1 t},$$

$$C(t) = 4e^t + \frac{1 - 4\omega^2}{\omega^2} e^{2t} + \frac{1}{\mu_1} e^{-2\mu_2 t} + \frac{1}{\mu_2} e^{-2\mu_1 t},$$

$$\Delta = 8e^t + \frac{1 - 4\omega^2}{\omega^2} (e^{2t} + 1) - \frac{1}{\omega^2} (e^{-2\mu_1 t} + e^{-2\mu_2 t}).$$

Let us investigate the question of constructing of the fundamental solution (3) by using the maximal algebra of invariance  $A^{\max}$  of equation (1).

By using the Aksenov–Berest algorithm [6, 7], the Lie invariance algebra of fundamental solutions of equation (1) was found, namely, it was proved the statement.

**Theorem 1.** The equation

$$u_t - u_{yy} + yu_x - (\omega^2 x + y)u_y - u = \delta(t, x, y), \quad (4)$$

defining the fundamental solutions of equation (1) ( $\delta = \delta(t, x, y)$  is the delta-function) admits a non-trivial two-dimensional Lie algebra of invariance, which is spanned by the generators:

$$Y_1 = \{(\mu_1 - \mu_2) e^{\mu_1 t} - e^{-\mu_1 t} - 2\mu_1 e^{-\mu_2 t}\} \partial_x + \\ + \{(\mu_1^2 - \omega^2) e^{\mu_1 t} + \mu_1 e^{-\mu_1 t} + 2\omega^2 e^{-\mu_2 t}\} \partial_y + \\ + \{(\omega^2 e^{-\mu_1 t} + 2\mu_1 \omega^2 e^{-\mu_2 t}) x - (\mu_1 e^{-\mu_1 t} + 2\omega^2 e^{-\mu_2 t}) y\} u \partial_u,$$

$$Y_2 = \{(\mu_1 - \mu_2) e^{\mu_2 t} + 2\mu_2 e^{-\mu_1 t} + e^{-\mu_2 t}\} \partial_x + \\ + \{(\omega^2 - \mu_2^2) e^{\mu_2 t} - 2\omega^2 e^{-\mu_1 t} - \mu_2 e^{-\mu_2 t}\} \partial_y + \\ + \{- (2\mu_2 \omega^2 e^{-\mu_1 t} + \omega^2 e^{-\mu_2 t}) x + (2\omega^2 e^{-\mu_1 t} + \mu_2 e^{-\mu_2 t}) y\} u \partial_u.$$

It is easy to prove that the fundamental solution (3) is invariant with respect to the generators  $Y_1$  and  $Y_2$ . Hence, the following statement takes place.

**Theorem 2.** The fundamental solution (3) of equation (1) is invariant with respect to the two-parametric group of point transformations corresponding to the Lie algebra  $\langle Y_1, Y_2 \rangle$  of the symmetry generators of equation (4).

This theorem gives us the possibility to construct the fundamental solution (3) of equation (1) as the weak invariant solution of equation (4).

## Список литературы

- [1] Gardiner C. W. Stochastic Methods: a Handbook for the Natural and Social Sciences. – Berlin. 2009. – 447 + XVIII p.
- [2] Shtelen W. M., Stogny V. I. Symmetry properties of one- and two-dimensional Fokker–Planck equations // J. Phys. A: Math. Gen. 1989. Vol. 22. – P. L539–L543.
- [3] Saied E. A. On the similarity solutions for the free Kramers equation // Appl. Math. Comp. 1996. Vol. 74. – P. 59–63.
- [4] Spichak S. V., Stogniy V. I. Symmetry classification and exact solutions of the Kramers equation // J. Math. Phys. 1998. Vol. 39. – P. 3505–3510.
- [5] Chandrasekhar S. Stochastic problems in physics and astronomy // Rev. Modern Phys. 1943. Vol. 15. – P. 1–89.
- [6] Berest Yu. Yu. Group analysis of linear differential equations in distributions and the construction of fundamental solutions // Differ. Equations. 1993. Vol 29. – P. 1700–1711.

- [7] Aksenov A. V. Symmetries of linear partial differential equations and fundamental solutions // Dokl. Math. 1995. Vol. 51. – P. 329–331.

УДК 517.95

## МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЯ УРОВНЯ ЖИДКОСТИ

Филатов О. П.

Самарский государственный аэрокосмический университет

Самара

e-mail: filatov\_oleg@samaradom.ru

**Filatov O. P. Models of measurement of liquid level.** The models are associated with the measurement of the level of an incompressible fluid in tank. The base model is the first boundary value problem for nonlinear integro-differential equation of parabolic type. The empirical model is Cauchy problem for nonlinear ordinary second order differential equation.

**Keywords:** Integro-differential problem, parabolic type, ordinary differential equation, empirical model.

Модели связаны с измерением уровня несжимаемой жидкости в баке. Основная модель — первая краевая задача для нелинейного интегродифференциального уравнения параболического типа. Эмпирическая модель — задача Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

**Ключевые слова:** интегродифференциальная задача, параболический тип, обыкновенное дифференциальное уравнение, эмпирическая модель.

Из бака, в связанной с ним евклидовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , забирается жидкость на уровне горизонтальной плоскости  $x_3 = 0$  по определённому закону,  $h(t)$  — высота столба жидкости в баке над горизонтальной плоскостью,  $t \in [0, T_0]$ ,  $T_0 > 0$ . Для контроля уровня жидкости в баке имеется вертикальная цилиндрическая трубка радиусом  $R > 0$  (ось  $Ox_3$  — её ось симметрии, а начало координат  $O$  совпадает с нижним основанием трубки), которая сообщается с баком на уровне  $x_3 = 0$ , а её верхний срез — с полостью бака, свободной от жидкости,  $l(t)$  — высота столба жидкости в трубке,  $l(0) = l_0 > 0$ . Вектор ускорения свободного падения параллелен оси  $Ox_3$  (направленной вертикально вниз), а его проекция на эту ось равна  $g = g(t)$ .

Точная модель измерения рассмотрена в [1]– [3]. Эмпирическая модель [3]:

$$\ddot{l} = -\frac{\lambda}{4R} \dot{l} |\dot{l}| - g(t) \left( 1 - \frac{h(t)}{l} \right), \quad t \in [0, T],$$

$$l(0) = l_0, \quad \dot{l}(0) = 0,$$

где  $\lambda$  — коэффициент сопротивления измерительной трубки. Сравниваются точность вычислений и затраты времени на получение результата при реализации расчетов в свободно распространяемой системе аналитических вычислений wxMaxima-5.28.0., которая была установлена на компьютере с процессором *AMD 3.4 GHz*.

## Список литературы

- [1] Филатов О. П. Интегро-дифференциальная задача параболического типа // Герценовские чтения – 2015. – Санкт-Петербург: РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 73–74.
- [2] Филатов О. П. Глобальная теорема существования и единственности решения первой краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения параболического типа // Вестник Самарского государственного университета. 2015. N 3 (125). – С. 64–72.
- [3] Клюев Н. И., Филатов О. П. Модели измерения уровня жидкости в баке ракеты-носителя // Вестник Самарского государственного университета. 2015. N 3 (125). – С. 88–96.

УДК 517.9

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОДНОНАПРАВЛЕННОМ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Черемных Е. Н.

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Красноярск

e-mail: elena\_cher@icm.krasn.ru

**Cheremnykh E. N. Solution of problem on unidirectional thermogravitation motion of viscous liquid in a flat channel.** Initial boundary value problem, describing the unidirectional motion of fluid in the Oberbeck–Boussinesq model in a flat channel for two cases has been studied: walls are solid and fixed; the upper wall is free boundary. The exact stationary solution of the problem has been found. Unsteady flows in the form of final analytical formulas in the Laplace images has been obtained and the conditions under which the solution converges to a stationary one has been established.

**Keywords:** initial boundary value problem, Oberbeck–Boussinesq model, Laplace transformation.

Исследована начально-краевая задача, описывающая однонаправленное движение жидкости в модели Обербека–Буссинеска в плоском канале для двух случаев: стенки твердые неподвижные; верхняя стенка – свободная граница. Найдено точное стационарное решение задачи. Решение нестационарной задачи получено в виде конечных аналитических формул в изображениях по Лапласу и установлены условия при которых решение сходится к стационарному.

**Ключевые слова:** начально-краевая задача, модель Обербека–Буссинеска, преобразование Лапласа.

**1. Введение.** Известно, что движение возникает в неравномерно нагретой жидкости. Если жидкость не имеет внутренних и свободных границ раздела, то основная причина движения состоит в том, что более холодная жидкость тонет в поле тяжести. Движение, вызванное такой причиной, называется тепловой гравитационной конвекцией. Для его описания используются уравнения Обербека–Буссинеска

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho^{-1} \nabla p = \nu \Delta \mathbf{v} - \beta \theta \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \Theta_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \chi \Delta \theta. \quad (1)$$

В системе (1)  $\mathbf{v}$  – вектор скорости,  $\mathbf{g}$  – ускорение силы тяжести,  $p$  – отклонение давления от гидростатического значения,  $\theta$  – отклонение температуры от среднего значения,  $\rho = \rho_0(1 - \beta\theta)$  – плотность жидкости,  $\rho_0$  – плотность жидкости при средних значениях температуры,  $\nu$  – коэффициент кинема-

тической вязкости жидкости,  $\beta$  – коэффициент объемного расширения и  $\chi$  – температуропроводность. Положительные величины  $\rho, \nu, \chi, \beta$  и вектор  $\mathbf{g}$  предполагаются постоянными.

Предположим, что движение является плоским и однонаправленным, тогда  $\mathbf{v} = (u(x, y, t), 0)$ ,  $\mathbf{g} = (0, -g)$  и уравнения (1) существенно упрощаются

$$u_x = 0, \quad u_t = \nu u_{yy} - \rho^{-1} p_x, \quad p_y = \rho g \beta \theta, \quad \theta_t + u \theta_x = \chi(\theta_{xx} + \theta_{yy}). \quad (2)$$

Для стационарных плоских течений система (2) была изучена в работе [1]. Было показано, что функция  $u$  есть кубический полином, а остальные искомые функции могут быть представлены в виде  $\theta = -Ax + T(y)$ ,  $p = -A\rho g \chi y + q(y)$ , где  $T$  и  $q$  есть полиномы пятой и шестой степени, соответственно. В работе [2] установлено, что решение Бириха является инвариантным решением системы (1) относительно группы с основными операторами  $\partial_x - A(\partial_\theta + \rho g \beta y \partial_p)$ ,  $\partial_t$ ,  $\partial_z$  ( $A = \text{const}$ ), допускаемой этой системой.

Из первых трех уравнений (2) следует, что функции  $p$  и  $\theta$  линейно зависят от переменной  $x$ . Предположим, что

$$u = u(y, t), \quad \theta = -A(y, t)x + T(y, t), \quad p = -B(y, t)x + q(y, t). \quad (3)$$

Подставляя (3) в уравнения (2) получим

$$A_t = \chi A_{yy}, \quad B_y = \rho g \beta A, \quad u_t = \nu u_{yy} + \rho^{-1} B, \quad T_t = \chi T_{yy} + Au, \quad q_y = \rho g \beta T. \quad (4)$$

Система уравнений (4) решается последовательно в области  $D = \{y, t : 0 < y < h, t > 0\}$ . Решение первого уравнения (4) находится единственным образом, используя начальные и граничные условия. Зная функцию  $A$  и интегрируя второе уравнения этой системы найдем функцию  $B$ . После этого, система для определения функций  $u$ ,  $T$ , и  $q$  становится замкнутой.

**2. Стационарное решение.** Выпишем полностью полученные задачи для функций  $A$  и  $u$  в размерном виде

$$A_t = \chi A_{yy}, \quad u_t = \nu u_{yy} + g\beta \int_0^y A(y_1, t) dy_1 + C(t), \quad (5)$$

Так как стенки  $y = 0$ ,  $y = h$  твердые и неподвижные, то условия прилипания запишутся в виде

$$u(0, t) = 0, \quad u(h, t) = 0, \quad (6)$$

кроме того считаем, что на нижней стенке задано распределение температуры, а верхняя стенка теплоизолирована, т. е.

$$A(0, t) = A_1(t), \quad A_y(h, t) = 0. \quad (7)$$

Далее предполагаем, что движение возникает из состояния покоя

$$u(y, 0) = 0, \quad A(y, 0) = 0. \quad (8)$$

Во втором уравнении (5)  $C(t)$  появляется в результате интегрирования второго уравнения (4), является дополнительным слагаемым в линейной зависимости давления от переменной  $x$  и не связан с конвективным процессом. Функцию  $C(t)$  можно определить из условия заданного расхода

$$\int_0^h u(y, t) dy = q(t), \quad (9)$$

т. е. задача (5)–(9) является обратной.

Стационарным решением задачи для функции  $A$  является постоянная:  $A^s = A_1^0$ . Выпишем стационарное решение задачи для функции  $u$  в безразмерном виде при нулевом расходе

$$\bar{u}^s(\xi) = -\frac{Gr}{12}(2\xi^3 - 3\xi^2 + \xi), \quad 0 < \xi < 1, \quad \xi = y/h, \quad (10)$$

где  $\bar{u}^s = u^s h \nu^{-1}$ ,  $Gr = g\beta A^s h^4 / \nu^2$  – число Грасгофа.

**Замечание 1.** Постановка задачи (5)–(9) и результат её однозначной разрешимости классического решения изложены в [3].

В настоящей работе приведено точное решение поставленной задачи в изображениях по Лапласу, установлены условия при которых решение нестационарной задачи сходится к стационарному решению (10).

**3. Нестационарное решение.** Для получение более точной информации о поведении  $u(y, t)$  применим преобразование Лапласа к задаче (5)–(9). При этом изображения  $\hat{A}(y, s)$ ,  $\hat{u}(y, s)$  функций  $A$ ,  $u$  суть решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$s\hat{A} = \chi\hat{A}_{yy}, \quad (11)$$

$$s\hat{u} = \nu\hat{u}_{yy} + g\beta \int_0^y \hat{A}(y_1, s) dy_1 + \hat{C}(s), \quad (12)$$

где  $\hat{C}(s)$  – изображение функции  $C(t)$ . При выводе уравнений (11), (12) использованы начальные условия (8). В результате применения преобразования Лапласа к граничным условиям получим

$$\hat{u}(0, s) = 0, \quad \hat{u}(h, s) = 0, \quad \int_0^h \hat{u}(y, s) dy = 0, \quad (13)$$

$$\hat{A}(0, s) = \hat{A}_1(s), \quad \hat{A}_y(h, s) = 0. \quad (14)$$

Решение задачи (11), (14) находится без труда

$$\hat{A}(y, s) = -\hat{A}_1(s) \left( \text{th} \sqrt{\frac{s}{\chi}} h \text{sh} \sqrt{\frac{s}{\chi}} y - \text{ch} \sqrt{\frac{s}{\chi}} y \right).$$

Выпишем общее решение уравнения (12) (предполагается, что  $\nu \neq \chi$ )

$$\begin{aligned} \hat{u}(y, s) = & C_1 \text{ch} \sqrt{\frac{s}{\nu}} y + C_2 \text{sh} \sqrt{\frac{s}{\nu}} y + \frac{g\beta \hat{A}_1 \sqrt{\chi} s^{-3/2}}{(\nu - \chi) \text{ch} \sqrt{\frac{s}{\chi}} h} \times \\ & \times \left( (\nu - \chi) \text{sh} \sqrt{\frac{s}{\chi}} h + \chi \text{sh} \sqrt{\frac{s}{\chi}} (h - y) \right) + \frac{\hat{C}(s)}{s\rho}. \end{aligned} \quad (15)$$

Постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  и функцию  $\hat{C}$  определим из условий (13)

$$\begin{aligned} \hat{C} &= -\frac{g\beta \hat{A}_1 \chi^{3/2} \rho m}{\sqrt{s} m_1}, \\ C_1 &= \frac{g\beta \hat{A}_1 \chi^{3/2}}{s^{3/2}} \left( \frac{m}{m_1} - \frac{\text{Pr th} \sqrt{\text{Pr} \bar{s}}}{\text{Pr} - 1} \right), \\ C_2 &= \frac{g\beta \hat{A}_1 \chi^{3/2}}{s^{3/2}} \left( \frac{\text{th} \sqrt{\text{Pr} \bar{s}}}{\text{sh} \sqrt{\bar{s}}} \left( \frac{\text{Pr ch} \sqrt{\bar{s}}}{\text{Pr} - 1} - 1 \right) - \frac{m(\text{ch} \sqrt{\bar{s}} - 1)}{m_1 \text{sh} \sqrt{\bar{s}}} \right), \\ m &= \text{th} \sqrt{\text{Pr} \bar{s}} + \frac{\text{th} \sqrt{\text{Pr} \bar{s}}}{\sqrt{\bar{s}} \text{sh} \sqrt{\bar{s}}} (\text{ch} \sqrt{\bar{s}} - 1) \left( \frac{\text{Pr ch} \sqrt{\bar{s}}}{\text{Pr} - 1} - 1 \right) - \\ & \quad - \frac{\text{Pr sh} \sqrt{\bar{s}} \text{th} \sqrt{\text{Pr} \bar{s}}}{\sqrt{s}(\text{Pr} - 1)} - \frac{1 - \text{ch} \sqrt{\text{Pr} \bar{s}}}{\sqrt{\text{Pr} \bar{s}}(\text{Pr} - 1) \text{ch} \sqrt{\text{Pr} \bar{s}}}, \\ m_1 &= 1 + \frac{(\text{ch} \sqrt{\bar{s}} - 1)^2}{\sqrt{\bar{s}} \text{sh} \sqrt{\bar{s}}} - \frac{\text{sh} \sqrt{\bar{s}}}{\sqrt{\bar{s}}}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\bar{p} = ph^2\nu^{-1}$ ,  $\text{Pr} = \nu/\chi$  – число Прандтля.



Предполагая, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} A_1(t) = A_1^0$  и используя (15), (16) можно доказать предельные равенства

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\hat{A}(s) = A^s, \quad \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{u}(s) = u^s.$$

Следовательно в этом случае решение выходит на стационарный режим (11).

**Замечание 2.** Задачу (5)–(9) можно рассмотреть для случая, когда верхняя стенка – свободная граница. Тогда второе условие (6) примет вид [4]

$$u_y(h, t) = -\frac{A_1(t)\alpha}{\mu},$$

$\alpha$  – температурный коэффициент поверхностного натяжения,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости. Изменится и второе условие в (7)

$$kA_y(h, t) + \gamma A(h, t) = Q(t),$$

$k$  – коэффициент теплопроводности,  $\gamma$  – коэффициент межфазного теплообмена,  $Q(t)$  – заданный поток тепла.

## Список литературы

- [1] Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // J. Appl. Mech. Tech. Phys., No. 3 (1966), P. 69–72.
- [2] Katkov V. L. Exact solutions of some problems of convection // Prikl. Mat. Mekh., 32, No. 3 (1968), P. 482–487.
- [3] Andreev V. K., Gaponenko Yu. A., Goncharova O. N., Pukhnachev V. V. Mathematical models of convection. – Berlin/Boston: Walter de Gruyter, 2012. – 417 p.
- [4] Андреев В. К., Захватаев Е. А., Рябицкий Е. А. Термокапиллярная неустойчивость. – Новосибирск: Наука, 2000. – 280 с.

# Современные проблемы теории функций и функционального анализа

## СВОЙСТВА АБСОЛЮТА, ПОРОЖДЁННОГО НОРМОЙ, И ЕГО КАНОНИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Колдунов А. В.

Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена  
Санкт-Петербург

**Koldunov A. V. The properties of the norm-generated absolute and its canonical mapping.**

In the report a particular case of the norm-generated absolute and its canonical mapping are studied.

В сообщении рассматривается частный случай абсолюта, порождённого нормой, и его канонического отображения.

1. Пусть  $K$  – компакт, и  $(C(K), \|\cdot\|)$  – нормированная решётка. К ним применяется конструкция абсолюта  $(\Gamma(K, \pi), \tau)$  из [1], используются построения из [2] и исследуются свойства канонического отображения  $\tau = \tau(\|\cdot\|)$ , построенного для этой ситуации. Пару  $(\Gamma(K, \|\cdot\|), \tau(\|\cdot\|))$  будем называть абсолютом, порождённым нормой, с каноническим отображением  $\tau(\|\cdot\|)$ . Для удобства обозначений будем писать просто  $(\Gamma, \tau)$ , когда речь идёт об абсолюте, порождённом нормой, и о каноническом отображении.

Основные понятия и обозначения взяты из [1]. Напомним некоторые из них. Для открытого  $G$  полагаем  $\text{in}(G) = \sup(\|x\| : |x| \leq 1, \text{cl } x \subset G)$ . Тогда для этой величины выполнено неравенство:  $\text{in}(\bigcup(G_n : n \in N)) \leq \sum(\text{in}(G_n) : n \in N)$ .

Через  $\Delta$  обозначается семейство всех возрастающих последовательностей  $a = \{F_n\}$  замкнутых множеств  $F_n$  со свойством:  $\text{in}(K \setminus F_n) \rightarrow 0$ . Если  $a = \{F_n\} \in \Delta$ , то полагаем  $S(a) = K \setminus \bigcup F_n$ . Буква  $Z$  обозначает семейство всех подмножеств  $H$  компакта  $K$ , для каждого из которых существует последовательность  $a = a(H) = \{F_n\} \in \Delta$  с условиями:  $H \subset \bigcup F_n$  и каждое множество  $F_n \cap H$  – компакт. Через  $I$  будем обозначать такие множества  $B$  из  $K$ , что для каждого из них существует  $a(B) = \{F_n\} \in \Delta$  с условием:  $B \cap F_n = \emptyset$  ( $n \in N$ ). Через  $Y$  обозначим все такие  $H \in Z$ , что  $H \notin I$ .

2. Тот факт, что норма задаёт функционал на  $C(K)$ , даёт возможность

установить некоторые связи между множествами из  $K$  и множествами из  $(\Gamma, \tau)$ , которые отсутствуют в общем случае. Можно заметить, в результатах этого пункта, по существу, используется только то обстоятельство, что в данном случае  $\pi$  является функционалом (т. е. отображается в  $R$ ).

**Лемма 1.** 1. Пусть множество  $M$  из  $K$  содержится в счётном объединении множеств  $B_n \in I$ . Тогда  $M \in I$ .

2. Пусть  $H \in Y$ . Тогда существует число  $r(H) > 0$  со свойством: если открытое  $G$  содержит  $H$ , то  $\text{in}(G) \geq r(H)$ .

*Доказательство.* 1. Для  $\varepsilon > 0$  находим открытое  $G_n \supset B_n$ , причём  $\text{in}(G) \leq \varepsilon/2^n$ . Тогда  $\text{in}(\bigcup G_n) \leq \varepsilon$  и  $M \subset \bigcup G_n$ . Это означает, что  $M \in I$ .

2. Полагаем  $r(H) = \inf \{\text{in}(G) : G \supset H\}$ . Если  $r(H) = 0$ , то  $H \in I$ , что неверно. Поэтому  $r(H) > 0$ .

**Лемма 2.** 1. Пусть  $H \in Y$ . Тогда существует замкнутое  $F \in Y$ , содержащееся в  $H$ . 2. Пусть  $H \in Z$ ,  $b = \{P_n\} \in \Delta$ , и каждое  $P_n \cap H \in I$ . Тогда  $H \in I$ . 3. Пусть  $H \in Y$  и  $a(H) = \{F_n\} \in \Delta$ . Тогда  $[H] = \text{cl} \bigcup ([H \cap F_n])$ .

*Доказательство.* 1. Если бы  $H \cap F_n \in I$  для любого  $n \in N$ , то по лемме 1 п. 1 имело бы место  $H \in I$ , что неверно. Поэтому существует  $m \in N$ , для которого  $F = H \cap F_m \notin I$ .

2. Поскольку  $H$  содержится в объединении множеств  $S(b)$  и  $\bigcup (H \cap P_n)$ , то по лемме 1 п. 1  $H \in I$ .

3. Очевидно, что  $[H] \supset \text{cl} \bigcup ([H \cap F_n])$ . Теперь предположим, что найдётся  $A \in [H]$ , который не принадлежит  $\text{cl} \bigcup ([H \cap F_n])$ . В этом случае существует  $H_1 \in A$  со свойством:  $H_1 \cap (H \cap F_n) \in I$ , что невозможно. Противоречие доказывает требуемое равенство.

**Лемма 3.** Пусть  $H \in Y$  и  $b = \{P_n\} \in \Delta$ . Тогда  $H \setminus S(b) \in Y$  и существует  $F \in Y$ , для которого  $F \subset H \setminus S(b)$ .

*Доказательство.* Пусть  $a(H) = \{F_n\}$ . Найдём  $m \in N$ , для которого  $r(H)/3 \geq \text{in}(K \setminus F_m), \text{in}(K \setminus P_m)$ . Докажем, что  $H \cap F_m \cap P_m \notin I$ . Пусть открытое  $W$  содержит множество  $H \cap F_m \cap P_m$ . Тогда  $H$  лежит в объединении открытых множеств  $W, K \setminus F_m, K \setminus P_m$ . Поэтому  $r(H) \leq \text{in}(W) + 2r(H)/3$ . Это означает, что  $\text{in}(W) \geq r(H)/3$  и  $H \cap F_m \cap P_m \notin I$ . Далее заметим, что  $H \cap F_m \cap P_m$  содержится в  $H \setminus S(b) \in Z$ . Таким образом,  $H \setminus S(b) \in Y$  и можно применить лемму 2 п. 1.

**Лемма 4.** 1. Для любого  $H \in Y$  компакт  $\tau([H])$  не принадлежит  $I$ . 2. Пусть  $H_1, H_2 \in Y$ . Тогда  $[H_2]$  не содержится в множестве  $\tau^{-1}(H_1) \setminus [H_1]$ .

3. Пусть  $H \in Y$  и  $a = \{F_n\} \in \Delta$ . Тогда  $[H]$  не содержится в множестве  $\Gamma \setminus \bigcup([F_n])$ .

*Доказательство.* 1. Предположим, что  $\tau([H]) \in I$ . Имеем  $r(H) > 0$  и существует открытое  $G_1 \supset \tau([H])$  со свойством:  $\text{in}(G_1) \leq r(H)/2$ . Проверим, что  $H \setminus G_1 \notin I$ . Пусть  $G_2 \supset H \setminus G_1$ . Тогда  $H \subset G_1 \cup G_2$  и поэтому  $\text{in}(G_2) \geq r(H)/2$ . Таким образом, по выбору  $G_1$  получаем противоречие:  $\emptyset \neq \tau([H \setminus G_1]) \subset \tau([H]) \setminus G_1 = \emptyset$ . Доказано, что  $\tau([H]) \notin I$ .

2. Пусть  $[H_2] \supset r^{-1}(H_1) \setminus [H_1]$ . Тогда  $H_1 \cap H_2 \in I$  и существует  $a = \{F_n\} \in \Delta$  со свойством:  $F_n \cap (H_1 \cap H_2) = \emptyset$  для любого  $n \in N$ . По лемме 3  $H_2 \setminus S(a) \in Y$  и существует замкнутое  $F \in Y$ , для которого  $F \subset H_2 \setminus S(a)$ . Получаем  $F \cap H_1 \subset H_2 \cap H_1 \in I$ . Это противоречит лемме 4 п. 1.

3. Если  $\emptyset \neq [H] \subset \Gamma \setminus \bigcup([F_n])$ , то  $H \cap F_n \in I$  для любого  $n \in N$ . По лемме 1 п. 1  $H \in I$ , т. е.  $[H] = \emptyset$ . Противоречие.

**3.** Теперь докажем основные результаты сообщения. Предварительно введём одно обозначение: пусть  $H \in Z$ , тогда полагаем, что  $k(H) = \text{int}(\tau^{-1}(H))$ .

**Предложение 1.** 1. Пусть  $B \in I$ . Тогда  $k(B) = \emptyset$ . 2. Пусть  $H \in Y$  и  $k(H) \neq \emptyset$ . Тогда  $k(H) \subset [H]$ .

*Доказательство.* 1. Если  $k(B) \neq \emptyset$ , то существует  $H \in Y$  с условием:  $\emptyset \neq [H] \subset k(B)$ . Тогда  $\emptyset \neq \tau([H]) \subset B \in I$ , что противоречит лемме 4 п. 1.

2. Предположим, что  $k(H)$  не содержится в  $[H]$ . Найдём  $H_1 \in Y$ , для которого  $\emptyset \neq [H_1] \subset k(H) \setminus [H]$ . По лемме 2 п. 1 существует замкнутое  $F \in Y$ , для которого  $F \subset H_1$ . Тогда  $\emptyset \neq [F] \subset [H_1] \subset k(H) \setminus [H]$ , причём  $F \cap H \in I$ . Получаем противоречие с леммой 4 п. 1:  $\emptyset \neq \tau([H]) \subset F \cap H \in I$ .

**Замечание.** Предложение 1 показывает, что  $k(H) \subset [H]$ . Поэтому если  $H_1 \cap H_2 \in I$ , то  $\text{cl} k(H_1) \cap \text{cl} k(H_2) = \emptyset$ . Но, как показывают примеры, возможны ситуации, когда  $H \in Y$ , но  $k(H) = \emptyset$ . В предложении 2 содержится общее условие, при котором для любого  $H \in Y$  выполнено  $[H] = \text{cl} k(H)$ . А в предложении 3 приводится конкретное условие, при котором это будет так.

**Предложение 2.** Пусть для любого замкнутого  $F \in Y$  выполнено:  $k(F) \neq \emptyset$ . Тогда 1) для любого  $H \in Y$  выполнено равенство:  $[H] = \text{cl} k(H)$ ; 2) если  $a = (F_n) \in \Delta$ , то множество  $\bigcup k(F_n)$  плотно в  $\Gamma$ .

*Доказательство.* 1. Сначала установим этот факт для замкнутого  $F \in Y$ . Предположим противное:  $[F] \setminus \text{cl} k(F) \neq \emptyset$ . Пусть  $A \in [F] \setminus \text{cl} k(F)$ . Существует  $H \in A$ , для которого  $[H] \cap \text{cl} k(F) = \emptyset$  и  $H \subset F$ . По лемме 2

п. 1 найдётся замкнутое  $P \in Y$  с условием:  $P \subset H$ . По условию  $k(P) \neq \emptyset$ . Тогда  $\emptyset \neq k(P) \subset k(F) \cap [H] = \emptyset$ . Противоречие доказывает  $[F] = \text{cl } k(F)$ . Для того, чтобы установить  $[H] = \text{cl } k(H)$ , воспользуемся леммой 2 п. 3, а также доказанным равенством для замкнутых множеств и предложением 1 п. 2.

2. По лемме 2 п. 2  $\bigcup [F_n]$  плотно в  $\Gamma$ , а по предложению 2 п. 1  $\bigcup k(F_n)$  плотно в  $\Gamma$ .

**Предложение 3.** Пусть выполнено следующее условие: если  $(x_n)$  является порядково ограниченной последовательностью попарно дизъюнктивных элементов в  $C(K)$ , тогда  $\|x_n\| \rightarrow 0$ . В этом случае для любого  $H \in Y$  имеет место равенство:  $[H] = \text{cl } k(H)$ .

*Доказательство.* Докажем, что если замкнутое  $F \in Y$ , то  $k(H) \neq \emptyset$ . Сначала установим следующий факт: для любого  $\varepsilon > 0$  существует открытое  $G \supset F$  с условием:  $\text{in}(G \setminus F) \leq \varepsilon$ . Если предположить противное, то можно построить последовательность  $(x_n)$  из формулировки предложения 3, но с условием  $\|x_n\| \geq \varepsilon$ . Таким образом, можно считать, что  $\{G_n\}$  является убывающей последовательностью открытых множеств с условием:  $\text{in}(G \setminus F) \leq 1/n$ .

Полагаем  $P_n = K \setminus G_n$ ; тогда  $\{F \cup P_n\} \in \Delta$ . Причём  $F \cap P_n = \emptyset$ ,  $F \in Y$  и  $\bigcup P_n \in Y$  (заметим, что  $a(\bigcup P_n) = \{F \cup P_n\} \in \Delta$ ). Тогда  $[F] \cap [\bigcup P_n] = \emptyset$ . Более того,  $[F] \cup [\bigcup P_n] = \Gamma$ : действительно, если предположить противное, то существует  $A \in \Gamma$ , которое не принадлежит обоим множествам. Это означает, что существует  $H \in A$ , для которого  $H \cap F \in I$  и  $H \cap P_n \in I$  для любого  $n \in N$ . По лемме 2 п. 2  $H \in I$ , что невозможно. Таким образом, множество  $\Gamma \setminus [\bigcup P_n]$  открытое и содержится в  $[F]$ . Поскольку  $[F] \subset \tau^{-1}(F)$ , то  $\emptyset \neq \Gamma \setminus [\bigcup P_n] \subset k(F)$ . Теперь остаётся применить предложение 2 п. 1.

## Список литературы

- [1] Колдунов А. В. Абсолют  $(\Gamma(K, \pi), \tau)$  компакта  $K$  // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения–2015». – СПб.: РГПУ, 2015. – С. 82–84.
- [2] Колдунов А. В. Семейство функций  $\mathcal{D}(K, \pi)$ , порождённое отображением  $\pi$  // Некоторые актуальные проблемы современной математики и

математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения–2014». – СПб.: РГПУ, 2014. – С. 127–129.

УДК 510.32

## МИНИМАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Ловягин Ю. Н.

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: lovyagin@fromru.com

**Lovyagin Yu. N. The minimum set theory.** It offers some minimal system of axioms for the theory sets.

Предлагается некоторая минимальная система аксиом для теории множеств.

**1. Предварительные замечания.** Настоящая заметка является продолжением и развитием идей высказанных в работе [6]. Частично идеи развиты в [7], но в отличие от указанных работ мы не используем прачисла и отказываемся от схемы аксиом выделения. Мы не претендуем на оригинальность «исправления» аксиоматики теории множеств. В серии работ [1] — [5] В. Н. Алексюк предложил свое видение проблемы. Предлагаемая в настоящей работе аксиматика преследует цель *минимальности средств* для возможности работы с понятием множества.

Учитывая, что многие доказательства дублируют рассуждения из [6], мы часто ограничиваемся лишь формулировками утверждений и комментариями.

**2. Язык теории множеств.** Мы следуем в основном обозначениям и терминологии работы [6], однако, отказываемся от предиката равенства как первоначального.

**Определение 2.1.** Алфавит языка  $\mathcal{L}_{SET}$  теории множеств содержит:

- переменные:  $x, y, z, u, v, w$ ; если мы говорим, что  $p$  — переменная, то предполагаем, что  $p$  совпадает с одной из букв  $x, y, z, u, v$  или  $w$ ;
- предикат  $\in$ , содержательно понимаемый как «быть элементом», используем также «принадлежать»;

- кванторы:  $\forall, \exists$ ;
- логические связки:  $\neg, \&, \vee, \supset, \equiv$ ;
- служебные символы:  $(, )$ , используемые для указания приоритета.

За кванторами и логическими связками мы сохраняем их привычное название.

В принципе можно было ограничиться двумя логическими связками и одним из кванторов. Однако для «удобоваримой» формулировки аксиом требуется полный набор связок и кванторов.

**Определение 2.2.** Формулой теории множеств называется

- атомарная формула — выражение вида  $p \in q$ , где  $p$  и  $q$  — переменные;
- выражения вида  $\neg A, A \& B, A \vee B, A \supset B, A \equiv B$ , где  $A$  и  $B$  — формулы теории множеств;
- выражения вида  $\forall p A, \exists p A$ , где  $A$  — формула теории множеств,  $p$  — переменная.

В последнем пункте выражение  $\forall p$  или  $\exists p$  называют кванторной приставкой, а формулу  $A$  — областью действия квантора (по переменной  $p$ ).

Отметим, что выражения — слова в описанном алфавите — записываются и читаются слева направо. При этом приоритет логических связок определяется их следованием в определении. Кванторы имеют тот же приоритет, что и связка отрицания. Из подряд следующих бинарных связок большим приоритетом обладает более левая, унарные связки и кванторы упорядочиваются по убыванию приоритета справа налево.

**Определение 2.3.** Вхождение переменной в кванторную приставку или в область действия квантора по этой переменной называется связанным. Не связанное вхождение называется свободным. Переменная называется связанной или свободной в формуле, если она имеет соответствующие вхождения.

**Определение 2.4.** Переменная  $p$  является свободной для подстановки в формулу  $A$  вместо переменной  $q$ , если ни одно свободное вхождение  $q$  не находится в области действия квантора по переменной  $p$ .

**3. Аксиомы теории множеств.** За основу нашей системы аксиом взята теория Цермело – Френкеля. Однако мы отказываемся от аксиомы выделения, используя на самом деле ее частные случаи. Возможность существования множеств, выделяемых по некоторой формуле не исключается. Наличие аксиомы бесконечности отличает предлагаемую систему аксиом от асиома-

тики альтернативной теории множеств П. Вopenки [9]. Не предполагается и существование полумножеств.

Поскольку предикат равенства не является сиволом языка, соответствующее отношение вводится по определению, что позволяет исключить аксиому экстенциональности. В подобных теориях та аксиома становится теоремой.

**Определение 3.1.** Мы пишем  $p \subset q$  как сокращение для формулы  $\forall w (w \in p \supset w \in q)$  и говорим, что  $p$  является подмножеством  $q$ . Если  $p \subset q \ \& \ q \subset p$ , то мы пишем  $p = q$  и говорим, что множества  $p$  и  $q$  равны.

Отметим, что формула  $x = y$  понимаемая как сокращение  $x \subset y \ \& \ y \subset x$  определяет предикат равенства в языке теории теории множеств. Иными словами,  $x = y \equiv x \subset y \ \& \ y \subset x$ .

AS (аксиома степени)  $\forall x \exists y \forall z (z \in y \equiv z \subset x)$ .

A $\emptyset$  (аксиома пустого множества)  $\exists x \forall y \neg (y \in x)$ . Введём как новую константу  $\emptyset$  — пустое множество, существование которого гарантирует A $\emptyset$ .

AS0 (аксиома нетривиального подмножества)  
 $\forall x \exists y (y \subset x \ \& \ \neg (y = \emptyset) \ \& \ \neg (x \subset y))$ .

AP (аксиома неупорядоченной пары)  $\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \equiv u = x \vee u = y)$ .

A $\infty$  (аксиома бесконечности)  $\exists x (\exists y (y \in x) \ \& \ \forall y (y \in x \supset \supset \forall z (z \in y \vee z = y \supset z \in x)))$ .

AU (аксиома объединения)  $\forall x \exists y \forall z (z \in y \equiv \exists u (u \in x \ \& \ z \in u))$ .

AN (аксиома пересечения)  $\forall x \exists y \forall z (z \in y \equiv \forall u (u \in x \supset z \in u))$ .

Отметим, что введенные понятия пары и синглтона позволяют образовывать подмножества у непутых множеств: если  $u \in x$ , то множество  $\{u\}$ , очевидно, являясь подмножеством  $x$ . Естественно, что, используя аксиому существования пары, для множества, имеющего «достаточное количество элементов», можно образовать подмножество  $\{u, v, w, \dots\}$ . Аксиома же пустого множества позволяет вместе с аксиомой подмножества и пары строить множества  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$ . Это навеивает на мысль, что от аксиомы существования нетривиального подмножества можно отказаться. Более содержательной является аксиома бесконечного подмножества бесконечного множества. Эти понятия, однако, требуют как определений, так и обсуждения различных концепций конечности.

Для формулировки ещё одной аксиомы нам потребуется ввести несколько



понятий.

Как в обычных руководствах по теории множеств, вводятся стандартные понятия объединения, пересечения, упорядоченной пары, декартова произведения двух множеств.

**Определение 3.2.** Неупорядоченная пара (существование постулируется аксиомой AP) определяется соотношением  $z \in \{x, y\} \equiv z = x \vee z = y$ .

**Определение 3.3.** Упорядоченная пара  $\langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ , где  $\{x\} := \{x, x\}$  — синглетон.

**Определение 3.4.** Объединение множества  $x$  — множество, определяемое соотношением  $y \in \bigcup x \equiv \exists z(z \in x \ \& \ y \in z)$ ,  $x \cup y := \bigcup \{x, y\}$ .

**Определение 3.5.** Пересечение множества  $x$  — множество, определяемое соотношением  $y \in \bigcap x \equiv \forall y(y \in x \supset z \in y)$ ,  $x \cap y := \bigcap \{x, y\}$ .

**Определение 3.7.** Декартово произведение множеств  $x$  и  $y$  определяется формулой  $z \in x \times y \equiv z \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(x \cup y)) \ \& \ \exists u \exists v(u \in x \ \& \ v \in y \ \& \ z = \langle u, v \rangle)$ .

Приведем теперь формулировку аксиомы существования декартова произведения:  $\forall x \forall y \exists z(z = x \times y)$ .

**Определение 3.8.** Для каждого множества  $x$  определим его последователя  $x'$  как множества  $y = x \cup \{x\}$ . Множество  $x$  в этом случае называется предшесвенником для  $y$ .

Отметим, что последователь определён для каждого множества в силу аксиом объединения и пары.

Таким образом, определены множества  $0 = \emptyset$ ,  $1 = 0' = \{\emptyset\} = \{0\}$ ,  $2 = 1' = \{0, 1\}$ ,  $3 = 2' = \{0, 1, 2\}$ , ...

Зметим, что аксиома бесконечности постулирует, что существует множество  $\mathfrak{I}$ , содержащее в качестве элементов все множества  $0, 1, 2, \dots$

**Определение 3.9.** Множество  $\mathfrak{I}$ , обладающее свойством  $\forall x(x \in \mathfrak{I} \supset \supset x' \in \mathfrak{I})$  называется индуктивным.

Фактически аксиома  $A_\infty$  утверждает существование индуктивного множества. Усиливая эту аксиому можно ввести аксиому существования наименьшего по включению индуктивного множества. Это множество призвано выполнять роль множеств натуральных чисел.

**Определение 3.10.** Пусть  $\varphi$  — формула теории множеств, имеющая по крайней мере одну свободную переменную. Будем фиксировать это записью

$\varphi(p)$ . Пусть, далее,  $a$  — некоторое множество. Введем в рассмотрение множество  $e$  (подмножество  $a$ ), определяемое соотношением  $x \in e \equiv x \in a \ \& \ \varphi(x)$ . Будем обозначать множество  $e$  как  $\{x \in a : \varphi(x)\}$ .

Отметим, что множество из определения 3.10 не всегда существует. Наши аксиомы гарантируют существование объединения, пересечения, упорядоченной и неупорядоченной пар, декартова произведения.

Поскольку нашей целью не является систематическое изложение теории множеств, мы ограничимся лишь перечислением дальнейших идей и построений. Подробности можно найти в любом руководстве по теории множеств.

Перечислим основные понятия и конструкции:

- Соответствие  $s$  между множествами  $x$  и  $y$  определяется как подмножество их декартова произведения, соответствие между  $x$  и  $x$  называется отношением на  $x$ . Функция  $f$  из множества  $x$  в множество  $y$  — соответствие специального вида:  $\forall u \forall v \forall w (\langle u, v \rangle \in f \ \& \ \langle u, w \rangle \in f \supset v = w)$ .
- Далее вводится понятие равномогности множеств, понятие конечного множества как неравномогного никакому своему собственному подмножеству.
- Следующий объект — ординал:  $\text{ord}(\alpha) := \forall y (y \in \alpha \supset y \subset \alpha) \ \& \ \forall y (y \in \alpha \supset \forall z (z \in y \supset z \subset y))$ . Конечные ординалы дают минимальное по включению бесконечное транзитивное множество — множество натуральных чисел.
- Вводится понятие  $n$ -кратного декартова произведения,  $n$ -местного отношения и  $n$ -арной алгебраической операции. Далее рассматриваются различные алгебраические структуры — тройки вида  $\langle x, \mathfrak{R}, \mathfrak{D} \rangle$ , где  $x$  — непустое множество,  $\mathfrak{R}$  — множество отношений (многместных) на  $x$ ,  $\mathfrak{D}$  — множество многместных алгебраических операций на  $x$ .

**Определение 3.11.** Будем обозначать введенную в этом параграфе систему аксиом теории множеств  $\mathfrak{SET}$ .

В заключении настоящего параграфа приведем дополнительные аксиомы, которые могут быть добавлены к  $\mathfrak{SET}$ . При этом конечность списка аксиом не нарушится. Мы не приводим соответствующие формулы, ограни-

чиваясь содержательной формулировкой.

Регулярность  $\forall x \neg x \in x$ .

**А $\aleph$**  Существование множества натуральных чисел: существует наименьшее индуктивное множество.

**AS1** У любого бесконечного множества существует бесконечное подмножество.

Отметим, что первая аксиома запрещает множеству быть собственным элементом, а последняя аксиома может быть еще усилена: можно постулировать существование счетного подмножества для бесконечного множества.

**4. Секвенциальное исчисление.** Настоящий параграф почти полностью совпадает с соответствующим параграфом из [6], поэтому мы приводим лишь определения и формулировки. Единственным отличием является то, что мы принимаем правило сечения за основное правила вывода.

**Определение 4.1.** Пустой список — это «графичеки пустое место», т. е. набор, не содержащий ни одного знака, формулы, буквы ...

**Определение 4.2.** Список формул :: Пустой список | Список формул  
Формула.

Иными словами, пустой список формул является списком формул и, если  $\Gamma$  — список формул, а  $\varphi$  — формул, то  $\Gamma\varphi$  — список формул.

**Определение 4.3.** Секвенцией называется любое выражение вида  $\Gamma \longrightarrow \Delta$ , где  $\Gamma$  и  $\Delta$  — списки формул.

**Определение 4.4.** Аксиомой называется любая секвенция вида  $\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \Theta\psi\Psi$ , где  $\Gamma, \Delta, \Theta, \Psi$  — произвольные списки формул,  $\varphi$  — произвольная формула.

**Определение 4.4.** Правилем вывода называется либо фигура вида  $\frac{S}{T}$ , либо вида  $\frac{SR}{T}$ , где  $S, T, R$  — секвенции. Секвенции над чертой называются посылками, под чертой — заключениями.

Приведем основные правила вывода секвенциального исчисления:

$$\frac{\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \Omega\Theta}{\Gamma\Delta \longrightarrow \Omega\neg\varphi\Theta}$$

$$\frac{\Gamma\Delta \longrightarrow \Omega\varphi\Theta}{\Gamma\neg\varphi\Delta \longrightarrow \Omega\Theta}$$

$$\frac{\Gamma\varphi\psi\Delta \longrightarrow \Theta}{\Gamma\varphi \& \psi\Delta \longrightarrow \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi\Theta \quad \Gamma \longrightarrow \Delta\psi\Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi \& \psi\Theta}$$

$$\frac{\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \Theta \quad \Gamma\psi\Delta \longrightarrow \Theta}{\Gamma\varphi \vee \psi\Delta \longrightarrow \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi\psi\Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi \vee \psi\Theta}$$

$$\frac{\Gamma\Delta \longrightarrow \Theta\varphi\Omega \quad \Gamma\psi\Delta \longrightarrow \Theta\Omega}{\Gamma\varphi \supset \psi\Delta \longrightarrow \Theta\Omega}$$

$$\frac{\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \Theta\psi\Omega}{\Gamma\Delta \longrightarrow \Theta\varphi \supset \psi\Omega}$$

$$\frac{\Gamma\Delta \longrightarrow \Theta\psi\varphi\Omega \quad \Gamma\psi\varphi\Delta \longrightarrow \Theta\Omega}{\Gamma\varphi \equiv \psi\Delta \longrightarrow \Theta\Omega}$$

$$\frac{\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \Theta\psi\Omega \quad \Gamma\psi\Delta \longrightarrow \Theta\varphi\Omega}{\Gamma\Delta \longrightarrow \Theta \equiv \psi\Omega}$$

$$\frac{\Gamma\varphi\psi\Delta \longrightarrow \Theta}{\Gamma\psi\varphi\Delta \longrightarrow \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi\psi\Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\psi\varphi\Theta}$$

$$\frac{\Gamma\varphi\varphi\Delta \longrightarrow \Theta}{\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi\varphi\Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi\Theta}$$

$$\frac{\Gamma\varphi[p]\Delta \longrightarrow \Theta}{\Gamma\exists q\varphi[q]\Delta \longrightarrow \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi[p]\Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\exists q\varphi[q]\Theta}$$

$$\frac{\Gamma\varphi[p]\Delta \longrightarrow \Theta}{\Gamma\forall q\varphi[q]\Delta \longrightarrow \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi[p]\Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\forall q\varphi[q]\Theta}$$

В последних четырех правилах предполагается, что  $p$  и  $q$  являются переменными, при этом переменная  $p$  не находится в области действия квантора по переменной  $q$ . Кроме того, в предпоследнем правиле левого столбца и в последнем правого переменная  $p$  не является свободной ни в одной из формул списков заключения.

Примем в качестве основного правило сечения:

$$\frac{\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \Theta \quad \Gamma' \longrightarrow \Theta'\varphi\Omega}{\Gamma\Delta\Gamma' \longrightarrow \Theta\Theta'\Omega}.$$

Принятие правила сечения не позволяет доказать невыводимость секвенции  $\longrightarrow$ , как это сделано в [6], теорема 4.1.

Таким образом, мы имеем дело со схемой аксиом и схемами правил вывода. Но имеется очевидный эффективный метод определения, является ли заданная секвенция аксиомой или нет. Точно так же есть эффективный способ определить, является ли фигура  $\frac{S}{T}$ , соответственно фигура  $\frac{SR}{T}$ , правилом вывода. Смысл правила вывода состоит в том, что секвенцию (пару секвенций) посылки правила вывода заменяют на секвенцию–заключение.

**Определение 4.5.** Будем говорить, что секвенция  $T$  непосредственно следует из секвенции  $S$ , соответственно секвенций  $S$  и  $R$ , если существует правило выбора с посылкой  $S$ , соответственно посылками  $S$  и  $R$ , и заключением  $T$ .

**Определение 4.6.** Вывод — это конечный набор секвенций, записанных одна под другой такой, что каждая секвенция в нём является либо аксиомой, либо непосредственно следует из секвенции (пары секвенций) этого набора, находящейся (находящихся) выше в записи. Секвенция называется доказуемой (выводимой), если она является последней (самой нижней) секвенцией некоторого вывода.

Отметим, что в данной работе мы фактически определили понятие вывода в виде дерева, апеллируя к графическому расположению секвенций. Это связано с тем, что в рассматриваемом варианте исчисления не предполагается возможность использования ни натуральных чисел, ни прачисел из [7].

**Определение 4.7.** Будем говорить, что формула  $\varphi$  доказуема в теории множеств, если доказуема секвенция  $\mathfrak{S}\mathfrak{E}\mathfrak{T} \longrightarrow \varphi$ .

**Определение 4.8.** Формула  $\varphi$  называется выводимой, если выводима секвенция  $\longrightarrow \varphi$ .

**Определение 4.9.** Правило вывода  $\frac{S_1, S_2, \dots, S_l}{S}$  называется допустимым, если из доказуемости его посылок следует доказуемость его заключения.

**Теорема 4.1.** Допустимы правила:  $\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi \& \psi\Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi\Theta}$ ,  $\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi \& \psi\Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\psi\Theta}$ ,  $\frac{\Gamma\Delta \longrightarrow \Theta \neg \varphi\Omega}{\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \Theta\Omega}$ . ■

Приведем еще одно допустимое правило вывода.

**Теорема 4.2.** Допустимы следующие правила добавления

$$\frac{\Gamma \Delta \longrightarrow \Sigma}{\Gamma \varphi \Delta \longrightarrow \Sigma}, \quad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta \Sigma}{\Gamma \longrightarrow \Delta \varphi \Sigma}. \blacksquare$$

**5. Правила естественного вывода.** Следующие метатеоремы, которые с одной стороны обоснуют доказательство единственности множества–степени, объединения и других множеств, существование которых либо гарантируется аксиомами теории множеств, либо существуют по схеме выделения. С другой стороны, приводимые теоремы являются естественными правилами доказательства фактов в любой теории.

**Теорема 5.1.** Пусть  $\varphi$  и  $\psi$  – произвольные формулы теории множеств. Если  $\mathcal{SEI} \vdash \varphi$  и  $\mathcal{SEI} \vdash \psi$ , то  $\mathcal{SEI} \vdash \varphi \& \psi$ .  $\blacksquare$

**Теорема 5.2.** Если  $\mathcal{SEI} \vdash \varphi$ , то  $\mathcal{SEI} \vdash \varphi \vee \psi$ .  $\blacksquare$

**Теорема 5.3.** Если  $\mathcal{SEI} \varphi \vdash \psi$ , то  $\mathcal{SEI} \vdash \varphi \supset \psi$ . Более общо  $\mathcal{SEI} \Gamma \vdash \Delta \varphi$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{SEI} \vdash ((\&\Gamma) \supset \varphi) \Delta$ .  $\blacksquare$

**Теорема 5.4.** Если  $\mathcal{SEI} \vdash \forall x \varphi(x)$ , то  $\mathcal{SEI} \vdash \varphi(x)$  для любой переменной  $x$ .  $\blacksquare$

Несколько более общий результат даёт

**Теорема 5.5.**  $\vdash \forall x \varphi(x) \supset \varphi(x)$ .  $\blacksquare$

**Теорема 5.6.**  $\vdash \varphi(x) \supset \varphi(x)$ .  $\blacksquare$

**Теорема 5.7.** Пусть  $\vdash \varphi(x) \equiv \psi(x)$ . Тогда для любой формулы теории множеств  $\mathcal{A}$

1.  $\vdash \mathcal{A} \& \varphi(x) \equiv \mathcal{A} \& \psi(x)$ ,
2.  $\vdash \mathcal{A} \vee \varphi(x) \equiv \mathcal{A} \vee \psi(x)$ ,
3.  $\vdash \neg \varphi(x) \equiv \neg \psi(x)$ ,
4.  $\vdash \mathcal{A} \supset \varphi(x) \equiv \mathcal{A} \supset \psi(x)$ ,
5.  $\vdash (\mathcal{A} \equiv \varphi(x)) \equiv (\mathcal{A} \equiv \psi(x))$ .  $\blacksquare$

**Теорема 5.8.** Пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  – формулы теории множеств. Если  $\mathcal{SEI} \vdash \mathcal{A}$  и  $\mathcal{SEI} \vdash \mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ , то  $\mathcal{SEI} \vdash \mathcal{B}$ .  $\blacksquare$

Единственность множества, определенного некоторой формулой теории множеств и, как следствие единственность множеств, существование которых постулируется аксиомами, является прямым следствием следующей теоремы.

**Теорема 5.9.** Пусть  $\mathcal{SEI} \vdash \forall x (\varphi(x) \equiv \psi(x))$ . Тогда  $\mathcal{SEI} \vdash \{z \in y : \varphi(z)\} = \{z \in y : \psi(z)\}$  при условии, что оба множества определены.

*Доказательство* полностью дублирует доказательство из [6]. ■

**6. Доказательство некоторых основополагающих теорем теории множеств.** В этом параграфе мы приведём основные факты о предикатах равенства, подмножества, которые необходимы для построения содержательной теории и их доказательства. В частности, мы покажем, что введенный предикат равенства обладает естественными свойствами.

**Теорема 6.1.** Доказуемы следующие секвенции:

1.  $\mathcal{SEI} \longrightarrow \forall x(x \subset x)$ ;
2.  $\mathcal{SEI} \longrightarrow \forall x(x = x)$ ;
3.  $\mathcal{SEI} \longrightarrow \forall x \forall y(x = y \supset y = x)$ ;
4.  $\mathcal{SEI} \longrightarrow \forall x \forall y \forall z(x \subset y \& y \subset z \supset x \subset z)$ ;
5.  $\mathcal{SEI} \longrightarrow \forall x(x = y \supset x \subset y)$ ;
6.  $\mathcal{SEI} \longrightarrow \forall x \forall y \forall z(x = y \& y = z \supset x = z)$ ;
7.  $\mathcal{SEI} \longrightarrow \forall x \forall y \forall u(x = y \& u \in x \supset u \in y)$ .

*Доказательство.*

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{SEI} \quad u \in x &\longrightarrow u \in x, \\ \mathcal{SEI} &\longrightarrow u \in x \supset u \in x, \\ \mathcal{SEI} &\longrightarrow \forall u(u \in x \supset u \in x), \\ \mathcal{SEI} &\longrightarrow x \subset x. \\ \mathcal{SEI} &\longrightarrow \forall x(x \subset x). \end{aligned}$$

2.  $\mathcal{SEI} \longrightarrow x \subset x \quad \mathcal{SEI} \longrightarrow x = x$ .

Эта секвенция доказана при построении вывода в первом пункте. Далее:

$$\begin{aligned} \mathcal{SEI} &\longrightarrow x \subset x \& x \subset x, \\ \mathcal{SEI} &\longrightarrow x = x, \\ \mathcal{SEI} &\longrightarrow \forall x(x = x). \end{aligned}$$

3.

$$\text{GET } x \subset y \ y \subset x \longrightarrow x \subset y,$$

$$\text{GET } x \subset y \ y \subset x \longrightarrow y \subset x,$$

$$\text{GET } x \subset y \ y \subset x \longrightarrow x \subset y \ \& \ y \subset x,$$

$$\text{GET } x \subset y \ \& \ y \subset x \longrightarrow y \subset x \ \& \ x \subset y,$$

$$\text{GET } x = y \longrightarrow y = x.$$

$$\text{GET } \longrightarrow x = y \supset y = x,$$

$$\text{GET } \longrightarrow \forall y (x = y \supset y = x),$$

$$\text{GET } \longrightarrow \forall x \forall y (x = y \supset y = x).$$

4.  $\text{GET } u \in y \ u \in x \longrightarrow u \in y \ u \in z \quad \text{GET } u \in x \longrightarrow u \in x \ u \in y \ u \in x.$

Из этих двух секвенций–аксиом по правилу введения импликации в антецедент получается верхняя из нижеследующих секвенций. Нижняя секвенция этой пары является аксиомой.

$$\text{GET } u \in x \supset u \in y \ u \in x \longrightarrow u \in y \ u \in z,$$

$$\text{GET } u \in x \supset u \in y \ u \in z \ u \in x \longrightarrow u \in z.$$

Далее по правилу введения импликации в антецеденте получаем следующую секвенцию.

$$\text{GET } u \in x \supset u \in y \ u \in y \supset u \in z \ u \in x \longrightarrow u \in z.$$

Теперь вводим импликацию в сукцедент:

$$\text{GET } u \in x \supset u \in y \ u \in u \supset u \in z \longrightarrow u \in x \supset u \in z.$$

Далее вводим пару кванторов всеобщности в антецеденте:

$$\text{GET } \forall u (u \in x \supset u \in y) \ \forall u (u \in y \supset u \in z) \longrightarrow u \in x \supset u \in z.$$

Теперь можно применить правило введения всеобщности в сукцеденте:

$$\text{GET } \forall u (u \in x \supset u \in y) \ \forall u (u \in y \supset u \in z) \longrightarrow \forall u (u \in x \supset u \in z).$$

Таким образом, получена секвенция:

$$\text{GET } x \subset y \ y \subset z \longrightarrow x \subset z.$$

Дальнейшее ясно:

$$\text{GET } x \subset y \ \& \ y \subset z \longrightarrow x \subset z,$$

$$\text{GET } \longrightarrow x \subset y \ \& \ y \subset z \supset x \subset z,$$

$$\text{GET } \longrightarrow \forall x \forall y \forall z (x \subset y \ \& \ y \subset z \supset x \subset z).$$



Последняя секвенция получается последовательным введением квантора всеобщности в сукцеденте три раза.

5.

$$\begin{aligned} \text{SET} \quad x \subset y \ y \subset x &\longrightarrow x \subset y, \\ \text{SET} \quad x \subset y \&y \subset x &\longrightarrow x \subset y, \\ \text{SET} \quad x = y &\longrightarrow x \subset y, \\ \text{SET} \quad \longrightarrow x = y &\supset x \subset y, \\ \text{SET} \quad \longrightarrow \forall x \forall y (x = y &\supset x \subset y). \end{aligned}$$

6. Следующая пара секвенций получена при доказательстве предыдущего пункта:

$$\text{SET} \quad x = y \longrightarrow x \subset y \quad \text{SET} \quad y = z \longrightarrow y \subset z.$$

К каждой из секвенций пары применим правило добавления:

$$\text{SET} \quad x = y \ y = z \longrightarrow x \subset y \quad \text{SET} \quad x = y \ y = z \longrightarrow y \subset z.$$

Далее вводим конъюнкцию в сукцеденте:

$$\text{SET} \quad x = y \ y = z \longrightarrow x \subset y \&y \subset z.$$

Ранее доказано, что выводима секвенция

$$\text{SET} \quad x \subset y \&y \subset z \longrightarrow x \subset z.$$

К двум последним секвенциям применяем правило сечения:

$$\text{SET} \quad x = y \ y = z \longrightarrow x \subset z.$$

Теперь вводим конъюнкцию в антецеденте:

$$\text{SET} \quad x = y \&y = z \longrightarrow x \subset z.$$

Аналогично строится вывод секвенции

$$\text{SET} \quad x = y \&y = z \longrightarrow z \subset x.$$

Дальнейшее ясно без комментариев:

$$\begin{aligned} \text{SET} \quad x = y \&y = z &\longrightarrow x \subset z \&z \subset x, \\ \text{SET} \quad x \subset z \&z \subset x &\longrightarrow x = z, \\ \text{SET} \quad x = y \&y = z &\longrightarrow x = z, \\ \text{SET} \quad \longrightarrow x = y \&y = z &\supset x = z, \\ \text{SET} \quad \longrightarrow \forall x \forall y \forall z (x = y \&y = z &\supset x = z). \end{aligned}$$

7. Используя доказанную секвенцию

$$\mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{I} \quad x = y \longrightarrow x \subset y,$$

получаем

$$\mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{I} \quad x = y \longrightarrow \forall u(u \in x \supset u \in y).$$

Исключаем из сукцедента квантор всеобщности

$$\mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{I} \quad x = y \longrightarrow u \in x \supset u \in y.$$

Теперь исключаем импликацию из антецедента

$$\mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{I} \quad x = y \ u \in x \longrightarrow u \in y.$$

Далее вводим конъюнкцию в антецедент

$$\mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{I} \quad x = y \ \& \ u \in x \longrightarrow u \in y.$$

Теперь вводим импликацию в сукцедент

$$\mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{I} \longrightarrow x = y \ \& \ u \in x \supset u \in y.$$

Вводя последовательно, начиная с  $u$  кванторы всеобщности, получаем

$$\mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{I} \longrightarrow \forall x \forall y \forall u (x = y \ \& \ u \in x \supset u \in y). \blacksquare$$

**7. Математическая логика в рамках минимальной теории множеств.** В этом параграфе кратко излагаются положения математической логики в рамках  $\mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{I}$ . Не останавливаясь подробно, отметим, что в данном контексте можно рассматривать язык исчисления предикатов как некоторое множество, не обязательно конечное, содержащее знаки (обозначения) для предметных переменных, предметных констант, предикатов, функторов (функциональных символов) соответствующей местности и арности. Кроме того, если требуется могут быть введены скобки и другие вспомогательные символы. Естественно требуются и знаки для стандартных логических связок и кванторов.

Формулы языка исчисления предикатов определяются традиционно. Далее можно остановиться на любом виде исчисления предикатов, как гильбертовского типа, так и исчисления секвенций. Можно следовать изложению любого пособия о математической логике, например, [10, 11]. В любом случае для простоты изложения требуются правила естественного вывода.

Далее следует ввести формализованную элементарную теорию чисел либо некую её разновидность в виде теоретико-множественной арифметики [8]. Возможно и введение слабой арифметики [12] или варианта арифметики Пресбургера для построения множества натуральных чисел. В частности справедлива

**Теорема 7.1.** Любое множество  $x$  вида  $0''\dots'$  является конечным ординалом.

*Доказательство.* Пусть  $u \in x$ . Тогда, так как по определению множество  $x$  имеет вид  $1, 2, \dots$ , то либо  $u = 0$ , либо  $u$  имеет вид  $0''\dots'$ , причем «число штрихов на единицу меньше», чем у  $x$ . В обоих случаях  $u \subset x$ . Если же  $v \in u$ , то  $v = 0''\dots' \vee v = \emptyset$ . Так как «число штрихов меньше», чем у  $u$ , очевидно, в обоих случаях  $v \subset u$ . ■

Наличие конечных ординалов позволяет перечислять элементы некоторых множеств. В частности, возможно рассмотрение языков исчисления предикатов с количеством переменных, констант, функторов и предикатов «равным количеству» конечных ординалов.

Далее в рамках  $\mathcal{SET}$  рассматривается теория моделей, как алгебраических структур, в которых истинны все теоремы теорий в конкретных языках исчисления предикатов. В частности, моделью слабой арифметики является множество всех слов в однобуквенном алфавите. Существование множества всех слов в любом алфавите следует из индуктивности такого множества и возможности сопоставить каждому слову некоторый конечный ординал.

Далее можно развивать теории гипернатуральных, гиперрациональных чисел. При этом из-за отсутствия аксиомы выбора в выстраиваемой теории моделей отсутствует теорема компактности, что не позволяет явно рассматривать модели гиперарифметики. Невозможность факторизации не позволяет и ввести вещественные числа, однако свойства вещественных чисел могут быть моделированы в рамках теории гипервещественных чисел.

## Список литературы

- [1] Алексюк В. Н. Положительная теория множеств: КГПИ. — Сыктывкар, 1996. — 19 с. — Деп. в ВИНТИ № 3345–В1996.
- [2] Алексюк В. Н. Положительная теория множеств 2: КГПИ. — Сыктывкар, 1996. — 16 с. — Деп. в ВИНТИ № 3572–В1996.

- [3] Алексюк В. Н. Положительная теория множеств 3: КГПИ. — Сыктывкар, 1996. — 15 с. — Деп. в ВИНТИ № 3557–В1996.
- [4] Алексюк В. Н. Положительная теория множеств 4: КГПИ. — Сыктывкар, 1996. — 11 с. — Деп. в ВИНТИ № 3686–В1996.
- [5] Алексюк В. Н. Положительная теория множеств 5: КГПИ. — Сыктывкар, 2001. — 11 с. — Деп. в ВИНТИ № 1381–В2001.
- [6] Ловягин Ю. Н. О преподавании математической логики // Некоторые проблемы современной математики и математического образования: Материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2014». — СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. — С. 161–180.
- [7] Ловягин Ю. Н. Теоретико-множественная арифметика, основанная на понятии прачисла // Актуальные проблемы естественных и математических наук в России и за рубежом: Сборник научных трудов по итогам конференции. — Новосибирск, 2015. — С. 14–20.
- [8] Кейслер Г. Дж., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977. — 64 с.
- [9] Вopenка П. Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность. — Новосибирск: изд. ИМ, 2004. — 612 с.
- [10] Косовский Н. К. Элементы математической логики и её приложения к теории субрекурсивных алгоритмов. — Л.: изд. ЛГУ, 1981. — 192 с.
- [11] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
- [12] Ловягин Ю. Н. Арифметика А. Тарского как методологическая основа преподавания элементарного анализа // Некоторые проблемы современной математики и математического образования: Материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2012». — СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2012. — С. 182–194.

## О ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ СНИЗУ ПРОЕКЦИОННОЙ КОНСТАНТЫ $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$

Локоть В. В., Мартынов О. М.

Мурманский арктический государственный университет

Мурманск

e-mail: olegmartynov@yandex.ru

**Lokot' V. V., Martynov O. M. About precision of the lower bound for projection constant  $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$ .** In this paper we prove that lower bound for the relative projection constant  $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$  is precise if  $m = 3, \dots, 8$ .

В данной статье показывается, что оценка снизу для относительной проекционной константы  $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$  является точной, если  $m = 3, \dots, 8$ .

Пусть  $Y$  – замкнутое подпространство банахова пространства  $X$ . Линейный ограниченный оператор  $\pi : X \rightarrow Y$  называется оператором проектирования (проекцией)  $X$  на  $Y$ , если  $\pi y = y$  для любого  $y \in Y$ . Множество всех операторов проектирования пространства  $X$  на подпространство  $Y$  будем обозначать  $\pi(X, Y)$ . Относительной проекционной константой подпространства  $Y$  в пространстве  $X$  называется число  $\lambda(Y, X) = \inf \{ \|\pi\| ; \pi \in \pi(X, Y) \}$ .

Среди операторов проектирования особый интерес представляют те, нормы которых совпадают с относительной проекционной константой. Если такие проекции существуют, то они называются минимальными проекциями. Таким образом, проекция  $\pi_0$  называется минимальной, если  $\|\pi_0\| = \lambda(Y, X)$ .

Пусть  $X = l_1^{(n)}$  –  $n$ -мерное линейное нормированное пространство элементов  $x = (x_i)_1^n$  с нормой

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Пусть также  $f = (f_i)_1^n \neq 0$ ,  $g = (g_i)_1^n \neq 0$ ,  $h = (h_i)_1^n \neq 0$ ,  $t = (t_i)_1^n \neq 0$ ,  $y = (y_i)_1^n \neq 0$  – линейные функционалы, определенные в  $l_1^{(n)}$ ,

$$f^{-1}(0) = \left\{ x \in l_1^{(n)} \mid f(x) = \sum_{i=1}^n f_i x_i = 0 \right\},$$

$$g^{-1}(0) = \left\{ x \in l_1^{(n)} \mid g(x) = \sum_{i=1}^n g_i x_i = 0 \right\},$$

$$h^{-1}(0) = \left\{ x \in l_1^{(n)} \mid h(x) = \sum_{i=1}^n h_i x_i = 0 \right\},$$

$$t^{-1}(0) = \left\{ x \in l_1^{(n)} \mid t(x) = \sum_{i=1}^n t_i x_i = 0 \right\},$$

$$y^{-1}(0) = \left\{ x \in l_1^{(n)} \mid y(x) = \sum_{i=1}^n y_i x_i = 0 \right\}$$

– гиперплоскости в  $l_1^{(n)}$ .

В случае линейной независимости функционалов  $f, g, h, t$  и  $y$  пространство  $Y_{n-5} = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0) \cap t^{-1}(0) \cap y^{-1}(0)$  является подпространством пространства  $l_1^{(n)}$  коразмерности 5.

Проекция  $l_1^{(n)}$  на  $Y_{n-5}$  имеет вид [1]

$$\pi_{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta} x = x - \alpha f(x) - \beta g(x) - \gamma h(x) - \zeta t(x) - \eta y(x)$$

при условиях

$$\begin{aligned} f(\alpha) = g(\beta) = h(\gamma) = t(\zeta) = y(\eta) = 1; \quad f(\beta) = f(\gamma) = f(\zeta) = f(\eta) = \\ = g(\alpha) = g(\gamma) = g(\zeta) = g(\eta) = h(\alpha) = h(\beta) = h(\zeta) = h(\eta) = \\ = t(\alpha) = t(\beta) = t(\gamma) = t(\eta) = y(\alpha) = y(\beta) = y(\gamma) = y(\zeta) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Норма проекции на подпространство  $Y_{n-5}$  в пространстве  $l_1^{(n)}$  вычисляется по формуле

$$\| \pi \| = \max_{1 \leq j \leq n} M_j, \quad \text{где } M_j = \sum_{i=1}^n | \delta_{ij} - \alpha_i f_j - \beta_i g_j - \gamma_i h_j - \zeta_i t_j - \eta_i y_j |.$$

В работах [2, 3] доказана

**Теорема.** Пусть  $\pi_{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta}^{(0)}$  – оператор проектирования с минимальной нормой пространства  $l_1^{(n)}$ ,  $n = 31m$ ,  $m \in N$ ,  $m > 2$  на подпространство  $Y_{n-5} = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0) \cap t^{-1}(0) \cap y^{-1}(0)$ , где функционалы  $f, g, h, t$

и  $y$  имеют вид

$$\begin{aligned} f &= (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), \\ g &= (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0), \\ h &= (1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0), \\ t &= (1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0), \\ y &= (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

(здесь цифры 1 и 0 означают последовательности из  $m$  единиц и нулей соответственно).

Тогда

$$\lambda(Y_{n-5}, l_1^{(n)}) \geq \frac{64m^3 + 31m^2 - 182m + 20}{24m^3 + 11m^2 - 62m}.$$

Точное значение константы  $\lambda(Y_{n-5}, l_1^{(n)})$  получим, если  $m = 3, \dots, 8$ , так как в этих случаях можно подобрать значения  $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \zeta^0, \eta^0$ , при которых значения  $M_i^0$  ( $i = 1, \dots, 31m$ ) будут равны

$$M_0 = \frac{64m^3 + 31m^2 - 182m + 20}{24m^3 + 11m^2 - 62m}.$$

Действительно, положим

$$\begin{aligned} \alpha_1^0 &= \beta_1^0 = \gamma_1^0 = \zeta_1^0 = \eta_1^0 = \frac{-m^2 + 10m - 12}{6m(24m^2 + 11m - 62)}, \\ \alpha_2^0 &= \beta_2^0 = \dots = \zeta_6^0 = \eta_6^0 = \frac{7m^2 + m - 15}{6m(24m^2 + 11m - 62)}, \eta_2^0 = -2\alpha_2^0, \zeta_3^0 = -2\alpha_3^0, \gamma_4^0 = -2\alpha_4^0, \\ \beta_5^0 &= -2\alpha_5^0, \alpha_6^0 = -2\beta_6^0, \alpha_7^0 = \beta_7^0 = \dots = \gamma_{16}^0 = \eta_{16}^0 = \frac{11m^2 - m - 20}{6m(24m^2 + 11m - 62)}, \\ \zeta_7^0 &= \eta_7^0 = -\alpha_7^0, \gamma_8^0 = \zeta_8^0 = -\alpha_8^0, \beta_9^0 = \gamma_9^0 = -\alpha_9^0, \alpha_{10}^0 = \beta_{10}^0 = -\gamma_{10}^0, \alpha_{11}^0 = \gamma_{11}^0 = -\beta_{11}^0, \\ \beta_{12}^0 &= \zeta_{12}^0 = -\alpha_{12}^0, \alpha_{13}^0 = \eta_{13}^0 = -\beta_{13}^0, \beta_{14}^0 = \eta_{14}^0 = -\alpha_{14}^0, \gamma_{15}^0 = \eta_{15}^0 = -\alpha_{15}^0, \\ \alpha_{16}^0 &= \zeta_{16}^0 = -\beta_{16}^0, \alpha_{17}^0 = \beta_{17}^0 = \dots = \beta_{26}^0 = \zeta_{26}^0 = \frac{7m^2 + m - 15}{3m(24m^2 + 11m - 62)}, \\ \gamma_{17}^0 &= \zeta_{17}^0 = \eta_{17}^0 = -\frac{1}{2}\alpha_{17}^0, \beta_{18}^0 = \gamma_{18}^0 = \zeta_{18}^0 = -\frac{1}{2}\alpha_{18}^0, \alpha_{19}^0 = \beta_{19}^0 = \gamma_{19}^0 = -\frac{1}{2}\zeta_{19}^0, \\ \beta_{20}^0 &= \zeta_{20}^0 = \eta_{20}^0 = -\frac{1}{2}\alpha_{20}^0, \beta_{21}^0 = \gamma_{21}^0 = \eta_{21}^0 = -\frac{1}{2}\alpha_{21}^0, \alpha_{22}^0 = \gamma_{22}^0 = \zeta_{22}^0 = -\frac{1}{2}\beta_{22}^0, \\ \alpha_{23}^0 &= \beta_{23}^0 = \zeta_{23}^0 = -\frac{1}{2}\beta_{23}^0, \alpha_{24}^0 = \beta_{24}^0 = \eta_{24}^0 = -\frac{1}{2}\gamma_{24}^0, \alpha_{25}^0 = \zeta_{25}^0 = \eta_{25}^0 = -\frac{1}{2}\beta_{25}^0, \end{aligned}$$

$$\alpha_{26}^0 = \gamma_{26}^0 = \eta_{26}^0 = -\frac{1}{2}\beta_{26}^0.$$

Значения  $\alpha_{27}^0 = \beta_{27}^0 = \dots = \eta_{31}^0$  можно однозначно найти из условий (1).

Так как  $\alpha_1^0 \geq 0$ , то  $\frac{-m^2 + 10m - 12}{6m(24m^2 + 11m - 62)} \geq 0$ , откуда  $3 \leq m \leq 8$ . Тогда  $M_i^0 = M_0$  ( $i = 1, \dots, 31m$ ), если  $m = 3, \dots, 8$ .

Значит,

$$\lambda(Y_{n-5}, l_1^{(n)}) = \frac{64m^3 + 31m^2 - 182m + 20}{24m^3 + 11m^2 - 62m},$$

если  $m = 3, \dots, 8$ .

Вопрос о точности оценки снизу константы  $\lambda(Y_{n-5}, l_1^{(n)})$  при  $m \geq 9$  остается открытым.

## Список литературы

- [1] Blatter J., Cheney E. W. Minimal projections on hyperplanes in sequence spaces // Ann. math. pura et appl., 101 (1974), – p. 215–227.
- [2] Локоть В. В., Мартынов О. М., Тарасенко Е. А. Об относительной проекционной константе  $\lambda(Y_{n-5}, l_1^{(n)})$  // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. LXVII Герценовские чтения–2014. – СПб: РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – С. 130–135.
- [3] Локоть В. В., Мартынов О. М. Проекционные константы. – Мурманск: МГГУ, 2013. – 302 с.

УДК 517.52

## ОПЕРАТОРЫ В ОБОБЩЁННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рахимова А. И., Напалков В. В.

Башкирский Государственный Университет  
Уфа

**Rakhimova A. I., Napalkov V. V. The operators of the generalized differentiation.** In the generalized Bargman–Fok’s space is considered the interfaced operator to the operator of multiplication by a variable  $z$ . It is proved that it coincides with the operator of the generalized differentiation and its properties are studied.



В обобщённом пространстве Баргмана–Фока рассматривается сопряжённый оператор к оператору умножения на переменную  $z$ . Доказано, что он совпадает с оператором обобщённого дифференцирования и изучены его свойства.

В математической физике важную роль играет пространство Фока.

Пусть  $H(\mathbb{C})$  — пространство целых функций с топологией компактной сходимости. Любые функции  $f(z)$  и  $g(z)$  из пространства  $H(\mathbb{C})$  раскладываются в ряды Тейлора на всей комплексной плоскости, следовательно, их можно записать в виде  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ .

Обобщённое пространство Фока имеет вид:

$$F_{\beta} = \{f(z) \in H(\mathbb{C}) : \|f\|^2 = \frac{1}{\pi^{\frac{2}{\beta}} \Gamma(\frac{2}{\beta})} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^{\beta}} d\mu < \infty\}, \beta > 0,$$

где  $d\mu$  — мера Лебега на плоскости. Это пространство гильбертово со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{\pi^{\frac{2}{\beta}} \Gamma(\frac{2}{\beta})} \int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{g(z)} e^{-|z|^{\beta}} d\mu,$$

где  $f(z), g(z) \in F_{\beta}$ . Функции  $e_n(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{2}{\beta})}{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+1))}} z^n, n = \overline{(0; +\infty)}$ , образуют в нём ортонормированный базис.

Введём обозначение  $k = \frac{2}{\beta}$ .

Возьмём функции  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in F_{\beta}$  и  $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m \in F_{\beta}$ .

Рассматриваем оператор  $S = z \cdot$  умножения на переменную  $z$ , действующий по правилу  $Sf : f(z) \rightarrow z \cdot f(z), f(z) \in F_{\beta}$ . Нужно описать сопряжённый ему оператор в обобщённом пространстве Фока. Сопряжённый оператор  $S^*$  получается из соотношения  $(Sf, g) = (f, S^*g)$ .

В дальнейшем мы используем оператор обобщённого дифференцирования. Возьмем последовательность комплексных чисел  $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$  таких, что  $m_0 = 0, m_n \neq 0$  при  $n \geq 1$  и  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|m_n|} < \infty$ . Рассматриваем функцию

$f(z)$  такую, что  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(\mathbb{C})$ . Оператором обобщённого дифференцирования, порождённым последовательностью  $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ , называется оператор  $D$ , который действует по правилу  $Df(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n m_n z^n$ . В силу

условий на последовательность  $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$  оператор  $D$  действует из пространства  $H(\mathbb{C})$  в пространство  $H(\mathbb{C})$  линейно и непрерывно (см. [1]).

**Теорема 1.** Оператор, сопряженный к оператору  $S = z \cdot$  умножения на переменную  $z$   $Sf(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , имеет вид  $S^*g(z) = Dg(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} b_n m_n z^n$ , где  $m_n = \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+1))}{\Gamma(\frac{2}{\beta}n)}$ ,  $n \geq 1$ ,  $m_0 = 0$  (см. [1]).

**Теорема 2.** Оператор, сопряженный к оператору  $S = z \cdot$  умножения на переменную  $z$ , имеет вид

$$S^* = c_1 \frac{d}{dz} + c_2 z \frac{d^2}{dz^2} + \dots + c_{n-1} z^{n-2} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + c_n z^{n-1} \frac{d^n}{dz^n} + \dots, \quad n \leq n_0,$$

где порядок оператора  $n_0$  конечный или бесконечный, его коэффициенты такие, что  $\sum_{s=1}^n \frac{c_s n!}{(n-s)!} = \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+1))}{\Gamma(\frac{2}{\beta}n)}$ ,  $n = \overline{(1; n_0)}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим равенство  $(Sf, g) = (f, S^*g)$ . Проверим его для функций  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ .

Для левой части верно:

$$\begin{aligned} (Sf, g) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{\infty} \overline{b_m} \frac{1}{\pi k \Gamma(k)} \int_{\mathbb{C}} z^{n+1} \overline{z}^m e^{-|z|^\beta} d\mu(z) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{\infty} \overline{b_m} \frac{1}{\pi \frac{2}{\beta} \Gamma(\frac{2}{\beta})} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r^{n+m+2} e^{i(n-m+1)\varphi} e^{-r^\beta} dr d\varphi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_{n+1}} \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{\beta})} \int_0^{\infty} t^{\frac{2(n+2)}{\beta}-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_{n+1}} \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+2))}{\Gamma(\frac{2}{\beta})}. \end{aligned}$$

Для правой части верно:

$$\begin{aligned} (f, S^*g) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{\infty} \overline{b_m} \sum_{s=1}^m \frac{c_s m!}{(m-s)!} \frac{1}{\pi \frac{2}{\beta} \Gamma(\frac{2}{\beta})} \int_{\mathbb{C}} z^n \overline{z}^{m-1} e^{-|z|^\beta} d\mu(z) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_{n+1}} \sum_{s=1}^{n+1} \frac{c_s (n+1)!}{(n-s+1)!} \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{\beta})} \int_0^{\infty} r^{\frac{2(n+1)\beta}{\beta}-\beta} e^{-r^\beta} d(r^\beta) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_{n+1}} \sum_{s=1}^{n+1} \frac{c_s (n+1)!}{(n-s+1)!} \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{\beta})} \int_0^{\infty} t^{\frac{2(n+1)}{\beta}-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_{n+1}} \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+2))}{\Gamma(\frac{2}{\beta})}. \end{aligned}$$

Равенство выполняется. Следовательно, сопряжённый оператор к оператору умножения имеет данный вид. Теорема доказана.

**Теорема 3.** Оператор дифференцирования  $S^*$  совпадает с оператором обобщённого дифференцирования  $D$ .

*Доказательство.* Действие оператора дифференцирования  $S^*$  на функцию  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  имеет вид  $S^* f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} (c_1 n + c_2 n(n-1) + \dots + c_{n-1} n \cdot \dots \cdot 2 + c_n n \cdot \dots \cdot 1)$ . Коэффициенты оператора такие, что  $c_1 n + c_2 n(n-1) + \dots + c_{n-1} n \cdot \dots \cdot 2 + c_n n \cdot \dots \cdot 1 = \frac{\Gamma(k(n+1))}{\Gamma(kn)}$ . Верна формула  $S^* f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k(n+1))}{\Gamma(kn)} a_n z^{n-1}$ . Действие оператора обобщённого дифференцирования получается по формуле  $Df(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k(n+1))}{\Gamma(kn)} a_n z^{n-1}$ . Полученные результаты равны, следовательно, рассматриваемые операторы совпадают. Теорема доказана.

**Теорема 4.** Если  $k$  — целое число, то дифференциальный оператор  $S^*$  конечный порядка  $k$ , если  $k$  — нецелое число, то дифференциальный оператор  $S^*$  бесконечный.

*Доказательство.* Возьмем функции  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  и  $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ . По определению сопряжённого оператора получается выражение  $(z \cdot f(z), g(z)) = (f(z), (c_1 \frac{d}{dz} + \dots + c_{n_0} z^{n_0-1} \frac{d^{n_0}}{dz^{n_0}} + \dots) g(z))$ .

Вычисляем эти интегралы и приравниваем их.

$$(Sf, g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_{n+1} \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+2))}{\Gamma(\frac{2}{\beta})}$$

$$(f, S^*g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_{n+1} \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+2))}{\Gamma(\frac{2}{\beta})}$$

Полученное уравнение имеет следующий вид:

$$c_1 n + \dots + c_{n_0} n \cdot \dots \cdot (n - n_0 + 1) = \frac{\Gamma(k(n+1))}{\Gamma(kn)}$$

Выражение  $c_1 n + \dots + c_{n_0} n \cdot \dots \cdot (n - n_0 + 1)$  можно собрать по степеням числа  $n$ , коэффициенты которого имеют вид

$$\tilde{c}_s = \alpha_1^s c_1 + \dots + \alpha_{n_0}^s c_{n_0}, \quad s = \overline{(1; n_0)}$$

Получается следующее равенство:

$$c_1 n + \dots + c_{n_0} n \cdot \dots \cdot (n - n_0 + 1) = \tilde{c}_1 n + \dots + \tilde{c}_{n_0} n^{n_0}.$$

Пусть  $k$  — целое число, тогда выражение  $\frac{\Gamma(k(n+1))}{\Gamma(kn)}$  преобразуется к виду:  $\frac{\Gamma(k(n+1))}{\Gamma(kn)} = \frac{(kn+k-1)!}{(kn-1)!} = (kn+k-1) \cdot \dots \cdot kn$ . Также выражение  $(kn+k-1) \cdot \dots \cdot kn$  можно собрать по степеням числа  $n$ , коэффициенты которого имеют вид  $\tilde{c}_s = \beta_1^s k + \dots + \beta_k^s k^k$ ,  $s = \overline{(1; k)}$ . Получается следующее равенство:  $(kn+k-1) \cdot \dots \cdot kn = \tilde{c}_1 n + \dots + \tilde{c}_k n^k$ .

Следовательно, получается следующее уравнение.

$$\tilde{c}_1 n + \dots + \tilde{c}_{n_0} n^{n_0} = \tilde{c}_1 n + \dots + \tilde{c}_k n^k.$$

Коэффициенты  $\tilde{c}_s$ ,  $s = \overline{(1; n_0)}$  нужно найти, коэффициенты  $\tilde{c}_s$ ,  $s = \overline{(1; k)}$  известны. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях числа  $n$ .

Решение последнего уравнения имеет следующий вид.

$$\begin{cases} \tilde{c}_s = \tilde{c}_s, & s = \overline{(1; k)}, \\ \tilde{c}_s = 0, & s = \overline{(k+1; n_0)}. \end{cases}$$

Решение исходного уравнения имеет следующий вид.

$$\begin{cases} c_s \neq 0, & s = \overline{(1; k)}, \\ c_s = 0, & s = \overline{(k+1; n_0)}. \end{cases}$$

Следовательно, конечное число коэффициентов  $n_0$  отлично от нуля, их количество равно числу  $k$ . Дифференциальный оператор  $S^*$  конечный порядка  $k$ . Верно утверждение: если  $k$  — целое число, то порядок оператора  $n_0$  конечный и равен числу  $k$ .

Пусть дифференциальный оператор  $S^*$  имеет конечный порядок  $n_0$ , тогда получается следующее уравнение.

$$\tilde{c}_1 n + \dots + \tilde{c}_{n_0} n^{n_0} = \frac{\Gamma(k(n+1))}{\Gamma(kn)}.$$

Выражение  $\frac{\Gamma(k(n+1))}{\Gamma(kn)}$  имеет вид  $\frac{\Gamma(k(n+1))}{\Gamma(kn)} = \tilde{c}_1 n + \dots + \tilde{c}_{n_0} n^{n_0}$ . Это выражение можно разложить по степеням числа  $n$ , коэффициенты которого имеют вид  $\tilde{c}_s = \tilde{c}_s$ ,  $s = \overline{(1; n_0)}$ . Получается следующее равенство:  $\frac{\Gamma(k(n+1))}{\Gamma(kn)} = \tilde{c}_1 n + \dots + \tilde{c}_{n_0} n^{n_0}$ . Следовательно,  $k$  — целое число, число  $k$  равно числу  $n_0$ ,  $k = n_0$ .

Верно утверждение: если порядок оператора  $n_0$  конечный, то  $k$  — целое число. Получается эквивалентность:  $k$  — целое число тогда и только тогда, когда порядок оператора  $n_0$  конечный и равен числу  $k$ .

Пусть  $k$  — нецелое число, тогда пользуемся методом от противного. Если порядок  $n_0$  конечный, то  $k$  — целое число. Следовательно, порядок дифференциального оператора  $n_0$  бесконечный. Верно утверждение: если  $k$  — нецелое число, то порядок оператора  $n_0$  бесконечный.

Пусть порядок дифференциального оператора  $n_0$  бесконечный, тогда пользуемся также методом от противного. Если  $k$  — целое число, то порядок  $n_0$  конечный. Следовательно,  $k$  — нецелое число. Верно утверждение: если порядок оператора  $n_0$  бесконечный, то  $k$  — нецелое число. Получается эквивалентность:  $k$  — нецелое число тогда и только тогда, когда порядок оператора  $n_0$  бесконечный. Теорема доказана.

**Теорема 5.** Коэффициенты дифференциального оператора

$$S^* = c_1 \frac{d}{dz} + c_2 z \frac{d^2}{dz^2} + \dots + c_{n-1} z^{n-2} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + c_n z^{n-1} \frac{d^n}{dz^n} + \dots$$

вычисляются по формуле  $c_n = \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^{n-s} \Gamma(k(s+1))}{s!(n-s)! \Gamma(ks)}$ ,  $n = \overline{(1; n_0)}$ , где  $n_0$  — порядок дифференциального оператора.

*Доказательство.* По определению сопряженного оператора выполняется равенство  $(z \cdot f(z), g(z)) = (f(z), (c_1 \frac{d}{dz} + \dots + c_{n_0} z^{n_0-1} \frac{d^{n_0}}{dz^{n_0}} + \dots) g(z))$ . Вычисляем эти интегралы и приравниваем их. Полученное уравнение имеет следующий вид:  $c_1 n + \dots + c_{n_0} n \cdot \dots \cdot (n - n_0 + 1) = \frac{\Gamma(k(n+1))}{\Gamma(kn)}$ .

При  $n = 1$  получается, что  $c_1 = \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)}$ , при  $n = 2$   $c_2 = \frac{\Gamma(3k)}{2\Gamma(2k)} - c_1$ . При  $n = 3$  получается, что  $c_3 = \frac{\Gamma(4k)}{6\Gamma(3k)} - \frac{c_1}{2} - c_2$ , при  $n = 4$   $c_4 = \frac{\Gamma(5k)}{24\Gamma(4k)} - \frac{c_1}{6} - \frac{c_2}{2} - c_3$ .

Следовательно, верна формула  $c_n = \frac{\Gamma(k(n+1))}{n! \Gamma(kn)} - \sum_{s=1}^{n-1} \frac{c_s}{(n-s)!} = \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^{n-s} \Gamma(k(s+1))}{s!(n-s)! \Gamma(ks)}$ .

Коэффициенты дифференциального оператора имеют следующий вид:  $c_n = \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^{n-s} \Gamma(k(s+1))}{s!(n-s)! \Gamma(ks)}$ ,  $n = \overline{(1; n_0)}$ , где  $n_0$  — порядок дифференциального оператора. Теорема доказана.

Поскольку дифференциальный оператор  $S^*$  действует на целую функцию, а коэффициенты  $c_n$ ,  $n = \overline{(1; n_0)}$ , такие, что  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty$ , то получается также целая функция. Для коэффициентов  $c_n$ ,  $n = \overline{(1; n_0)}$ , выполняется асимптотика  $c_n \leq \frac{k^k n^{k-n+\frac{1}{2}} e^n (1+\frac{1}{n})^{k-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$  и верно равенство  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ .

## Список литературы

- [1] Дильмухаметова А. М., Муллабаева А. У., Напалков В. В. Обобщение пространства Фока // Уфимский математический журнал. Уфа. 2010. Т. 2, №1. С. 52–58.
- [2] Дильмухаметова А. М., Напалков В. В. Обобщённые производные и дифференциальные операторы с переменными коэффициентами // Труды Института математики с ВЦ УНЦ РАН. Уфа. 2008. Вып. 1. С. 76–83.

УДК 517.518.82

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”

Московский педагогический государственный университет

Москва

e-mail: ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, dianacve@inbox.ru

**Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Tsvetkovich D. G. Special problems for the Bernstein polynomials in a complex domain.** We discuss some special problems, which connected with the behavior of the classical Bernstein polynomials in a complex domain.

Обсуждаются специальные задачи, связанные с поведением классических полиномов Бернштейна в комплексной области.

Настоящая работа посвящена одной особой теме из теории классических полиномов Бернштейна. Нас будет интересовать поведение полиномов Бернштейна в комплексной области при условии, что порождающая их непрерывная функция  $f$  является кусочно линейной на  $[0, 1]$  с рациональными абсциссами точек излома. Этот случай обладает своей спецификой, не всегда заметной на фоне общей теории [1]–[4]. Мы укажем основные вопросы, требующие изучения, и разберём модельный пример, на котором удаётся добиться полной ясности. Основываясь на примере и вспомогательных компьютерных расчетах, выдвинем затем ряд гипотез, относимых к общему, интересующему

нас случаю.

Для функции  $f \in C[0, 1]$  полиномы Бернштейна комплексной переменной  $z \in \mathbb{C}$  вводят формулой

$$B_n(f, z) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где  $C_n^k$  — обычные биномиальные коэффициенты. Будем считать далее, что функция  $f$  является вещественнозначной и кусочно линейной на  $[0, 1]$  с конечным числом точек излома, все абсциссы которых рациональны. Полиномы Бернштейна для таких функций отличаются важными особенностями.

Запишем абсциссы точек излома для функции  $f$  в виде несократимых дробей

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1}, \quad \dots, \quad x_r = \frac{p_r}{q_r} \quad (2)$$

с общим знаменателем  $q = \text{НОК}(q_1, \dots, q_r) \geq 2$ . Тогда справедливо *свойство склеивания*

$$B_{mq+1}(f, z) = B_{mq}(f, z), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Свойство (3) следует учитывать при изучении полиномов Бернштейна от кусочно линейных функций (см. [5]–[8]). Цепочку полиномов  $B_{mq}(f, z)$ , где  $m \in \mathbb{N}$ , полезно выделять из общей последовательности полиномов (1).

При обсуждении поведения полиномов Бернштейна в плоскости  $\mathbb{C}$  сделаем акцент на трёх вопросах.

1. Какова истинная область сходимости последовательности (1), и как выглядит предельная функция?
2. Какова скорость сходимости последовательности (1) к предельной функции внутри и на границе области сходимости?
3. Как распределены нули полиномов  $B_n(f, z)$ , и что происходит с нулями в пределе при  $n \rightarrow \infty$ ?

Имеются веские причины полагать, что в случае кусочно линейной порождающей функции  $f$  на все три вопроса можно получить достаточно полные ответы. Это позволит существенно дополнить общую теорию Канторовича–Бернштейна [9], [10] о сходимости полиномов Бернштейна в комплексной области (см. также [2, гл. IV]). Заметим, что интересующий нас случай ранее

особо не выделялся, и его специфика не учитывалась. Вопрос о скорости сходимости полиномов Бернштейна в комплексной области прежде, возможно, совсем не ставился. Интерес к распределению нулей полиномов Бернштейна возник у нас под влиянием работы Новикова [11], посвященной одному характерному примеру, важному для теории всплесков. Упомянутая работа [11] достаточно сложна и содержит смысловые лакуны. Мы разберем другой модельный пример, где сравнительно легко прояснить детали и, главное, почувствовать контуры будущего исследования.

Пусть

$$f(x) = |2x - 1|, \quad x \in [0, 1]. \quad (4)$$

Это простая симметричная кусочно линейная функция с изломом в точке

$$x = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Полиномы Бернштейна для функции (4) обозначим просто через  $B_n(z)$ . Многие их свойства отмечены в недавних работах [6], [8]. По свойству (3), учитывая единственный излом в точке (5) со знаменателем  $q = 2$ , получим, что  $B_{2m+1}(z) = B_{2m}(z)$  при всех  $m \in \mathbb{N}$ . Поэтому далее рассматриваем полиномы лишь с чётными номерами. Согласно общему определению (1), отнесённому к функции (4), запишем

$$B_{2m}(z) = \sum_{k=0}^{2m} \left| \frac{k}{m} - 1 \right| C_{2m}^k z^k (1-z)^{2m-k}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Центральную роль при изучении полиномов (6) играет следующее *разложение Поповичу*

$$B_{2m}(z) = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} C_{2k}^k (z(1-z))^k, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

по поводу которого см. [6], [8], [12]. Разложение (7) легко дифференцировать. Выражения для производных полезны при исследовании нулей полиномов Бернштейна в комплексной области. Так, например, имеем

$$B'_{2m}(z) = 2(2z-1) \sum_{k=0}^{m-1} C_{2k}^k (z(1-z))^k, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Сравнение (7) и (8) даёт связь между полиномом и его производной:

$$(2z-1)B'_{2m}(z) = 2(B_{2m}(z) - C_{2m}^m (z(1-z))^m), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (9)$$



Из (9) легко выводится отсутствие кратных нулей для всех полиномов (6). Особенно простым будет выражение для второй производной:

$$B''_{2m}(z) = 2mC_{2m}^m(z(1-z))^{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Видно, что любой полином  $B''_{2m}(z)$  при  $m \geq 2$  имеет лишь два нуля:  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1$ , причем оба — кратности  $m - 1$ .

При изучении поведения полиномов (6) в комплексной области полезен переход от разложения (7) к модифицированному разложению

$$B_{2m}(z) = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} 2^{-2k} C_{2k}^k (4z(1-z))^k, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

с последующей заменой

$$\zeta = 4z(1-z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (12)$$

При замене (12) возникают новые полиномы переменной  $\zeta \in \mathbb{C}$ , совпадающие с частичными суммами степенного ряда

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} 2^{-2k} C_{2k}^k \zeta^k = \sqrt{1-\zeta}, \quad |\zeta| \leq 1. \quad (13)$$

Основываясь на соотношениях (7)–(13), можно ответить на все поставленные вопросы применительно к примеру (4).

Принимая во внимание область сходимости ряда (13) и формулу замены переменной (12), обозначим через  $K$  компакт на комплексной плоскости, ограниченный лемнискатой

$$|4z(1-z)| = 1, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (14)$$

Центр симметрии лемнискаты (14) соответствует абсциссе точки излома (5) выбранной функции  $f$ . Отдельно рассмотрим правую и левую петли компакта:

$$K_1 \equiv K \cap \left\{ \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2} \right\}, \quad K_2 \equiv K \cap \left\{ \operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Справедлив следующий результат.

**Теорема 1.** При  $m \rightarrow \infty$  последовательность полиномов (6) сходится равномерно на компакте

$$K \equiv \{ z \in \mathbb{C} : |4z(1-z)| \leq 1 \} = K_1 \cup K_2,$$

в левой петле  $K_1$  — к функции  $\varphi_1(z) = 1 - 2z$ , в правой петле  $K_2$  — к функции  $\varphi_2(z) = 2z - 1$ . Во всех точках  $z \in \mathbb{C} \setminus K$  последовательность полиномов (6) расходится при  $m \rightarrow \infty$ .

Приведем утверждение о скорости сходимости последовательности (6) к результирующей предельной функции

$$F(z) = \begin{cases} 1 - 2z, & z \in K_1, \\ 2z - 1, & z \in K_2. \end{cases} \quad (15)$$

Ответ принципиально зависит от того, попадает точка  $z$  на лемнискату (14) или находится внутри одной из петель.

**Теорема 2.** Если  $|4z(1 - z)| = 1$ , то

$$|B_{2m}(z) - F(z)| < \frac{1}{\sqrt{\pi m}}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Если  $|4z(1 - z)| < 1$ , то

$$|B_{2m}(z) - F(z)| < \frac{1}{2(m + 1)\sqrt{\pi m}} \frac{|4z(1 - z)|^{m+1}}{1 - |4z(1 - z)|}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

Основной интерес представляет оценка (17). Она относится к точкам, расположенным внутри петель лемнискаты (14). Выясняется, что в таких точках последовательность полиномов (6) сходится к предельной функции (15) очень быстро — с экспоненциальной скоростью. Обе оценки — и (16), и (17) — согласуются с тем, что было известно ранее про сходимость полиномов Бернштейна к функции (4) на основном отрезке  $[0, 1]$  (см. [6], [8]).

Замечательным обстоятельством является то, что к той же лемнискате (14) “подтягиваются” нули полиномов (6). Вот краткое описание ситуации.

**Теорема 3.** Все нули полиномов (6) являются простыми и находятся строго вне лемнискаты (14). При  $j \in \mathbb{N}$  полиномы  $B_{4j}(z)$  имеют ровно два вещественных нуля; остальные полиномы (6) вовсе не имеют вещественных нулей. При  $m \rightarrow \infty$  нули полиномов (6) последовательно сближаются с лемнискатой (14), заполняя в пределе всю лемнискату.

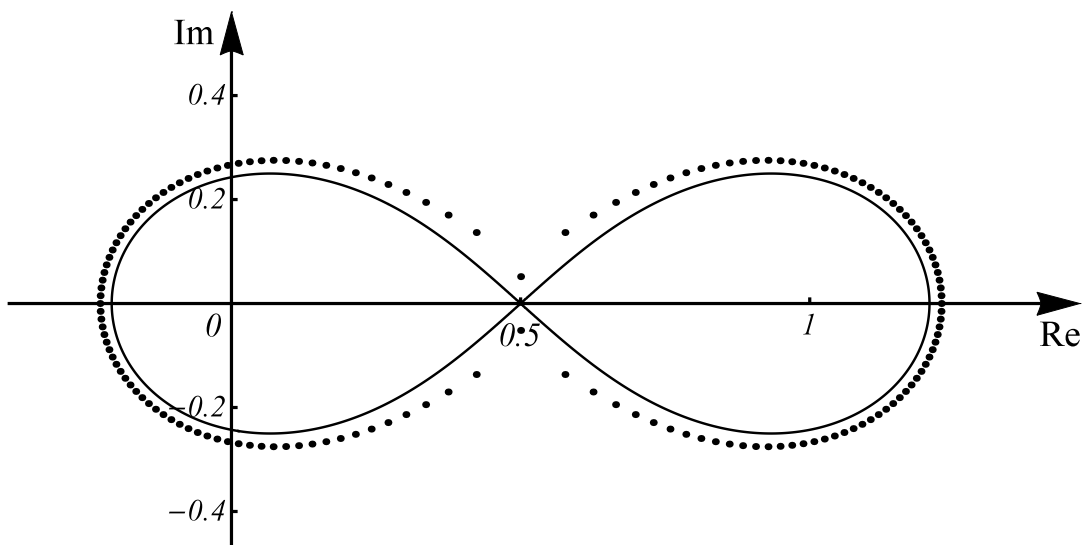


Рис. 1. Лемниската (14) и нули полинома  $B_{80}(z)$ .

То, что все нули являются простыми и находятся вне лемнискаты (14), а также то, что вещественных нулей “почти нет”, непосредственно выводится из формул (7)–(11). Главное утверждение — про лемнискату как предельную кривую (аттрактор) для нулей полиномов (6) — устанавливается через переход от выражений (11) к соответствующим частичным суммам ряда (13). Затем достаточно применить теоремы Йентча [13] и Ицуми [14] о поведении нулей частичных сумм степенного ряда с конечным радиусом сходимости (см. также [15, раздел 7.8] и [16, раздел 11.6]).

На рис. 1 показан результат компьютерных расчётов, выполненных для полинома  $B_{80}(z)$ . Мы специально взяли не слишком большой номер, чтобы сделать зазор между множеством нулей и лемниской более заметным. Обратим внимание на то, что плотность распределения нулей не вполне равномерна. Вблизи центра симметрии лемнискаты происходит явное разрежение нулей. Это связано с особенностью отображения (12) в точке  $z = 1/2$ . Отдельная интересная задача — дать точные аналитические оценки для скорости сближения нулей полиномов (6) с лемниской (14) при увеличении номера  $n = 2m$ . Такими оценками мы пока не располагаем.

В заключение наметим план будущего исследования для общего случая кусочно линейной функции  $f \in C[0, 1]$  с рациональными абсциссами точек излома. Пусть эти абсциссы записаны в виде несократимых дробей (2) и упорядочены по возрастанию. Взятую функцию можно представить в виде

$$f(x) = \alpha + \beta x + \sum_{j=1}^r \gamma_j |q_j x - p_j|, \quad x \in [0, 1], \quad (18)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_r$  — соответствующие вещественные коэффициенты. Нам удалось установить аналоги разложения Поповичу (7) для полиномов Бернштейна любого “несимметричного” модуля вида

$$f_j(x) = |q_j x - p_j|, \quad x \in [0, 1], \quad (19)$$

с изломом в точке  $x_j = p_j/q_j$ . Полученные формулы показывают, что полиномы Бернштейна для модуля (19) сходятся к его естественному кусочно аналитическому продолжению на компакте в  $\mathbb{C}$ , ограниченном лемниской

$$\left| \frac{z}{c} \right|^c \left| \frac{1-z}{1-c} \right|^{1-c} = 1 \quad (20)$$

со значением  $c = x_j$ , отвечающим той же абсциссе  $x_j = p_j/q_j$ . Отсюда следует, что полиномы Бернштейна для исходной функции (18) должны сходиться на компакте  $K$ , образованном пересечением указанных компактов сходимости для всех соответствующих модулей вида (19).

Поскольку абсциссы (2) упорядочены по возрастанию, этот лемнискато-подобный компакт  $K$  можно охарактеризовать следующим образом. Крайне левый отрезок  $[0, x_1]$  окружён замкнутой областью  $K_1$ , ограниченной левой петлёй лемнискаты (20) со значением  $c = x_1$ . Крайне правый отрезок  $[x_r, 1]$  окружён замкнутой областью  $K_{r+1}$ , ограниченной правой петлёй лемнискаты (20) со значением  $c = x_r$ . Каждый промежуточный отрезок  $[x_{j-1}, x_j]$  (если такие есть) окружен своей замкнутой областью  $K_j$ , граница которой состоит из частей двух лемнискат (20) со значениями  $c = x_{j-1}$  и  $c = x_j$ . Указанные части выходят из точек  $x_{j-1}$  и  $x_j$  “навстречу друг другу” и доходят до взаимного пересечения. Равенство

$$K = \bigcup_{j=1}^{r+1} K_j \quad (21)$$

служит полезным дополнением к одному общему результату Канторовича (см. [9, теорема 3]).

Скорее всего, в рассматриваемой ситуации останется верным соответствующий аналог теоремы 2: во внутренних точках компакта (21) последовательность полиномов Бернштейна для функции (18) будет сходиться к предельной функции с экспоненциальной скоростью, а на границе компакта  $K$  будет действовать более слабая оценка наподобие оценки (16).

Особый интерес представляет распределение нулей полиномов Бернштейна для функций вида (18). Проведенные компьютерные расчёты выявили

удивительные закономерности. В случае “общего положения” основная доля нулей группируется возле границы компакта (21), причем встречаются случаи, когда целые серии нулей стремятся к границе изнутри компакта  $K$ . На стыках двух разных лемнискат на границе компакта (21) “вырастают” дополнительные серии нулей, заполняющие в пределе дуги “больших” окружностей. Возникающие аттракторы поражают своей геометрией. Некоторое представление о происходящем даёт рис. 2 с нулями полинома Бернштейна  $B_{300}(f, z)$  для функции

$$f(x) = |4x - 1| + |2x - 1|, \quad x \in [0, 1],$$

имеющей изломы в точках  $x_1 = 1/4$  и  $x_2 = 1/2$ . На наш взгляд было бы весьма перспективно дать точное математическое описание перечисленных эффектов.

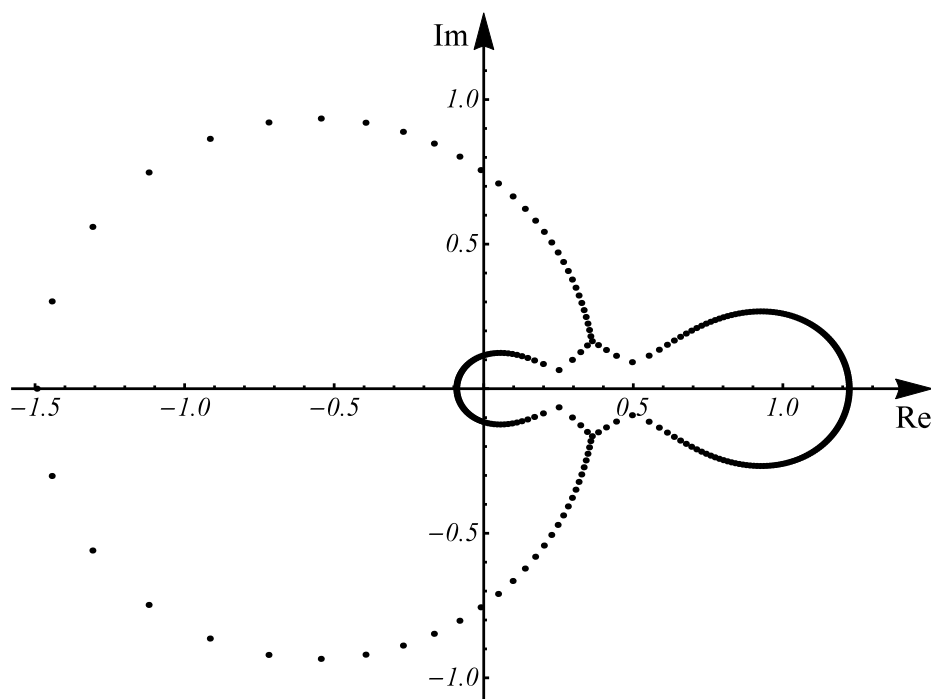


Рис. 2. Нули полинома  $B_{300}(f, z)$  для функции  $f(x) = |4x - 1| + |2x - 1|$ .

## Список литературы

- [1] Виденский В. С. Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. – Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. – 64 с.
- [2] Lorentz G. G. Bernstein polynomials. – Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953. – x+130 p.
- [3] DeVore R. A., Lorentz G. G. Constructive Approximation. – Berlin, Heidelberg, N.-Y.: Springer-Verlag, 1993. – x+450 p.

- [4] Phillips G. ,M. Interpolation and Approximation by Polynomials. – N.-Y., Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. – xiv+312 p.
- [5] Passow E. Deficient Bernstein polynomials // J. Approx. Theory. 1989. Vol. 59. № 3. – P. 282–285.
- [6] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник ЧелГУ. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15. № 26. – С. 6–40.
- [7] Петухова Н. Ю., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Свойство склеивания полиномов Бернштейна для кусочно-линейных непрерывных функций // Математика, информатика, физика в науке и образовании. Сб. науч. тр. к 140-летию МПГУ. – М.: Прометей, 2012. – С. 81–82.
- [8] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. – С. 126–175.
- [9] Канторович Л. В. О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // Изв. АН СССР. Сер. VII. Отд-ние. мат. и естеств. наук. 1931. № 8. – С. 1103–1115.
- [10] Бернштейн С. Н. О сходимости многочленов  $\sum_0^n C_n^m f(\frac{m}{n})x^m(1-x)^{n-m}$  в комплексной области // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1943. Т. 7. № 2. – С. 49–88.
- [11] Новиков И. Я. Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши // Матем. заметки. 2002. Т. 71. Вып. 2. – С. 239–253.
- [12] Popoviciu T. Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // Mathematica. 1935. Vol. 10. – P. 49–54.
- [13] Jentzsch R. Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen // Acta Math. 1916. Vol. 41. – P. 219–251.
- [14] Izumi S. On the Distribution of the Zero Points of Sections of a Power Series // Japanese Journal of Math. 1927. Vol. 4. – P. 29–32.
- [15] Титчмарш Е. Теория функций. – М.: Наука, 1980. – 463 с.
- [16] Rahman Q. I., Schmeisser G. Analytic Theory of Polynomials. – Oxford: Clarendon Press, 2002. – xiv+742 p.

# Актуальные проблемы математического образования

УДК 378.14

## СВЯЗНОСТИ С КРУЧЕНИЕМ И НЕГОЛОНОМНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Букушева А. В.

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Саратов

e-mail: bukusheva@list.ru

**Bukusheva A. V. Connections with torsion and nonholonomic geometry.** We consider examples of tasks to study the geometry of spaces with torsion and algorithms for their solution using software Wolfram Mathematica. In particular, the equations of motion of nonholonomic spaces with a given connection with torsion are found. Using a Computer algebra system in solving educational and research tasks, Master students better study the basic principles of modern geometry of spaces with torsion.

**Keywords:** nonholonomic geometry, connection with torsion, research work of student in the master's programme in math.

Приводятся примеры задач, связанные с исследованием геометрии пространств с кручением, и алгоритмы их решения с использованием программы Wolfram Mathematica. В частности, находятся уравнения движений неголономных пространств с заданной связностью с кручением. Использование систем компьютерной математики в процессе решения учебно-исследовательских задач позволит магистрантам-математикам освоить основные принципы современных исследований геометрии пространств с кручением.

**Ключевые слова:** неголономная геометрия, связность с кручением, научно-исследовательская работа магистрантов-математиков.

Традиционно изучение дифференциальной геометрии в первую очередь направлено на исследование пространств аффинной связности. Магистранты, приступающие к выполнению научно-исследовательской работы, уже знакомы с римановой и симплектической геометрией, с группами и алгебрами Ли. Как правило, во всех изучаемых ими пространствах используется либо

связность Леви–Чивита, либо симплектическая связность, но в том и в другом случае речь идёт о симметрической связности – связности без кручения. Использование информационных технологий позволяет не только решать задачи естественным образом возникающих в подобных пространствах, но перейти к решению качественно новых задач, связанных с исследованием так называемых пространств с кручением. Рассмотрим одну из форм организации научно-исследовательской работы магистрантов, обучающихся по направлению “Математика и компьютерные науки”, профиль “Математические основы компьютерных наук”. Группа студентов разбивается на несколько подгрупп, каждой из которых предлагается для исследования отдельные задачи. Несмотря на разную постановку задач, всех их объединяет принадлежность к исследованию одного и того же геометрического пространства. Сначала студенты решают общие для всех модельные задачи. Решение этих задач позволяет магистрантам усвоить общие принципы использования прикладных программ, а также ближе познакомиться со спецификой пространств с кручением, т. е. одновременно магистрант получает принципиально новые знания о важных, но ранее не изучаемых геометрических пространствах, с другой стороны, осваивает информационные технологии и возможности их применения в геометрии.

Следующий этап научно-исследовательской работы предполагает самостоятельное, творческое решение геометрических задач. Главной собственно геометрической задачей для магистранта является ознакомление с важными инвариантами неголономной геометрии: коэффициентами связности, кручением, кривизной. Чаще неголономную геометрию называют геометрией векторного поля. К началу изучения геометрии векторного поля студент уже хорошо знает основы дифференциальной геометрии, в частности, он знаком с геометрией поверхности. Векторное поле является важным и полезным обобщением поверхности. При изучении геометрии векторного поля становится понятным, что некоторые из инвариантов поверхности могут быть получены в более общей ситуации заменой поверхности её нормальным векторным полем. Специфика решаемых магистрантом задач на втором этапе является изучение тех инвариантов, которые характерны для неголономной геометрии. С современной точки зрения неголономная геометрия допускает описание в терминах контактной геометрии, т. е. под неголономным многообразием понимается многообразие с заданной на нём почти контактной метрической структуры.



**Почти контактной метрической структурой на многообразии  $M$**  нечётной размерности  $n$  называется совокупность  $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$  тензорных полей на  $M$ , где  $\varphi$  – тензор типа  $(1, 1)$ , называемый структурным эндоморфизмом,  $\vec{\xi}$  и  $\eta$  – вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой,  $g$  – (псевдо) риманова метрика. При этом  $\eta(\vec{\xi}) = 1$ ,  $\varphi(\vec{\xi}) = 0$ ,  $\eta \circ \varphi = 0$ ,  $\varphi^2 \vec{x} = -\vec{x} + \eta(\vec{x})\vec{\xi}$ ,  $d\eta(\vec{x}, \vec{\xi}) = 0$ ,  $g(\varphi \vec{x}, \varphi \vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$ ,  $\vec{x}, \vec{y} \in \Xi(M)$ . Пусть  $D$  – гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой  $\eta$ ,  $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$  – его оснащение.

Традиционно к неголономной геометрии относят: гладкое распределение  $D$ , заданное на гладком многообразии; оснащение гладкого распределения  $D^\perp$ . Задание двух дополнительных друг для друга распределений вносит разнообразие в классификацию связностей, возникающих на неголономном многообразии. С геометрической точки зрения связность представляет собой параллельный перенос векторов вдоль кривых. В случае неголономного многообразия можно рассматривать параллельный перенос, например, допустимых векторов в заданном распределении (или его оснащении) вдоль допустимых кривых или вдоль произвольных кривых.

Для контактного случая характерно задание объектов традиционно не изучаемых в неголономной геометрии, но полезных с точки зрения приложений. Сюда прежде всего следует отнести допустимую почти комплексную структуру – эндоморфизм  $\varphi$ .

Остановимся на подробном рассмотрении одной из задач.

Предположим, что на многообразии  $\mathbb{R}^3$  задано распределение  $D$ , являющееся линейной оболочкой  $\vec{e}_1 = \partial_1 + x^2 \partial_3$  и  $\vec{e}_2 = \partial_2$ , при этом  $\vec{e}_3 = \partial_3$  определяет оснащение. С прикладной точки зрения бывает полезным наряду с заданным распределением рассматривать риманову метрику. С физической точки зрения эта риманова метрика является геометрической моделью кинетической энергии для некоторой механической системы. Предположим, что риманова метрика задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 + y^2 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Известно, что всякая риманова метрика определяет каноническую связность – связность Леви–Чивита.

В координатах относительно которых задается риманова метрика, ее коэффициенты связности вычисляются с помощью программы Mathematica [1].

in[1]:= g = MatrixForm[{{1 + y<sup>2</sup>, 0, y}, {0, 1, 0}, {y, 0, 1}}];

in[2]:= gin = Inverse[{{1 + y<sup>2</sup>, 0, y}, {0, 1, 0}, {y, 0, 1}}] // MatrixForm

Получим обратную матрицу ( $g^{ij}$ ):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 + y^2 \end{pmatrix}.$$

in[3]:= var = {x, y, z};

Пользуясь формулой  $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$ , задаём два массива

Cr1 и Cr2, где Cr1 вычисляет  $\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}$ , Cr2 –  $\Gamma_{ij}^k$ .

in[4]:= Cr1 = Array[, {3, 3, 3}];

in[5]:= Cr2 = Array[, {3, 3, 3}];

in[6]:= Do[ Cr1[[i, j, k]] = 1/2 (D[g[[1, i, k]], var[[j]]] + D[g[[1, j, k]], var[[i]]] - D[g[[1, i, j]], var[[k]]]), {k, 3}, {j, 3}, {i, 3}]

in[7]:= Do[ Cr2[[l, i, j]] = Sum[gin[[1, l, k]] Cr1[[i, j, k]], {k, 3}], {j, 3}, {i, 3}, {l, 3}]

in[8]:= MatrixForm[Cr2] // FullSimplify

Получим  $\Gamma_{ij}^k$ :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{y}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -y \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

В то же время интерес представляют и другие метрические связности, но уже с кручением [2]. Такие связности используются, например, в теории относительности, где кручение выступает в качестве инварианта искривленного пространства. Магистранту предлагается определить на неголономном

многообразии с заданной метрикой такую метрическую связность, кручение которой совпадает с наперед заданным тензором. Это интересная задача, имеющая самостоятельный геометрический интерес. После того как связность задана естественным образом возникает задача нахождения специальных групп преобразований данного неголономного многообразия.

Поскольку необходимые вычисления проводятся относительно фиксированной системы координат, возникает самостоятельная задача выбора наиболее предпочитаемой системы координат, т. е. такой системы координат, в которой основные геометрические объекты получают наиболее простое координатное представление. Так например, компоненты данной выше метрики относительно базиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  являются элементами единичной матрицы.

Магистранту может быть предложена задача нахождения, например, порядка группы аффинных преобразований. Решение этой задачи сводится к исследованию системы дифференциальных уравнений:

$$L_{\vec{x}}\Gamma_{ij}^k = \partial_{ij}x^k + \partial_i x^s \Gamma_{sj}^k + \partial_j x^s \Gamma_{is}^k - \partial_s x^k \Gamma_{ij}^s + x^s \partial_s \Gamma_{ij}^k = 0.$$

Это исследование магистранту предлагается провести с использованием компьютерной программы. При этом сами преобразования, образующие группу, представляют собой векторные поля, заданные на неголономном многообразии. Векторные поля можно выбирать произвольно, а можно требовать заранее, чтобы эти поля удовлетворяли тем или иным условиям. Например, потребовать, чтобы векторные поля были допустимыми. Получающаяся система дифференциальных уравнений может оказаться настолько сложной, что ее исследование в принципе не может быть выполнено с использованием компьютерной программы. В такой ситуации магистранту предлагается найти процедуру, позволяющую упростить изучаемую им систему уравнений. Такие упрощения возможны, если геометрические инварианты модельного пространства обладают определенными свойствами. Так например, проводя необходимые вычисления, можно убедиться в том, что тензор Схоутена предложенной магистранту метрики равен нулю. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид:  $R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{a|e|}^d \Gamma_{b]c}^e$ , где  $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$ .

Понятно, что если в качестве базиса на неголономном многообразии взять векторные поля  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , то компоненты метрического тензора будут константами, а соответствующие коэффициенты связности – равными нулю. Сохраняя инвариантные свойства, независимые от системы координат, система дифференциальных уравнений допускает принципиальные упрощения и к её

анализу оказывается применимой компьютерная программа.

## Список литературы

- [1] Букушева А. В. Использование Mathematica для описания геометрии динамических систем // Математика и её приложения: фундаментальные проблемы науки и техники: сборник трудов всероссийской конференции, Барнаул, 24–26 ноября 2015. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015. – С. 248–249.
- [2] Игошин В. А., Кузин А. М., Баренбойм М. Н. О квазипланиметрии // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р. Е. Алексеева // НГТУ им. Р. Е. Алексеева. – Нижний Новгород, 2014. № 3 (105). – С. 300–308.

## БИНАРНАЯ ЛЕКЦИЯ В КУРСЕ “НОШКМ” КАК РЕАЛИЗАЦИЯ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫХ СВЯЗЕЙ

Гарминович Н. А., Логинов А. В.

Мичуринский государственный аграрный университет

Мичуринск

e-mail: krasaverenei@mail.ru

**Garminovich N. A., Loginov A. V. “Teamteaching” in the course of mathematics as the realization of interdisciplinary connections.** The article analyzes the use of forms of multi-disciplinary approach to the study of science disciplines cycle in the course of vocational training in high school. An example method of teaching “Teamteaching” in the course of mathematics involving material at the rate of Russian language.

**Keywords:** The Algebra, russian language, field, binary lecture, function-semantic field, kernel, periphery.

В статье анализируется применение форм междисциплинарного подхода к изучению дисциплин естественно-научного цикла в процессе профессиональной подготовки в вузе. Реализация идей межпредметной интеграции рассматривается на примере бинарной лекции в курсе “НОШКМ” с привлечением материала из курса русского языка.

**Ключевые слова:** Алгебра, русский язык, поле, бинарная лекция, функционально-семантическое поле, ядро, периферия.

Одной из форм инновационного обучения студентов является бинарное ведение лекций, которое относится к интерактивным методам обучения, или “teamteaching” (“командное обучение”), занятие, которое одновременно ведут два преподавателя. Главным преимуществом такой формы обучения является присутствие элементов разнообразия, повышение результативности за счёт взаимного дополнения преподавателей. Члены группы могут работать в различных сферах, что обеспечивает междисциплинарную связь на занятии.

Формированию научных понятий на междисциплинарной основе способствуют педагогические, общедидактические и психологические условия:

1) согласованное во времени изучение отдельных учебных дисциплин, при котором каждая из них опирается на предшествующую понятийную базу и готовит обучаемых к успешному усвоению понятий последующей дисциплины;

2) необходимость обеспечения преемственности и непрерывности в развитии понятий; понятия, являющиеся общими для ряда дисциплин, должны от дисциплины к дисциплине непрерывно развиваться, наполняться новым содержанием, обогащаться новыми связями;

3) единство в интерпретации общенаучных понятий;

4) исключение дублирования одних и тех же понятий при изучении различных предметов;

5) осуществление единого подхода к раскрытию одинаковых классов понятий [5].

В качестве примера возможной реализации идеи междисциплинарного подхода для обеспечения единства в раскрытии и интерпретации общенаучных понятий выбрана лекция по дисциплине “Научные основы школьного курса математики” (НОШКМ).

Курс “НОШКМ” читается для студентов-бакалавров 4 курса, обучающихся по направлению “Педагогическое образование”, профиль – “Начальное образование”. Дисциплина “НОШКМ” относится к дисциплинам по выбору профессионального цикла. Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачётные единицы 72 часа, из которых аудиторных – 40 часов.

Один из разделов дисциплины – “Основные алгебраические структуры”, посвящен изучению свойств основных алгебраических операций и структур, замкнутых на этих операциях. Знание свойств алгебраических операций позволит будущим учителям начальных классов лучше проводить пропедевтику понятий действия над элементами различных числовых множеств.

В качестве предмета лекции выбрана тема: “Алгебраические структуры. Поле”. Тема рассматривается с позиции математики и русского языка. На первый взгляд, такое совмещение учебных дисциплин может показаться несколько надуманным, однако вполне обоснованно, если учитывать следующие моменты:

- и математика и язык представляют собой чётко структурированные и систематизированные организации;
- функциональная значимость языкового и математического факторов (и не только) определяется понятием “антропоморфизм”, являющимся объединяющим компонентом любого научного направления, что позволяет элементы знания одной дисциплины использовать в другой дисциплине;
- математический и лингвистический знаки представляют собой элементы языков, а их совокупные отношения формируют представления о более сложных понятиях и явлениях;
- математическое действие и языковой знак как значимые компоненты направлены на решение определенной задачи.

Поставленные задачи призваны определить, насколько математические и лингвистические понятия “ПОЛЯ” сходны, выяснить, чего в них больше: общего или различного, а также показать, что термин универсален для различных дисциплин.

Для наглядности лекционный материал сведен в таблицу.

Вопрос	Математика	Русский язык
История появления понятия	<p>– В 1820–1830-х годах понятие поля неявно использовали Нильс Абель и Эварист Галуа в своих работах по разрешимости уравнений в радикалах.</p> <p>– В 1871 году Рихард Дедекинд назвал “полем” подмножество действительных или комплексных чисел, замкнутое относительно четырёх математических операций.</p>	<p>В лингвистической науке понятие “поле” появилось позже. Первые идеи полевой организации языка принадлежали Й. Триру, полагавшего, что в сознании говорящего или слушающего слова существуют не разрозненно, а связаны друг с другом по смыслу.</p>

	<p>– В 1881 году Леопольд Кронекер изучал свойства алгебраических числовых полей, называя их “областями рациональности”.</p> <p>– В 1893 году Генрих Вебер дал первое чёткое определение абстрактного поля.</p> <p>– В 1910 году Эрнст Стейниц опубликовал известную работу <i>Algebraische Theorie der Körper</i>, в которой развил аксиоматическую теорию полей и предложил множество важных концепций, таких как простое поле, совершенное поле и степень трансцендентности расширения поля.</p>	<p>Языковым полем исследователь называл группу родственных смыслов или некоторую смысловую сферу. Однако в лингвистический обиход термин “поле” был введен Г. Ипсенем в середине 20-х годов XX века и наибольшую популярность приобрел в последней трети прошлого столетия.</p>
<p>Определение</p>	<p>Поле – это множество элементов, для элементов которого определены операции сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль), причём свойства этих операций близки к свойствам обычных числовых операций [4, с. 276].</p>	<p>Поле – не только группировка разнородных средств, взаимодействующих на основе общности их семантических функций и выражающих варианты определенной семантической категории [1, с. 289], но и принципы организации группировки.</p>
	<p>Конституенты математического поля – элементы некоторого, в основном числового множества.</p>	<p>Конституенты лингвистического поля – синтаксические структуры (предложения) и морфологические формы (слова).</p>

<p>Признаки поля</p>	<p>Множество <math>F</math> с введёнными на нём алгебраическими операциями сложения и умножения является полем, если выполнены следующие аксиомы:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Коммутативность сложения: <math>\forall a, b \in F \quad a + b = b + a.</math></li> <li>2. Ассоциативность сложения: <math>\forall a, b, c \in F \quad (a + b) + c = a + (b + c).</math></li> <li>3. Существование нулевого элемента: <math>\exists \mathbf{0} \in F : \forall a \in F \quad a + \mathbf{0} = a.</math></li> <li>4. Существование противоположного элемента: <math>\forall a \in F \quad \exists(-a) \in F: a + (-a) = \mathbf{0}.</math></li> <li>5. Коммутативность умножения: <math>\forall a, b \in F \quad a * b = b * a.</math></li> <li>6. Ассоциативность умножения: <math>\forall a, b, c \in F \quad (a * b) * c = a * (b * c).</math></li> <li>7. Существование единичного элемента: <math>\exists e \in F: \forall a \in F \quad a * e = a.</math></li> <li>8. Существование обратного элемента для ненулевых элементов: <math>(\forall a \in F : a \neq \mathbf{0}) \exists a^{-1} \in F: a * a^{-1} = e.</math></li> <li>9. Дистрибутивность умножения относительно сложения: <math>\forall a, b, c \in F \quad (a+b)*c = a*c+b*c</math> [4, 276].</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Поле представляет собой инвентарь элементов, связанных между собой структурными отношениями.</li> <li>2. Элементы, образующие поле, имеют семантическую общность и выполняют в языке единую функцию.</li> <li>3. Поле может объединять однородные и разнородные элементы.</li> <li>4. В структуре поля выделяются микрополя.</li> <li>5. В составе поля выделяются ядерные и периферийные конститuentы. Ядро консолидируется вокруг компонента-доминанты. Периферия имеет зонную организацию.</li> <li>6. Ядерные компоненты наиболее специализированы для выполнения функций поля, систематически используются, выполняют функцию наиболее однозначно, наиболее частотны по сравнению с другими конститuentами и обязательны для поля.</li> </ol>
----------------------	---	--



		<p>7. Между ядром и периферией осуществляется распределение выполняемых полей функций; часть функций приходится на ядро, часть – на периферию.</p> <p>8. Граница между ядром и периферией, а также отдельными зонами периферии является нечеткой, размытой.</p> <p>9. Конституенты поля могут принадлежать к ядру одного поля и периферии другого поля и наоборот</p> <p>Кроме этого, “по горизонтали располагаются микрополя, по вертикали – образующие их конституенты. Однако каждое из полей имеет специфику в построении” [2, с. 178].</p>
<p>Примеры полей</p>	<p>Множество рациональных чисел, вещественных чисел, комплексных чисел, <math>\mathbb{Z}_p</math> – поле вычетов по модулю <math>p</math>, где <math>p</math> – простое число.</p> <p><math>\mathbb{F}(x)</math> – поле рациональных функций вида <math>f(x)/g(x)</math>, где <math>f</math> и <math>g</math> – многочлены над некоторым полем <math>\mathbb{F}</math> (при этом <math>g \neq 0</math>, а <math>f</math> и <math>g</math> не имеют общих делителей, кроме констант).</p>	<p>Функционально-семантические поля:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– модальности;</li> <li>– персональности;</li> <li>– темпоральности;</li> <li>– интеррогативности и др.</li> </ul>

	<p>Характеристика поля – это наименьшее положительное целое число <math>n</math> такое, что сумма <math>n</math> копий единицы равна нулю: <math>\underbrace{1 + \dots + 1}_n = n1 = 0</math>.</p> <p>Если такого числа не существует, то характеристика равна 0 по определению. Задачу определения характеристики обычно решают с задействованием понятия простого поля – поля, не содержащего собственных подполей, благодаря факту, что любое поле содержит ровно одно из простых полей [3, с. 187].</p>	<p>Характеристика ФСП осуществляется по нескольким основаниям:</p> <p>1. ФСП – это группировка разноуровневых средств, взаимодействующих на основе общности их семантических функций и выражающих варианты определенной семантической категории. ФСП рассматривается как языковое представление соответствующих семантических категорий в упорядоченном множестве разноуровневых языковых средств и их функций. Можно сказать, что ФСП – это “семантическая категория, рассматриваемая в единстве с системой средств ее выражения в данном языке” [1, с. 289].</p> <p>2. ФСП – “это билатеральные единства, включающие план содержания и план выражения. План содержания ФСП детерминируется соответствующей семантической категорией и её компонен-</p>
--	---	--

тами, а план выражения представлен разнообразными языковыми средствами, служащими (в различных сочетаниях и типах взаимодействия) для реализации функций, относящихся к данной семантической сфере. Речь идет о системе, имеющей семантическое основание” [1, с. 290].

3. Понятие поля связано с представлением о “некотором пространстве. В условном пространстве функций и средств устанавливается конфигурация центральных и периферийных компонентов поля, очерчиваются зоны пересечения с другими полями” [1, с. 290].

4. “ФСП характеризуется определенными связями с категориями мышления и – через них – с соотношениями внеязыкового мира, однако сами по себе рассматриваемые единства являются собственно языковыми – не только по их формальному выражению, но и по языковому содержанию

		каждого из средств. Собственно языковой (а не понятийный) характер имеет и структура рассматриваемых полей – моноцентрических или полицентрических” [1, с. 290].
--	--	--

Анализируя математическое и лингвистическое поля, мы видим их сходство по основным параметрам. Прежде всего, это касается понимания самой полевой организации как множества значимых единиц, замкнутых относительно определенных значений и функций (математически – действий). Кроме того, в сравниваемых полях четко прослеживаются ядерные и периферийные зоны, выделение которых определено конкретными факторами, а пересечение периферийных зон (математически – отображение, изоморфизм) характерно для обоих типов полей. Так для лингвистического поля характерно выделение микрополей, а для математического поля характерно понятие подполя и расширения поля. Как лингвистическое, так и математическое поле непосредственно связано с действительностью через мыслительные операции. Конечно же, математическое и лингвистическое поля имеют и принципиальные дифференциации, что обусловлено самой природой полей.

В заключение подчеркнём, что подобное сравнение и анализ формируют у студентов устойчивое понимание термина не только применительно к конкретной дисциплине, но и возможность его употребления в других областях знаний и, самое важное, в школьной практике.

## Список литературы

- [1] Бондарко А. В. Теория значения в системе функциональной грамматики: На материале русского языка. – М.: Языки славянской культуры, 2002. – 736 с.
- [2] Гулыга Е. В., Шендельс Е. И. Грамматико-лексические поля в современном немецком языке. – М., 1969. – 184 с.
- [3] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Части I–III. – М.: Физматлит, 1994. – 320 с.

- [4] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре, 2-е изд. – М.: Физматлит, 1971. – 431 с.
- [5] Чебышев Н., Каган В. Основа развития современной высшей школы // Высшее образование в России. – 1998.

УДК 372.851

## ОРГАНИЗАЦИЯ ОЛИМПИАДНОЙ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОГО (ОБЩЕГО) ОБРАЗОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ ИЗУЧЕНИЯ ПРИНЦИПА ДИРИХЛЕ

Евсеева А. А.

МБОУ “Лицей №1” Чистопольского муниципального района РТ (г. Чистополь)  
e-mail: evseeva-a-a@rambler.ru

**Evseeva A. A. The organization of the Olympiad training students of the basic (General) education on the example of the study of the Dirichlet principle.** In the article the model of organization of extracurricular work with students grades 5–9 on the example of studying one of the methods for solving logic problems – the Dirichlet principle.

В статье предложена модель организации внеклассной работы с учащимися 5–9 классов на примере изучения одного из методов решения логических задач – принципа Дирихле.

Математику от других естественнонаучных предметов отличает, прежде всего, умение строго и убедительно доказывать различные утверждения. Математические рассуждения в большинстве случаев призваны доказать существование объектов или законов, удовлетворяющих тем или иным условиям. Математические доказательства могут быть прямыми, когда указывается непосредственный элемент, удовлетворяющий заданным параметрам (например, чтобы убедиться, что уравнение имеет решение необходимо указать какой-либо его корень), и косвенными, когда существование элемента доказывается без непосредственного указания на него.

Примерами косвенных доказательств в математике являются, например, метод от противного, метод математической индукции, принцип Дирихле и др. Остановимся более подробно на последнем из них.

Имя этому логическому приему дал великий немецкий математик Петер Густав Лежен Дирихле (1805–1859), изучавший арифметику (теорема Дирих-

ле о простых числах в арифметической прогрессии), математический анализ (признак сходимости Дирихле, ряды Дирихле), механику и математическую физику (принцип Дирихле в теории гармонических функций).

Хотя принцип Дирихле достаточно прост и очевиден, и применить его могут ученики начальной школы только из соображений логики, и даже не зная его формулировки, но для более серьёзных математических задач все же необходимо знать различные формы, в которых он может встретиться.

Чаще всего учащиеся знакомятся с принципом Дирихле на факультативных занятиях или кружках по математике. Хочется предложить следующую модель организации внеклассной работы с учащимися:

1. Занятия проводятся не реже 1 раза в неделю с 5 по 9 класс.

2. Каждое занятие начинается и заканчивается устной разминкой по решению шуточных занимательных задач или заданий в игровой форме, которые активизируют мозговую деятельность учащихся и в то же время способствуют их позитивному настрою.

3. На первом занятии по теме учитель объясняет материал, дает теоретические основы, изучаемой темы, разбирает с учащимися как минимум 3 примера, отражающие суть изучаемого метода.

4. Закрепление изученного материала происходит индивидуально каждым учащимся, учитель выполняет функцию консультанта (учащиеся самостоятельно решают как минимум 5 задач по изученной теме: каждое следующее задание на уровень выше предыдущего).

5. Обязательно присутствует домашняя работа (задачи аналогичны, рассмотренным на занятии).

6. В заключении изучения блока материала предполагается контроль знаний в форме математических боев.

Строить работу математического кружка целесообразно методом спирали: в течение 5–9 классов изучаются все ключевые темы олимпиадной математики, но на уровне адаптированном под определенный возрастной контингент учащихся. Поясню идею на конкретной теме, а именно на идее доказательства по принципу Дирихле.

Предлагается следующее распределение материала темы на курс обучения для 5–9 классов (в скобках указано минимальное количество учебных часов, необходимое для обзорного знакомства с принципом Дирихле, которое при желании можно увеличить).

5 класс: Знакомство с принципом Дирихле. Простые сюжетные задачи. Доказательство утверждений в худшем случае (2 ч.).

6 класс: Обобщенный принцип Дирихле. Принцип Дирихле в геометрии (точки) (2 ч.).

7 класс: Принцип Дирихле и делимость целых чисел. Принцип Дирихле в геометрии (отрезки, прямые) (2 ч.).

8 класс: Окраска плоскости и её частей. Принцип Дирихле в геометрии (круги, многоугольники, площадь) (2 ч.).

9 класс: Интеграция принципа Дирихле в другие методы доказательства. Принцип Дирихле в геометрии (объемные тела) (2 ч.).

Рассмотрим как строить работу занятий на примере 5-го класса. Тема занятия “Знакомство с принципом Дирихле. Простые сюжетные задачи”.

Начать занятие можно с решения полуустных занимательных задач:

1. Поезд отправляется из Бостона в Нью-Йорк. Через час другой поезд отправляется из Нью-Йорка в Бостон. Оба поезда идут с одной и той же скоростью. Какой из них в момент встречи будет находиться на меньшем расстоянии от Бостона?

2. У меня две монеты на общую сумму 15 рублей. Одна из них не пятак. Что это за монеты?

3. Почему водопроводные и канализационные люки круглые, а не квадратные?

4. На двух полках 25 книг. На одной из них на 3 книги больше, чем на другой. Сколько книг на каждой полке?

5. На острове рыцарей и лжецов путешественник задал рыцарю один и тот же вопрос и получил на него разные ответы. Какой вопрос это мог быть?

По новой теме в 5 классе целесообразно дать учащимся первоначальное представление о принципе Дирихле. Лучше всего этому поспособствует его несерьёзная формулировка: “Нельзя посадить 4 кроликов в 3 клетки так, чтобы в каждой было не больше 1 кролика” или в более общем виде “Если по  $n$  клеткам рассадить больше  $n$  кроликов, то найдется клетка, в которой сидит больше одного кролика”. Желательно показать учащимся доказательство второго утверждения методом от противного, а затем перейти к разбору задач, отражающих суть принципа.

Доказательство: Будем рассуждать от противного. Пусть в каждой клетке сидит не более одного кролика, тогда в  $n$  клетках сидит не более  $n$  кро-

ликов, что противоречит условию.

Задачи на принцип Дирихле решаются двумя способами: либо явно предъявляются в конкретной задаче “кролики” и “клетки”, либо доказательство идёт от противного, аналогично доказательству самого принципа Дирихле.

**Задача 1.** В классе 35 учеников. Докажите, что среди них найдутся по меньшей мере двое, у которых фамилии начинаются с одной и той же буквы.

Решение: (явное предъявление “клеток” и “кроликов”). В русском алфавите 33 буквы. Возьмем их за “клетки”, а начальные буквы фамилий учащихся за “кроликов”. Тогда, если рассаживать “кроликов” по “клеткам” – хотя бы в одной “клетке” окажется более одного “кролика”, так как  $33 < 35$ .

**Задача 2.** В бору 600000 сосен, и на каждой из них не более 500000 игл. Докажите, что в этом бору найдутся две сосны с одинаковым количеством игл.

Решение: (от противного). Предположим, что нет сосен с одинаковым количеством игл, т. е. у всех количество игл должно быть разное: 0, 1, 2, 3, ... , 599999. Получим противоречие с тем, что по условию на каждой из них может быть не более 500000 игл. Значит, наше предположение неверно и существует хотя бы две сосны с одинаковым количеством игл.

**Задача 3.** При каком наименьшем количестве учеников школы среди них найдутся двое, у которых день и месяц рождения совпадают?

Решение: Всего может быть 366 дней в году, а значит 366 различных дат рождения учеников. Для того чтобы можно было утверждать, что среди учащихся найдутся двое с одинаковой датой рождения – по принципу Дирихле их должно быть хотя бы на 1 больше, т. е. 367.

Задачи для самостоятельного решения:

1. В саду растут 10 кустов роз, на каждом кусте не более 8 роз. Докажите, что есть хотя бы два куста роз с одинаковым количеством цветов.

2. В школе 20 классов. В ближайшем доме живет 23 ученика этой школы. Можно ли утверждать, что среди них обязательно найдутся хотя бы два одноклассника?

3. В школе учится 370 человек. Докажите, что среди всех учащихся найдутся 2 человека, празднующие свой день рождения в один и тот же день.

4. В Москве живет более 8 000 000 человек. Докажите, что у каких-то двоих из них одинаковое число волос на голове, если известно, что у любого



человека на голове менее миллиона волос.

5. При каком наименьшем количестве участников кружка среди них найдутся двое, у которых месяц рождения совпадает?

По окончании занятия учащимся можно предложить построить цепочку метаграмм, превращающую слово МИГ в слово ЧАС. Данное задание призвано снять напряжение учащихся, посредством переключения с одного вида деятельности на другое.

Каждое следующее занятие должно быть основано на углублении и расширении знаний учащихся по данной теме, полученных на предыдущих уроках или в младших классах.

Практика организации внеклассной работы с учащимися в подобной форме показала положительную динамику развития творческих способностей и математического мышления учащихся, на что в конечном итоге и была направлена работа.

Считаю, что разрабатываемая мной система способна развивать самостоятельность логики мышления, которая позволила бы детям строить умозаключения, приводить доказательства, высказывания, логически связанные между собой, делать выводы, обосновывая свои суждения, и, в конечном итоге, самостоятельно приобретать знания, а также активнее использовать эти знания в повседневной жизни.

Поэтому использование учителем математики систематической работы по развитию логического мышления учащихся, построенной таким образом является не только желательным, но даже необходимым элементом обучения математике.

## **Список литературы**

- [1] Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2013. – 560 с.
- [2] Раскина И. В. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2015. – 120 с.
- [3] Фарков А. В. Готовимся к олимпиадам по математике: Учеб.-метод. пособие – М.: Издательство “Экзамен”, 2006. – 160 с.
- [4] Шарыгин И. Ф. Задачи на смекалку. 5–6 классы: пособие для учащихся общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2013. – 96 с.

УДК 517.9

## ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ШКОЛА–ВУЗ

Журавлева О. И.

Евразийский национальный университет

имени Л. Н. Гумилева

Казахстан, г. Астана

e-mail: kandidat\_56@mail.ru

**Zhuravleva O. I. Continuity of mathematics tutoring in the system “school–university”.** In the article an attempt has been made to mark a skills, which a first-year student of mathematics’ faculty must have, however, don’t pay due attention to forming of this skills in the time of training school graduates to pass examination ENT.

**Keywords:** mathematics oral speech, skills of research activity, planning of independent work, analysis primary source, writing of the student’s report.

В статье предпринята попытка выделить навыки и умения, которыми должен обладать студент-первокурсник математического факультета, однако формированию этих навыков и умений не уделяется должное внимание при подготовке выпускников школ к сдаче ЕНТ.

**Ключевые слова:** устная математическая речь, навыки исследовательской деятельности, планирование самостоятельной работы, анализ первоисточника, написание студенческого доклада.

Математическое образование, благодаря проникновению математических методов во все сферы жизни, играет одну из ведущих ролей в развитии современного общества. Цели обучения математике на разных этапах развития общества различны. Сегодняшние изменения в математическом образовании обусловлены процессами гуманизации, гуманитаризации и технологизации.

Гуманизация образования предполагает такую организацию учебного процесса, при которой знания имели бы для ученика личностный смысл, сам ученик не «терялся бы» в процессе его обучения.

Гуманитаризация образования предполагает, во-первых, увеличение числа часов на изучение предметов гуманитарного цикла, а во-вторых, реализацию одного из принципов реформирования образования: усиление мотивационной сферы и творческого начала, ориентацию на общечеловеческие ценности.

Под технологизацией математического образования понимают осмысление процесса обучения математике как регламентированной смены четко описанных этапов, имеющих высокую степень результативности, а также разработку четко описанных приёмов обучения, обладающих высокой степенью результативности в массовом масштабе.

Математическое образование в Казахстане реализуется через государственную систему, включающую ступени дошкольного, начального, неполного среднего, общего среднего, среднего профессионального и высшего (общего и специального) образования. На каждой из выделенных ступеней решаются свойственные ей цели математического образования.

Рассмотрим обучение математике с позиции непрерывности и преемственности; выделим возможные разночтения.

Цель школы – вооружить учащихся системой математических знаний, представляющих базовый уровень современного математического образования. Результаты этой работы отражаются в баллах ЕНТ. Работа учителя математики выпускного класса направлена, во-первых, на прорешивание тестовых заданий, а во-вторых, на изучение программного материала.

Цель ВУЗа – принять на первый курс студентов, имеющих прочные, глубокие знания по математике и имеющих навыки логического мышления (рассуждать, анализировать, схематизировать, мыслить дедуктивно, обобщать и т. п.). И вот здесь наблюдаются первые расхождения.

Глубина изучения программного материала в школе зачастую определяется уровнем его использования в вопросах ЕНТ. Например, студенты бегло решают логарифмические уравнения, а построить и исследовать график логарифмической функции затрудняются. Можно выделить ряд тем школьного курса математики, которые независимо от местоположения и статуса школ, знают выпускники всех школ, и можно указать темы, которые вызывают затруднения у большинства выпускников. Первокурсники испытывают затруднения при доказательстве школьных теорем; при решении задач на доказательство; при решении задач на построение; при построении графика дробно-рациональной функции и графика сложной функции путем преобразования графика функции; при решении уравнений и неравенств с параметрами; при решении комбинаторных задач; при решении стереометрических задач на комбинации многогранников и круглых тел.

Школьные методы обучения рассчитаны в основном на достижение поставленной цели за счёт организации активной работы учащихся в классе

при систематическом контроле учителя за их деятельностью, в то время как вузовские методы обучения ориентированы на большую самостоятельность и ответственность студентов.

Система обучения в вузе требует от студентов определенных навыков самостоятельной работы по овладению знаниями и умениями, а также умением выделять существенное, правильно и творчески использовать знания при решении задач. На первых порах учёбы в вузе студенты испытывают трудности при написании конспектов лекций, подготовке к семинарским и практическим занятиям.

Отличительной особенностью, по сравнению с общеобразовательной школой, является лекционно-семинарская система обучения и поэтапная система контроля знаний учащихся.

У первокурсников плохо развиты навыки самостоятельной работы, навыки работы с математической литературой и навыки самостоятельной познавательной деятельности. В условиях кредитной технологии обучения, в вузе по всем дисциплинам еженедельно предусмотрена самостоятельная работа студентов в присутствии преподавателя (СРСР). Студенты должны самостоятельно проработать большой объём теоретического материала; выделить главное, законспектировать и выделить неясные моменты.

По всем математическим дисциплинам студентам выдается семестровое задание, которое они по истечении определенного времени должны защитить (сдать). У первокурсников слабо развиты навыки планирования самостоятельной работы на длительный период времени. Они за работу берутся в последнюю неделю и физически не успевают выполнить всю работу.

Выпускники школ имеют слабые навыки исследовательской деятельности. Формирование навыков исследовательской деятельности длительный и сложный процесс. В начале 20 века в США возник “метод проектов”. Истоки его возникновения связаны с идеями гуманистического направления в философии и образовании. Основная идея, закладываемая в метод авторами – обучение на активной основе через целесообразную деятельность ученика, сообразуясь с его личным интересом именно в этом знании. Метод проектов в своей основе предполагал обучение, сообразное личному интересу учащегося в том или ином предметном знании, важно было показать ученикам их личную заинтересованность в приобретаемых знаниях, которые могут и должны пригодиться им в жизни. Для этого необходима проблема, взятая из реальной жизни, знакомая и значимая для ребёнка, для решения которой ему необходимо приложить полученные знания, новые знания, которые ещё предстоит

приобрести.

Идеи проектного обучения возникли в России практически параллельно с разработками американских педагогов еще в начале 20 века. Под руководством русского педагога С. Т. Шацкого в 1905 году была организована небольшая группа сотрудников, пытавшаяся активно использовать проектные методы в практике преподавания. Позднее, уже при советской власти эти идеи стали довольно широко внедряться в школу. Постановлением ЦК ВКП(б) в 1931 году метод проектов был осуждён и с тех пор до недавнего времени в России больше не предпринималось сколько-нибудь серьёзных попыток возродить этот метод в практике. В настоящее время в рамках внеурочной общественно полезной деятельности проводятся мероприятия, по существу представляющие собой реализацию проектов. Однако, научные проекты школьников зачастую носят реферативный характер. Поэтому анализ статьи по методике преподавания математики у студентов сводится к простому пересказу статьи, а написание научного доклада – к конспектированию первоисточника.

В вузе принята кредитная технология обучения, о которой выпускники школ узнают только став студентами. Большие различия имеют место в организации и системе контроля в школе и в вузе. В вузе более половины экзаменов проводится посредством компьютерного тестирования или устного экзамена, в общеобразовательной школе экзамены проводятся только в устной или письменной форме, да и то не каждый год. Проведение устных экзаменов по математическим (и не только) дисциплинам показало, что у выпускников школ слабо развиты навыки изложения теоретического материала у доски. Определенные замечания вызывает устная математическая речь. Проведение письменных экзаменов по математике выявило пробелы в грамотности письменной математической речи.

Учитывая требования вуза к математической подготовке выпускников, в школе надо проводить мероприятия, направленные на адаптацию учащихся к дальнейшему обучению в вузе и ориентированные на подготовку их к самостоятельной деятельности. В вузе читается вводный курс математики для первокурсников, цель которого систематизировать полученные в школе знания по математике.

## Список литературы

- [1] Боровицкая С. Ю. Преемственность в развитии математических способностей “школа-техникум-вуз” // Материалы III Международной научной конференции “Проблемы и перспективы развития образования”. – Пермь: Меркурий, 2013. – С. 7–10.
- [2] Гузеев В. В. Планирование результатов образования и образовательная технология. – М: Народное образование, 2000. – 206 с.

## ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИСЦИПЛИНЫ НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ ПЕДВУЗА

Колдунов А. В.

Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена  
Санкт-Петербург

**Koldunov A. V. Economical/mathematical courses at a mathematical department of a pedagogical university.** The outline of mathematical methods which are used in economy and are studied at mathematical departments of pedagogical universities is presented in the report.

В сообщении сделан обзор математических методов в экономике, которые рассматриваются на математических факультетах педвузов.

1. Относительно недавно на математическом факультете РГПУ им. А. И. Герцена появилось несколько учебных предметов, связанных с математическими методами в экономике (ЭМ-методы). Это курсы: «Теория оптимизации» (ТО), «Математические методы в экономике» (ММЭ), «Исследование операций», «Теория игр» (ИО), (ТИ). Если к этим дисциплинам присоединить ещё элементы математической статистики (из курса «Теория вероятностей»), то можно сделать вывод, что на факультете сложилось основание для формирования системы экономико-математических дисциплин (ЭМ-кластер). Этот материал обладает несомненной целостностью, так как основан на изучении явлений экономики. В нём несложно выделить несколько компонент: все ЭМ-методы делятся на детерминированные методы (т. е. такие, какие используются в условиях (полной) определённости) и на вероятностные методы (которые используются в условиях неопределённости). В свою очередь детерминированные ЭМ-методы состоят из равновесных ЭМ-

методов, а вероятностные состоят из методов ТИ и методов, относящихся к теории рисков. В нынешнем состоянии в ЭМ-кластере просматриваются проявления принципов иерархичности и открытости. Для того, чтобы провести чёткую структуризацию ЭМ-кластера, следует ясно очертить направление развития материала в нём. Пока здесь можно увидеть две возможности.

2. Для математических факультетов педвузов традиционной проблемой является востребованность знаний, ранее полученных студентами в рамках фундаментальных математических курсов. В педвузе важна возможность возвращения (на другом материале и на другом уровне) к тем или иным вопросам и методам, уже рассмотренным в больших математических курсах. Но не каждый математический предмет, изучаемый на старших курсах, предоставляет такие возможности. Тем ценнее дисциплины, которые могут это сделать. К таким учебным предметам, несомненно, относятся дисциплины из ЭМ-кластера.

Если ЭМ-кластер будет направлен на решение задачи востребованности, то изучение этой тематики развернётся в сторону научной дисциплины «Математическая экономика» (на факультете наиболее близкими к ней вопросами занимается ММЭ). В этом случае изучение дисциплин ЭМ-кластера будет двигаться в направлении построения прогнозных математических моделей, решение которых будет отыскиваться в соответствующем фундаментальном курсе. И это неплохо, так как может способствовать повышению математической культуры выпускников.

По своему содержанию ЭМ-кластер может быть выстроен и в другом направлении, а именно в направлении курса ИО.

Эта дисциплина является теорией математических моделей принятия эффективных решений в управлении организационными структурами; причём искомое решение носит оптимизационный характер, а целью исследования полагается построение математической модели с управлением. На практическую направленность ИО указывает словосочетание “принятие решения” и сокращение ЛПР – т. е. лицо, принимающее решение. При изучении ИО выясняются факторы, которые может одновременно учитывать математическая модель с управлением и тем самым прогнозировать последствия тех или иных решений, проводить отбор наиболее рациональных вариантов решений. Аналогичным образом, такие подходы помогают структурировать проблему, выделяя существенное и удаляя второстепенное.

Различие в подходах у ММЭ и у ИО проявляется и в строении самых курсов. В ММЭ рассматриваются обычно детерминированные методы (хо-

тя случай неопределённости в университетских курсах появился достаточно давно), причём рассматриваются равновесные методы, которые, в основном, связываются с явлениями макроэкономики, и рассматривают оптимизационные методы, которые используются в микроэкономике. Курс ИО состоит из двух частей: ИО-1, посвящённый подробному изложению процедур линейного программирования и его приложений и в разной степени вопросы, связанные с нелинейной оптимизацией; часть ИО-2 посвящена методам, используемым в условиях неопределённости (обычно это случай ТИ; но могут быть и вопросы, посвящённые разным типам рисков).

3. Рассматриваемые детерминированные методы обычно основаны на соответствующих результатах фундаментальных математических курсов. Например, с помощью равновесных ЭМ-методов построена модель Леонтьева межотраслевого баланса (системы линейных уравнений), процедуры нахождения равновесных цен (аналитические или численные методы решения уравнений с одной переменной), модели роста дохода с непрерывным временем (дифференциальные уравнения первого порядка) и с дискретным временем (линейные неоднородные рекуррентные соотношения). К оптимизационным методам относятся все применения линейного программирования; с помощью нелинейной оптимизации получены классические описания поведения потребителя, поведения фирм и других производств. Этот материал полностью содержится в ММЭ (со ссылками на ТО). Как уже было отмечено, ИО не использует ТО, а получает необходимые для развития теории внутри самого курса за счёт удаления части разделов из детерминированных ЭМ-методов.

4. К вероятностным ЭМ-методам относятся те методы, которые используются в условиях неопределённости, когда появляются непрогнозируемые факторы, называемые возмущениями. Эти методы могут рассматриваться отдельно в ТИ или во второй части ИО (ИО-2). Если источником возмущений является сама экономическая ситуация (например, наличие конкурентов), то используемые ЭМ-методы относятся к ТИ. Если же источник возмущений не имеет прямого отношения к рассматриваемой экономической ситуации, на фоне которой проявляются возмущения, то используемые в это случае ЭМ-методы связывают с теорией рисков. К такого рода возмущениям относят проявления «объективно незаинтересованной действительности» (т. е. природные риски). Заметим, что к природным рискам можно отнести не только природные условия (засухи, наводнения и т. д.), но и, например, особенности отношения ЛПР к рискованным управленческим решениям. С другой стороны, к этим же типам, по-видимому, придётся отнести основы экономет-



рики, которые лежат в попытках уменьшить возможное негативное влияние погрешностей в статистических данных на вырабатываемый прогноз. Здесь можно заметить различие ТИ и теории рисков. По своему характеру ТИ ближе к детерминированным ЭМ-методам, что обеспечило её бурный теоретический рост. Поэтому многие разделы теории рисков выступают в качестве некоторой альтернативы формализации ТИ. В связи с этим представляется целесообразным помещать элементы теории рисков в начало рассмотрения ЭМ-методов в условиях неопределённости, перед введением схем ТИ. Это оправдано и с формальной точки зрения: в теории рисков предполагается обычно, что только одна сторона ориентирована на рациональные действия; когда же в ТИ заложено предположение, что оба игрока действуют рационально. В этой ситуации теория рисков выступает в роль пропедевтики ТИ, которая имеет в своём распоряжении более сильные начальные предположения, что позволяет студентам оценить специфику ТИ.

В качестве учебного предмета ТИ обладает высокой степенью гибкости: при необходимости она может быть изложена достаточно коротко, а может быть развёрнута в большой курс. Одно дело, когда курс ТИ ограничен случаем антагонистических игр и применением линейного программирования к повторяющимся играм (смешанные стратегии), несколько иной курс ТИ строится на основе неантагонистических игр, а случай антагонистических игр рассматривается как частный случай.

Такая особенность ТИ (да и всей теории ЭМ-методов в условиях неопределённости) позволяет помещать этот материал в разных местах (относительно других курсов из ЭМ-кластера). Поэтому ЭМ-методы в условиях неопределённости оказываются весьма своевременной альтернативой и даже противовесом детерминированным ЭМ-методам в структуре ЭМ-кластера.

Можно сделать вывод, что ЭМ-кластер возможно выстроить на основе одного из следующих вариантов: 1) курсы излагаются автономно, без специального использования связей между ними и учёта их различий; 2) материал ЭМ-кластера группируется вокруг курсов ММЭ (ситуация определённости) и ТИ (ситуация неопределённости); 3) курсы переориентированы в направлении практики, а за основу берётся ИО; 4) в ЭМ-кластере выделяются два центра: сначала излагается вариант ММЭ, но без процедур и доказательств линейного программирования и его применений (в частности, к смешанным стратегиям в биматричных и матричных играх); затем идёт вариант ИО, в котором подробно разбирается теория, практика и применения линейного программирования (впрочем, порядок в этом пункте может быть изменён).

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ И СТАНОВЛЕНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО МАТЕМАТИКА, ЧАСТЬ 2: О ПОЛЬЗЕ ОЛИМПИАД

Максимов Д. В., Рукшин С. Е.

Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: vliuser@gmail.com

**Maksimov D. V., Rukshin S. E. Mathematical Olympiad and becoming a professional mathematician.** The article examine positive impact of Mathematical Olympiads for the professional abilities of future mathematicians.

В статье рассматриваются положительные аспекты влияния участия в математических олимпиадах на профессиональные навыки будущих математиков.

Истории и влиянию математических соревнований и, в частности, математических олимпиад на развитие науки посвящено множество статей и монографий (см. например, [1, 2]). Коснувшись в первой части этой статьи отрицательных сторон математических олимпиад (см. [3]), мы не хотели бы оставаться непоследовательными и должны рассмотреть и позитивные моменты этого влияния. Несомненно, математические олимпиады возникли в первую очередь как попытки поиска математически одарённых школьников для их ранней профессиональной ориентации и привлечения к интенсивным занятиям математикой и развитию математических способностей ещё на школьной скамье. Однако, опыт проведения олимпиад продемонстрировал возможность в процессе проведения соревнований моделировать деятельность профессионального математика в доступных школьнику масштабах, в результате чего олимпиады оказали большое положительное влияние на формирование современного математического сообщества не только России, но и многих других стран. Не стремясь проиллюстрировать эту мысль многочисленными примерами (число которых, несомненно, очень велико – можно быть уверенным, что более 90% современных профессиональных математиков участвовали в школьные годы в олимпиадах и научных соревнованиях различного уровня), мы хотим напомнить, что обладатели Филдсовских медалей Г. Перельман и С. Смирнов, а также лауреаты премий Салема Ф. Назаров и Д. Челкак в школьные годы были победителями Всесоюзных, Всероссийских и Между-

народных Математических Олимпиад. Аналогичные примеры можно приводить не только для России, но и для других стран. Скажем, Филдсовский лауреат Теренс Тао был обладателем трёх медалей Международных Математических Олимпиад, выступая за сборную Австралии, и число таких примеров можно умножать.

В дискуссиях о вреде и пользе олимпиад в разные моменты преобладал акцент на пользу или вред олимпиад в зависимости от того, какой из аспектов олимпиад анализировался: их спортивная или математическая ипостась. Однако в 2015 году произошло событие, которое резко уменьшило критику олимпиад и поставило вопрос о достижении спортивных результатов как элементе национального престижа страны и свидетельстве успехов национальной системы образования одарённых школьников. В течение 20 лет под руководством одних и тех же людей тренерский коллектив готовил сборную команду страны к международным олимпиадам. Методика подготовки и тренерский состав, доставшиеся в наследство от СССР в сочетании с энтузиазмом новых руководителей сначала привели к подъёму результатов, но затем организаторы подготовки «перегорели» и при всех колебаниях пошло понижение места команды России от второго-третьего до четвёртого и далее. В 2015 году Россия не только впервые в истории осталась без золотых медалей, но и заняла 8 место по сумме набранных очков, а в олимпийском медальном зачете и вовсе откатилась на 21 место.

Возник повод не только задуматься о происходящем, осознать причины успехов и особенности отечественной математической субкультуры олимпиад, извлечь уроки, понять резервы и, на основе этого анализа, подготовить возможность достижения в будущем успехов в обеих ипостасях олимпиад – и в спортивной, и в профессионально-математической. Долгое время считалось, что не имеет смысла широко и публично обсуждать олимпиадное движение и то, какой ценой достаются победы в олимпиадах высокого уровня, так как такие обсуждения могут открыть публике не только светлые, но и темные стороны этой деятельности. Какие бы благородные и высокие цели ни озвучивались, цена успеха и неудачи, как и в спорте высших достижений, бывает порой недопустимо высока. Но именно из-за высокой цены дискуссия и профессиональное обсуждение проблем просто необходимы. Отдав дань критическому анализу олимпиад, здесь мы постараемся в виде тезисов остановиться на положительных сторонах нынешнего олимпиадного движения в Российской Федерации и его влиянию на развитие математического сообщества. Надеемся, что вместе с первой частью эта статья может стать основой

для непредвзятой дискуссии о судьбе олимпиад.

Итак, вкратце основные положительные стороны математических олимпиад видятся нам в следующем:

- Главной положительной стороной олимпиад, несомненно, является **нестандартность** предлагаемых задач. Под этим в первую очередь подразумевается отсутствие априорно очевидного пути решения. Такая ситуация является типичной для деятельности математика, во всяком случае, такая «**нестандартность**» характерна для большинства научных задач.
- Другой положительной стороной олимпиад является то, что они являются мотивацией самостоятельного обучения. Участие и победа хотя бы в одной олимпиаде является для школьника гораздо большим показателем успеха, чем множество положительных школьных оценок. Успех в олимпиаде (по крайней мере, по математике) невозможен без большой предварительной самостоятельной работы.
- Запись решений трудных задач способствует развитию образности и богатства письменной речи, а участие в устных олимпиадах способствует развитию устной речи. Запись решения трудной задачи вполне можно сравнить с написанием профессиональным математиком научной статьи, а устный рассказ – с докладом на конференции или семинаре.
- Многоходовость предлагаемых на олимпиадах задач способствует развитию межпредметных связей внутри всей структуры математических знаний каждого школьника. Разумеется, это происходит особенно эффективно, если решение найдено самим школьником и эти связи установлены самостоятельно. Однако, даже если школьник узнал решение уже после олимпиады, из книжки, но после этого тщательно проанализировал путь к решению, то эти связи, будучи запечатленными в структурах мозга, могут быть использованы им в будущем для решения других задач.
- Изящность и красота задач, часто являющихся остроумными фактами из серьезных математических утверждений, а также необычность решений формируют у школьника вкус к красивым математическим доказательствам. Может показаться, что вкус является несколько эфемерным понятием, но в действительности это не так. Формирование математического вкуса к правильно и изящно построенным доказательствам – одно из важнейших задач математических олимпиад.
- Эстетический компонент решений олимпиадных задач имеет самостоя-

тельное значение, так школьные учебники, к сожалению, содержат в большинстве своём в качестве задач скучнейшие упражнения на различного рода изученные алгоритмы, большей частью одноходовые, лишённые каких бы то ни было свойств остроумного математического факта.

- Олимпиада сама по себе может (хотя и редко) играть обучающую роль: изложенные в ней задачи могут быть важным утверждениями как для математики в целом, и для дальнейшей судьбы школьника, участвующего в олимпиадах.
- Олимпиады дают возможность сильному школьнику узнать о существовании других «вершин». Часто бывает, что успешный в школьной математике ребёнок даже не предполагает существования других, более содержательных математических соревнований, чем решение упражнений, предлагаемых учителем на уроке. Олимпиады дают возможность успешным школьникам соревноваться на более высоком уровне, выявляют сильнейших среди сильных. С другой стороны они помогут спуститься с «небес на землю» школьнику, у которого сложилось о своих способностях слишком высокое мнение, на основании всего лишь успешного усвоения школьной программы по математике.
- Наконец, олимпиады могут сформировать интерес к математике, способствовать выбору будущей профессии, или просто стать приятным и полезным увлечением. В любом случае участие в математических олимпиадах может быть полезным и для школьников, которые не собираются связывать свою жизнь именно с математикой.
- Само по себе участие в олимпиаде высокого уровня повышает самооценку школьника, создает ощущение принадлежности к некоторому «кругу избранных». Желание закрепиться в этом обществе и выделиться в нем способствует дальнейшему обучению. Особенно сильно влияние этого фактора на стыке «математической» и «спортивной» математики, что, впрочем, уже было сформулировано выше.
- Безусловно, решение олимпиадных задач положительно сказывается и школьной успеваемости учащегося. В первую очередь, конечно, речь идёт о математике, но и на успехи по другим предметам вполне может повлиять участие в математических олимпиадах. Например, успешное участие в письменных олимпиадах даёт ощутимый положительный толчок успеваемости по русскому языку: ведь для того, чтобы понятно записать решение, нужно уметь грамотно и чётко выражать свои мысли. И участие в письменных олимпиадах, несомненно, способствует развитию этих навыков.

- Значительное влияние участие в олимпиадах может оказать на формирование личных качеств: усидчивости, трудолюбия, упорства, длительной концентрации внимания, без которых просто не добиться успеха в математических соревнованиях. В старших классах занятия олимпиадной математикой также требуют умения правильно распределять время и ответственно расставлять приоритеты.

Авторы безусловно будут рады мнению оппонентов по любым затронутым в обеих частях статьи вопросам пользы и негативного влияния олимпиад и приглашают к дискуссии по всем аспектам спортивной и научной сторон математических олимпиад.

## Список литературы

- [1] Рукшин С. Е. Математические соревнования в Ленинграде–Санкт-Петербурге. Первые 50 лет. – Ростов на Дону: «МарТ», 2000. – 320 с.
- [2] Konstantinov N., Rubanov I., Rukshin S. Mathematical Competitions in the USSR – Russia, National Presentation: Russia. The 10th International Congress on Mathematical Education. – Copenhagen, 2004. – P. 28–32.
- [3] Максимов Д. В., Рукшин С. Е. Математические олимпиады и становление профессионального математика // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. – СПб.: БАН, 2011. – С. 173–176.

УДК 372.851, УДК 330

### ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ НА ОСНОВЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОДХОДА К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛИ

Мельников Ю. Б.

Российский государственный экономический университет

Екатеринбург

e-mail: UriiMelnikov58@gmail.com

**Melnikov Yu. B. Education mathematical modeling based on the algebraic approach to constructing a model.** We consider the algebraic approach, which consists of three components: 1) set of basic

elements; 2) set of typical changes and combinations; 3) approximation mechanism, and its use in mathematical education.

Рассматривается алгебраический подход к построению моделей, состоящий из трёх компонентов: 1) совокупности базовых элементов; 2) совокупности типовых преобразований и комбинаций; 3) механизма аппроксимирования, и его применение в обучении математике.

Существует несколько каналов влияния математики на различные области человеческой деятельности: построение и использование математических моделей различных объектов, «экспорт» некоторых математических идей и подходов на другие сферы деятельности и, соответственно, «импорт» идей и методов, зародившихся вовне математики, внедрение их в идеологию и практику математической деятельности, внедрение математических конструкций в культуру на различных уровнях: от символов и терминологии до интерпретаций и технологических подходов и др. Одним из важнейших каналов взаимовлияния математики и других областей деятельности является математическое моделирование, являющееся важным частным случаем общего подхода к моделированию [11].

Алгебраический подход к построению моделей [5] представляет собой систему из трёх компонентов:

- 1) система базовых элементов (базовых моделей);
- 2) совокупность типовых преобразований моделей и типовых комбинаций;
- 3) механизм аппроксимирования.

Одним из условий применения алгебраического подхода к построению модели является требование, чтобы результатом операции «алгебры моделей» была модель. Но это не гарантируется в рамках традиционных определений модели. Поэтому мы предложили формально-конструктивную трактовку модели [2, 3], представленную на рис. 1, с уточнениями, представленными в табл. 4 и 1. Особенностью нашей трактовки модели является от-

Таблица 4. Интерфейсный компонент модели

<b>Граматики</b>		<b>Аппарат перевода</b>
Грамматика языка, в котором представлен моделируемый объект, прототип	Грамматика языка, в котором представлена модельно-содержательная компонента модели	Аппарат перевода с языка представления моделируемого объекта на язык модельно-содержательной компоненты модели, включающий в себя словарь, механизм анализа, синтеза и др.

Иллюстрация к формально-конструктивному определению модели

<b>Моделируемый объект</b>	<b>Связи между компонентами объектов</b>	<b>Моделирующий объект</b> (модель в традиционной трактовке)		
	Формально-конструктивное определение модели: <b>модель – это система из интерфейсного и модельно-содержательного компонентов</b>			
	Интерфейсный компонент модели	Модельно-содержательный компонент модели		
	грамматики	аппарат перевода	носитель	совокупность характеристик
				совокупность отношений

Рис. 1. Иллюстрация к формально-конструктивной трактовке модели.

Таблица 1. Модельно-содержательный компонент модели

Носитель	Совокупность характеристик	Совокупность отношений
Множество элементов, из которых состоит моделируемый объект с точки зрения данной модели	Множество функций, область определения каждой из которых включается в декартову степень носителя	Множество отношений на объединении носителя и совокупности характеристик

существование традиционного требования «похожести» (в разных смыслах) образа (т. е. формально-конструктивного компонента модели) на прототип. Мы считаем, что вынесение этого требования за пределы определения является не недостатком, а преимуществом, поскольку позволило создать теорию адекватности моделей [4].

Адекватность модели оценивается с помощью сравнения образа с некоторой эталонной моделью. Отметим несколько моментов. Во-первых, эталонная модель может не совпадать с прототипом. Более того, у нас сложилось впечатление, что совпадение возможно только в случае моделирования абстрактного объекта объектом достаточно высокого уровня абстрагирования. Во-вторых, термин «эталонная модель» в данном контексте не имеет никакого отношения к понятиям «хороший», «качественный» и др. Речь идет только о том, что данный объект мы берём за образец, хотя он тоже может быть неудачным. Сравнение можно формализовать как вычисление значения функции, называемой **характеристикой адекватности**, область определения которой состоит из упорядоченных пар моделей:



(оцениваемая модель, эталонная модель), а область значений может быть и ненулевой. Если эталонная модель и характеристика адекватности отражают следование формальным правилам, не отражающим содержательные связи между прототипом и образом (например, правила русского языка), то эту характеристику адекватности мы называем **характеристикой корректности**. В случае, когда эталонная модель и характеристика адекватности отражают содержательные связи, например, в эталонной модели рассматривается альтернативный способ вычисления некоторой величины, соответствующую характеристику мы называем **характеристикой достоверности**.

В учебном процессе построение математического материала часто удобно представлять в виде результата применения алгебраического подхода. Например, понятие элементарной функции вводится именно таким образом: во-первых, в качестве базовых элементов вводятся базовые элементарные функции, во-вторых, в роли типовых преобразований и типовых комбинаций рассматриваются операции сложения, вычитания, умножения и частичные операции деления и вычисления композиции (суперпозиции) функций. Механизм аппроксимирования в школьном курсе фактически не рассматривается, а вот в курсе высшей математики в этом качестве рассматриваются формулы Тейлора, сплайны, интерполяционный многочлен Лагранжа, ряды Тейлора и Фурье (по разным ортогональным системам функций) и др. В линейной алгебре выделение базисных элементов осуществляется в явном виде, типовые преобразования и типовые комбинации представлены, например, линейными комбинациями векторов линейного пространства, и рассматриваются разные механизмы аппроксимирования, например, использующие матрицу перехода от одного базиса к другому.

В соответствии с традицией, принятой в теории и методике обучения математике можно выделить два варианта алгебраического подхода к обучению математике: *содержательный* и *деятельностный*. Содержательный вариант включает в себя алгебраический подход к организации математических математических конструкций: понятий, формулировок определений, теорем и др. К типовым преобразованиям и комбинациям относится преобразование конструкции, проводимое, например, на основе метода аналогии, включение одной конструкции в другую в качестве составной части. Примером может быть построение формулировки с использованием понятий, использующее различные логические связки (конъюнкция, импликация, эквиваленция и др.). Механизм аппроксимирования может быть основан, в частности, на анализе или

контроле объёма соответствующих понятий.

Кроме того, к содержательному варианту алгебраического подхода можно отнести построение алгебраических операций. Например, в начальной школе первичной является операция «сложение» (которая тоже вводится алгебраически: сначала сложение однозначных чисел, потом на его основе вводится сложение «столбиком»), после чего вводятся вторичные операции «вычитание» и «умножение», завершающееся вторичной частичной операцией «деление» (представляемое в конце концов делением «уголком»). В данном случае механизм аппроксимирования представлен, во-первых, соответствующими алгоритмами вычисления, во-вторых, различными способами «прикидки» (т. е. оценивания, приближённого вычисления) результата. В дальнейшем, при введении операций возведения в степень, извлечения корня, логарифмирования и т. д. всё чаще алгоритм нахождения точного значения заменяется на процедуры приближенных вычислений.

В высшей алгебре механизмы аппроксимирования обогащаются процедурами индуцирования операций и отношений на подалгебры, гомоморфные образы, фактор-системы и др.

Деятельностный вариант алгебраического подхода связан с декомпозицией алгоритмов, приёмов, методов и др. На наш взгляд, перспективным направлением является декомпозиция стратегий деятельности. Наш анализ различных трактовок термина «стратегия» показал, что все они укладываются в схему, представленную в табл. 2. В работах [6, 7, 8] произведена де-

Таблица 2. Стратегия и применение стратегии.

<b>Стратегия</b>	<b>Реализация стратегии</b>	<b>План деятельности</b>	<b>Выполнение плана</b>
Механизм создания эталонной модели	Применение стратегии для создания эталонной модели	Эталонная модель деятельности	Деятельность, для которой план является эталонной моделью

композиция стратегий рутинной исследовательской деятельности, рутинной проектной деятельности и стратегии рутинного моделирования. Эти работы идеологически близки теории решения изобретательских задач [1]. В качестве примера декомпозиции стратегии рассмотрим стратегию решения уравнений, основанную на следующем типовом плане:

- 1) решение уравнения и неравенства начинаем и заканчиваем анализом ОДЗ переменных и неизвестных;

2) цель — свести к уравнению с известным алгоритмом решения, например, к квадратному уравнению или к виду  $p(\alpha(x)) = b$ , где  $p$  — некоторая элементарная функция;

3) для достижения основной цели применяются:

3а) тождественные преобразования алгебраических выражений;

3б) равносильные преобразования равенств;

3в) переход к уравнению–следствию;

3г) приведение уравнения к виду «произведение равно нулю»;

3д) приведение к виду  $\gamma(x) = \max_{x \in D(\gamma)} \{\gamma(x)\}$  или  $\gamma(x) = \min_{x \in D(\gamma)} \{\gamma(x)\}$ ;

3е) частные случаи (например, «избавление от модуля»);

3ё) замена переменных.

Выполнение большинства из этих пунктов требует владения соответствующей стратегией. Система этих и других стратегии использованы в качестве системы управления деятельностью обучаемых в работах [9, 10].

В настоящий момент актуальной является задача совершенствования механизмов моделирования экономических процессов, причём на первый план выдвигается задача *построения* математической модели и *интерпретации результатов*, поскольку её анализ чаще всего осуществляется с помощью компьютеров. В настоящее время мы не видим достойной альтернативы алгебраическому подходу для построения необходимых экономических моделей.

**Пример 1.** *Стоимость раствора численно равна отношению массы содержащейся в нем воды к концентрации соли. Каждый час из раствора испаряется 2 кг воды. В 12 часов дня раствор стоил 54 рубля, а в 18 часов того же дня — 10 рублей. Какова была масса раствора в 12 часов дня?*

Первичную модель, рассматриваемую в данной задаче, можно представить в виде комбинации (точнее, композиции [2, с. 44]) трёх моделей. Носитель этих моделей состоит из измеримых частей внутренности некоторого сосуда, заполненных раствором. *Первая* из начальных моделей — это типовая модель равномерного по массе распределения вещества, в которой рассматривается 3 характеристики, сопоставляющие части  $V$  объёма раствора: 1) массу  $M(V)$  находящегося в нем раствора; 2) массу  $m(V)$  находящейся в нем соли; 3) концентрацию (вторичная величина)  $c(V) = \frac{m(V)}{M(V)}$  соли в этой части объёма. *У второй модели* на этом же носителе определена одна величина, сопоставляющая части  $V$  объёма раствора стоимость  $p(V)$

раствора, находящегося в этой части. В *третьей модели* на этом же носителе определены три величины, сопоставляющие части объёма раствора: 1) массу  $(M(V) - m(V))$  раствора, находящегося в части  $V$ ; 2) скорость испарения  $v(V)$  воды из части  $V$  объёма сосуда; 3) время  $T(V)$ , за которое испаряется вода из части  $V$  объёма сосуда, причем эти величины связаны отношением  $T(V) = \frac{M(V) - m(V)}{v(V)}$ . «Объединение» (композиция) этих моделей обогащается отношениями, например,  $p(V) = \frac{M(V) - m(V)}{c(V)}$ .

Для человека, владеющего алгеброй моделей [2, 3, с. 44], не составит особого труда выполнить декомпозицию модели, рассматриваемой в примере 1, после чего синтезировать необходимую математическую модель.

Обучение применению математики на основе алгебраического подхода включает в себя следующие компоненты:

- 1) знание типовых базовых моделей соответствующих областей предметной деятельности: экономики, физики и т.д.;
- 2) владение стратегиями комбинирования базовых моделей;
- 3) владение стратегиями оценки их адекватности (стратегиями выбора эталонных моделей и характеристик адекватности для оценки адекватности создаваемых моделей), улучшения адекватности моделей.

Вариантом стратегии комбинирования моделей является стратегия составления уравнений [2, с. 93–173], краткое описание которой и многочисленные примеры применения приведены также в [9, файл 00MakeEquat.pdf]. Эта стратегия обеспечивает создание математической модели с системой отношений, представленных равенствами, при условии, что человеку, её реализующему, известны необходимые базовые типовые модели соответствующей предметной области или он в состоянии самостоятельно построить нужную базовую модель, например, с помощью метода аналогии. Отметим, что наиболее мощным, развитым компонентом аналитического аппарата математики является аппарат обработки равенств, это в значительной степени относится и к вычислительной математике.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-06-00240 А.

## Список литературы

- [1] Альтшуллер Г. С. Как научиться изобретать. – Тамбов: Тамбовское кн. изд-во. 1961. – 17 с.
- [2] Мельников Ю. Б. Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей. – Екатеринбург: Уральское издательство, 2004. – 384 с.
- [3] Мельников Б. Н., Мельников Ю. Б. Геотехногенные структуры: теория и практика. – Екатеринбург. Уральское изд-во, 2004. – 556 с.
- [4] Мельников Ю. Б., Г.В. Ваганова, Е.П. Матвеева Об определении и оценке адекватности модели // Образование и наука, № 10, 2007, – С. 3–11.
- [5] Мельников Ю. Б., Алгебраический подход к созданию учебных презентаций по математике // Образование и наука, № 5(84), 2011, – С. 129–141.
- [6] Мельников Ю. Б., Поторочина К. С.. Алгебраический подход к математическому моделированию и обучению математической и «предматематической» деятельности // Ярославский педагогический вестник, 2010, № 3: Физико-математические и естественные науки. – С. 19–24.
- [7] Мельников Ю. Б., Хрипунов И. В., Чоповда В. С. Алгебраический подход к стратегиям проектной деятельности // Известия УрГЭУ, 2014. – № 2 (53). – С. 115–123.
- [8] Мельников Ю. Б., Евдокимова Д. А., Дергачев Е. А., Успенский Д. А., Огородов М. С. Стратегии построения модели // Управленец, 2014.— № 3 (49). – С. 52–56.
- [9] Мельников Ю. Б. Элементарная математика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Ю. Б. Мельников ; М-во образования и науки РФ, Урал. гос. экон. ун-т. Екатеринбург : Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2014, 27 уч.-изд. л.  
<http://lib.usue.ru/resource/free/14/MelnikovAlgebra5/index.html>
- [10] Мельников Ю. Б. Математический анализ [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов экономических и инженерно-технических направлений вузов / Ю. Б. Мельников ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. гос. экон. ун-т. Екатеринбург : Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2015, уч.-изд. л. 26,6  
<http://lib.usue.ru/resource/free/15/MelnikovAlgebra6/index.html>
- [11] Штофф В. А. Моделирование и философия. – М–Л.: Наука, 1966. — 96 с.

## НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Петров Н. Г.

СПбГПУ

Санкт-Петербург

**Petrov N. G. A new method of solving a linear differential equation.** In this study we will obtain a new method of solving a linear differential non-homogeneous equation of second order with real coefficients with substitution of the required function the unknown function multiplied by the exponential. As a result the third member of equation always becomes zero and the second member of equation can also become zero. Using this method we don't need to solve the system of linear equation but we need to calculate two integrals.

В работе получен новый метод решения линейного дифференциального неоднородного уравнения второго порядка с вещественными коэффициентами с использованием замены искомой функции на неизвестную функцию, умноженную на показательную. В результате третий член уравнения обращается в нуль всегда, а также может обратиться в нуль второй член уравнения. В данном методе не нужно решать систему линейных алгебраических уравнений, а нужно только вычислить два интеграла.

Рассмотрим уравнение вида

$$y''(x) + p_1 y'(x) + p_2 y(x) = f(x), \quad (1)$$

где  $x \in [a, b]$ ,  $p_1, p_2$  – вещественные числа,  $f(x)$  – непрерывная функция. Решение уравнения (1) ищем в следующем виде

$$y(x) = C(x)e^{r_0 x}, \quad (2)$$

где  $C(x)$  – неизвестная функция,  $r_0$  – один из корней уравнения

$$r^2 + p_1 r + p_2 = 0. \quad (3)$$

Найдём  $y'(x)$ , используя (2), затем  $y''(x)$ , используя выражение для  $y'(x)$ , и подставим их и выражение  $y(x)$  из (2) в уравнение (1). Получим

$$C''(x)e^{r_0 x} + C'(x)(2r_0 + p_1)e^{r_0 x} + C(x)(r_0^2 + p_1 r_0 + p_2)e^{r_0 x} = f(x). \quad (4)$$

Разделим обе части равенства (4) на  $e^{r_0 x}$ . Получим

$$C''(x) + C'(x)(2r_0 + p_1) + C(x)[r_0^2 + p_1 r_0 + p_2] = f_1(x), \quad (5)$$

где

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{e^{r_0 x}}. \quad (6)$$

Квадратная скобка в уравнении (5) равна нулю, так как по условию  $r_0$  – корень уравнения (3),

$$r_0^2 + p_1 r_0 + p_2 = 0. \quad (7)$$

Если  $r_0$  – двукратный корень уравнения (3), то получаем по теореме Виета

$$2r_0 + p_1 = 0. \quad (8)$$

Подставим (7), (8) в (5). Получим

$$C''(x) = f_1(x). \quad (9)$$

А тогда

$$C(x) = \int \left( \int f_1(x) dx \right) dx,$$

см. [1]. Подставим (10) в (2). Получим

$$y(x) = e^{r_0 x} \int \left( \int f_1(x) dx \right) dx. \quad (11)$$

Если  $r_0$  не является двукратным корнем характеристического уравнения (3), то подставим (7) в (5). Получим

$$C'''(x) + C'(x)(2r_0 + p_1) = f_1(x). \quad (12)$$

Сделаем замену

$$C'(x) = z(x), \quad (13)$$

соответственно,

$$C'''(x) = z'(x). \quad (14)$$

Подставим (13) и (14) в уравнение (12). Получим

$$z'(x) + (2r_0 + p_1)z(x) = f_1(x). \quad (15)$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Решая его по методу Бернулли или методом вариации произвольной постоянной, получим

$$z(x) = e^{-(2r_0 + p_1)x} \int f_1(x) e^{(2r_0 + p_1)x} dx, \quad (16)$$

см. [1]. Подставляя (16) в (13) и интегрируя полученное равенство, находим

$$C(x) = \int \left( e^{-(2r_0+p_1)x} \int f_1(x) e^{(2r_0+p_1)x} dx \right) dx. \quad (17)$$

Подставляя (17) и (2), а затем (6) в полученное равенство, получим

$$y(x) = e^{r_0x} \left[ \int e^{-(2r_0+p_1)x} \left( \int f(x) e^{(r_0+p_1)x} dx \right) dx \right]. \quad (18)$$

Подставляя (6) в (11), получим

$$y(x) = e^{r_0x} \int \left( \int \frac{f(x)}{e^{r_0x}} dx \right) dx. \quad (19)$$

Если  $f(x) = 0$ , то равенства (18) и (19) принимают вид

$$y(x) = -C_1 \frac{e^{-(r_0+p_1)x}}{2r_0 + p_1} + C_2 e^{r_0x} \quad (20)$$

и, соответственно,

$$y(x) = e^{r_0x} [C_1(x + C_2)]. \quad (21)$$

### Примечания.

1. Полученный метод реализуется проще, чем метод Лагранжа, так как не нужно составлять систему линейных алгебраических уравнений и решать её, и не нужно находить другие решения характеристического уравнения.

2. Полученный метод довольно легко реализуется для линейных неоднородных уравнений порядка выше второго. И чем больше порядок дифференциального уравнения, тем сильнее проявляется преимущество полученного метода над методом Лагранжа, так как с увеличением порядка дифференциального уравнения увеличиваются и размеры системы линейных алгебраических уравнений и увеличивается степень характеристического уравнения.

3. Полученный также метод решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами для случая  $2r_0 + p_1 \neq 0$  проще реализуется, чем по методу Л. Эйлера, так как полученное вещественное или комплексное значение  $r_0$  подставляется в одну и ту же формулу общего решения однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка. А по методу Эйлера нужно вещественные корни характеристического уравнения подставлять в одну формулу общего решения, а комплексные корни – в другую.



**Пример 1.** Найти общее решение уравнения

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = e^x.$$

*Решение.*

1. Находим один из корней уравнения

$$r^2 + 5r + 6 = 0, \quad r = \frac{-5 \pm 1}{2}.$$

Выбираем корень  $r_0 = -3$ .

2. Вычисляем  $2r_0 + p_1$ :

$$2r_0 + p_1 = 2(-3) + 5 = -1.$$

Так как  $2r_0 + p_1 \neq 0$ , то вычисляем  $r_0 + p_1$ :

$$r_0 + p_1 = -3 + 5 = 2.$$

3. Вычисляем

$$\int f(x)e^{(r_0+p_1)x} dx = \int e^x e^{2x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C_1.$$

4. Вычисляем

$$\begin{aligned} \int e^{-(2r_0+p_1)x} \left( \int f(x)e^{(r_0+p_1)x} dx \right) dx &= \int e^x \left( \frac{1}{3}e^{3x} + C_1 \right) dx = \\ &= \frac{1}{12}e^{4x} + C_1e^x + C_2 = I(x). \end{aligned}$$

5. Записываем общее решение

$$y(x) = e^{r_0x} I(x) = e^{-3x} \left( \frac{1}{12}e^{4x} + C_1e^x + C_2 \right) = \frac{1}{12}e^x + C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}.$$

**Пример 2.** Найти общее решение уравнения

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x.$$

*Решение.*

1. Находим один из корней уравнения  $r^2 - 2r + 1 = 0$ ,  $r_{1,2} = 1$ . Корень  $r_0 = 1$  – двукратный, поэтому  $2r_0 + p_1 = 0$ .

2. Вычисляем

$$\int \frac{f(x) dx}{e^{r_0 x}} = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1.$$

3. Вычисляем

$$\int \left( \int \frac{f(x) dx}{e^{r_0 x}} \right) dx = \int \left( \frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2 = I(x).$$

4. Записываем общее решение

$$y(x) = e^{r_0 x} I(x) = \frac{1}{4} e^x + (C_1 x + C_2) e^{-x}.$$

**Пример 3.** Найти общее решение уравнения

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0.$$

*Решение.*

1. Находим один из корней уравнения

$$r^2 + 3r + 2 = 0, \quad r = \frac{-3 \pm 1}{2}.$$

Выбираем корень  $r_0 = -1$ .

2. Вычисляем  $2r_0 + p_1 = -2 + 3 = 1$ . Так как  $2r_0 + p_1 \neq 0$ , то вычисляем  $r_0 + p_1 = -1 + 3 = 2$ .

3. Используя формулу (20), получаем  $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$ .

**Пример 4.** Найти общее решение уравнения

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = 0.$$

*Решение.*

1. Находим один из корней уравнения

$$r^2 + r + 1 = 0, \quad r = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

Выбираем корень  $r_0 = -1 + i\sqrt{3}$ .

2. Вычисляем  $2r_0 + p_1 = -1 + 2i\sqrt{3}$ . Так как  $2r_0 + p_1 \neq 0$ , то вычисляем  $r_0 + p_1 = i\sqrt{3}$ . Используя формулу (20), получаем

$$y(x) = C_1 e^{-1+i\sqrt{3}} + C_2 e^{-1-i\sqrt{3}}.$$

## Список литературы

- [1] Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление, т. 2. – М.: Наука, 1980.

## ШАХМАТНЫЙ КРУЖОК В ФТШ ИМ. ИОФФЕ

Пименов Р. Р.

Физико-техническая школа им. А. Ф. Иоффе

Санкт-Петербург

e-mail: revoltp@mail.ru

**Pimenov R. R. Chess club in Ioffe Physical and Technical School.** The article gives an idea of the benefits of chess for personal development and the characteristics of chess club in Physics and Mathematics school. The article is based on personal experience in the chess club in Ioffe Physical and Technical school.

В статье даётся представление о пользе шахмат для развития личности и об особенностях шахматного кружка в физ.-мат. школе. Статья основана на личном опыте работы в шахматном кружке в ФТШ им. Иоффе.

“В юности у меня было два любимых занятия: математика и шахматы. Причина по которой я предпочел шахматы математике, может показаться непосвященному странной, а то и парадоксальной: в шахматах больше жизни, чем в математике.”

Рихард Рети, гроссмейстер, в молодости – учитель математики [3].

Шахматный кружок в ФТШ им. Иоффе (Академический Университет) существует с 1990 года, т. е. почти с момента основания Лицея. Его бессменный руководитель – В. А. Рыжик. В. А. Рыжик не только известный и уважаемый в педагогическом сообществе учитель математики и автор многих методических пособий и учебников, но и чемпион общегородских шахматных соревнований по блицу и рапиду. Он играет в силу крепкого кандидата в мастера и обладает большой шахматной эрудицией. С 2014 года я ассистирую В. А. Рыжику на занятиях.

Прежде, чем рассказывать об особенностях шахматного кружка в физ.-мат. школе, я напому о причинах, побуждающих создавать шахматные

кружки и даже уроки шахмат в общеобразовательных школах. Польза шахмат для интеллектуального, волевого и эмоционального развития личности много раз обсуждалась. Давно замечено, что шахматы развивают наблюдательность, самостоятельное и целенаправленное мышление, усидчивость, остроумие и внимание, здоровое честолюбие, дают навык к честной борьбе, дисциплинируют ум и волю. Все эти качества полезны и в жизни, и в учёбе, и потому неоднократно делались попытки развивать обучение шахмат в школе. Цитирую замечательного игрока и теоретика шахмат первой половины 20-го века: “В шахматах прекрасно все то, что в какой-нибудь мере увязывает пестроту событий на шахматной доске с законами природы” (А. Нимцович) [3].

В СССР этим упорно занимался А. Е. Карпов. Он и пропагандировал пользу шахмат в педагогике, и основывал специализированные шахматные школы. Он продолжал этим заниматься и после 1991, во многом благодаря его идеям шахматы стали на много лет частью школьного образования в Республике Молдова. Развивались детско-юношеские школы и в Украине в период президентства В. А. Ющенко. Разумеется, были и другие, менее известные энтузиасты расширения шахматного образования в школах. Некоторый итог своему опыту А. Карпов подвёл 27 ноября 2014 г. в Казани на открытии Суперфинала чемпионата России [2]:

“Самое радостное для шахмат – это тот факт, что сегодня на всех континентах они приходят в школы. Этот процесс не был навязан «сверху», он, наоборот, пошел «снизу». Преподаватели во многих странах мира почти одновременно пришли к выводу, что шахматы оказывают сверхположительное воздействие на школьников, формируя характер, улучшая дисциплину, восприятие других предметов. Не говоря уже о том, что шахматы абсолютно несовместимы с наркотиками, – отметил он . . . Даже если бы было принято решение «сверху» включить шахматы во все школы, мы бы не смогли осилить программу – у нас нет соответствующего контингента преподавателей. Надо их готовить – в этом, думаю, идеальным образом построена система в Российском государственном социальном университете (РГСУ), где студенты, желающие получить профессию преподавателя по шахматам, имеют возможность на всех факультетах пройти курсы и в течение двух лет получить соответствующий диплом”.

В третьем разделе статьи В. П. Одинца и М. Я. Пратусевича [1] при обсуждении качеств, необходимых для учителя математики, говорится, что требуется «пересмотр содержания не столько математической сколько

психолого-педагогической и общекультурной составляющих подготовки будущего учителя». вполне возможно, что перенесение опыта РГСУ по подготовке преподавания шахматам в среду математических педагогов послужит этой цели. Многие положительные особенности шахматного мира: открытость, честная интеллектуальная конкуренция, заинтересованность творчеством в любительском и профессиональном кругу – важны и для любого научного сообщества.

Ученики нашего лицея, как правило, уже имеют многие качества, которые развиваются в ходе занятий шахматами. Если бы они не были способны к дисциплине, самостоятельному целеполаганию, не обладали бы существенными интеллектуальными способностями – они бы просто не смогли учиться в нашей школе. Как и во многих других физ.-мат. школах, наши ученики скорее перегружены нестандартной школьной программой. Поэтому на кружке не проходят систематические лекции: дети уже устали от школьной программы. Желающие систематически учиться шахматам берут книги из сформированной В. А. Рыжиком обширной шахматной библиотеки, и порой мы совместно обсуждаем прочитанное, разбираем учебные партии. Кружок предлагает им совершенствоваться в ходе самой игры. Для детей наши занятия в большей степени интеллектуальный досуг и отдых, чем систематическое овладение шахматными знаниями под руководством тренера–учителя. Тем не менее, рост шахматного мастерства многих учеников очевиден. Расскажу подробнее об учениках и работе кружка. На кружок приходят обычно от семи до 20 человек. Как правило, это ученики Лицея, т. е. учащиеся 8–11 классов. Иногда заниматься приходят и их младшие родственники или дети, каким-либо образом узнавшие о шахматном кружке. Как правило, приходящие имеют квалификацию не ниже 3–4 разряда (знают правила и умеют избегать очевидных ошибок). Иногда приходят обучаться дети, знакомые только с шахматными правилами. С ними, по мере возможности, мы занимаемся индивидуально по какому-либо пособию, предлагаем решать простые тактические упражнения.

Занятия длятся полтора–два часа. Первая и основная часть – турниры по быстрым шахматам (рапид), пятнадцать минут участнику на партию. Реже проводятся блицтурниры (5 минут на партию каждому участнику). Обычно участники разбиваются на две группы: группа А для сильнейших участников (перворазрядники, второразрядники, кандидаты в мастера) и группа Б для начинающих. Турниры проводятся по швейцарской или круговой (если участников мало) системе.

В ходе игры В. А. Рыжик и я выполняем роль судей, следим за порядком

и изредка останавливаем часы и показываем возможности борьбы, упущенные участниками. После партии мы иногда комментируем её, если считаем, что в ней случились какие-то методически важные события. После турнира обычно мы с В. А. Рыжиком играем между собой «показательные партии». Мы предлагаем ученикам выбрать дебют (открытое начало, полуоткрытая или закрытая партия, гамбит) и стараемся комментировать в ходе игры свои ходы и планы.

В. А. Рыжик старается каждый турнир сделать памятным для участников. Первые три призера (даже если всего участников четверо или пятеро) торжественно объявляются и получают призы, обычно шоколадки из школьного буфета, отдельный приз получают участвующие девочки. Результаты турниров еженедельно вывешиваются на школьной доске объявлений и выкладываются в интернете.

Кроме еженедельных тренировочных турниров, о которых была речь выше, в школе проводятся официальные соревнования: личный чемпионат школы по блицу и рапиду, в котором участвуют ученики, учителя и выпускники лицея, командный чемпионат школы. Также школьная команда по шахматам участвует в спарринг-матчах с другими школами, чаще всего с 30-ой школой, и в общегородских соревнованиях школ и вузов.

Среди спортивных достижений кружка:

- Призы соревнований «Белая Ладья» в СПб в 90-ые годы.
- Призы чемпионата России по интернет-шахматам в «нулевые» годы 21 века.
- Неоднократные победители командных соревнований в Калининском районе среди взрослых.
- Неоднократные победители студенческих соревнований Политехнического Университета.
- Неоднократные участники «Кубка Толуша» СПб.

Я благодарю Валерия Адольфовича Рыжика за любезно предоставленную информацию об истории шахматного кружка.

## **Список литературы**

- [1] Одинец В. П., Пратусевич М. Я. Основные тенденции в изменении потребностей математических знаний у будущих учителей – выпускников естественных факультетов. Проблемы математического образования в

вузах и школах России в условиях его модернизации. // Материалы II межрегиональной научно-методической конференции. – Сыктывкар: Изд. КГПИ, 2008. – С. 18–29.

[2] Лента новостей ТАСС <http://tass.ru/sport/1304603>

[3] Л. Бабушкин. «Помогут ли шахматы школе», интернет-публикация <http://pprint.narod.ru/kniga2/vseob.htm>

УДК 738.147.31

## ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ВУЗАХ

Попов В. А.

Финансовый университет при Правительстве РФ

Москва, Россия

e-mail: [vlapopov@gmail.com](mailto:vlapopov@gmail.com)

**Popov V. A. The problems of teaching mathematics in economic universities.** This article deals with the analysis of the following problems. They are: impossibility of thorough understanding of mathematics and absence of any skills among economists in formulae transformation; inevitability of simplified approach to teaching mathematics; common approach to teaching economics and mathematics in proper combination.

Рассматриваются следующие вопросы: роль формул в понимании экономики; невозможность полного восприятия студентами математики; отсутствие навыков обращения с формулами и неизбежность упрощённого подхода к преподаванию математики; необходимость совместимости преподавания финансово экономических дисциплин и математики.

В последнее время всё более проявляется тенденция развития математики «вширь». Т. е. математический «формульный» подход приобретает всё большее значение в исследованиях и понимании законов других наук, ранее казавшихся абсолютно чуждыми математическим методам. Общественное признание роли математики в различных областях человеческой деятельности является несомненным. Признаётся роль математического мышления и математизированного подхода при решении многих проблем. Достаточно вспомнить телепередачи, посвящённые важности математических знаний, причём, редакторами этих телевизионных обсуждений были люди далёкие от математики.

Не подлежит сомнению значение математики в экономике и экономическом образовании. Желающие посвятить себя экономике понимают необходимость получения математических знаний и развития математического мышления, что наряду с изучением гуманитарных наук даёт полное всестороннее понимание экономики. С трудом, но происходит определённая математизация финансово-экономического образования.

Математические методы дают возможность не только количественного анализа, но и позволяют понимать, формулировать и анализировать законы экономики. Наряду с величайшим даром слова человечеству был дан ещё один величайший дар – дар числа. Абстрагированное восприятие окружающего с помощью слов и числовые характеристики объектов – это и есть начало наук. Огромную роль в развитии человечества сыграло изображение слов и чисел. Оно дало возможность понимать различные явления с помощью начертания символов. Появление букв и чисел вместе с изобретением письма дало возможность универсального описания тех или иных предметов. Это описание стало широкодоступным с изобретением бумаги и печатного станка.

Однако числовые характеристики не использовали букв и были оторваны от словесного описания законов природы. Печатное слово и печатное число дали замечательный синтез – формулу. Именно появление формулы дало мощный импульс развитию науки. Формула позволила соединить описательное и числовое понимание законов мироздания. Незнание формул долгое время тормозило развитие естественных наук. Даже достижения великих учёных, таких как Галилей, были ограничены ввиду недостаточности чисто словесных описаний природных явлений. Основные законы естествознания были открыты после появления формул и выражены в виде формул.

Тем не менее, формульное понимание законов природы привело к разделению наук на точные науки, использующие формулы, и гуманитарные науки, опирающиеся на словесный описательный метод. Некогда единая наука разбилась на несвязанные между собой части. Считалось, что математический формульный подход применим к одним областям знаний и не применим к другим. Однако, математические методы проникают в такие сугубо гуманитарные науки, как история, филология и другие. В гуманитарных научных статьях стали появляться формулы, а в некоторых математических статьях формулы почти отсутствуют.

В экономике слияние двух подходов особенно органично. Это описательный (гуманитарный) подход, позволяющий достичь качественного понимания различных экономических аспектов, и формально-логический подход, даю-



ций возможность количественного анализа финансово экономических сфер деятельности и более полное качественное понимание законов экономического развития. Финансово-экономическое образование строится как на изучении точных наук и приобретении формально логических навыков, так и на развитии гуманитарного подхода к экономике и приобретении гуманитарных знаний. В свете этого остро стоит вопрос о гармонизации формально-логического и описательного анализа экономических проблем, а также освоения вычислительных методов. Однако преподаватели финансово-экономических дисциплин упорно уклоняются от применения самых простых математических средств. А ведь это наши бывшие студенты, причём, наиболее добросовестные.

Всё вышесказанное показывает необходимость пересмотра содержания математических дисциплин и методов их преподавания. Необходимо прояснить место и роль дисциплины «Математика» в системе финансово-экономического образования, взаимосвязь между преподаванием математики и преподаванием специальных дисциплин. И, главное, нужно хорошо представлять уровень восприятия основных математических понятий, тщательно проанализировав реальные возможности современных студентов экономических вузов. Короче говоря, надо выяснить, какую математику студент не математик может понять и какую не может даже при высочайшем уровне преподавания и большой строгости требований.

Система образования в современном мире характеризуется глубоким несоответствием между формальными требованиями и реальным уровнем освоения различных разделов учебных программ. У нас в стране разрыв между требованиями и знаниями, по-видимому, начал бурно углубляться в связи с быстрым увеличением числа студентов. Хорошая половина из этого все увеличивавшегося контингента не обладала ни базовыми знаниями, ни способностями, ни желанием получать глубокие знания. При этом программы тех же математических дисциплин только усложнялись. Ещё в начале семидесятых годов можно было видеть контрольные работы по математике для студентов ординарных технических вузов, составленные в соответствии с государственными стандартами, которые были трудны даже студентам механико-математического факультета МГУ.

В дальнейшем и, особенно в постсоветское время разрыв между математическими программами и возможностью и желанием их восприятия всё увеличивался. Так называемое высшее образование становится почти всеобщим, и в вузы приходят люди, не готовые к изучению сколько-нибудь глубокого

материала. А также, что очень важно, теряется непрерывность школьного и вузовского образования. Идею непрерывности начального и высшего образования выдвигал еще в XIX веке великий учёный Д. И. Менделеев. В советский период (около 40 лет назад) такая непрерывность реально существовала. Хорошие оценки в школе, как правило, соответствовали хорошим знаниям, которых было достаточно для поступления и успешной учёбы во многих вузах. В дальнейшем содержание и, особенно, реальные требования к знаниям перестали соответствовать уровню, необходимому для обучения в вузе. Правда, до последнего времени недостаток требований в школе компенсировался необходимостью подготовки к вступительным экзаменам в вуз. Обилие издаваемых учебных пособий различного рода, наличие всевозможных дополнительных занятий с абитуриентами в вузах, а также частное преподавание, обеспечивали непрерывность школьного и высшего образования. В последнее время, в связи с отменой вступительных экзаменов в ВУЗы, произошёл разрыв между обучением в школе и обучением в вузе. Школа всё более обособливается, заботясь скорей об отчётности, чем о требованиях к знаниям, единый государственный экзамен постепенно превращается в чисто школьное мероприятие, а в вузы поступают неподготовленные учащиеся. В итоге, изменившиеся реалии требуют изменения в методике преподавания.

Надо сказать, что проблема отсутствия базовых знаний является мировой. В западных странах студенты экономических университетов изучают математику с «нуля», сочетая традиционные разделы математического анализа, линейной алгебры и др. с основами элементарной математики [1–3]. Конечно, глубина понимания при этом снижается, но обучение становится более лёгким, возможность понимания достигается с помощью упрощения. Обилие обиходно понятных примеров способствует мотивации обучения. Трудно сказать насколько эффективно такое упрощенчество, но оно пришло «не от хорошей жизни».

Научить всех той достаточно абстрактной математике, которая так важна и так нравится нам, математикам, невозможно.

У нас высокие требования, заложенные в программах, не выполняются. Характерным примером может послужить упрёк в нашу сторону, прозвучавший на одном из заседаний методического совета со стороны со стороны преподавателей специальных экономических кафедр. Было сказано, что студенты не могут построить графики прямых линий, выражающих спрос и предложение. И такие примеры можно множить. К сожалению, следует заметить, что на фоне печальной необходимости снижения требований к

уровню математических знаний теоретический материал всё более заменяется механическим применением готовых алгоритмов для решения примеров. Отсюда происходит не только понижение роли лекций как основной формы обучения, но и почти полное игнорирование студентами изучения лекционного материала. Хорошие методики преподавания и доходчиво составленные учебные материалы позволяют студентам заучить определённые материалы и сдать экзамен. Такое заучивание подобно заучиванию нескольких китайских иероглифов при абсолютном незнании китайского языка. Поэтому «китайская грамота» математических формул кажется не только непонятной, но и ненужной.

На этом фоне происходит неприятие математики как таковой. Столкнувшись с невозможностью понимания абстрактных понятий и формул будущие специалисты, изначально настроенные на принятие необыкновенной важности математики, начинают отвергать математику как никому не нужную абстрактную чепуху.

Некоторую надежду на отыскание общего языка даёт всё большее распространение различных прикладных курсов. Однако, в основном эти курсы имеют теоретическое значение, хотя и экономического характера. Кроме того, и они зачастую заучиваются механически, без должного понимания. Необходимо, видимо, ещё большее смещение акцентов в сторону экономического и практического применения, что повысит мотивацию усвоения студентами математических знаний.

Однако, «выплёскивать» изучение фундаментальных математических понятий тоже нельзя. Так что проблема преподавания математики в воспринимаемой и привлекательной для студентов-экономистов форме остаётся и требует всестороннего обсуждения.

## **Список литературы**

- [1] Anthony M. Mathematics. – The London school of economics and political science, 2006.
- [2] Anthony M., Biggs N. Mathematics for economics and finance. – Cambridge: Cambridge university press, 1996.
- [3] Edward T. Dowling Mathematiques pour l'ecomiste. Cours et problems. – McGraw-hill Inc., 1990.

УДК 517.9

**О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ОБУЧЕНИЯ  
РЕШЕНИЮ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ, ЧАСТЬ 2:  
О ЗАДАЧАХ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО  
И ПРОПЕДЕВТИКЕ ГЕОМЕТРИИ**

Рукшин С. Е., Суслина М. Е.

Российский государственный педагогический  
университет имени А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: vliuser@gmail.com

**Rukshin S. E., Suslina M. E. About some aspects of training solving non-standard problems, part 2: proving and propedeutics geometry.** Authors discuss different methods of teaching students solving non-standard mathematical problems.

В статье рассматриваются некоторые проблемы и методы обучения студентов решению нестандартных математических задач.

Практические занятия по математическим дисциплинам студентов педагогических специальностей состоят в основном в изучении достаточно общих алгоритмов решения задач, что является лишь одной (и далеко не самой трудной) составной частью искусства решения математических задач. Мы учим конкретным видам деятельности: умению вычислять предел, производную, интеграл, длину кривой, площадь поверхности, объем тела, решать систему линейных уравнений и т. д.

Занятия посвящаются изучению конкретных алгоритмов, причём эти алгоритмы предлагаются студентам в уже готовом, справочно-рецептурном виде. Именно по этой причине догматические указания срываются, когда нам известна привязка задачи к теме занятия, и не срываются на обобщающих контрольных и зачётах, когда нет подсказки, каким из изученных методов нужно воспользоваться. Мы предлагаем рецепт, выучив который, студент может решить лишь определенный тип задач. Но какой из рецептов выбрать? Скажем, какой из формул для вычисления объема надо воспользоваться – по площади поперечных сечений или тела вращения? А если тела вращения – то вокруг какой из осей? Авторы уже рассматривали эту проблему обучения решению задач в [1].

К сожалению, трудности не исчерпываются этой проблемой. Студент, добросовестно овладевший решением достаточно сложных алгоритмических задач, успешно написавший контрольные работы по данной дисциплине и чувствующий себя вполне комфортно, мгновенно теряется, как только перед этим успешным и уверенным в своих знаниях студентом поставлена задача с формулировкой “Докажите, что:”. Картина резко меняется, и от уверенного человека не остается и следа, он начинает говорить, что не знает, как решать такую задачу и просит показать решение. Увы! После этого он сможет решить 10 таких же задач, но любая отличная от них снова вызывает у него затруднения. Именно поэтому студенты панически боятся задач на доказательство и готовы с удовольствием выполнять техническую и порой трудоёмкую работу в соответствии с заранее выданным алгоритмом действий, чёткое исполнение которого приведёт к намеченной цели.

Когда и как учить решать задачи на доказательство? Как всё-таки добиться того, чтобы студенты могли не только выучить доказательство теорем, но и могли сами решать задачи на доказательство? Как, а главное в какой момент возможно развить умение строить цепочки рассуждений? Где, на каком материале и когда? При поиске ответа на вопрос “где?” приходят на ум слова из песни: “учат в школе, учат в школе, учат в школе...”, в которой мы и видим первые попытки “напасть” на ученика со словом “докажи” на уроках и в учебнике геометрии. Дело за малым – выяснить, когда и почему ребёнка научили или не научили в школе азам решения задач на доказательство. Кажется бы, геометрия наука достаточно сложная и изучается в 7–11 классах, но зачастую и в ней вместо задач на доказательство дети предпочитают как и в начальной школе что-то вычислять или измерять, но никак не доказывать. Видимо, проблема студентов и школьников не в названии дисциплины и не в возрасте, а в явном отсутствии умения рассуждать. Поэтому студенты как дети пытаются спастись бегством от всякого рода доказательств.

В качестве панацеи чаще всего преподносится идея пропедевтики геометрии на более ранних ступенях обучения. Уже давно многие авторы учебников для 5–6 классов, да и для начальной школы вставляют целые параграфы, а иногда и главы с геометрическим материалом. Авторы мотивируют это тем, что геометрия даётся детям гораздо труднее алгебры и решать эту проблему нужно более ранним знакомством учеников с предметом. Единственным обоснованием такого подхода служит расхожее мнение, что чем раньше начать сообщать детям геометрические факты, то тем раньше они их выучат, и к 7 классу проблем с изучением предмета не будет. Это “обоснование” со-

стоит из двух ошибок. Первая состоит в том, что курс геометрии по мнению апологетов пропедевтики направлен на изучение определений и формулировок теорем, а вовсе не на решение с их помощью геометрических задач. Вторая – что память учащихся настолько универсальна, что можно заранее выучить (безо всякого применения!) некоторый набор фактов, который в нужный момент по мановению волшебной палочки активизируется. А затем в нужный момент из памяти будут извлекаться ровно те факты, которые востребованы при решении конкретной задачи и, конечно же, сразу в нужной последовательности. Разумеется, этого не происходит, и подобный подход не даёт никакого выигрыша. Над этой ситуацией в фильме Игоря Масленникова еще 30 лет назад иронизировал Шерлок Холмс, убеждавший Ватсона, что разрозненные знания, не приведенные в систему и пылящиеся в захлапленном чердаке в отдельных коробочках и чемоданах, не облегчают поиск решения задач. Для этого они должны быть пронизаны богатыми ассоциативными связями, которые, естественно, возникают только при практическом применении наших знаний: Выученный учащимися “заранее”, впрок материал в лучшем случае несколько лет будет храниться в памяти бесполезным грузом и не будет востребован при решении задач, когда он действительно понадобится. Просто потому, что к тому времени дорога к нему будет завалена грузом таких же бессистемных знаний и обрывочных фактов из других областей.

Увы, несмотря на полное отсутствие позитивного результата, сторонники раннего изучения пытаются увеличивать количество геометрического материала (в ущерб другим разделам школьного курса), переходить от уровня знакомства с фигурами и телами на уровень изучения содержательных результатов. Один из наших коллег даже многократно пытался заставить пятиклассников выучить определения и формулировки теорем, смысл и востребованность которых они абсолютно не понимают. Да и что означают для пятиклассника эти самые вписанные и описанные четырехугольники, свойства и признаки которых в него пытаются внедрять?

Давайте попробуем разобраться в этом вопросе подробнее. Изучение геометрии действительно имеет большое значение – именно она составляет заметную часть той восхищавшей Ломоносова математики, которую нужно изучать, ибо именно она “ум в порядок приводит”! Попытаемся выделить и поставить наиболее существенные вопросы. В каком возрасте стоит начинать знакомить ребенка с геометрическими терминами и в какой степени строгости нужно давать формулировки понятий? С чего начинается для ученика

геометрия? Что это – набор точных определений и формулировок, описывающих плоские фигуры и пространственные тела, или знакомство со способом рассуждений? В чем причина трудностей, возникающих даже у добросовестных учеников? Казалось бы, если апологеты пропедевтики правы – то что может быть проще? Выучил формулировки и подставляй их в нужных местах. Ан нет! Не работает! Есть масса примеров добросовестных учеников 5–6 класса, с великолепной памятью, для которых в 7 классе геометрия все равно становится трудным для восприятия предметом! Значит, дело не в плохой памяти или недобросовестности, а в принципиальном отличии геометрии от большей части предшествующего курса математики?!

Большую часть курса арифметики и алгебры, предшествующего началам геометрии, составляют простейшие правила, шаблоны и алгоритмы. Сложение в столбик, деление целых чисел, решение квадратных уравнений – всё это не требует серьёзных мыслительных усилий! Не случайно первые трудности обычно возникают лишь при сложении и вычитании обыкновенных дробей, когда требуется разложить знаменатели на множители, применяя признаки делимости и деление в столбик, найти НОК и т. д. Даже этот ветвящийся алгоритм вызывает у многих учеников трудности! Потом на какое-то время вновь наступает эпоха спокойствия. Решение уравнений первой степени – это работа с видимыми объектами: знаки операций и скобки определяют порядок действий, правила переноса слагаемых из одной части в другую известны, приведение подобных членов диктуется видом одночленов ... И в квадратных уравнениях все ясно: выучил формулу для корней, подставил и результат готов. В биквадратном уравнении цепочка длиннее, но всё-таки заранее смоделирована (до начала решения): заменить, решить, сделать обратную замену. А вот в иррациональных уравнениях такого нет. Нет заранее выработанного и фиксированного алгоритма, он зависит от вида исходного уравнения. Решение можно начинать с разных рассуждений, причём в ходе решения в зависимости от появляющейся новой информации приходится действовать “по ситуации” различными способами. И таких моментов, в которые приходится выбирать пути решения внутри одной задачи много. В этом и кроется бóльшая (ударение на О!) сложность геометрических задач. Попробуем пояснить проблему на примере известной задачи: **как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету среди 4 одинаковых с виду монет, если неизвестно, тяжелее она настоящих монет или легче.**

Это пример простой задачи на ветвящийся алгоритм. Каждый следую-

ший шаг решения предоставляет нам информацию, в зависимости от которой мы принимаем решение о дальнейших действиях. Так же как и в этой задаче, в большинстве геометрических задач мы не видим заранее целиком всей тропинки, по которой нужно продвигаться. Просят, например, найти углы, а начинать почему-то нужно с поисков равных треугольников, в которых эти углы даже не фигурируют. После этого (где они, эти скобочки и порядок действий?!) нужно провести какие-то линии, которых нет в условии задачи, сделать совершенно не мотивированные вопросом задачи дополнительные построения, и только много позже на  $n$ -ом шаге необходимо воспользоваться информацией о треугольниках, с которых начиналось решение. Затем эту информацию требуется связать с нужными углами цепочкой рассуждений, в которую входят вновь построенные объекты, и в итоге найти величину нужных углов.

И никакая пропедевтика, никакое изучение большого числа алгоритмов не спасают ситуацию. Ученики пытаются использовать каждый раз последний изученный алгоритм или применить ко всем задачам последнее изученное дополнительное построение. Задача по геометрии не имеет естественных подсказок, таких, как порядок действий и правила арифметики. Ребенку до начала решения не известен не только алгоритм, но и порядок применения известных фактов, формул и теорем для борьбы с задачей. И так в каждой мало-мальски серьезной задаче! Вот в классе учительница провела в задаче среднюю линию и задача решилась, а в другой проведение этих дополнительных линий все усложняет, например нужна была не средняя линия, а удвоение медианы.

Эти примеры из реальной школьной жизни приводят нас к еретическому выводу: *чтобы успешно учить геометрии, в качестве пропедевтики лучше всего учить думать, строить длинные цепочки рассуждений, решать задачи, приводящие к ветвящимся алгоритмам, многоходовки и задачи с вариативными ответами, зачастую не имеющие прямого отношения к геометрии!* Проблема не в предмете геометрии, а в том, что ученикам не хватает (или у них полностью отсутствуют) умения составлять взаимосвязанную цепочку рассуждений в отсутствии шаблонов и готовых алгоритмов.

Подведем промежуточный итог. Проблема изучения геометрии содержит массу разнородных трудностей, от которых нет и не может быть панацеи. С ними надо бороться совершенно разными средствами. Это сваливающиеся на ученика почти одновременно



- 1) огромный понятийный аппарат (набор сухих определений, которые он не принял и не осознал, возможно, даже выучив!);
- 2) совершенно новые постановки задач (докажите, сравните, что можно сказать о:);
- 3) отсутствие в большинстве задач шаблонов и алгоритмов решения;
- 4) разбор нескольких случаев в одной задаче, зависимость решения и/или ответа от чертежа;
- 5) отсутствие “естественной” цепочки рассуждений, когда набор исходных данных, формальные знания о свойствах объектов и сам поставленный вопрос задачи формально не связаны;
- 6) отсутствие необходимых для решения геометрических объектов, которые должны быть воссозданы с помощью дополнительных построений.

И в связи с этим пропедевтика геометрии должна начинаться не с попытки пораньше обогатить новыми геометрическими знаниями, а со знакомства с упомянутыми трудностями и инструментарием для их преодоления. Возможно, даже не на геометрическом материале.

Теперь мы сосредоточимся на собственно геометрических проблемах и приведем примеры, которые могут послужить пропедевтике решения геометрических задач, задолго до начала систематического курса геометрии.

1. **Малыш пригласил на день рождения всех своих друзей, среди которых Карлсон, и купил квадратный торт. Если Карлсон увидит, что его кусок отличается от других, то он обидится и улетит. Помогите Малышу разделить торт на а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 6 кусков, одинаковых по форме и размеру!**
2. **На свой следующий день рождения Малыш купил круглый торт. Сможет ли он теперь разделить его на нужное число кусков?**
3. **А если в магазине окажется торт в форме правильного шестиугольника, сможем ли мы помочь Малышу разрезать его на а) 2; б) 3; в) 4; г) 6 кусков, одинаковых по форме и размеру?**
4. **А как разрезать торт, имеющий форму равностороннего треугольника, на а) 2; б) 3; в) 4; г) 6 кусков, одинаковых по форме и размеру?**

Эти задачи могут вызвать у учителей улыбку и искреннее удивление и непонимание. Зачем такую ерунду спрашивать у ребенка? Но на практике при решении этих задач можно обсудить понятие равенства фигур,

свойства круга, квадрата, правильных многоугольников, симметрию, доказательство равенства движением фигур. На практике оказывается, что для 10–11 летнего ребёнка это практически такая же важная задача, как для старшеклассника задача на построение состоящая из анализа, построения, доказательства и исследования числа решений. Мы просто очень часто этого не замечаем. А именно такие задачи учат ребёнка всем этим этапам. Даже если мы их строго не проговариваем. В этой ситуации преодоление трудностей, а, следовательно, и пропедевтика начинаются не с желания обогатить ребёнка геометрическими фактами, а с возможности “пощупать их” и научить их протягивать цепочку рассуждений. Рассуждать! Вот то, что получается с трудом! Вся арифметика начальной школы и 5–6 класса строится на вопросах сколько? какого возраста? какая скорость? через какое время? Просят почти всегда что-либо подсчитать! Формулировка “докажите, что :” непривычна и ставит учеников в тупик. И это совершенно оправданно! Где и в какой задаче его просили что-либо доказывать? Нигде! И как это делать – не понятно! Здесь мы учим ребёнка доказывать, не акцентируя внимание на процессе, и избегая превоначального испуга от незнакомой формулировки. К первой трудности тут же добавляется вторая: вариативность - оказывается, что ответ в задаче по геометрии часто неединственный! Это приводит к рассмотрению разных случаев. Конечно, и в уже приведенных задачах о делёжке торта дети находят различные способы разрезания на **равные** части. И это тоже для ученика новый вид деятельности. Раньше всё было фиксировано!

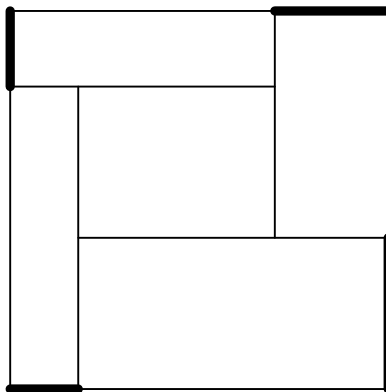
Вот пример другой задачи, которая не требует специальных знаний, но имеет многовариантный ответ:

**5. Сколько сторон четырёхугольника может пересечь прямая?**

Размышляя над поставленным вопросом, ребёнок уже обнаруживает различие между выпуклым и невыпуклым многоугольником. Хотя формально с этим понятием мы знакомим учеников только в 8 классе. Эта задача помогает сформировать представление ребёнка о неоднозначности ответа на поставленный вопрос, что в свою очередь позволяет ему в дальнейшем не бояться задач с многовариантными ответами,

А вот пример задачи на геометрическое видение чертежа и связь с алгеброй:

**6. Квадрат со стороной 4 м разрезан на прямоугольники так, как показано на рисунке. Сумма длин жирных отрезков равна 2 м. Найдите периметр внутреннего прямоугольника.**



**7. Сколько диагоналей в а) 6; б) 8; в) 10; г)  $n$ -угольнике?**

Задача начинается с пункта, который можно исследовать “руками”, а затем призывает к обобщению на произвольный случай.

Мы далеки от мысли, что в краткой заметке исследовали все проблемы пропедевтики геометрии, но главный еретический вывод очевиден: успешная подготовка к решению геометрических задач не может быть проведена только средствами и на материале курса геометрии и нуждается в его расширении с учётом роли и востребованности различных форм мышления, используемых в решении геометрических задач. И только такую математику следует учить не для того, чтобы выучить десяток алгоритмов, шаблонов и методов решения задач, а для того, чтобы научить человека думать.

## Список литературы

- [1] Рукшин С. Е., Суслина М. Е. О некоторых проблемах обучения решению нестандартных задач // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения–2014». – СПб: РГПУ, 2014. – С. 195–199.

УДК 378

## СРЕДСТВА РАЗВИТИЯ И ОЦЕНКИ КОМПЕТЕНЦИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

Сангалова М. Е.

Арзамасский филиал

Нижегородского государственного университета

им. Н. И. Лобачевского

Арзамас

e-mail: smolyanka77@mail.ru

**Sangalova M. E. Tools for development and evaluation of competencies in the study of mathematical logic.** This paper presents and discusses analysis the content of competencies at the development of which is aimed mathematical logic training. Rating accumulative system (RAS) is proposed for the assessment of training results. Tools for development and evaluation of competencies in the format of flow chart are also presented.

В статье представлен анализ содержания компетенций, на развитие которых направлено обучение математической логике. Для оценивания результатов обучения предлагается рейтинговая накопительная система (РНС). Также представлены средства развития и оценки компетенций в формате технологической карты РНС.

Обучение математическим дисциплинам в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом имеет своей целью развитие определённых компетенций, заложенных в нём. Компетенция формулируется как способность или готовность к осуществлению некоторой деятельности. Следовательно, она имеет деятельностный характер. Это должно найти отражение в организации обучения и оценке его результатов. Все большее влияние на образование в целом имеют: а) идеи открытости и доступности образования, б) внедрение электронного обучения, в) сокращение часов аудиторной работы при увеличении их на самостоятельную работу.

Таким образом, процессы, происходящие в математическом образовании, обусловлены с одной стороны изменением его целей, а с другой стороны влиянием общеобразовательных тенденций. Имеет место и обратная реакция, объясняемая, по сути, большой консервативностью математики как науки. Содержание математических дисциплин, его основные разделы и темы остаются неизменными и при новых образовательных стандартах.

Поэтому перед преподавателем каждой учебной дисциплины встают взаимосвязанные проблемы поиска средств развития компетенций и инструментов оценки результатов обучения.

В образовательном процессе развитие компетенций студентов предшествует их оценке, однако при разработке учебных курсов необходимо в первую очередь чётко описать результат обучения: тот или иной уровень развития компетенций. Здесь ключевым действием является рубрикация компетенции или выделение этапов её развития. Необходимо провести анализ компетенции в рамках данной дисциплины.

Процесс изучения дисциплины “Математическая логика” (направление подготовки 44.03.05 “Педагогическое образование”, профили “Математика и Физика”), в соответствии с базовым учебным планом направлен на формирование следующих компетенций: ОК–6 – способен логически верно выстраивать устную и письменную речь; ОПК–3 – владеет основами речевой профессиональной культуры; ОПК–5 – способен к подготовке и редактированию текстов профессионального и социально значимого содержания; ПК–1 – способен разрабатывать и реализовывать учебные программы базовых и элективных курсов в различных образовательных учреждениях; ПК–11 – готов использовать систематизированные теоретические и практические знания для определения и решения исследовательских задач в области образования [1]. Проведём анализ содержания некоторых компетенций в контексте обучения математической логике.

Компетенция ОК–6 определяется как способность студента логически верно выстраивать устную и письменную речь (в том числе и математическую). Этому способствует знание классических законов логики, понятий равносильности, логического следствия, основных равносильностей; умение применять законы алгебры высказываний и логики предикатов для формулировки отрицаний утверждений, проверки сложных рассуждений и утверждений; знание теории силлогизмов для выведения правильных заключений из верных посылок. Знание логической структуры предложений влияет на приведение правильной аргументации в пользу того или иного довода.

Компетенция ОПК–3 означает владение речевой (уровни устной и письменной речи) профессиональной культурой (учителя математики). Т. е. владеющий этой компетенцией студент умеет: 1) грамотно озвучивать и составлять математические тексты: задачи и их решение, теоремы и их доказательство, математические определения и классификации; 2) грамотно общаться со всеми участниками образовательного процесса. Этому способствует приме-

ние двойной записи (на литературном языке и математическими символами) при определении понятий, формулировке и доказательстве теорем, широкое использование примеров.

Следующая компетенция ОПК–5 формулируется как способность к подготовке и редактированию текстов профессионального и социально значимого содержания. Очевидно, что к таким текстам относятся рабочие и учебные программы дисциплин, технологические карты уроков, варианты контрольных и самостоятельных работ, тексты задач и их решения для уроков, дополнительных занятий и олимпиад, тексты докладов для выступлений на конференциях и образовательный контент для сайтов. Данные тексты должны быть подготовлены в соответствии с законами логики.

Из проведённого анализа видно, что рассматриваемые компетенции формируются не изолированно, а в тесной взаимосвязи: они коррелируют. Например, владеть основами речевой профессиональной культуры может только студент, который логически верно выстраивает устную и письменную речь. Чтобы подготовить текст профессионального значения необходимо владеть культурой письменной речи. Тот же, кто определяет и решает исследовательские задачи в сфере образования, должен владеть и всеми остальными перечисленными компетенциями.

Приведём пример рубрикации общекультурной компетенции ОК–6. Важно, чтобы все этапы развития компетенции были сформулированы на уровне однозначно опознаваемых действий. Прежде всего, обозначим самый низкий уровень, который необходимо освоить абсолютно всем студентам. Последующие уровни будут формулироваться через добавление к предыдущему (ниже обозначено “+”) знаний, умений, навыков и способов действий, которые демонстрирует студент.

1 уровень. Студент логически верно формулирует основные определения, понятия, теоремы; рассуждения строит большей частью на основе личного опыта; при ответе на дополнительные вопросы преподавателя студент допускает более двух ошибок, однако, обнаруживает способность устанавливать логические связи, понимать логические законы.

2 уровень. + (к предыдущему уровню) Знает логику доказательств теорем, правильно выделяет основные этапы и методы доказательства, делает логически грамотные записи; использует двойную запись при определении понятий, формулировке теорем, но доказательство неполно, могут отсутствовать фрагменты; приводит примеры, но не всегда устанавливает связь с изучаемым материалом, в ответе на дополнительные вопросы преподавателя до-

пускает одну–две ошибки.

3 уровень. + Проводит логически обоснованное полное доказательство теорем, без затруднений поясняет любой момент доказательства; при ответе на дополнительные вопросы преподавателя не допускает ошибок, приводит примеры и связывает их с изучаемым материалом, однако студент не использует дополнительные источники информации.

4 уровень. + Студент использует дополнительные источники информации, формулирует выводы из доказательств теорем и рассмотренных примеров.

В данном примере было выделено четыре уровня развития компетенции. Критериями оценки компетенции служат: логическая полнота и обоснованность ответа, логически грамотное выполнение записей и использование двойной записи, правильность ответов на дополнительные вопросы преподавателя, присутствие примеров и их логическая связь с материалом, использование дополнительных источников информации, формулировка выводов.

Заданиями на развитие данной компетенции являются устные и письменные работы учащихся по дисциплине: проведение доказательств утверждений, решение задач, выполнение равносильных преобразований утверждений и т. п. Они же могут использоваться для оценки результатов обучения. Конкретными формами оценки являются коллоквиум (на этапе рубежного контроля) и экзамен (на этапе промежуточного контроля).

После определения заданий на развитие компетенций следует связать их тематическим планированием курса. Это можно сделать с помощью технологической карты. Поскольку в задачи исследования входит также и оценка компетенций, то целесообразно использование технологической карты рейтинговой накопительной системы оценивания (РНС).

Перечисляя основные содержательные блоки: главы, разделы и темы дисциплины, преподаватель определяет виды активности студентов по этим блокам, указывает количество баллов, которое возможно получить по каждому заданию, и срок выполнения задания.

Ниже приведен фрагмент технологической карты по дисциплине “Математическая логика”. В заголовочной части карты указываются: ФИО студента; номер группы; направление и профиль(и) подготовки; название дисциплины; структурные единицы содержания курса (модули, разделы, темы); период обучения; ФИО преподавателя; адрес электронной почты преподавателя.

Саму технологическую карту удобно оформлять в табличной форме.

Обязательная часть. Максимальное количество баллов – 200. Раздел 1. Алгебра высказываний. Письменное задание: выполнение тезисного плана фрагмента учебного занятия (в том числе занятия кружка, факультатива, элективного курса) для учащихся школы (колледжа) по одной из тем данного раздела – 15 баллов. Выполнение заданий на лекциях – 10 баллов. Решение задач (домашние работы) – 10 баллов. .... Устное выступление на коллоквиуме по разделам 1 и 2 – 20 баллов. Аудиторная контрольная работа по всему курсу – 40 баллов. Накопительная часть. Максимальное количество баллов – 60. Устный экзамен по билетам – 30 баллов. Ведение портфолио по курсу – 20 баллов. Конструктивная активность на занятиях – 10 баллов.

Задания накопительной части не являются обязательными и выполняются по желанию студента. В конце карты описывается механизм перевода накопленных баллов в стандартные оценки. Например, “удовлетворительно” – 120–145 баллов (каждое задание обязательной части выполняется не менее, чем на 60%), “хорошо” – 155–185 баллов (каждое задание обязательной части выполнено не менее, чем на 70%), “отлично” – более 190 баллов (каждое задание обязательной части выполнено не менее, чем на 70%).

Карта выдается на руки каждому студенту в начале изучения дисциплины и является основой для проектирования индивидуального образовательного маршрута. Студент получает и критерии оценки каждого вида активности. Например, для первого задания технологической карты: выполнение тезисного плана фрагмента занятия, можно предложить следующую рубрику.

1 уровень. В конспекте обоснована связь предложенной темы занятия с одной из тем раздела, ей определено место в учебном плане, класс и форма проведения занятия, тезисный план присутствует и соответствует структуре урока; существует обоснование тезисного плана для конкретной аудитории – 9 баллов. 2 уровень. + Присутствуют примеры заданий для учащихся; прописаны и аргументированы цели и задачи занятия – 11 баллов. 3 уровень. + Выделена логическая основа занятия: логические понятия, формулы, законы, теоремы, логико-смысловые переходы – 13 баллов. 4 уровень. + План разработан в активных формах, соответствующих содержанию занятия – 15 баллов.

Поскольку с данной рубрикой студент знакомится заранее, то это позволяет ему прогнозировать свою оценку, ставить соответствующие цели и планировать средства их достижения. Таким образом, в любой момент изу-



чения курса студент обладает информацией об уже начисленных ему баллах и знает, за что произошло начисление.

Отметим также, что представление фонда оценочных средств (ФОС) по дисциплине в форме технологической карты РНС полностью соответствует п. 21 Приказа Министерства образования и науки Российской Федерации от 19 декабря 2013 г. № 1367, так как содержит: описание показателей, критериев и шкал оценивания компетенций; методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций [2].

На настоящий момент возникает необходимость использовать наряду с традиционными и нетрадиционные средства оценки и развития компетенций. В представленной карте это: выполнение фрагмента конспекта занятия и ведение портфолио [3] по курсу. Использование этих средств обусловлено присутствием широкого набора профессиональных и общепрофессиональных компетенций, на развитие которых направлена дисциплина, а также требованиями стандарта.

В соответствии с действующим ФГОС “вузом должны быть созданы условия для максимального приближения программ текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся к условиям их будущей профессиональной деятельности” [1]. Известно, что портфолио учителя является основанием для аттестации, может использоваться учителем для участия в конкурсных и грантовых программах. Именно по портфолио можно судить об эффективности планирования и оценивания результатов собственной деятельности, что является ключевыми составляющими компетентности современного педагога [4]. При изучении данного курса студенты могут вести электронное портфолио, размещая его на странице курса в специальном разделе “СЭО E-LEARNING” сайта ННГУ. Выполнение фрагмента конспекта занятия по математической логике для школьников способствует развитию проектировочных навыков будущих учителей, а также обеспечивает усвоение собственно математического содержания на более высоком уровне. Само это задание можно рассматривать как мини-исследование в области методики математики (соответствует ПК–11). Различные темы математической логики могут изучаться как в рамках базовых, так и элективных курсов (ПК–1). Оформленные фрагменты конспектов являются текстами профессионального значения (ОПК–5) и могут использоваться студентами при прохождении ими педагогической практики. Таким образом, данные виды активности студентов позволяют с успехом диагностировать уровень развития вышепере-

численных компетенций.

Решение поставленных проблем развития и оценки компетенций студентов при обучении математической логике было найдено на основе анализа компетенций и их рубрикации. Все виды активности студентов, ориентированные на развитие компетенций, включены в технологическую карту РНС, которая обеспечивает аутентичное оценивание результатов обучения.

Дальнейшие перспективы исследования в этом направлении связаны с разработкой электронной поддержки курса. Планируется создание электронного управляемого курса и размещение его в системе электронного обучения E-LEARNING сайта ННГУ. В этом случае при прохождении технологической карты баллы будут суммироваться системой, будет оптимизировано размещение всех заданий и ответов на них.

## Список литературы

- [1] Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100 Педагогическое образование (квалификация (степень) бакалавр) (со сроком обучения 5 лет). Утвержден приказом Министерства образования и науки РФ от 17 января 2011 г. № 46. – URL: <http://fgosvo.ru/uploadfiles/fgos/5/20111207164014.pdf> (дата обращения 10.01.2016).
- [2] Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 19 декабря 2013 г. № 1367. URL: <http://xn--80abucjiibhv9a.xn--p1ai/>
- [3] Зиар-Бек С. И., Загашев И. О., Марико В. В., Проект “Развитие критического мышления для высшего образования” в России // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2007. № 6. – С. 1–21.
- [4] Сангалова М.Е. Технология портфолио как средство активизации учебной деятельности студентов // В мире научных открытий. 2013. № 11.7 (47). – С. 242–247.

УДК 101.1: 611.81

**ПРИМЕНЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ,  
ОТЛИЧНЫХ ОТ НОРМАЛЬНОГО,  
В ЗАДАЧАХ ОБУЧЕНИЯ**

Светлаков А. Н., Кондратьева С. Ю.  
Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена  
Санкт-Петербург  
e-mail: asas70@rambler.ru

**Svetlakov A. N., Kondratjeva S. J. The application of the non-parametrical statistics in the area of teaching.** The application of the non-parametrical statistics in the area of teaching are discussed.

Обсуждается применение непараметрических статистик в задачах обучения.

Общеизвестно значение и широкое применение закона Гаусса в разных областях науки. Однако нормальное распределение не является универсальным. Например, если веса дождевых капель, падающих с крыши, распределены нормально, то этого нельзя сказать о распределении их диаметров [1]. Другой характерный пример можно привести из области финансовой математики. Достаточно давно замечено, что нормальный закон занижает предполагаемые инвестиционные риски. Гораздо лучше их описывают степенные законы, связанные с распределением Коши. Распределение Коши имеет бесконечное математическое ожидание, а отсюда и бесконечную дисперсию и порождает фрактальные структуры [2]. Если гипотеза о соответствии исследуемой выборки распределению Гаусса отвергается на уровне значимости 0,05, то для этого случая разработаны так называемые непараметрические методы. К семейству непараметрических методов относятся, в частности, критерий знаковых рангов и критерий Манна–Уитни. На рисунке приводится расчёт t-критерия Манна–Уитни для детей с задержкой психического развития (ЗПР).

## Расчет t- критерия Манна Уитни

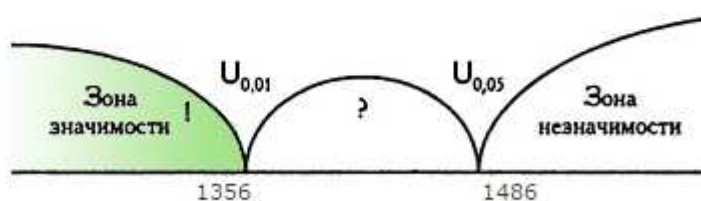
Дети общеобразовательной группы и старшие дошкольники с ЗПР

Результат:  $U_{эмп} = 1213$

Критические значения

$U_{кр}$	
$p \leq 0.01$	$p \leq 0.05$
<b>1356</b>	<b>1486</b>

Ось значимости:



Полученное эмпирическое значение  $U_{эмп}(1213)$  находится в зоне значимости.

### Группа детей с ЗПР

Области применения непараметрических методов: 1) случайные переменные не обладают нормальным распределением; 2) случайные переменные являются качественными (ранговыми) или именованными; 3) выборки малого размера; 4) для дополнительной проверки выводов, полученных параметрическими методами в случае переменных с нормальным распределением. Подход к статистическим критериям в анализе данных должен быть прагматическим и не отягощен лишними теоретическими рассуждениями. Имея в своем распоряжении компьютер с системой STATISTICA, можно достаточно легко применить к своим данным несколько критериев. Зная особенности применения методов, можно путем экспериментирования выбрать верное решение. Если нужно сравнить значения двух переменных, то используется t-критерий. Однако следует помнить, что он основан на предположении нормальности и равенстве дисперсий в каждой группе. Освобождение от этих предположений приводит к непараметрическим тестам, которые особенно полезны для малых выборок.

## Список литературы

- [1] Кричевец А. Н., Шикин Е. В., Дьячков А. Г. Математика для психологов. – М.: Флинта, Московский психолого-социальный институт, 2003. – 376 с.
- [2] Мандельброт Б. (в соавторстве с Р. Л. Хадсоном) (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах. – Издательский дом «Вильямс», 2006. – 400 с.
- [3] Сидоренко Е. В. Методы математической обработки в психологии. – СПб.: ООО «Речь», 2003.

УДК 517.9

### О ПОВЫШЕНИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

Шабаева А. Ф., Шабаев Р. Б.  
Стерлитамакский филиал  
Башкирского государственного университета  
Стерлитамак  
e-mail: alshabaeva@yandex.ru

**Shabaeva A. F., Shabaev R. B. About enhancing the effectiveness of mathematical education at the university.** The article shows the application of modern computer technologies to enhance the effectiveness of the teacher of mathematics at the university. One of the most effective tools are interactive distance courses as a complement to the traditional education system.

**Keywords:** mathematics in high school, computer technology, distance courses.

В статье показано применение современных компьютерных технологий для повышения эффективности работы преподавателя математики в вузе. Одним из действенных средств являются интерактивные дистанционные курсы как дополнение к традиционной системе обучения.

**Ключевые слова:** математика в вузе, компьютерные технологии, дистанционные курсы.

Долгий опыт работы в вузе показывает, что в последние годы происходит снижение уровня подготовленности абитуриентов, а студенты младших курсов не могут сами контролировать ход учебы, систематически трудиться в течение семестра, выполняя все задания преподавателя. Кроме того, научить студентов математике на должном уровне достаточно сложно в ситуа-

ции, когда доля аудиторных часов постоянно снижается. В данной ситуации от современного высшего учебного заведения требуется внедрение новых подходов к обучению, обеспечивающих соблюдение требований государственных образовательных стандартов, а также развитие творческих способностей и навыков самообразования.

Повышению качества математического образования в вузе способствует использование в учебном процессе современных информационно-коммуникационных технологий. Перечислим некоторые преимущества этих технологий: эффективное управление деятельностью студентов по изучению дисциплины; индивидуализация учебного процесса при сохранении его целостности с помощью специального программного обеспечения; возможность построения системы образования, которая позволяет обучающемуся заниматься самообразованием; эффективная система контроля и оценивания результатов обучения и т. д. Кроме того, в условиях высокого уровня развития информационно-компьютерных технологий, повышения компьютерной грамотности молодёжи преподавателю высшей школы целесообразно использовать в своей работе компьютерные средства обучения. Это использованием может быть разнообразным.

На лекциях по математике использование презентаций активизирует учебную деятельность обучающихся, делая процесс объяснения темы более наглядным, доступным для понимания, формирует и улучшает образное восприятие, способствует лучшему запоминанию. Кроме того применение презентаций на занятиях дает возможность систематизировать изучаемый материал с помощью таблиц, схем, графиков. На слайдах можно показать большое количество примеров. Вызывает большой интерес у студентов просмотр видеосюжетов об истории развития того или иного раздела науки, о видных учёных, принимавших в этом участие.

Современные компьютерные технологии, использующие средства компьютерной графики, анимации, моделирования предоставляют новые возможности в преподавании математики, способствуют развитию образного мышления и пространственного воображения. Например, при изучении таких разделов геометрии в вузе как “Прямая и плоскость в пространстве”, “Поверхности второго порядка”, “Топология”, “Дифференциальная геометрия” применение трёхмерной графики позволяет наглядно представить различные поверхности и объёмные фигуры в пространстве, а также способствует пониманию сущности метода координат. А при рассмотрении таких разделов как “Геометрические преобразования”, “Методы изображений”, “Конструктивная

геометрия” использование компьютерной анимации и моделирования позволяет изучать различные геометрические фигуры, их пересечения и образы при преобразованиях в динамике.

Для контроля и оценивания результатов обучения применяются промежуточные и итоговые тесты, которые позволяют осуществить диагностику уровня усвоения учебного материала каждым студентом, ввести коррективы в дальнейшую работу преподавателя и повысить объективность оценки знаний студентов.

Интернет предоставляет громадные возможности выбора источников информации для самостоятельного изучения учебного материала: базы данных ведущих библиотек страны; информация, пересылаемая по электронной почте; информация на многочисленных серверах сети.

В последнее время многие вузы обращаются к дистанционным методам обучения в рамках как заочной, так и очной форм образования. Такая образовательная технология способствует личностной направленности процесса обучения, интенсификации самостоятельной работы обучающегося. Дистанционное обучение позволяет свободно пользоваться различными информационными ресурсами в любое удобное для студента время, в удобном месте, по индивидуальному расписанию. Особенно оно полезно для студентов заочного отделения.

В Стерлитамакском филиале Башкирского государственного университета применяются интерактивные дистанционные курсы, в которых полноценно реализованы четыре блока: инструктивный, информационный, коммуникационный и контрольный. Публикация учебно-методических материалов в таком курсе осуществляется с использованием специализированной компьютерной системы LMS Moodle и содержит все материалы, необходимые обучающемуся для успешного изучения дисциплины.

Инструктивный (организационный) блок включает в себя методические указания (руководство) к изучению дисциплины, методические указания к самостоятельной работе студентов, критерии оценки, а также график обучения. В графике обучения указываются план-график событий дистанционного курса, время проведения семинаров, постановки заданий, время ответов на задания и выставления оценок и т. п.

Информационный блок включает теоретический материал по всем разделам курса, выносимым на зачёт или экзамен. В этом разделе основная часть материала содержит страницы с учебными и контрольными материалами, ко-

торые логически структурированы и разбиты на темы. Практическая часть включает в себя семинары, лабораторные и практические работы, упражнения, рефераты. Также приводится список рекомендуемой литературы, дополнительные источники информации. Рекомендуемыми элементами являются глоссарий, хрестоматия (полные или сокращенные тексты различных источников), видео/аудио лекции.

Коммуникационный блок включает использование элементов курса “Форум”, “Чат”, электронной почты для осуществления взаимодействия между преподавателем и студентом, позволяет участвовать в online- семинарах и консультациях.

Контрольный блок включает материалы для контроля результатов теоретического и практического усвоения слушателями учебного материала: домашнее задание, контрольная работа, тесты (контроль, самоконтроль), коллоквиум, вопросы к зачёту, экзамену. Система также предоставляет статистику работы отдельных студентов и учебных групп.

Конечно, дистанционное обучение подразумевает повышенную самостоятельность учащихся. Это целенаправленная и контролируемая интенсивная, самостоятельная работа обучаемого. При этом результат обучения, уровень и качество полученных знаний зависят от опыта и квалификации преподавателя, от уровня применяемых учебных методических материалов и индивидуальных практических заданий.

Самые современные на сегодняшний день методы учебной работы, связанные с использованием компьютера, в дополнение к традиционной системе обучения являются действенным средством повышения качества математического образования в высшей школе.

## **Список литературы**

- [1] Шабаетва А. Ф. Дистанционные образовательные технологии // Материалы Международной научно-методической конференции “Интеграция науки и образования в вузах нефтегазового профиля”. – Уфа: РИЦ УГНТУ, 2014. – С. 56–58.



# Актуальные информационные системы и технологии моделирования

УДК 004.932.2

## ПРИМЕНЕНИЕ ЭНТРОПИЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ампилова Н. Б., Соловьев И. П.

Санкт-Петербургский Государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: n.ampilova@spbu.ru

**Ampilova N. B., Soloviev I. P. Usage of entropy characteristics in applications of dynamical systems** We consider entropy characteristics used in various research techniques for investigation of complex dynamical systems (including symbolic ones) behaviour.

Рассматриваются энтропийные характеристики, возникающие в различных методах исследования поведения сложных динамических систем, в том числе методах символической динамики.

### Введение.

Понятие энтропии, первоначально введенное Р. Клаусисом в 1854 г. в термодинамике впоследствии приобрело более общее значение, не связанное непосредственно с термодинамикой. Клаусис рассматривал энтропию изолированной системы как меру изменения состояния при изменении температуры. В 1948 году К. Шеннон ввел понятие энтропии в теории информации, а в 1958 А. Колмогоров перенес его в эргодическую теорию. В настоящее время энтропия является достаточно распространенным понятием, её версии можно найти в теории групп, теории графов и других областях. В теории динамических систем, которые являются широким классом моделей естественных процессов, под энтропией понимают некоторую характеристику динамики системы, её сложности. Она оказывается полезной во многих прикладных задачах.

Изучение различных процессов часто связано с наблюдениями. Как отмечал П. Бак [1], наблюдения часто носят статистический характер и законы, формализующие эти наблюдения, выражаются как функции распределения для измеримых величин. Это обстоятельство приводит к использованию так

называемого информационного (статистического) подхода к изучению поведения сложных систем на основе их энтропийных характеристик. Мы рассмотрим применение таких характеристик в некоторых прикладных задачах динамических систем — построения приближений к инвариантным мерам, оценки хаусдорфовой размерности множеств, представляющих фазовые портреты сложных систем.

### **Энтропия Реньи.**

Многие текстурные изображения, полученные в результате естественно-научных экспериментов, можно рассматривать как фазовые портреты сложных динамических систем. Естественной характеристикой в этом случае является некоторая дискретная мера, распределенная на изображении и отражающая частоту посещения траекториями системы отдельных участков фазового пространства. Таким образом, изображение можно описывать в терминах статистических характеристик. Это позволяет вычислять так называемые энтропии Реньи — функции, зависящие от заданной меры и некоторого вещественного параметра. В этот класс входит хорошо известная энтропия Гиббса–Шеннона. С помощью энтропий Реньи вычисляется спектр фрактальных размерностей Реньи, который может рассматриваться как определённый классификационный признак, а именно: изображения с близкими спектрами могут быть отнесены к одному классу. Изображения можно сравнивать, вычисляя расхождения Реньи (альфа-расхождения). Чтобы получить векторную характеристику при сравнении изображений, можно использовать прямое мультифрактальное преобразование начальной меры и вычислять расхождения Реньи между полученными последовательностями мер. Такой подход был применен нами в [2, 3] для анализа и классификации изображений биомедицинских препаратов.

### **Энтропия динамических систем.**

В теории динамических систем как правило рассматриваются топологическая и метрическая энтропии. Топологическая энтропия является наиболее важным числовым инвариантом (относительно топологического сопряжения) и характеризует скорость роста числа различных орбит. Иными словами, эта характеристика описывает общую сложность структуры орбит. Другим подходом к характеристике динамики системы является статистическое описание поведения орбит, а статистическим аналогом топологической энтропии является энтропия сохраняющего меру преобразования или метрическая энтропия. Различные способы введения топологической энтропии, связь топологической и метрической энтропий приведены в [4].

### **Символическая динамика.**

Развитие методов символической динамики привело к появлению метода символического образа [5], в котором строится ориентированный граф, отражающий динамику преобразования ячеек фазового пространства под действием системы. Символический образ строится по выбранному разбиению и представляет собой топологическую марковскую цепь, так как в нем кодируются только допустимые переходы из ячейки в ячейку. При последовательном подразбиении мы получаем более точную характеристику поведения системы. Впервые предложенный и обоснованный Г. Осипенко, этот метод получил широкое распространение для решения многих прикладных задач — локализации инвариантных множеств, вычисления спектра Морса, построения приближений к инвариантным мерам исходной системы. Инвариантность исходной меры означает существование стационарного потока на символическом образе. Таким образом, чтобы построить приближение к инвариантной мере, нужно решить задачу построения стационарного распределения для марковской цепи. Тогда метрическую энтропию системы можно оценить по энтропии марковской цепи. Алгоритмы построения такого потока были реализованы в работах [6, 7].

### **Стационарные распределения в анализе изображений.**

Идея графического описания процесса может быть использована во многих задачах. Граф символического образа иллюстрирует процесс движения ячеек фазового пространства под действием системы. Для изображений, иллюстрирующих, например, диффузионные процессы, можно описать изменения состояния с помощью изображения переходов вещества из одной точки (пикселя) в другую. Для этого мы рассматриваем изображение как решетку пикселей, строим граф с вершинами в точках решетки и дугами, направленными к соседним пикселям. Каждой дуге приписывается мера, равная интенсивности пикселя, деленной на число соседей. Получаем марковскую цепь, в которой мера вершины равна сумме мер выходящих дуг. Для построения стационарного распределения нужно построить такой поток, чтобы в каждой вершине сумма мер входящих дуг равнялась сумме мер выходящих. Полученное распределение максимизирует так называемую взвешенную энтропию, которая фактически представляет собой расхождение Кульбака–Лейблера между начальным распределением и полученным стационарным. В [8] нами была предложена модель исследования цифровых изображений, основанная на вычислении стационарного потока на графе, построенном по изображению. Взвешенная энтропия рассматривалась при этом как класси-

фикационный признак. В работе [9] была описана реализация и получены результаты классификации изображений фармакологических растворов серебра по указанному признаку. Заметим, что в этой задаче взвешенная энтропия используется как целевая функция при нахождении условного экстремума.

### **Энтропия и фрактальные размерности.**

Изображения со сложной текстурой часто обладают свойством фрактальности, которое описывается с помощью показателей масштабирования. Фрактальные множества характеризуются одним показателем, мультифрактальные — спектром. Оказывается, что между энтропией и фрактальными размерностями множеств существует тесная связь. Хорошо известен приведенный в [10] результат Эгглтона о величине хаусдорфовой размерности множества чисел в единичном интервале, для которых вычислено распределение знаков в записи по основанию  $r$ . В этом случае размерность может быть вычислена через энтропию Шеннона.

Идеи символической динамики (кодирования траекторий) позволяют применить результат Эгглтона к исследованию изображений. Рассматривая разбиение фазового пространства на ячейки и определяя частоту посещений траекториями системы этих ячеек, мы с одной стороны получаем символьную последовательность, в которой номера ячеек записываются в порядке следования траектории, а с другой получаем некоторую меру, распределенную на изображении. В работе [11] был предложен вариант вычисления хаусдорфовой размерности носителя этой меры, основанный на формуле Эгглтона. Авторы также использовали прямое мультифрактальное преобразование, чтобы из исходной меры получить последовательность мер и соответственно набор хаусдорфовых размерностей их носителей. Этот метод известен как прямое вычисление мультифрактального спектра и часто применяется при исследованиях. Например, этот метод был использован нами в [12] для классификации изображений биомедицинских препаратов. На основе этого метода в [13] был разработан алгоритм вычисления спектра Реньи.

### **Заключение.**

Введение понятия энтропии в различных предметных областях вызвано стремлением применить некоторую универсальную характеристику для описания различных процессов в целом. Именно статистический характер наблюдений природных процессов обуславливает использование функций распределения от измеримых величин, в терминах которых описывается энтропия. Приведенные примеры убедительно показывают внутреннюю связь различных энтропийных характеристик.

## Список литературы

- [1] Bak P. How nature works. – Springer, 1996.
- [2] Ампилова Н. Б., Сергеев В. Д., Соловьев И. П. Применение расхождения Реньи к анализу и классификации изображений // Известия РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. №176. – С. 35–44.
- [3] Ampilova N., Soloviev I. On Application of Entropy Characteristics to Texture Analysis // WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine, ISSN / E-ISSN: 1109-9518 / 2224-2902, Volume 11, 2014, Art. 25, pp. 194–202.
- [4] Katok A., Hasselblatt B. Introduction to the modern theory of dynamical systems. – Cambridge University Press, 1995. ISBN 0-521-34187-6.
- [5] Osipenko G. Dynamical Systems, Graphs, and Algorithms, Lecture Notes in Mathematics 1889. – Tiergartenstrasse 17, Heidelberg, Germany, D-69121: 2007. – P. 300.
- [6] Ampilova N., Petrenko E. On Application of Balance Method to Approximation of Invariant Measures of a Dynamical System // e-journal “Differential equations and control processes”, №1, 2011, p. 72–84, <http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/ampilova.pdf>
- [7] Osipenko G. Symbolic image and invariant measures of dynamical systems // Ergodic Theory and Dynamical Systems. – 2010. – Vol. 30. – P. 1217–1237.
- [8] Ампилова Н. Б. Стационарные процессы на графах и анализ изображений // Компьютерные инструменты в образовании. №2, 2013, с. 31–36.
- [9] Батюков А. Анализ цифровых изображений, основанный на построении стационарных процессов на графах // Вестник Санкт-Петербургского Университета, сер.10 Прикладная математика, информатика и процессы управления – СПб, 2015, №2. с. 115–122. – ISSN 1811-9905.
- [10] Billingsley P. Ergodic theory and information. – New York: The University of Chicago, 1965.
- [11] Chabra A., Meneveau C., Jensen R., and Sreenivasan K. Direct determination of the  $f(\alpha)$  singularities spectrum and its application to fully developed turbulence // Physical Review A, 1989, 40 (9), 5284–5294.
- [12] Ampilova N., Soloviev I., Sergeev V. Digital image analysis based on direct multifractal transform // Humanities and Science University Journal (to be published)
- [13] Vstovsky G. Elements of information physics. – Moscow: MGIU, 2002.

# РЕШЕНИЯ РЯДА ПРОБЛЕМ МОНИТОРИНГА АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ДИСПЕТЧЕРСКОГО КОНТРОЛЯ НА ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГАХ РОССИИ

Кавин Б. В.

Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена  
Санкт-Петербург  
e-mail: kavinbob@gmail.com

**Kavin B. V. A number of challenges monitoring automated dispatching control at Russian railways.** The structure and characteristics of the organization of the process of finding errors in the accumulated data on the technical means of monitoring through automated dispatching control. We offer solutions for search of regularities object identification on the basis of the characteristics of mining algorithms.

Рассматривается структура и особенности организации процесса поиска ошибок в накапливаемых данных по техническим средствам мониторинга в рамках автоматизированного диспетчерского контроля. Предлагаются решения поиска закономерностей идентификации объекта по характеристикам на базе алгоритмов интеллектуального анализа.

Для мониторинга состояния устройств железнодорожной автоматики и телемеханики на железных дорогах России используются системы аппаратно-программных комплексов диспетчерского контроля. Они состоят из трёх подсистем.

Первая подсистема (подсистема нижнего уровня) состоит из специализированных контроллеров, обеспечивающих ввод и первичную обработку информации.

Вторая подсистема (подсистема среднего уровня) состоит из концентраторов линейного поста, собирающих информацию от подсистемы нижнего уровня и обеспечивающих обработку, хранение, архивацию и её передачу другим концентраторам, а также концентраторов центрального поста (ЦП), которые обеспечивают передачу собранных данных на верхний уровень.

Третья подсистема (подсистема верхнего уровня) состоит из технических средств диспетчера дистанции сигнализации, связи и работников отделения дороги.

Конечные пользователи системы – диспетчеры, технологи, механики – мо-

гут видеть результаты мониторинга участков на своих автоматизированных рабочих местах (АРМ).

Наблюдая за системой на экране монитора, пользователь может выявить различные проблемы на своём участке, в том числе отказы, предотказы, технологические ситуации и т. д.

Диспетчерский контроль. Подключение железнодорожной станции к системе контроля (мониторинга) означает следующее.

1. Установка и настройка специальных контроллеров.
2. Установка и настройка концентраторов, которые собирают информацию с контроллеров и передают эти данные на пользовательские АРМ.
3. Настройка, привязка, выявление (в специальных редакторах) всевозможных отказов и информации по контролируемому оборудованию и устройствам.

Третий пункт связан с серьёзной проблемой. Если диспетчер или технолог хочет получить информацию об объекте, то на третьем уровне необходимо добавить нужный объект, привязать к этому объекту необходимый отказ и выбрать для отказа соответствующее при такой ситуации состояние объекта. Таким образом, процесс привязки отказов сводится к тому, чтобы добавить в систему мониторинга все необходимые объекты, идентифицировать их, связать с ними соответствующие отказы и для каждого из отказов выбрать нужное состояние индикации.

Специфика действующего программного обеспечения такова, что данный процесс уникален для каждой станции, поэтому автоматизировать его невозможно. Привязкой отказов занимается человек. Так как количество объектов, состояний и отказов очень велико, одной из главных проблем является человеческий фактор. Человек может не привязать нужный отказ к объекту, привязать не к тому объекту или же не к той индикации.

Исследование причин неточности алгоритма говорит о том, что «вручную» написанные правила поиска ошибок не дают необходимой эффективности.

Существует два варианта решения этой проблемы.

1. На данный момент используется программа на основе логических алгоритмов, которая сканирует базу данных и выявляет возможные ошибки на основании шаблонов и правил, формируемых аналитиком. Такой подход требует регулярного пополнения, изменения и расширения библиотеки правил, что является трудоёмкой работой и опять же с учётом ненадёжного челове-

ческого фактора.

2. Применение технологий интеллектуальных информационных систем [4], в том числе методов интеллектуального анализа данных [1] для автоматического построения библиотеки правил.

Применение методов интеллектуального анализа данных и машинного обучения [5, 6] обусловлено практикой эффективного применения методов кластеризации и классификации в разнородных, слабоструктурированных данных в различных областях человеческой деятельности [3]. Высокий потенциал алгоритмов интеллектуального анализа раскрывается при обработке больших объёмов информации с применением технологий big data и internet [2].

Необходимо автоматически просканировать станцию и выявить группы объектов, разбитых по типу, по набору отказов, по состоянию индикации и другим параметрам. Проанализировав группу кластеров, можно будет выявить ошибочные объекты, опираясь на логику привязок большинства однотипных объектов в рамках станции. Таким образом, воспользовавшись необходимыми алгоритмами, можно будет просканировать станцию и вывести сообщения о возможных ошибках в привязке отказов, что позволит избежать проблемы в обнаружении неисправностей на станции.

## Список литературы

- [1] Дюк В. А., Фомин В. В. Интеллектуальный анализ данных в гуманитарных областях // Программные продукты и системы. 2008. № 3. С. 60–62.
- [2] Сикулер Д. В., Фомин В. В. Концепция internet–системы интеллектуальной обработки данных // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования, материалы LXIV научной конференции. – СПб.: БАН, 2011. – С. 206–209.
- [3] Флегонтов А. В., Дюк В. А., Фомина И. К. Мягкие знания и нечеткая системология гуманитарных областей // Программные продукты и системы. 2008. № 3. С. 97–102.
- [4] Фомин В. В., Миклуш В. А. Интеллектуальные информационные системы. – СПб.: РГГМУ, 2013. – 150 с.
- [5] Фомина И. К. Решение проблем, связанных со сложной системотехнической структурой предметных областей при интеллектуальном анализе данных // Журнал университета водных коммуникаций. 2009. № 2. С. 180–184.



- [6] Фомина И. К., Фомин В. В. Об одном опыте разработки инструментария интеллектуального анализа данных // Региональная информатика «РИ-2014», материалы XIV Санкт-Петербургской международной конференции, 2014. – С. 221.

УДК 539.172.13

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ РЕАКЦИИ $d + d \rightarrow p + p + n + n$

Каспаров А. А., Конобеевский Е. С., Зуев С. В.

Институт ядерных исследований РАН

Москва

e-mail: kasparov200191@gmail.com, konobeev@inr.ru, zuyev@inr.ru

**Kasparov A. A., Konobeevski E. S., Zuyev S. V. Kinematics simulation of the reaction  $d + d \rightarrow p + p + n + n$ .** It is assumed an energy determination of quasi-bound singlet state of two-nucleon systems ( $nn$ ,  $pp$  and  $np$ ) in the  $d + d \rightarrow p + p + n + n$  reaction using a unified experimental setup. It was carried out computer simulation of the reaction at deuteron beam energy of 15 MeV.

Предполагается определение энергий квазисвязанных синглетных состояний двухнуклонных систем ( $nn$ ,  $pp$  и  $np$ ) в реакции  $d + d \rightarrow p + p + n + n$  в одной экспериментальной установке. Проведено компьютерное моделирование реакции при энергии пучка дейтронов 15 МэВ.

Нарушение зарядовой симметрии (НЗС) ядерных сил — одна из фундаментальных проблем ядерных физики. Известно, что НЗС ядерных сил, т. е. различие ядерных  $nn$ - и  $pp$ -взаимодействий, является малым эффектом, который согласно современным представлениям связан с различием масс и электромагнитных свойств  $u$ - и  $d$ -кварков [1]. Наиболее важным проявлением НЗС может выступать возможное различие в энергиях квазисвязанных синглетных состояний двух нейтронов ( $\epsilon_{nn}$ ) и двух протонов ( $\epsilon_{pp}$ ), которые являются фундаментальными характеристиками нуклон-нуклонного взаимодействия. Количественная оценка эффекта НЗС затруднена, во-первых, в нахождении чисто ядерной ( $\epsilon_{pp}$ ), поскольку необходимо использовать теоретические модели для исключения кулоновских эффектов [1]; во-вторых, в настоящее время имеется серьезное расхождение в полученных значениях ( $\epsilon_{nn}$ ). Для получения энергий синглетных квазисвязанных  $nn$ ,  $pp$  и  $np$  состояний двухнуклонной системы возможно использовать реакцию  $d + d \rightarrow p + p + n + n$ ,

уникальную тем, что на первом этапе возможно образование различных синглетных двухнуклонных систем:  $(nn)^s$  и  $(pp)^s$  или  $(np)^s$  и  $(np)^s$  в одной экспериментальной установке. Таким образом, для определения энергий  $\epsilon_{nn}$ ,  $\epsilon_{pp}$  и  $\epsilon_{np}$  предложены реакции

$$d + d \rightarrow (nn)^s + (pp)^s \rightarrow p + p + n + n, \quad (1)$$

$$d + d \rightarrow (np)^s + (np)^s \rightarrow p + p + n + n \quad (2)$$

с регистрацией трёх частиц ( $p$ ,  $p$  и  $n$ ) в реакции (1) и ( $p$ ,  $n$  и  $n$ ) в реакции (2).

Кинематическое моделирование реакций (1) и (2) проводилось с помощью программы, предназначенной для изучения реакций с тремя частицами в конечном состоянии и идущих в два этапа через распадающееся промежуточное состояние [2]. В программе можно выбрать геометрию эксперимента, в которой рассчитываются времена пролета и энергии всех вторичных частиц, оптимизируются параметры установки, оценивается доступная в эксперименте область энергий возбуждения и возможное разрешение по ней.

Рассмотрим процесс моделирования на примере реакции (1) с энергией пучка дейтронов 15 МэВ. На первом этапе моделируется двухчастичная реакция  $d + d \rightarrow (nn)^s + (pp)^s$ . “Затравочные” массы двухнуклонных систем  $(nn)^s$  и  $(pp)^s$  берутся из существующих на сегодняшний день оценок  $m_{nn}^s = 2m_n + 0.16$  МэВ и  $m_{pp}^s = 2m_p + 0.4$  МэВ. Из рассчитанных угловых (рис. 1а) и энергетических (рис. 1б) зависимостей, выбираются углы вылета двухнуклонных систем по разные стороны от оси пучка (положительным углом отвечает область слева от оси пучка, отрицательным — справа). Выбранным углам будут соответствовать определенные кинетические энергии двухнуклонных систем, отмеченные на рис. 1.

На втором этапе моделирования рассматривается распад двухнуклонных систем:  $(nn)^s \rightarrow n + n$  и  $(pp)^s \rightarrow p + p$ . При этом первым условием эксперимента будет расположение детекторов протонов и нейтронов под углами равными или близкими к углам вылета двух нуклонных систем. Вторым важным условием эксперимента является детектирование в совпадении двух протонов и одного нейтрона. Это условие позволит восстановить энергию и угол вылета второго (недетектируемого) нейтрона решением уравнений законов сохранения энергии и импульса.

Энергии квазисвязанных состояний двухнуклонных систем могут быть определены несколькими способами. В первом случае стоит сослаться на работу [3], в которой было отмечено, что превышение энергии состояния ядра

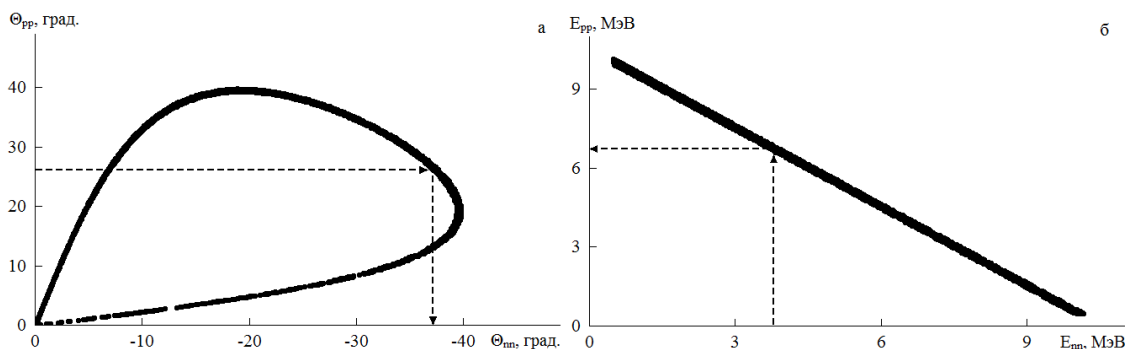


Рис. 2. Результаты моделирования двухчастичной реакции: а — двумерная диаграмма  $\theta_{pp} - \theta_{nn}$ ; б — двумерная диаграмма  $E_{pp} - E_{nn}$ .

над порогом развала его состояния на два кластера полностью определяется углами их вылета  $\theta_1$  и  $\theta_2$  и кинетическими энергиями  $E_1$  и  $E_2$  в лабораторной системе. Поэтому, энергия возбуждения для каждого зарегистрированного события может быть рассчитана по формуле

$$E^* = \frac{E_1 + E_2 - 2\sqrt{E_1 E_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2}. \quad (3)$$

Второй способ определения энергии синглетного состояния может быть реализован с учетом кинематических особенностей реакции с образованием и развалом квазисвязанного нуклон-нуклонного состояния. Принимая во внимание условие, что детектирование частиц происходит под углами равными или близкими к углам вылета двухнуклонных систем, попасть в детектор могут только “развальные” частицы, вылетающие в системе центра масс двухнуклонной системы или вперед ( $\sim 0^\circ$ ), или назад ( $\sim 180^\circ$ ). В результате получается специфический энергетический (и соответствующий ему временной) спектр, характеризующийся двумя пиками с расстоянием между ними, зависящим от энергии квазисвязанного состояния. На рис. 2 приведены моделированные времяпролетные спектры одного из нейтронов, угол регистрации которого близок к углу вылета  $nn$ -системы. Спектры моделировались при различных энергиях квазисвязанного состояния (черный —  $50 \pm 5$  кэВ; темно-серый —  $100 \pm 5$  кэВ; светло-серый —  $150 \pm 5$  кэВ), временных разрешениях детектора нейтронов 0.1 нс (рис. 2а) и 2 нс (рис. 2б) и длиной времяпролетной базы 1 м. Видно, что различным энергиям квазисвязанного состояния соответствуют различные расстояния между временными пиками (рис. 3). Аналогичная картина получается для энергетических спектров протонов при развале  $pp$ -системы. Следует отметить, что форма спектров развальных частиц зависит только от энергии квазисвязанного состояния и

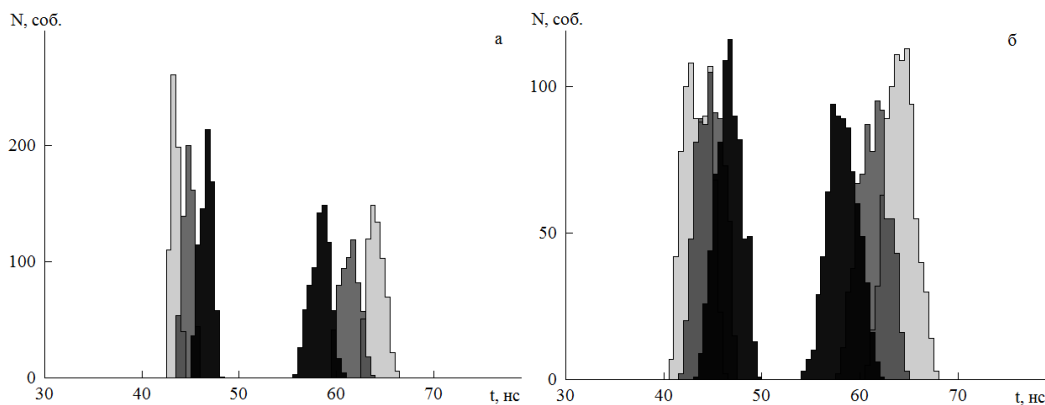


Рис. 3. Моделированные спектры времени пролета развалных нейтронов от  $nn$ -системы: а — при временном разрешении детектора нейтронов 0.1 нс; б — при разрешении 2 нс.

кинетической энергии двухнуклонной системы до ее развала, и не зависит от реакции, в которой эта система ( $nn$ ,  $np$  или  $pp$ ) была образована. Проведенное

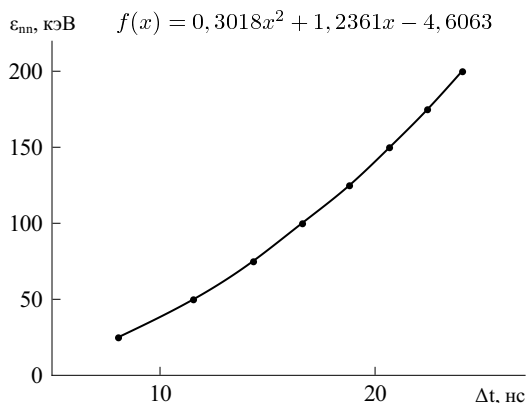


Рис. 4. Зависимость энергии квазисвязанного состояния от расстояния между временными пиками нейтронов при временном разрешении 0.1 нс.

моделирование реакции (1) и (2) показало, что при определенных условиях кинематически полного эксперимента, энергии синглетных состояний могут быть определены использованием формулы (3) или исследованием вида энергетических (временных) спектров продуктов реакции.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-32-00743 мол\_а.

## Список литературы

- [1] G. A. Miller, B. M. K. Nefkens, and I. Šlaus. Charge symmetry, quarks and mesons // *Physics Reports*. 1990. Vol. 194. № 1-2. – P. 1–116.
- [2] Е. С. Конобеевский, А. А. Каспаров, С. В. Зуев. Программа моделирования экспериментов по исследованию реакций с тремя частицами в конечном состоянии // *Известия Российской академии наук. Серия физическая*. 2014. Т. 78. №5. – С. 527–531.
- [3] D. Robson. Nuclear reactions with resonant-particle production // *Nuclear Physics A*. 1973. Vol. 204. № 3. – P. 523–528.

УДК 681.3

### О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ, УНИВЕРСАЛИЗИРУЮЩИХ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ АНАЛИЗА СВОЙСТВ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ НАГРУЖЕННЫХ ТОЧЕК

Ловягин Н. Ю.

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: lovyagin@mail.com

**Lovyagin N. Yu. On some solutions to universalize the isolated weighted points spatial distribution exploring software.** In the paper some ideas and concepts that formed the basis of software to explore a fractal and other properties of natural and model spatial distribution of point objects.

В статье описываются идеи и принципы, положенные в основу создания программного обеспечения для анализа фрактальных и иных характеристик реальных и модельных пространственных распределений точечных объектов.

**1. Введение.** Методы фрактальной геометрии применяются в различных задачах, в различных областях знания [3, 5]. Во многих задачах возникает необходимость анализа свойств пространственного распределения частиц, изолированных точек — например, галактик при изучении крупномас-

штабной структуры Вселенной [2, 6, 7]. В подобных исследованиях важно не только анализ реальных (физических) распределений точек в пространстве, но и анализ модельных множеств изолированных точек — как для исследования соответствия модели реальности, так и для калибровки используемых статистических методов.

В связи с этим возникла задача создания достаточно универсального программного комплекса, который объединил бы в себе основные этапы анализа и моделирования таких множеств для ПК, как наиболее доступного средства в руках ученых.

В реальных задачах исследуемые точечные множества часто сложнее, чем просто список координат точек: координаты могут определяться косвенно, точки могут иметь различный характер, т. е. снабжены дополнительными характеристиками, служащими, например, для построения подвыборок.

На этапе моделирования (до получения собственно исследуемых подвыборок) множества точек могут иметь значительный объём, превышающий характерный объём оперативной памяти, что должно адекватно обрабатываться программой.

Кроме того, возможности программы должна быть расширяемы пользователями без затрагивания ядра.

**2. Реализация.** Исследования точечных множеств не только включают в себя много этапов преобразования этих множеств с использованием результатов анализа промежуточных результатов, но и предполагает обработку сеток моделей, что требует от ПО возможность исполнять пользовательские команды и их последовательности.

На фоне успеха в научно-инженерной среде ряда специализированных языков сценариев (например, [8]) решено реализовать ПО в виде интерпретатора особого языка сценариев. При этом основными командами языка являются функции с поименованными аргументами, что представляется наглядным и удобным, в том числе в силу того, что не требуется соблюдать жесткий порядок следования аргументов, а также даёт возможность опускать любое количество необязательных.

Реализация в виде интерпретатора языка сценариев не исключает возможность создания пользовательского интерфейса, например, в виде графического программирования, визуального создания цепочек команд с передачей результатов вычислений одной в другую и встроенной документацией, однако это следующая задача.

**3. Ключевые решения.** При решении поставленной задачи был выработан ряд решений, универсализирующих и оптимизирующий ПО.

Во-первых, понятие множество “множество” (изолированных точек) расширяется до упорядоченного набора записей (точек) с одинаковым набором поименованных полей.

С помощью этого особого типа данных можно представить как собственно точечные множества, так и, например, табличные функции и вообще результаты вычислений, а доступ к полям по имени нагляден и удобен для пользователя.

Все вычисляемые множества автоматически сохраняются на диск в файле с уникальным именем, содержащим хэш-код информации о том, как это множество было получено. Если при исполнении сценария обнаруживается, что файл уже существует, множество не перевычисляется.

Это решает как проблему больших множеств (для многих задач достаточно последовательного чтения данных), так и автоматически помогает избежать повторения вычислений как в одном сценарии, так и при перезапуске того же или незначительно измененного сценария — результаты всех затраченных по времени вычислений представляются в виде множеств.

Во-вторых, в язык сценариев вводятся функциональные типы, значения которых можно преобразовывать с помощью операций (арифметических и т.п. с получением новых функций, а также композиций) и передавать в качестве параметров. Например, преобразование множества состоит в применении к каждой точке множества функции точки, т. е. значения особого функционального типа, на входе и выходе которого точка.

Это решает задачу массовой обработки точек, построения подвыборок и т. п. одной командой.

В третьих, программа расширяема с помощью внешних модулей. В модуле могут быть определены как новые функции языка, так и новые типы данных и операции над ними, что открывает значительные перспективы расширения без затрагивания ядра.

**4. Заключение.** За счёт реализации на языке C++ программа является достаточно быстрой и кросс-платформенной.

В работе использовались методы из [1]. Некоторые космологические результаты, полученные с помощью описываемого ПО можно найти в [4] и др. работах автора. Исходные и дистрибутивы ПО и документация к нему раз-

мещается на странице автора <http://swpproject.sourceforge.net>.

Очередной актуальной задачей является создание универсальной модели для описания пространственных границ множества и получения информации о границе функциями программы (расстояния от точки до границы и др.), её изменениях при различных преобразованиях множества и пространства (в программе реализованы только узкоспециализированные, характерные для космологии, области).

## Список литературы

- [1] Ахо А. и др. Компиляторы: принципы, технологии и инструменты. – М.: Издательский дом “Вильямс”. 2003. – 768 с.
- [2] Барышев Ю., Теерикорпи П. Фрактальная структура Вселенной: Очерк развития космологии. – Нижний Архыз: САО РАН, 2005. – 396 с.
- [3] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
- [4] Ловягин Н. Ю. Статистические свойства пространственного распределения галактик // Бюлл. Спец. астрофиз. Обсерв. 2009. Т. 64, Вып. 3. – С. 223–235.
- [5] Falconer K. Fractal geometry. – New York: John Wiley & Sons, 1990. – 155 p.
- [6] Gabrieli A., Sylos Labini F., Joyce M., Pietronero L. Statistical physics for cosmic structures. – Berlin–Heidelberg–New York–Barcelona–Hong Kong–London–Milan–Paris–Tokyo: Springer, 2004. – 440 p.
- [7] Martinez V. J. Saar E. Statistics of the Galaxy Distribution. – Boca Ration–London–New York–Washington, D. C.: CHAPMAN & HALL/CRC, 2002. – 432 p.
- [8] <http://gnuplot.info>



# МОНИТОРИНГ СОСТОЯНИЯ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ИНТЕРНЕТ-ТЕХНОЛОГИЙ И МИКРОКОНТРОЛЛЕРОВ

Олейник А. Ю., Марлей В. Е., Макшанов А. В.,  
Гарибин П. А., Ольховик Е. О.

Государственный университет морского и речного флота  
им. адмирала С. О. Макарова  
Санкт-Петербург

**Monitoring the condition of hydraulic engineering constructions on the basis of internet technologies and microcontrollers.** Article ideates a principled technology for the control of deformation processes in construction of hydrotechnical structures. Describes the characteristics of the developed equipment for measuring, his operating principles, system for registration and analysis of the inbound information.

В работе представлена принципиально новая технология, позволяющая обеспечить мониторинг деформационных процессов, которые происходят в строительной части гидротехнических сооружений. Описываются характеристики разработанной для измерительных целей аппаратуры, принципы её функционирования, а также методы организации системы учета и анализа поступающих данных.

**Ключевые слова:** системы контроля, гидротехнические сооружения, деформационные процессы, контрольные измерения, комплексный анализ.

**Keywords:** control system, hydrotechnical structures, deformation processes, control measures, complex analysis.

Отличием всех большинства существующих разработок является использование открытых технологий и платформы Arduino для построения программных средств. Представлен измерительный комплекс с сетевой структурой, обеспечивающий возможность в минимальные сроки и при экономически обоснованных издержках создать сеть для эффективного контроля технического состояния гидротехнических сооружений.

Предложены подходы к оценке особенностей текущего состояния строительной части гидротехнических сооружений на базе интегральных критериев. Это является залогом достоверности и однородности при анализе поступающих информационных сведений. Обоснована возможность разработки системы оповещений, способной обеспечить эффективное и своевременное уведомление о недопустимых режимах функционирования гидротехнических

сооружений.

Наличие серьезных нагрузок статического и динамического характера, возникающих в результате воздействия природных, техногенных и человеческих факторов, – одна из основных черт, отражающих условия эксплуатации таких сложных инженерно-строительных систем, как гидротехнические сооружения (ГТС). Эти нагрузки способны вызвать перенапряжение и деформационные процессы в конструкциях и узлах ГТС, что становится причиной нарушения их целостности. Накопленный опыт эксплуатации гидротехнических сооружений позволяет сделать вывод, что залогом продолжительного бесперебойного функционирования тонких подпорных стенок является систематический мониторинг их состояния. На большинстве объектов подобные контрольные обследования осуществляются в ручном режиме, с применением механизированных инструментов. Благодаря автоматизации измерительных процессов, имеется возможность значительно снизить финансовые издержки, увеличить число контролируемых параметров, повысить качество мониторинга, обеспечить изменение условий эксплуатации, нарастить эксплуатационный ресурс функционирования ГТС. Как показывают работы российских авторов, например, созданные на базе ФГ БОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова» методики П. А. Гарибина и Н. А. Балонин [1–4], а также разработки А. В. Устинова [5] и Е. З. Арифудиной [6], А. В. Малько [7], перечисленные задачи пока не нашли исчерпывающего решения.

Основные вопросы, которые должны быть решены в процессе инструментального мониторинга состояния подпорных стенок ГТС, заключаются:

- 1) в регистрации вида нагрузки;
- 2) в регистрации пространственных смещений верхней части стенок;
- 3) в определении параметров прочности конструкционных материалов;
- 4) в установлении текущих показателей относительной плотности грунта;
- 5) в регистрации прогибов упругой линии подпорных стенок;
- 6) в выявлении наличия коррозионных поражений анкерных тяг и стальных шпунтов.

В целях получения достоверных результатов контрольных измерений требуется организовать мониторинг изменений всех перечисленных показателей и установить наличие зависимости этих изменений от внешних факторов. Поэтому весь массив информационных данных, получаемых в процессе измерений, должен фиксироваться при одновременном указании параметров окружающей среды (температурных значений воздуха, объема воды в засыпке,

уровня нагрузок и т. д.).

По итогам осуществления измерительных операций (по отдельности для ближних и отдаленных нагруженных участков подпорных стенок) осуществляется построение графических изображений. Их анализ позволяет установить закономерности в процессах приращения усилий, что служит целям определения допустимых нагрузок. Специфичность данного подхода заключается в отсутствии требований к проведению тестовых нагрузочных проб. Анализ может быть выполнен непосредственно в рамках штатной эксплуатации ГТС.

При этом весь объем информационных данных, отражающих изменения геометрической топологии отдельных элементов конструкций ГТС необходимо регистрировать в непрерывном режиме в реальном масштабе времени, поскольку единичные геодезические съемки не способны предоставить достоверных исчерпывающих сведений о техническом состоянии ГТС. Нужно учитывать, что конструкции гидротехнических сооружений подвержены многократным обратимым деформациям, сопряженным, в частности, с естественной осадкой, ветровой и ледовой нагрузкой, осуществлением грузовых операций, исполнением функции причала для судов.

Эффективный контроль технического состояния ГТС может достигаться вследствие реализации методики, базирующейся на использовании современных интернет-технологий и микропроцессоров. Она позволяет обеспечить непрерывное аналитическое исследование статистических данных, полученных в реальном масштабе времени в специально выявленных «контрольных точках» ГТС. В результате можно сформировать объективную статистическую модель деформационных процессов, которая совместно с математической моделью может быть введена в контур контрольных процедур и систему диагностики технического состояния ГТС.

Построение статистической модели может быть осуществлено на базе метода группового учета аргументов (создания матрицы векторных величин контролируемых показателей в заданный период времени). Модель вводится в контур контроля, при этом осуществляется сравнение регистрируемых значений контролируемых показателей с параметрами модели. Результаты данного сравнения представляют собой оценку фактического состояния гидротехнического сооружения в текущий момент времени.

Рассмотрим методологический подход к созданию системы непрерывного контроля деформационных процессов ГТС, который заключается в использовании в проектах следующего оборудования:

- 1) микроконтроллерами типа AVR (Amtel);
- 2) цифровые датчики, отслеживающие изменений геометрической топологии в реальном масштабе времени;
- 3) средствами беспроводной связи.

В числе ключевых технологических элементов системы контроля следует выделить:

- 1) сервер хранения и обработки данных;
- 2) блоки измерения;
- 3) блоки управления.

В роли сервера обработки данных используется виртуальный выделенный сервер, арендуемый в дата-центре. Технология VPS позволяет эмулировать работу отдельного физического сервера. Сервер функционирует под свободной операционной системой CentOS семейства GNU/Linux. Выбор технологии VPS обуславливается экономичностью и масштабируемостью по ресурсам в рамках проектируемой системы мониторинга.

В качестве платформы для блоков измерения и управления выбрана аппаратная вычислительная платформа Arduino, которая базируется на микроконтроллере Atmel Atmega328. Arduino представляет собой открытую платформу для создания электронных устройств, основными компонентами которой являются плата с микроконтроллером ATmega и интегрированная среда разработки (IDE) на языке Wiring. Интегрированная среда разработки в течение нескольких лет демонстрирует успешное функционирование в разнообразных проектах, сопряженных с организацией непрерывного контроля физических показателей [8], [9].

В процессе непрерывного контроля блоки управления обеспечивают ретрансляцию данных посредством протокола TCP/IP на сервер обработки и хранения информации. Данные полученные от измерительных блоков хранятся на сервере в реляционной базе данных. За управления реляционной базой данных отвечает свободная система MySQL. Обработкой и анализом статистических данных на сервере занимается специальное программное обеспечение, спроектированное с использованием алгоритмов разработанных с помощью пакетов прикладных математических программ Matlab и Scilab.

Эффективное и своевременное реагирование на проблемы, связанные с изменением текущего состояния контролируемых показателей, обеспечит контрольно-предупредительная сигнализация, возможность установки которой предусмотрена. Данная предупредительная система предназначена для

оперативного информирования центра управления объектом о резких изменениях значений контролируемых параметров, а также о самопроизвольных отключениях измерительных блоков.

Ценной характеристикой предлагаемой методики является то, что сведения о техническом состоянии ГТС переоцениваются по множеству критериев в процессе каждой актуализации системы. При этом множество критериев может быть приведено к интегральному виду. Изменение критериев в одном диапазоне не во всех случаях возможно на практике, поэтому требуется нормализация их значений. Одним из возможных подходов решения этой проблемы может стать использование функции состояния, приведенная в [4]. Она обладает двумя интервалами монотонности и принимает значение только в зоне положительных чисел. При этом ее основная задача состоит в демонстрации относительного приближения значений переменной к определенному базовому интервалу. Скорость изменений функции вне участка допустимых значений существенно меньше, чем в допустимых значениях.

Функция оценки значения переменной для некоторого шага моделирования или момента актуализации информации  $t$  принимается:

$$\psi(x_i) = \begin{cases} (x_i'' - x_i)/(x_i'' - x_i'), & \text{если } x_i < x_i'; \\ ((x_i^o - \sigma_i) - x_i)/((x_i^o - \sigma_i) - x_i'), & \text{если } x_i' \leq x_i < x_i^o - \sigma_i; \\ 0, & \text{если } x_i^o - \sigma_i \leq x_i \leq x_i^o + \sigma_i; \\ (x_i - (x_i^o + \sigma_i))/(x_i'' - (x_i^o + \sigma_i)), & \text{если } x_i^o + \sigma_i < x_i \leq x_i''; \\ (x_i - x_i')/(x_i'' - x_i'), & \text{если } x_i > x_i'', \end{cases}$$

где:

$x_i$  – значение параметра;

$x_i'$  – нижняя граница допустимых значений;

$x_i''$  – верхняя граница допустимых значений;

$x_i^o$  – предпочтительное (оптимальное) значение;

$\sigma_i$  – допускаемое отклонение значений заданного значения от предпочтительного, при котором значение продолжает считаться оптимальным ( $x_i \in [x_i^o - \sigma_i, x_i^o + \sigma_i]$ ).

Функция является кусочно-линейной,  $\psi(x_i) = ax_i + b$ , где значения  $a$  и  $b$  будут меняться в зависимости от участка области изменения функции. Чем меньше значение функции, тем ближе к оптимуму.

На базе этой функции могут быть применены интегральные оценки для отдельных критериев и временных периодов:

$\psi(t) = \max(\psi(x_i))$  – результат оценки состояния для множества  $i$ -ых критериев при шаге, равном  $t$ ;

$\psi = \max(\psi(t)) = \max(\psi(i))$  – результат оценки траектории для определенного пользователем количества шагов и установленного множества критериев;

$\psi(i) = \max(\psi(x_i))$  – результат оценки траектории  $i$ -го критерия во временном промежутке  $t$ .

В данном случае следует принять во внимание следующие допуски:

$\psi(t) \in [0, 1]$  – функция, характеризующая допустимое состояние ГТС по всем заданным параметрам для шага, равного  $t$ ;

$\psi \in [0, 1]$  – функция, отображающая допустимую траекторию ГТС для заданного пользователем количества шагов и определенного множества критериев;

$\psi(i) \in [0, 1]$  – функция, характеризующая допустимую траекторию переменной для определенного пользователем количества шагов.

Результаты данных расчетов дают возможность оценить степень приближения процессов, происходящих на конкретном объекте, с их эталоном. Подобные функции могут использоваться для оценки технического состояния причальной стенки (по критериям допустимой рабочей нагрузки, пространственным перемещениям оголовка, напряжениям в анкерных тросах).

## Список литературы

- [1] Балонин Н. А., Гарибин П. А., Марлей В. Е. Новые информационные технологии мониторинга гидротехнических сооружений // Журнал университета водных коммуникаций. – 2009. – № 4. – С. 150–154.
- [2] Балонин Н. А., Гарибин П. А., Марлей В. Е. и др. Перспективы использования информационных технологий для мониторинга технического состояния гидротехнических сооружений // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2010. – № 93. – С. 171–176.
- [3] Гарибин П. А., Марлей В. Е., Рябов Г. Г. Обеспечение контролеспособности сооружений – один из этапов построения прогнозных моделей // Журнал университета водных коммуникаций. – 2010. – № 1. – С. 8–14.

- [4] Гарибин П. А., Марлей В. Е., Ольховик Е. О., Шабанов С. В. Разработка автоматизированной системы для непрерывного контроля технического состояния гидротехнических сооружений // Гидротехника XXI ВЕК – 2013. – № 2 (14). – С. 50–53.
- [5] Устинов А. В. Технология спутникового геодезического мониторинга гидротехнических сооружений // Гидротехническое строительство. – 2014. – № 6. – С. 39–43.
- [6] Арифудин Е. З., Федянин В. И., Мальцев А. С. и др. Методология мониторинга чрезвычайных ситуаций, связанных с авариями на гидротехнических сооружениях // Вестник воронежского института ГПС МЧС России. – 2013. – № 2(7). – С. 28–35.
- [7] Малько А. В. Организация мониторинга технического состояния гидротехнических сооружений Светлинской ГЭС (Виллойской ГЭС–3) // Гидротехническое строительство. – 2012. – №. 12. – С. 2–10.
- [8] Лазаренко М. Л., Лазаренко Л. М. Система мониторинга и управления температурой в климатической камере // Международный технико-экономический журнал. – 2014. – № 5. – С. 67–71.
- [9] Гаврильев А. Л., Берчук Д. Ю., Журавлев Д. В. Использование аппаратной вычислительной платформы «Arduino» для удаленного мониторинга блок-боксов // Сб. тр. XI Междунар. науч. практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и современные информационные технологии». – Томск: Нац. исслед. Томский политехнический университет, 2013. – С. 229–231.

УДК 517.956+004.942

## **О ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЯХ ЗАМКНУТЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ НА КОЛЬЦЕВОЙ АВТОДОРОГЕ**

Подорога А. В., Тихонов И. В.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Москва

e-mail: ivtikh@mail.ru, anastasiapodoroga@gmail.com

**Tikhonov I. V., Podoroga A. V. The asymptotic behavior of closed traffic flows on a ring road.** We discuss some approaches to mathematical description of road traffic. The evolution of closed traffic

flow on a ring road is considered. Special effects connected with the stabilization of possible solutions are noted.

Обсуждаются различные подходы, применяемые при математическом описании процессов дорожного движения. Рассмотрена модельная задача об эволюции замкнутого транспортного потока на кольцевой автодороге. Отмечены специальные эффекты, связанные со стабилизацией возможных решений при увеличении времени.

Тематика, связанная с математическим описанием дорожного движения, интересна тем, что она позволяет сочетать принципиально разные методы исследования. Так, выводы, следующие из теории дифференциальных уравнений, можно проверять средствами компьютерного моделирования. И, наоборот, результаты численных экспериментов часто подсказывают новые содержательные задачи для дифференциальных уравнений. Об одной такой конкретной ситуации пойдет речь в настоящем сообщении.

Некоторое время назад на кафедре математической физики факультета ВМК МГУ была разработана компьютерная программа “Cars”, имитирующая движение индивидуальных транспортных средств (автомобилей) по однополосной дороге. Допустим, что ансамбль состоит из  $n$  автомобилей:

$$a[n], \quad a[n - 1], \quad \dots, \quad a[3], \quad a[2], \quad a[1],$$

последовательно расположенных на однополосной дороге и движущихся друг за другом в положительном направлении. Каждый индивидуальный автомобиль  $a[j]$  снабжён тремя числовыми переменными

$$x_k[j], \quad v_k[j], \quad w_k[j], \tag{1}$$

означающими координату, скорость и ускорение  $j$ -го авто в момент времени

$$t_k = k\tau, \quad k \in \mathbb{N} \cup 0. \tag{2}$$

Шаг  $\tau$  для приращения времени  $t$  в формуле (2) выбирается достаточно малым, порядка  $10^{-1}$  с. Две первые величины в (1) изменяются по законам кинематики:

$$v_{k+1}[j] = v_k[j] + \tau w_{k+1}[j], \quad x_{k+1}[j] = x_k[j] + \tau v_{k+1}[j]. \tag{3}$$

Управляющим параметром в формулах (3) является ускорение автомобиля, которое вычисляется на каждом шаге, исходя из текущего состояния самого автомобиля и другого авто, двигающегося перед ним:

$$w_{k+1}[j] = F(x_k[j], v_k[j], w_k[j]; x_k[j - 1], v_k[j - 1], w_k[j - 1]). \tag{4}$$



Правило (4) соответствует естественному поведению водителя на автодороге и составляет главное содержание алгоритма “Cars”. Значения переменных (1) и внутренних параметров алгоритма (4) изменяются в диапазонах, характерных для «реальных» автомобилей.

Основной принцип работы алгоритма (4) можно выразить достаточно просто: требуется, чтобы каждый автомобиль двигался с максимальной возможной скоростью, но ни при каких обстоятельствах не допускал столкновения с впереди идущим автомобилем. Состояние  $x_k[j] \geq x_k[j - 1]$  считается ошибкой при работе алгоритма (4). В результате последовательной отладки программы “Cars” удалось добиться отсутствия ошибок, по крайней мере, на всех основных режимах, испытанных в системе.

Программа написана на языке C# и имеет удобный интерфейс, позволяющий визуально наблюдать за текущим состоянием транспортного потока. Все данные хранятся также в цифровом формате и могут быть использованы для дальнейшей обработки.

К настоящему моменту проведено значительное число экспериментов и получен объемный материал (см. [1]–[4]). Особенно удобным для моделирования оказался случай кольцевой автодороги, поскольку здесь можно создать замкнутый транспортный поток, отождествив финальную точку  $x = L$  с начальной точкой  $x = 0$ . Обычно выбиралось кольцо длины  $L = 5$  км с диапазоном изменения числа  $n$  (количества автомобилей) от 75 до 500 авто. Рассматривалась также длина  $L = 20$  км с диапазоном изменения  $n$  от 200 до 2000 авто.

Эксперименты на кольце выявили одну особенность. В большинстве случаев, независимо от начального состояния системы, достаточно быстро происходила характерная стабилизация транспортного потока к тому или иному устойчивому режиму. Если общее число автомобилей было небольшим (меньшим некоторого критического значения для заданной длины кольца), то через фиксированное время элементы потока свободно распределялись по кольцу и начинали двигаться с максимальной скоростью, совсем не затормаживая друг друга. Если же общее число автомобилей превосходило упомянутое критическое значение, то через некоторое время образовывался регулярный затрудненный поток, содержащий внутри себя устойчивые локальные уплотнения. Эти уплотнения (“jams”) смещались в дальнейшем как единое целое в направлении против хода движения автомобилей. Означенный эффект наглядно наблюдается на рисунке, где повышенная интенсивности темного цвета в плоскости  $(t, x)$  соответствует возрастанию плотности и уменьше-

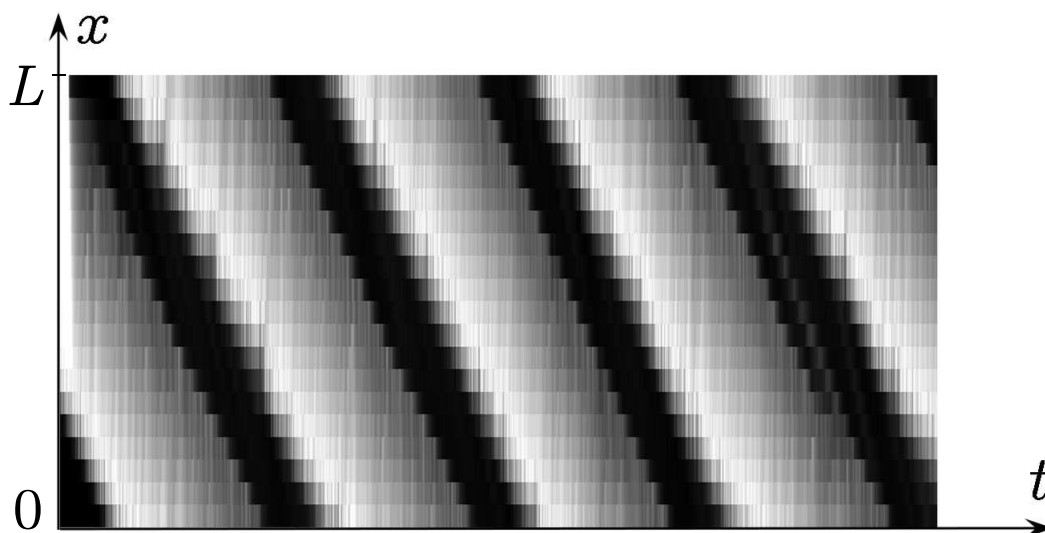


Рис. 5. Движение локальных уплотнений в плоскости  $(t, x)$ .

нию скорости транспортного потока. Раз возникшее уплотнение продолжает смещаться по кольцу бесконечно долгое время.

Отметим также, что если общее число автомобилей оказывалось близким к критическому значению, то картина становилась менее устойчивой, и стабилизация потока наступала за более длительное время с возможным последующим нарушением стабильности.

Представляется, что отмеченные эффекты *стабилизации* допускают простое объяснение на языке квазилинейных дифференциальных уравнений, используемых при макроскопическом описании транспортных потоков. В рамках макроскопического подхода [5] транспортный поток трактуется как специфический поток сплошной среды со стандартными характеристиками

$$\rho = \rho(x, t), \quad v = v(x, t), \quad q = q(x, t). \quad (5)$$

Величины (5) выражают соответственно плотность, скорость и интенсивность транспортного потока в точке  $x \in \mathbb{R}$  в момент времени  $t \geq 0$ . Аналогом уравнения неразрывности выступает следующий *закон сохранения автомобилей*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Справедлива *формула потока*

$$q(x, t) = \rho(x, t) v(x, t). \quad (7)$$

Центральную роль играет специальный *закон безопасного движения*

$$v = V(\rho), \quad 0 < \rho \leq \rho_{\max}, \quad (8)$$

с непрерывной, монотонно убывающей функцией  $V(\rho)$ , для которой приняты краевые условия

$$V(0+) = v_{\max}, \quad V(\rho_{\max}) = 0. \quad (9)$$

Соотношения (8), (9) выражают естественное убывание скорости транспортного потока при возрастании его плотности. Совмещая формулы (7) и (8), получаем зависимость интенсивности потока от плотности:

$$q = \rho V(\rho) = Q(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}. \quad (10)$$

Выражение  $q = Q(\rho)$  из формулы (10) называют *фундаментальной диаграммой* дорожного движения (см. [5]). Подставляя фундаментальную диаграмму в закон сохранения (6), приходим к основному уравнению дорожного движения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \quad \rho = \rho(x, t). \quad (11)$$

Это квазилинейное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции  $\rho$ . Поскольку для квазилинейных уравнений типичными являются разрывные решения (см. [6]–[8]), то наряду с (11) удобно рассматривать также проинтегрированное соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x, t) dx = Q(\rho(\alpha, t)) - Q(\rho(\beta, t)). \quad (12)$$

Всякая кусочно непрерывная функция  $\rho$ , удовлетворяющая соотношению (12) при почти всех  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и почти всех значениях  $t \geq 0$ , называется *обобщённым решением* квазилинейного уравнения (11). При этом, конечно, предполагается, что  $0 \leq \rho(x, t) \leq \rho_{\max}$  для всех  $x \in \mathbb{R}$  и  $t \geq 0$ .

Стандартной для (11) является задача Коши с начальным условием

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

Здесь кусочно непрерывная функция  $\rho_0(x)$  выбрана так, чтобы  $0 \leq \rho_0(x) \leq \rho_{\max}$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ . В задаче на кольце фиксированной длины  $L > 0$  естественно считать все функции  $L$ -периодическими по  $x$  при любом фиксированном  $t \geq 0$ .

Как уже отмечалось ранее (см. [2]), многочисленные эксперименты, проведенные в программе “Cars”, показывают, что транспортный поток при стандартных настройках параметров программы хорошо соответствует фундаментальной диаграмме, предложенной в работе Нагеля–Шрекенберга [9]. Эта

диаграмма имеет вид

$$Q(\rho) = \begin{cases} k_1\rho, & 0 \leq \rho \leq \rho^*, \\ k_2(\rho_{\max} - \rho), & \rho^* \leq \rho \leq \rho_{\max}, \end{cases} \quad (14)$$

с коэффициентами

$$k_1 = \frac{q_{\max}}{\rho^*}, \quad k_2 = \frac{q_{\max}}{\rho_{\max} - \rho^*}. \quad (15)$$

Здесь  $\rho^*$  — фиксированное значение из интервала  $(0, \rho_{\max})$ , отвечающее переходной плотности от свободного движения потока (при  $0 < \rho < \rho^*$ ) к затрудненному движению (при  $\rho^* < \rho < \rho_{\max}$ ). Значения максимальной плотности  $\rho_{\max}$  и максимальной интенсивности  $q_{\max}$  считаются заданными константами.

Конечно же, фундаментальная диаграмма (14) не вполне точно отражает все происходящее, но она является наилучшим «первым приближением» к истинным (более сложным) процессам, проходящим в транспортных потоках программы “Cars”.

Типовые обобщённые решения уравнения (11), возникающие в модели Нагеля–Шрекенберга (14), (15), указаны в работе [2]. Дополним прежние соображения следующей гипотезой, объясняющей стабилизацию решений при достаточно больших значениях  $t > 0$ .

Итак, рассматриваем поведение  $L$ -периодических решений задачи Коши (11), (13) в модели Нагеля–Шрекенберга (14), (15). Ключевой характеристикой является значение

$$M = \int_0^L \rho_0(x) dx, \quad (16)$$

соответствующее общему числу автомобилей на кольце в начальный момент времени  $t = 0$ . Из тождества (12) следует, что данное значение не изменяется при возрастании  $t > 0$  в том смысле, что

$$M = \int_0^L \rho(x, t) dx, \quad t > 0, \quad (17)$$

для решения поставленной задачи Коши. Используя закон сохранения (17) и явные формулы решений из работы [2], требуется доказать такое утверждение.

**Утверждение.** Пусть  $\rho_0(x)$  — кусочно непрерывная  $L$ -периодическая функция, удовлетворяющая условию  $0 \leq \rho_0(x) \leq \rho_{\max}$  при  $x \in \mathbb{R}$ . Пусть величина  $M > 0$  определена формулой (16). Предположим, что  $\rho(x, t)$  — обобщенное  $L$ -периодическое решение задачи Коши (11), (13) в модели Нагеля–Шрекенберга (14) с коэффициентами  $k_1, k_2$  из формулы (15). Имеет место следующая альтернатива.

(i) Если  $M < L\rho^*$ , то существует момент времени  $t^*$ , зависящий лишь от длины кольца  $L$  и параметров фундаментальной диаграммы (14), такой, что  $0 \leq \rho(x, t) \leq \rho^*$  при всех  $x \in [0, L]$  и  $t \geq t^*$ . В этом случае

$$\rho(x, t) = f(x - k_1 t), \quad x \in [0, L], \quad t \geq t^*, \quad (18)$$

с некоторой функцией  $f = f(s)$ , такой, что  $0 \leq f(s) \leq \rho^*$  при всех  $s \in \mathbb{R}$ .

(ii) Если  $M > L\rho^*$ , то существует момент времени  $t^*$ , зависящий лишь от длины кольца  $L$  и параметров фундаментальной диаграммы (14), такой, что  $\rho^* \leq \rho(x, t) \leq \rho_{\max}$  при всех  $x \in [0, L]$  и  $t \geq t^*$ . В этом случае

$$\rho(x, t) = g(x + k_2 t), \quad x \in [0, L], \quad t \geq t^*, \quad (19)$$

с некоторой функцией  $g = g(s)$ , такой, что  $\rho^* \leq g(s) \leq \rho_{\max}$  при всех  $s \in \mathbb{R}$ .

Другими словами, в случае (i) наступает стабилизация решения в виде прямой волны (18), а в случае (ii) — в виде обратной волны (19). Обе формулы согласованы с наблюдаемой картиной в модели “Cars” и хорошо объясняют эффекты, отмеченные ранее на других примерах в [9]–[11].

Сейчас мы не располагаем полным доказательством сформулированного утверждения, но наши предварительные рассуждения убеждают в его истинности. Особую специфику имеет пограничный случай  $M = L\rho^*$ , когда число автомобилей равно критическому. В силу имеющихся примеров неединственности (см. [2], [4]) после стабилизации решения к теоретическому значению  $\rho(x, t) \equiv \rho^*$  возможно последующее разрушение решения, новая стабилизация и так далее.

Отметим, наконец, что вопросы стабилизации решений представляют традиционный интерес для теории квазилинейных дифференциальных уравнений (см. [12], [13]).

## Список литературы

- [1] Подорога А. В. Имитационные компьютерные модели в задачах однополосного дорожного движения // “Системы компьютерной математики

- и их приложения”: материалы XV Международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. Вып. 15 – С. 42–44.
- [2] Подорога А. В., Тихонов И. В. Квазилинейное уравнение дорожного движения и компьютерное моделирование // “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования”. Герценовские чтения — 2015. Материалы научной конференции, 13–17 апреля 2015 г. – СПб: Издательство РГПУ им. А.И. Герцена, 2015. – С. 209–213.
- [3] Подорога А. В. Моделирование идеального транспортного потока на кольцевой автодороге // “Системы компьютерной математики и их приложения”: материалы XVI Международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора В.П. Дьяконова. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. Вып. 16 – С. 35–38.
- [4] Подорога А. В., Тихонов И. В. Неединственность решения задачи Коши для квазилинейного уравнения дорожного движения в модели Нагеля–Шрекенберга // “Современные проблемы теории функций и их приложения”. Материалы 18-й междунар. Саратов. зимней школы. – Саратов: ООО Издательство «Научная книга», 2016. – С. 222–224.
- [5] Гасников А. В. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие / Под ред. А. В. Гасникова. Издание 2-е, испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2013. – 427 с.
- [6] Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А. Уравнения с частными производными первого порядка. (Учебное пособие). – М.: Мех-мат МГУ, 1999. – 96 с.
- [7] Лакс П. Д. Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. – М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010. – 296 с. (Lax P.D. Hyperbolic Partial Differential Equations. AMS, 2006.)
- [8] Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. – 576 с. (L. C. Evans. Partial Differential Equations.)
- [9] Nagel K., Schreckenberg M. A cellular automaton model for freeway traffic // Journal de Physique I France. 1992. Vol. 2. No 12. – P. 2221–2229.
- [10] Смирнов Н. Н., Киселев А. Б., Никитин В. Ф., Юмашев М. В. Математическое моделирование автотранспортных потоков. – М.: Мех-мат МГУ, 1999. – 31 с.
- [11] Киселев А. Б., Никитин В. Ф., Смирнов Н. Н., Юмашев М. В. Неустановившиеся движения автотранспорта на кольцевой магистрали // Прикл. матем. и механ. 2000. Т. 64. Вып. 4. – С. 671–678.

- [12] Кружков С. Н., Петросян Н. С. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для нелинейных уравнений первого порядка // УМН, 1987. Т. 42. Вып. 5. – С. 3–40.
- [13] Henkin G. M., Shanenin A. A. Cauchy–Gelfand problem for quasilinear conservation law // Bulletin des Sciences Mathematiques. 2014. Vol. 138. No. 7. – P. 783–804.

## РЕАЛИЗАЦИЯ СРЕДСТВАМИ C++/Qt И PostgresSql ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ТЕСТИРОВАНИЯ ЗНАНИЙ

Просенкова Ю. Б., Флегонтов А. В.  
Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена  
Санкт-Петербург  
e-mail: julia969@mail.ru, aflegontoff@herzen.spb.ru

**Prosenkova Yu. B., Flegontov A. V. Implementing of interaction between the components of the automated system of knowledge testing by C++/Qt and PostgreSql.** The components included in the developing system of knowledge testing that provides automated preparation of tests are considered. The system uses algorithms of the tests autogeneration from arbitrary text education materials. The interaction of the system components and software implementation of this interaction by C++/Qt and PostgresSql are presented. The tools used to develop the system are analyzed.

Рассматриваются компоненты, входящие в разрабатываемую систему тестирования знаний, которая обеспечивает автоматизированное составление тестов. Для работы системы используются алгоритмы автогенерации тестовых заданий из произвольных текстовых учебных материалов. Рассматривается взаимодействие компонент и программная реализация этого взаимодействия средствами C++/Qt и PostgresSql. Анализируются средства, используемые для разработки системы.

**1. Введение.** В научно-образовательном центре “Информационные технологии и системы моделирования” Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена на протяжении нескольких последних лет проводится ряд прикладных и научных исследований по автоматизации работы кафедр. Совместно с Чукотским филиалом Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова реализуется сетевой про-

ект в области smart-образования. В рамках проводимых кафедрой научно-исследовательских работ, анализируются также вопросы организации и автоматизированной поддержки виртуального образовательного пространства вуза в целом. Данные направления деятельности послужили основой для проведения анализа и совершенствования современных инновационных решений на базе систем дистанционного обучения [1].

В рамках проводимых исследований по автоматизации аналитической поддержки принятия экспертных решений, одним из приоритетных направлений работ было определено развитие интеллектуальных методов и технологий на основе алгоритмов обработки текстов. Был реализован алгоритм автогенерации тестовых заданий из текстовых данных и по нему на языке высокого уровня было разработано соответствующее программное обеспечение [2].

Отмеченное программное обеспечение в настоящее время масштабируется до крупной автоматизированной информационной системы тестирования знаний, позволяющей проводить полный цикл интеллектуального обучения по произвольным дисциплинам. Процесс обучения в рамках данной информационной системы предполагает ознакомление обучающихся с учебными материалами по дисциплинам, а также фиксированный контроль усваиваемых знаний. Уникальностью системы является внедрение в нее алгоритма автогенерации тестовых заданий с произвольных текстовых учебных материалов, представленных в широком диапазоне форматов документов. Очевидно, что разрабатываемая система позволяет существенно облегчить работу преподавателя, а также повысить эффективность учебного процесса [1, 3, 4].

Целью приведенной статьи является описание компонентов разрабатываемой системы и их взаимодействия. Также рассматриваются и анализируются средства разработки системы в целом и программная реализация взаимодействия между конкретными компонентами системы.

**2. Компоненты системы тестирования и их взаимодействие.** Разрабатываемая система тестирования знаний состоит из следующих компонентов: автоматизированное рабочее место преподавателя, автоматизированное рабочее место обучающегося, рабочее место администратора и сервер. На сервере располагается база данных, содержащая информацию об обучающихся, учебных материалах и тестовых заданиях по заданным материалам [1, 3]. Диаграмма развертывания, показывающая более детально физическую структуру построения описываемой системы, представлена на рис. 1.



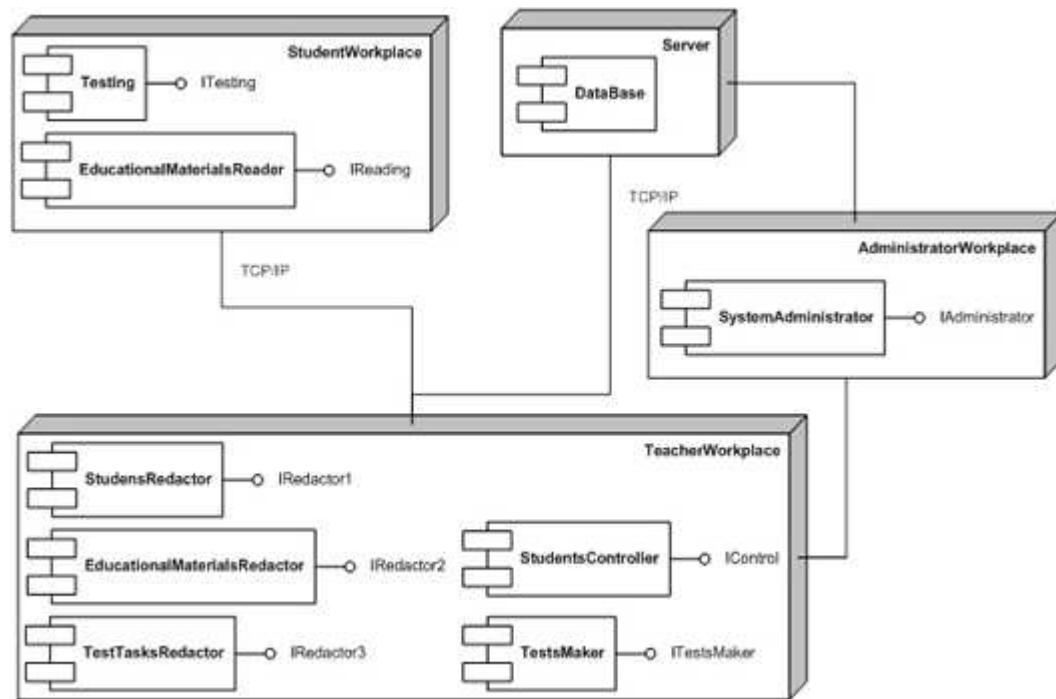


Рис. 1. Диаграмма развертывания системы тестирования знаний.

Из диаграммы видны возможные взаимодействия между компонентами системы:

1. Администратор системы отвечает за бесперебойную работу сервера базы данных, а также за поддержание в актуальном состоянии рабочего места преподавателя и предоставление преподавателю доступа к серверу с базой данных.

2. Автоматизированное рабочее место преподавателя осуществляет непосредственное взаимодействие как с базой данных, так и с рабочим местом обучающегося. Данные взаимодействия обеспечиваются с помощью стека протоколов передачи данных TCP/IP. Преподаватель отвечает за поддержание в актуальном состоянии информации в базе данных и передает по сети необходимую для обучающегося информацию из базы. К такой информации относятся учебные материалы для ознакомления и тестовые задания для контроля усвоения данных материалов.

3. Автоматизированное рабочее место обучающегося осуществляет взаимодействие только с рабочим местом преподавателя. Таким образом все необходимые запросы к серверу базы данных происходят только с рабочего места преподавателя, что существенно снижает нагрузку на сервер и ускоряет работу системы в целом. С рабочих мест обучающихся предусмотрена передача

определенных сигналов на рабочие места преподавателя. К таким сигналам относятся уведомления об окончании прочтения учебных материалов и ряд уведомлений о ходе выполнения тестовых заданий.

На данный момент программно реализуются взаимодействия между следующими компонентами системы:

- взаимодействие между рабочим местом преподавателя и сервером базы данных;
- взаимодействие между рабочим местом преподавателя и обучающегося.

**3. Средства разработки.** В качестве основного языка программирования для реализации автоматизированной системы тестирования знаний был выбран такой язык программирования как C++. Для построения пользовательского интерфейса была использована версия кроссплатформенного фреймворка Qt под стандартной общественной лицензией ограниченного применения GNU. В изначальном варианте средствами C++/Qt была написана простейшая программа выполняющая последовательность действий (см. последовательность, описанную с помощью диаграммы деятельности и приведенную на рис. 2). Как отмечалось ранее, в настоящее время ведется работа по расширению описанной локальной программы до крупной автоматизированной информационной системы тестирования знаний [6, 7].

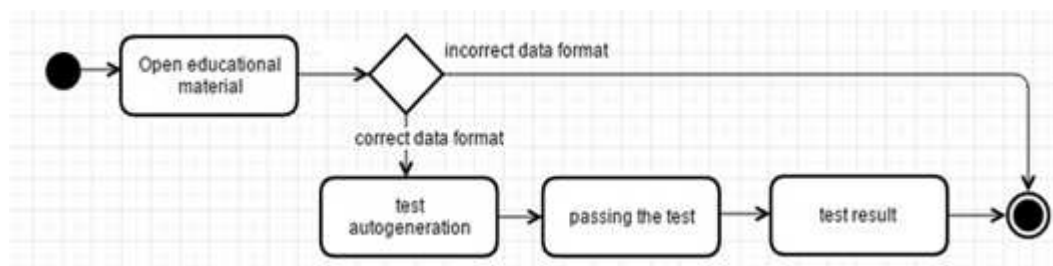


Рис. 2. Диаграмма деятельности начального варианта работы программы.

Для организации базы данных была выбрана свободная объектно-реляционная система управления базами данных PostgreSQL.

Есть несколько основных преимуществ, которые повлияли на выбор представленных средств разработки, в число которых входят:

- 1) широкий набор различных библиотек классов, предоставляющих широкие возможности для использования Qt;

- 2) кроссплатформенность приложений, написанных средствами C++/Qt, при условии того, что не были использованы сторонние библиотеки, не поддерживающие кроссплатформенность;
- 3) кроссплатформенность PostgreSQL;
- 4) открытые исходные коды библиотеки Qt и СУБД PostgreSQL;
- 5) постоянное развитие Qt;
- 6) грамотно составленная документация к Qt, которая поддерживается в актуальном состоянии.

Большое количество различных библиотек внутри Qt позволяет при разработке системы в большинстве случаев обойтись стандартным набором классов и не прибегать к использованию сторонних библиотек. Это позволяет избежать большого количества ошибок при программировании системы и проблем, связанных с внедрением сторонних библиотек в код, а также проблем, связанных с совмещением лицензий средств разработки и последующим лицензированием производимого программного обеспечения.

Стоит отметить, что основную часть организации взаимодействия информационной системы и базы данных можно осуществить средствами PostgreSQL. Сама СУБД PostgreSQL является наиболее развитой системой управления базами данных с открытым исходным кодом. Она обеспечивает высокую надежность и устойчивость даже при очень высоких нагрузках на сервер базы данных [5].

Совместное использование C++/Qt и PostgreSQL является достаточно распространенным в настоящее время. Одной из причин, связанных с этим можно выделить кроссплатформенность и открытые исходные коды обоих средств. Таким образом, внедрение информационных систем написанных средствами C++/Qt и PostgreSQL возможно в большое число самых различных предприятий. В настоящее время данные средства разработки широко используются для операционных систем специального назначения, которые в основном базируются на ядре Linux. Стоит отметить, что нет необходимости в установке на сервере и рабочих местах одной операционной системы.

Из сказанного выше можно сделать вывод, что разрабатываемая средствами C++/Qt и PostgreSQL автоматизированная система тестирования знаний сможет применяться для широкого круга учебных заведений, а также объединять между собой в единую образовательную сеть различные филиалы учебных заведений или различные учебные заведения при необходимости [5, 6].

**4. Реализация взаимодействия между рабочим местом преподавателя и сервером базы данных.** Взаимодействие рабочего места преподавателя и сервера базы данных позволяет преподавателю ряд действий, приведенных на фрагменте диаграммы прецедентов на рис. 3. В данном фрагменте диаграммы присутствует единственное действующее лицо – преподаватель, а все прецеденты отражают действия связанные с редактированием и обращением к базе данных.

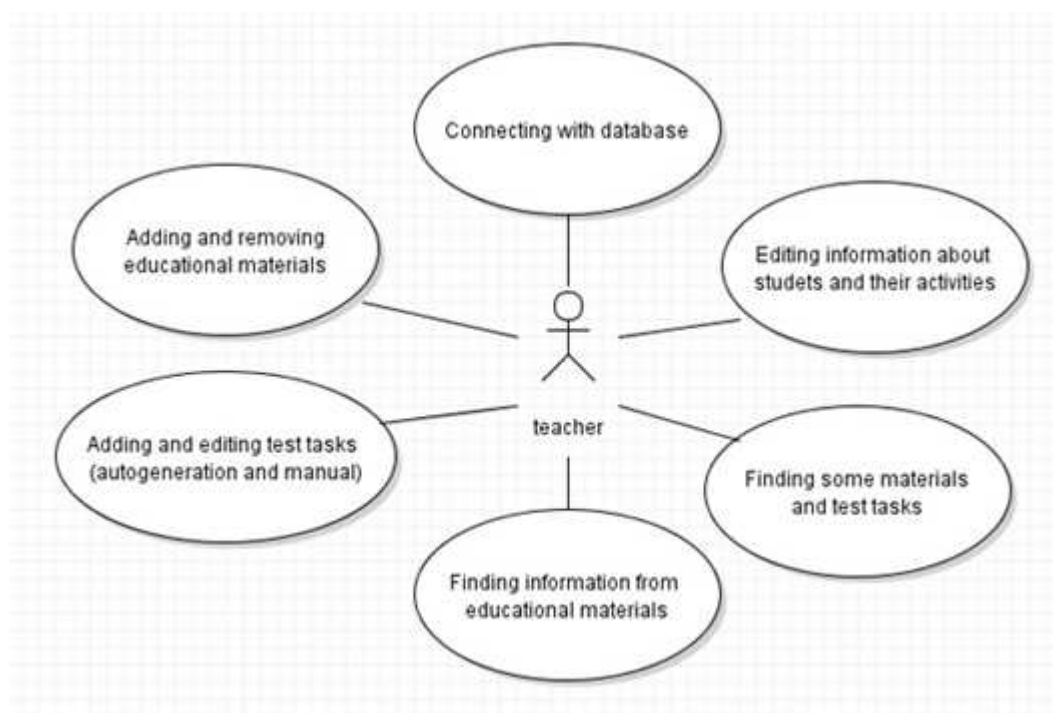


Рис. 3. Фрагмент диаграммы прецедентов.

Взаимодействие информационной системы тестирования знаний с сервером базы данных организовано с помощью драйвера QPSQL, поставляемого совместно с Qt. При запуске рабочего места преподавателя создается экземпляр класса QSqlDatabase с помощью метода QSqlDatabase::addDatabase("QPSQL"). Созданному экземпляру присваиваются такие атрибуты, как порт, имя хоста и название подключаемой базы данных. Ответственность за правильное указание этих атрибутов несет администратор системы [6, 9, 10].

Для начала пользования своим рабочим местом преподавателю необходимо выполнить вход в систему под своим личным логином и паролем. Эти данные также указываются атрибутами в созданном ранее экземпляре класса

QSqlDatabase. Все пользователи базы данных, а также их права на изменения и чтение таблиц хранятся в базе данных и могут быть отредактированы только администратором системы. Организация прав доступа к компонентам базы данных организовано средствами СУБД PostgreSQL.

В случае, если все атрибуты экземпляра класса QSqlDatabase были заданы верно, осуществляется соединение с базой данных электронных учебных ресурсов и вход в пользовательский интерфейс автоматизированного рабочего места преподавателя. После этого преподаватель может начать полноценную работу с системой, выполняя все разрешенные правами доступа действия. Дальнейшее взаимодействие преподавателя с базой данных осуществляется с помощью классов, входящих в состав библиотеки QSql [6, 9, 10].

Из выше сказанного видно, что программная реализация взаимодействия пользователя системы тестирования знаний с сервером базы данных осуществляется по средствам набора стандартных классов Qt, а также с помощью встроенных средств СУБД PostgreSQL. Данный способ реализации программного кода гарантирует кроссплатформенность информационной системы и ее легкую адаптацию к любому учебному заведению или сети таких учреждений.

**5. Реализация взаимодействия между рабочим местом преподавателя и обучающегося.** Взаимодействие между рабочими местами преподавателя и обучающегося, позволяет пользователям выполнять ряд действий по осуществлению передачи данных и различного рода уведомлений друг другу. На рис. 4 приведен фрагмент диаграммы прецедентов, описывающий данное взаимодействие между преподавателем и обучающимся. Все прецеденты, присутствующие на диаграмме в том или ином виде отображают общение пользователей между собой.

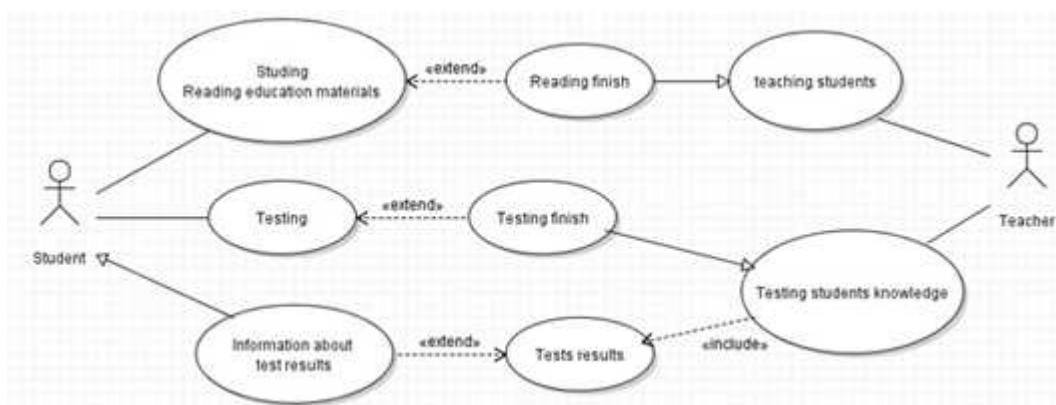


Рис. 4. Фрагмент диаграммы прецедентов.

Взаимодействие между рабочим местом преподавателя и обучающегося на физическом уровне организовано по средствам стека протоколов TCP/IP. Для организации сетевого взаимодействия в Qt имеется специальная стандартная библиотека QtNetwork. В этой библиотеке собраны классы для работы с различными протоколами передачи данных. Для организации сетевой работы по средствам протокола передачи данных TCP/IP в данной библиотеке имеются следующие классы: QTcpServer и QTcpSocket [8, 10].

Для организации сетевого взаимодействия на автоматизированном рабочем месте преподавателя, как на сервере, используется класс QTcpServer. В данном случае рабочие места обучающихся выступают в роли клиентов, и их работа организуется с помощью класса QTcpSocket.

Такая организация взаимодействия между обучающимися и преподавателем обеспечивает не только возможность проведения учебного процесса в рамках одного учебного заведения, но и возможность организации учебного процесса по сети интернет. Таким образом, автоматизированная информационная система тестирования знаний может применяться для проведения дистанционного обучения. Также дистанционное обучение с использованием разрабатываемой системы возможно, потому что рабочие места обучающихся не имеют тяжелой функциональной нагрузки, получают данные только от рабочего места преподавателя и передают информацию обратно на него.

**6. Заключение.** В настоящее время ведется работа по разработке описываемой информационной системы. На данный момент разработаны начальные варианты пользовательского интерфейса автоматизированного рабочего места преподавателя и обучающегося. Полностью осуществляется взаимодействие рабочего места преподавателя с сервером базы данных и имеется первоначальное разделение прав доступа к таблицам базы данных на администратора и преподавателя. Сетевое взаимодействие между автоматизированным рабочим местом преподавателя и обучающегося разрабатывается в данный момент.

В ближайшее время планируется осуществление разработки полного функционала рабочего места преподавателя и внедрение существующего на данный момент алгоритма автогенерации тестовых заданий из произвольных текстовых документов. Также планируется модернизация данного алгоритма, позволяющая задавать пользователю правила, по которым будут составляться вопросы по учебному материалу.

В будущем планируется внедрение возможности использования широкого диапазона форматов документов, в которых могут быть представлены учебные материалы. Также предусмотрена существенная модернизация алгоритма автогенерации тестовых заданий с применением алгоритмов DataMining.

## Список литературы

- [1] Попов С. М., Просенкова Ю. Б., Флегонтов А. В., Фомина Д. С. Инженерная образовательная среда, элементы smart-образования и инфраструктуры // Высокотехнологичная информационная образовательная среда. Сб. статей Международной научно-практической конференции. – СПб: РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 117–121.
- [2] Просенкова Ю. Б., Флегонтов А. В. Автогенерация тестовых заданий // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2014”. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – С. 227–230.
- [3] Просенкова Ю. Б., Флегонтов А. В. Клиент-серверная организация работы системы тестирования знаний с функцией автогенерации тестовых заданий и информационная база, обеспечивающая обмен данными между компонентами системы // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2015”. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 216–220.
- [4] Просенкова Ю. Б. Получение текстовых данных из наиболее распространенных форматов хранения документов // Информационные системы и технологии – 2014. Сборник научно-технических статей №3 – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – С. 71–76.
- [5] PostgreSQL. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.postgresql.org/> (accessed 14 January 2016).
- [6] Qt. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.qt.io/ru/> (accessed 14 January 2016).
- [7] GNU Operating System. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.gnu.org/> (accessed 14 January 2016).
- [8] Кудрявцева И. А., Швецкий М. В., Флегонтов А. В. Информационные системы и технологии. Элементы эволюционного программирования: опорный конспект. Учебное пособие, вып. 2. – СПб: РГПУ им. А. И. Герцена, 2014.

- [9] Qt-doc.ru. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://qt-doc.ru/> (accessed 14 January 2016).
- [10] QtCentre. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.qtcentre.org/> (accessed 14 January 2016).

УДК 519.6, 519.642.3, 535.338.1

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ОБУЧАЮЩИХ ПРИМЕРОВ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Сизиков В. С.\*, Кривых А. В.\*, Степанов А. В.\*\*

Университет ИТМО, Санкт-Петербург\*

Крымский федеральный университет, Симферополь\*\*

e-mail: [sizikov2000@mail.ru](mailto:sizikov2000@mail.ru), [krivykh1987@mail.ru](mailto:krivykh1987@mail.ru), [abc17101@yandex.ru](mailto:abc17101@yandex.ru)

**Sizikov V. S., Krivykh A. V., Stepanov A. V. Use of model training examples in solving inverse ill-posed problems.** Further development of the technique of computational experiments for solving ill-posed problems is given. The effective (unoverstated) estimate for solution error of the first-kind equation is obtained using the truncating singular numbers of an operator spectrum. It is proposed to estimate the truncation quantity by results of solving model (training, learning) examples close to the initial example (problem). This technique takes into account an additional information about the solution and yields a new principle for choosing the regularization parameter and error estimate for equation solution by the Tikhonov regularization. The technique is illustrated by a numerical example from the inverse spectroscopy problem.

Дано дальнейшее развитие способа вычислительных экспериментов решения некорректных задач. Получена эффективная (незавышенная) оценка погрешности решения уравнения первого рода, использующая усечение спектра сингулярных чисел оператора. Величину усечения предлагается оценивать по результатам решения модельных, или обучающих примеров, “близких” исходному примеру (задаче). Данный способ учитывает дополнительную информацию о решении и порождает новый способ выбора параметра регуляризации и оценку погрешности решения уравнения методом регуляризации Тихонова. Способ проиллюстрирован численным примером из обратной задачи спектроскопии.

**Введение.** Известно [1–4], что практически невозможно получить эффективную (незавышенную) оценку погрешности решения некорректной задачи, не используя дополнительную (априорную) информацию о решении. В данной работе находит дальнейшее развитие адаптивный способ вычислительных экспериментов [1–8] оценки погрешности решения и выбора параметра регуляризации  $\alpha$  решения некорректных задач методом регуляризации



Тихонова. Данный способ учитывает дополнительную информацию об искомом решении (оценку количества максимумов, их абсцисс и ординат и т. д.) и напоминает такие методы, как метод  $\alpha$ -регуляризации Тихонова с ограничениями на решение [9], решение на компакте [4, 9], методы дескриптивной регуляризации [10], также учитывающие априорную информацию о решении (неотрицательность, монотонность, выпуклость, параметры экстремумов и др.). Однако конкретная реализация способа вычислительных экспериментов отличается от перечисленных методов использованием модельных (обучающих) примеров, позволяющих выбрать параметр регуляризации и получить оценку погрешности решения.

**Основные соотношения.** Рассмотрим операторное уравнение I рода

$$Ay = f, \quad y \in Y, \quad f \in F, \quad (1)$$

где  $y$  – искомый, а  $f$  – заданный элементы гильбертовых пространств  $Y$  и  $F$ ;  $A$  – линейный ограниченный оператор из  $Y$  в  $F$ . Оператор  $A$  не предполагается непрерывно обратимым, т. е. задача решения уравнения (1) является некорректной. Однако при точном  $f$  уравнение (1) будем считать разрешимым. Ставится задача определения элемента  $y \in Y$  с наименьшей нормой, доставляющего минимальное значение невязке  $\|Ay - f\|_F$ , который является псевдорешением, в частности, нормальным решением [4, 9].

В методе регуляризации Тихонова 0-го порядка [4, 9, 11–13], дающем эффективный способ получения псевдорешений, вместо (1) решается уравнение

$$(\alpha E + \tilde{B}) y_\alpha = \tilde{A}^* \tilde{f}, \quad (2)$$

где  $\tilde{A} = A + \Delta A$ ,  $\tilde{f} = f + \Delta f$ ,  $y_\alpha = y + \Delta y_\alpha$ , причем  $A$ ,  $f$  и  $y$  – точные оператор и элементы;  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{f}$  и  $y_\alpha$  – их практические значения;  $\Delta A$ ,  $\Delta f$  и  $\Delta y_\alpha$  – их погрешности;  $\alpha > 0$  – параметр регуляризации;  $\tilde{B} = \tilde{A}^* \tilde{A}$ ;  $E$  – единичный оператор.

**Оценка погрешности решения.** Рассмотрим вопрос об оценке погрешности  $\Delta y_\alpha$  регуляризованного решения  $y_\alpha$  и о выборе параметра регуляризации  $\alpha$ . Учитывая соотношение  $\tilde{A}^* A y = \tilde{A}^* f$ , вытекающее из (1), а также соотношения (2) и (3), получим:

$$(\alpha E + \tilde{B}) \Delta y_\alpha = -(\alpha E + \tilde{A}^* \Delta A) y + \tilde{A}^* \Delta f$$

или

$$\Delta y_\alpha = (\alpha E + \tilde{B})^{-1} \tilde{A}^* (\Delta f - \Delta A y) - \alpha (\alpha E + \tilde{B})^{-1} y,$$

откуда найдем следующие оценки по норме абсолютной и относительной погрешностей регуляризованного решения:

$$\begin{aligned} \|\Delta y_\alpha\| &\leq \|(\alpha E + \tilde{B})^{-1} \tilde{A}^*\| \cdot (\|\Delta f\| + \|\Delta A\| \cdot \|y\|) + \alpha \|(\alpha E + \tilde{B})^{-1}\| \cdot \|y\|, \\ \frac{\|\Delta y_\alpha\|}{\|y\|} &\leq \|(\alpha E + \tilde{B})^{-1} \tilde{A}^*\| \cdot \left( \frac{\|\Delta f\|}{\|y\|} + \|\Delta A\| \right) + \alpha \|(\alpha E + \tilde{B})^{-1}\|. \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая, что  $\|A\| \cdot \|y\| \geq \|f\|$  или  $1/\|y\| \leq \|A\|/\|f\|$ , получим оценку (4) относительной погрешности регуляризованного решения в виде:

$$\sigma_{\text{rel}}(\alpha) \equiv \frac{\|\Delta y_\alpha\|}{\|y\|} \leq \|(\alpha E + \tilde{B})^{-1} \tilde{A}^*\| \cdot \|A\| (\delta_{\text{rel}} + \xi_{\text{rel}}) + \alpha \|(\alpha E + \tilde{B})^{-1}\|, \quad (5)$$

где

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}, \quad \xi_{\text{rel}} = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

– относительные погрешности правой части  $f$  и оператора  $A$ . Правая часть в (5) является верхней огибающей истинной относительной погрешности  $\sigma_{\text{rel}}(\alpha)$ . Первое слагаемое в правой части (5) обусловлено погрешностями данных, а второе – регуляризацией. В (5) имеем (ср. [14–17]):  $\|(\alpha E + \tilde{B})^{-1} \tilde{A}^*\| \leq 1/(2\sqrt{\alpha})$ , а норму  $\|(\alpha E + \tilde{B})^{-1}\|$  выразим через минимальное сингулярное число  $\mu$  симметричного положительно определенного оператора  $\alpha E + \tilde{B}$ :

$$\|(\alpha E + \tilde{B})^{-1}\| = 1/\mu_{\min}(\alpha E + \tilde{B}) = 1/(\alpha + \mu_{\min}(\tilde{B})).$$

Получим (ср. [14–17]):

$$\sigma_{\text{rel}}(\alpha) \equiv \frac{\|\Delta y_\alpha\|}{\|y\|} \leq \frac{\|\tilde{A}\|}{2\sqrt{\alpha}} \eta + \frac{\alpha}{\alpha + \mu_{\min}(\tilde{B})}, \quad (6)$$

где  $\eta = \delta_{\text{rel}} + \xi_{\text{rel}}$ . Однако оценка (6) (а также (5)) на практике может давать значительное завышение для  $\sigma_{\text{rel}}(\alpha)$ , поскольку в случае плохо обусловленных и некорректных задач  $\mu_{\min}(\tilde{B})$  близко или равно нулю и тогда (при  $\mu_{\min}(\tilde{B}) = 0$ )

$$\sigma_{\text{rel}}(\alpha) \equiv \frac{\|\Delta y_\alpha\|}{\|y\|} \leq \frac{\|\tilde{A}\|}{2\sqrt{\alpha}} \eta + 1. \quad (7)$$

Оценка (7) является завышенной и не имеющей минимума по  $\alpha$ .

Для получения более эффективной оценки  $\sigma_{\text{rel}}(\alpha)$  сделаем *усечение снизу спектра оператора* (матрицы в дискретном случае)  $\tilde{B}$ , а именно, вместо  $\mu_{\min}(\tilde{B})$  используем некоторое значение  $g > \mu_{\min}(\tilde{B})$  и запишем (6) в виде:

$$\sigma_{\text{rel}}(\alpha) \equiv \frac{\|\Delta y_\alpha\|}{\|y\|} \leq \varepsilon(\alpha), \quad (8)$$

где

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{\|\tilde{A}\|}{2\sqrt{\alpha}} \eta + \frac{\alpha}{\alpha + g}. \quad (9)$$

В работах [1, 2, 4] показано, что функция  $\varepsilon(\alpha)$  согласно (9) имеет (единственный) минимум при условии

$$\frac{\|\tilde{A}\|}{\sqrt{g}} \eta < \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.30. \quad (10)$$

Из условия  $\varepsilon'(\alpha) = 0$  получим нелинейное уравнение относительно  $\alpha$ :

$$\alpha = \left( \frac{\|\tilde{A}\| \eta}{4g} \right)^{2/3} (\alpha + g)^{4/3}. \quad (11)$$

Можно показать, что в этом случае  $\varepsilon''(\alpha) > 0$ , т. е. (11) соответствует минимуму функции  $\varepsilon(\alpha)$ . Согласно соотношениям (8) и (9), оценка относительной погрешности  $\|\Delta y_\alpha\|/\|y\|$  регуляризованного решения  $y_\alpha$  зависит от  $\tilde{A}$  и  $\eta$  (точнее, от произведения  $\|\tilde{A}\| \eta$ ). Поэтому, если решается несколько примеров (например, обрабатывается несколько спектров) с одинаковыми  $\tilde{A}$  и  $\eta$  (аппаратной функцией – АФ и шумами), то для них оценки погрешности (9) будут одинаковыми и незавышенными (в функции  $\alpha$ ).

Отсюда следует, что при решении некоторого исходного примера  $P$  (т. е. при обработке  $\tilde{f}_P$ ) с неизвестным решением (спектром)  $y_P$  можно использовать результаты решения другого, модельного, обучающего примера  $Q$  с известным (заданным) точным решением (спектром)  $y_Q$ , причём с такими же  $\tilde{A}$  и  $\eta$ , что и в примере  $P$ . При этом при решении примера  $Q$  можно рассчитать функцию  $\sigma_{\text{rel}}(\alpha)_Q = \|\Delta y_{\alpha Q}\|/\|y_Q\|$  и по ней найти  $\alpha_{\text{opt}Q}$  – оптимальное значение  $\alpha$ , при котором  $\sigma_{\text{rel}}(\alpha)_Q = \min_{\alpha}$ . Это значение  $\alpha_{\text{opt}Q}$  может быть использовано при решении исходного примера (спектра)  $P$ .

**Оценки параметров  $\alpha$  и  $g$ .** В работе [11] для определения  $\alpha$  и  $g$  предложен *аналитический способ*: приравнивая  $\sigma_{\text{rel}}(\alpha)$  и  $\varepsilon(\alpha)$ , а также учитывая условие  $\varepsilon'(\alpha) = 0$ , получим систему двух нелинейных уравнений относительно  $\alpha$  и  $g$ , решаемую (сходящимися) итерациями.

Однако задачу удобнее решать *графически* путем подбора такого значения  $g$ , при котором огибающая  $\varepsilon(\alpha)$  касается кривой (или набора кривых)  $\sigma_{\text{rel}}(\alpha)_Q$  (см. далее рис. 2). Значение  $\alpha$ , соответствующее точке касания, обозначим через  $\alpha_g$ . Для повышения эффективности данного способа при

составлении модельного примера  $Q$  (или нескольких примеров) нужно использовать дополнительную информацию об исходном примере (спектре)  $P$ , а именно, оценку количества максимумов (спектральных линий) в искомом решении (спектре)  $y_P$ , соотношений их интенсивностей, значений их абсцисс (длин волн или частот), тип ядра (АФ) и т. д. Использование такой информации позволит более точно выбрать параметр регуляризации  $\alpha$  и оценить погрешность решений примеров (спектров)  $Q$  и  $P$ .

Способ моделирования порождает *регуляризирующий алгоритм* (РА), так как при  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\alpha = o(\eta^2)$  и конечных  $\|\tilde{A}\|$  и  $g$  для исходного и модельного примеров имеем согласно (8) и (9) (ср. [2, 4]):

$$\sigma_{\text{rel}}(\alpha) \equiv \frac{\|\Delta y_\alpha\|}{\|y\|} \rightarrow 0,$$

т. е. при нулевых погрешностях исходных данных решение  $y_\alpha$  переходит в точное решение (нормальное псевдорешение).

**Замечание 1.** Хотя способ моделирования (обучения) требует больших затрат для моделирования обучающих примеров, он весьма эффективен, когда требуется решить значительное количество “близких” примеров: разрешение сигналов для ряда моментов времени, восстановление нескольких спектров в обратной задаче спектроскопии и т. д. Кроме того, способ моделирования позволяет на ряде обучающих примеров исследовать возможности метода (реальная погрешность решения, восстановление тонкой структуры решения и т. д.).

**Замечание 2.** Может возникнуть возражение, что в силу некорректности задачи даже малые отличия модельного примера от исходного могут привести к значительным отличиям параметра регуляризации  $\alpha$ , относительной погрешности решения  $\|\Delta y_\alpha\|/\|y\|$  и т. д. Однако, во-первых, задача решается устойчивым методом регуляризации, а во-вторых, соотношения (8) и (9) показывают, что оценки погрешности решений  $\|\Delta y_\alpha\|/\|y\|$  одинаковы для исходного и модельного примеров при условии одинаковости  $\|\tilde{A}\| \eta$ .

**Пример из спектроскопии.** Проиллюстрируем вышеизложенный способ моделирования, или обучения примером из обратной задачи спектроскопии (ср. [8, 11]). Ставится задача восстановить спектр путём решения интегрального уравнения Фредгольма I рода (некорректная задача):

$$Ay \equiv \int_a^b K(\lambda, \lambda') y(\lambda') d\lambda' = f(\lambda), \quad c \leq \lambda \leq d, \quad (12)$$

где  $K(\lambda, \lambda')$  – аппаратная функция (АФ) спектрального прибора,  $y(\lambda')$  – истинный (искомый) спектр,  $f(\lambda)$  – измеренный спектр,  $\lambda$  – длина волны. Полагаем, что вместо точных  $f$  и  $K$  известны  $\tilde{f}$  и  $\tilde{K}$  такие, что  $\|\tilde{f} - f\| \leq \delta$ ,  $\|\tilde{A} - A\| \leq \xi$ . Уравнение (12) решаем методом регуляризации Тихонова согласно (2) при  $A^* = A^T$  с помощью программ, разработанных на MatLab.

Сначала рассмотрим *исходный пример* – оригинал  $P$  (рис. 1). У него известен лишь зашумленный измеренный спектр  $\tilde{f}(\lambda)$ ,  $c \leq \lambda \leq d$ ,  $c = 450$  нм,  $d = 650$  нм,  $h = \Delta\lambda = \text{const} = 1$  нм – шаг дискретизации,  $n = (d - c)/h = 200$  – число шагов по  $\lambda$ . Использована дисперсионная АФ [8, 11]:

$$K(\lambda, \lambda') = \frac{w(\lambda)/2\pi}{(\lambda - \lambda')^2 + [w(\lambda)/2]^2}, \quad (13)$$

где  $w(\lambda) = q\lambda$  – ширина АФ по уровню 0.5, причём  $q = 0.015$  [8, 11]. На рис. 1 представлена АФ  $K(\lambda, \lambda')$  (13) при  $\lambda = 485$  нм и  $\lambda = 620$  нм.

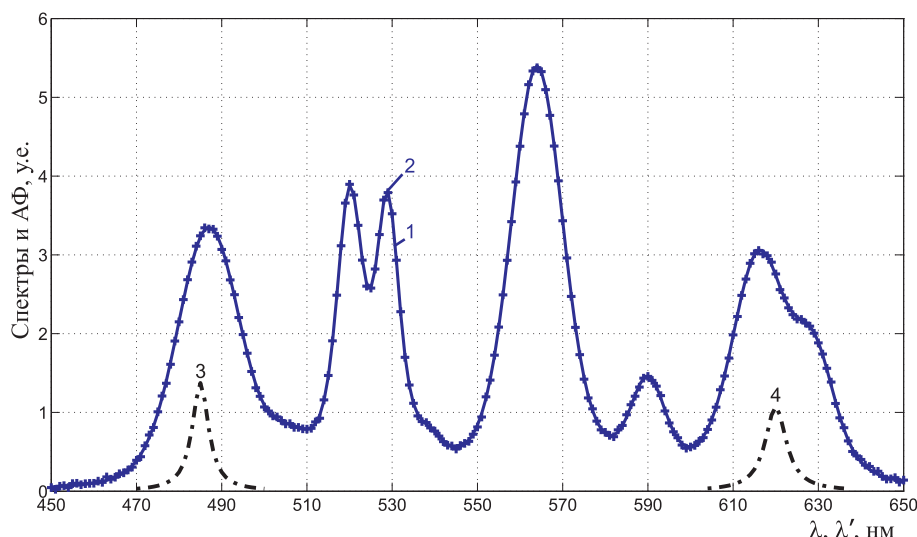


Рис. 1. Пример  $P$ . 1 – спектр  $f(\lambda)$  без шума; 2 – спектр  $\tilde{f}(\lambda)$  с шумом; два сечения АФ: 3 –  $10K(485, \lambda')$  и 4 –  $10K(620, \lambda')$ .

Из рис. 1 можно заключить, что при  $\lambda \approx 525$  нм и  $\lambda \approx 620$  нм искомый спектр имеет по две близких линии, но они слабо разрешились в  $f(\lambda)$ . Кроме того, по-видимому, при  $\lambda \approx 507$  нм и  $\lambda \approx 543$  нм имеются ещё по одной слабой линии. Таким образом, в спектре  $y(\lambda)$  имеется не менее девяти спектральных линий, хотя в измеренном спектре  $f(\lambda)$  их наблюдается меньше (6 или 7).

Было смоделировано несколько “близких” к оригиналу  $P$  примеров  $Q$ , истинные спектры которых содержат от 8 до 10 спектральных линий (в виде гауссиан) (ср. [3, 8, 11]). В  $f$  и  $K$  модельных примеров были внесены погрешности с разбросом значений  $\delta$  и  $\xi$  (поскольку  $\delta$  и  $\xi$  известны неточно).

Модельные примеры  $Q$  были решены методом квадратур с регуляризацией Тихонова согласно (2) при АФ (13) для ряда значений параметра регуляризации  $\alpha$ . Была рассчитана зависимость относительной погрешности регуляризованных решений  $y_\alpha(\lambda) = y_{\alpha Q}(\lambda)$  по отношению к точным решениям  $y(\lambda) = y_Q(\lambda)$ :

$$\sigma_{\text{rel}}(\alpha) = \frac{\|y_\alpha(\lambda) - y(\lambda)\|}{\|y(\lambda)\|}.$$

На рис. 2 представлены зависимости  $\sigma_{\text{rel}}(\alpha)_Q$  для ряда модельных примеров и ряда значений погрешностей  $\delta_{\text{rel}} = \delta/\|f\|$  и  $\xi_{\text{rel}} = \xi/\|A\|$  (область между кривыми 1 и 2).

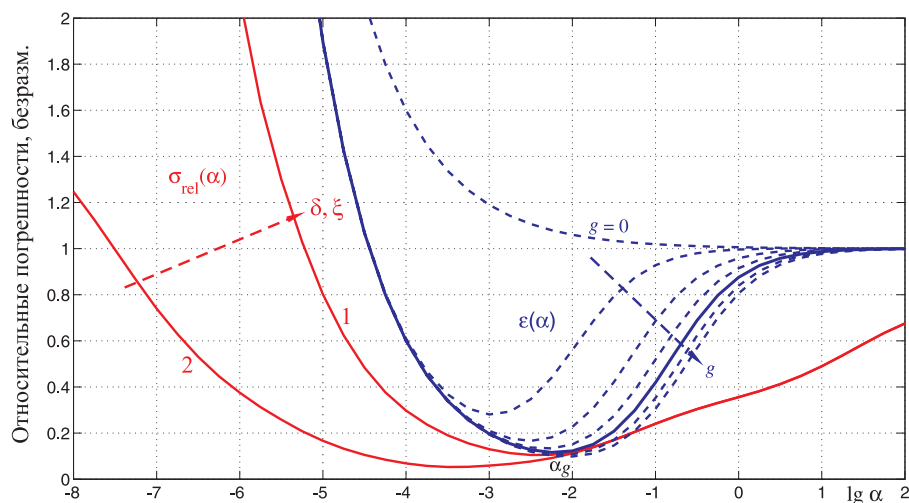


Рис. 2. Модельные примеры  $Q$ . Относительные погрешности  $\sigma_{\text{rel}}(\alpha)$  (1 и 2 — ограничения сверху и снизу) и огибающие  $\varepsilon(\alpha)$  при различных  $g$ .

На рис. 2 представлено также несколько огибающих  $\varepsilon(\alpha)$  согласно (9) для ряда значений  $g$ . Выбрано то значение  $g$ , при котором выполняется условие (10) и одна из кривых  $\varepsilon(\alpha)$  касается набора кривых  $\sigma_{\text{rel}}(\alpha)$ , а именно,  $g = 0.045$ . Этому соответствует значение параметра регуляризации  $\alpha = \alpha_g = 10^{-2.2}$ . Из рис. 2 видно, что несмотря на разброс кривых  $\sigma_{\text{rel}}(\alpha)$  и  $\varepsilon(\alpha)$ , значение  $g$  и, как следствие,  $\alpha$  оценивается надёжно.

На рис. 3 приведено решение  $y_{\alpha_g P}(\lambda)$ . Видно, насколько точно восстановился спектр: разрешились близкие линии и выделились слабые линии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-08-00442).

## Список литературы

- [1] Сизиков В. С. О моделировании некоторых некорректных задач с использованием принципов подобия // Электронное моделирование. 1981.

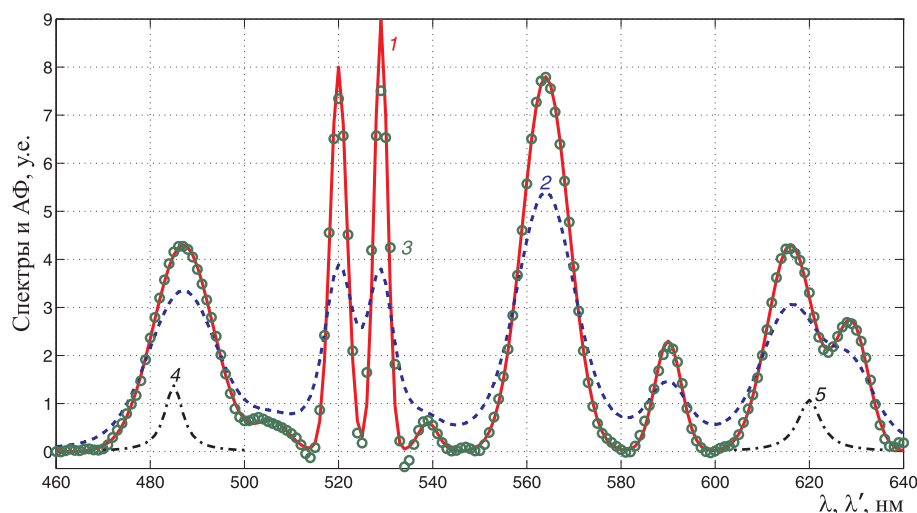


Рис. 3. Пример  $P$ . 1 — истинный спектр  $y_P(\lambda)$ ; 2 — измеренный спектр  $f_P(\lambda)$ ; 3 — восстановленный спектр  $y_{\alpha_g P}(\lambda)$ ; 4 и 5 — два сечения АФ.

№ 6. — С. 3–8.

- [2] Сизиков В. С. Обобщенный метод редукции измерений. I. Тональная обработка // Электронное моделирование. 1991. Т. 13. № 4. — С. 7–14.
- [3] Сизиков В. С. Обобщенный метод редукции измерений. III. Результаты численного моделирования // Электронное моделирование. 1991. Т. 13. № 6. — С. 3–9.
- [4] Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — Киев: Наук. думка, 1986. — 544 с.
- [5] Сизиков В. С. Обратные прикладные задачи и MatLab. — СПб.: Лань, 2011. — 256 с.
- [6] Сизиков В. С. Интегральные уравнения и MatLab в задачах томографии, иконки и спектроскопии. — СПб.-Saarbrücken: LAP, 2011. — 252 с.
- [7] Верлань А. Ф., Сизиков В. С., Мосенцова Л. В. Метод вычислительных экспериментов для решения интегральных уравнений в обратной задаче спектроскопии // Электронное моделирование. 2011. Т. 33. № 2. — С. 3–12.
- [8] Сизиков В. С., Кривых А. В. Восстановление непрерывных спектров методом регуляризации с использованием модельных спектров // Оптика и спектроскопия. 2014. Т. 117. № 6. — С. 1040–1048.
- [9] Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990. — 232 с.
- [10] Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. — Новосибирск: Наука, 1984. — 240 с.

- [11] Sizikov V. S., Stepanov A. V. Method of training examples in solving inverse ill-posed problems of spectroscopy // Sci. Techn. J. ITMO. 2015. Vol. 15. № 6. – P. 1147–1154.
- [12] Petrov Yu. P., Sizikov V. S. Well-Posed, Ill-posed, and Intermediate Problems. – Leiden-Boston: VSP, 2005. – 234 p.
- [13] Леонов А. С., Ягола А. Г. Адаптивные оптимальные алгоритмы решения некорректных задач с истокообразно представимыми решениями // ЖВМиМФ. 2001. Т. 41. № 6. – С. 855–873.
- [14] Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 199 с.
- [15] Kojdecki M. A. New criterion of regularization parameter choice in Tikhonov's method // Biuletyn WAT (Biul. Mil. Univ. Technol.). 2000. Vol. 49. № 1(569). – P. 47–126.
- [16] Сизиков В. С. О способах невязки при решении некорректных задач // ЖВМиМФ. 2003. Т. 43. № 9. – С. 1294–1312.
- [17] Sizikov V. S. Further development of the new version of a posteriori choosing regularization parameter in ill-posed problems // Intern. J. Artificial Intelligence. 2015. Vol. 13. № 1. – P. 184–199.

## ВИРТУАЛЬНЫЙ РЕСУРСНЫЙ ЦЕНТР ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Флегонтов А. В., Фомин В. В., Носкова Т. Н.

Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: aflegontoff@herzen.spb.ru, V\_V\_Fomin@mail.ru,

Noskovatn@gmail.com

**Flegontov A. V., Fomin V. V., Noskova T. N. Virtual Resource Center for Intelligent Information Technologies.** Develops information technology of the virtual space of the university, including those aimed at solving local problems and integrated organization, monitoring, forecasting of training and educational and research process, combined unified methodology of intelligent human-computer interaction.

Разрабатываются информационные технологии виртуального пространства вуза, в том числе ориентированные на решение интегральных и локальных задач организации, мониторинга, прогнозирования



учебно-образовательного и научно-исследовательского процесса, объединенные единой методологией интеллектуального человеко-машинного взаимодействия.

## 1. Введение.

Большую часть прикладных работ НИР по тематике “Информационные технологии моделирования и управления виртуальным пространством вуза”<sup>1</sup> института компьютерных наук и технологического образования [11, 12], занимает проект и разработка виртуального ресурсного центра.

Значительная часть задач ресурсного центра решается в рамках концепции виртуальной компьютерной лаборатории, в том числе:

- освоение сложного сетевого программного обеспечения, развертывание и настройка программного обеспечения, а также его использования на проблемно-ориентированных практических примерах, позволяющих формировать профессиональные компетенции и развивать конструктивное, аналитическое и системное мышление обучающихся;

- внедрение в практику учебного процесса университета открытых продуктов и информационных технологий для профильных предметов, специальностей и направлений подготовки выпускников;

- выполнение практических заданий в рамках лабораторных и практико-ориентированных занятий студентов, занятий по повышению квалификации;

- предоставление возможности удаленного использования программного обеспечения и другого программного обеспечения, используемого в учебном процессе, для самоподготовки;

- организация научно-исследовательских проектов, с привлечением потенциала коммерческих предприятий в различных секторах экономики, производства, промышленности.

Основные преимущества виртуального ресурсного центра:

- снижение затрат на приобретение и эксплуатацию дорогостоящего оборудования;

- возможность моделирования процессов, постановка и проведение экспериментов которых невозможно в силу естественных натуральных или ресурсных ограничений;

---

<sup>1</sup>Работа ведется при поддержке МинОбрНауки. Гос. задание № 2014/376, годовой этап 2015 г. № 1028, № госрегистрации 114041750020

- применение в полном объёме средств и компьютерного оборудования виртуальной реальности, повышение когнитивных функций: наглядность визуализации, управляемость, масштабируемость во времени и др.;
- экономия времени и ресурсов для ввода, формирования и хранения результатов, использование и подключение к проведению и уточнению экспериментов репозитория, банков данных, информационных фондов интернета;
- повышение контроля и безопасности, точности и надёжности моделирования, интеграция с мощным аппаратом электронного обучения, в том числе обучающими, поясняющими, советующими технологиями экспертных систем;
- использование потенциала алгоритмов искусственного интеллекта, в том числе семантического поиска, интеллектуального анализа, нейросетевые технологии и т. д.;
- использования виртуальной лаборатории в дистанционном обучении.

В рамках решения прикладных задач виртуального ресурсного центра были исследованы множество методов и моделей интеллектуального анализа данных [6, 7], машинного обучения и распознавания образов [1], их развития и использования на современной платформе WEB-систем и Internet-технологий [2, 5, 13]. На данном этапе НИР приоритет отдаётся практическим программным разработкам, основанным на моделировании искусственных нейронных сетей [3, 8], концепциях экспертных систем (байесовские сети доверия), системах обнаружения закономерностей (методах решающих функций) [1], алгоритмах текстового поиска [9], процедур извлечения и формирования тестов из обучающих текстовых материалов [4] и т. д.

Кратко охарактеризуем достигнутые результаты по вышеперечисленным направлениям разработки.

## **2. Моделирования искусственных нейронных сетей.**

Важнейшим направлением развития интеллектуальных систем является теория искусственных нейронных сетей ИНС. В настоящее время нейронные сети решают задачи классификации, распознавания образов, принятия решений, кластеризации, прогнозирования и сжатия данных.

В практике применения искусственных нейронных сетей возникает ряд научно-технических проблем, в том числе: большое разнообразие различных моделей нейронных сетей и алгоритмов их обучения, высокая требовательность к вычислительным ресурсам, сложная интерпретируемость результа-

тов моделирования и структуры ИНС.

**2.1. Программа моделирования нейронной сети на базе алгоритма обратного распространения ошибки для многослойного персептрона.** На данном этапе развития разработан прототип WEB-инструментария моделирования ИНС в виде автономной Java-программы, реализующей концепцию алгоритма обратного распространения ошибки для многослойного персептрона [8]. Целевая задача – создание эффективного в эксплуатации программного решения для обучения студентов ИНС и как отдельного модуля интеллектуального анализа данных.

**2.2. Моделирование многослойного персептрона для распознавания рукописных символов.** Программный продукт реализует алгоритм моделирования искусственной нейронной сети, для возможности распознавания рукописных символов. Программа предназначена для эксплуатации в виде учебно-лабораторного инструмента по курсу «искусственные нейронные сети», но также может выступать как отдельный компонент и/или инструмент интеллектуального анализа. Платформа DotNET делает возможным использовать программу в виде настольного приложения и в виде WEB-приложения с поддержкой многопользовательского режима.

**2.3. Применения нейронных сетей в современных встраиваемых системах на базе микроконтроллеров.** Проведён анализ возможностей применения нейронных сетей на базе измерительных приборов, снабжённых микроконтроллерами [3]. Исследованы преимущества, ограничения и недостатки применения ИНС на предмет практического внедрения данной технологии в промышленные изделия, и перспективы коммерческой эксплуатации.

### **3. WEB-инструментарий машинного обучения.**

Технологии интеллектуальных информационных систем (ИИС) [2, 7] находятся на пике исследовательской активности, практики их прикладного применения и коммерциализации, и широко вошли в повседневную деятельность разных областей промышленности, экономики, медицины и др.

Сложность проблем эффективного применения, использования, внедрения интеллектуальных технологий определяет сложность подходов к классификации задач искусственного интеллекта и решается в рамках различных направлений исследований, основанных на близких моделях, методах и

алгоритмах. К таким исследованиям относятся: машинное обучение, распознавание образов, машинный перевод, интеллектуальный анализ данных и др.

Разработано web-ориентированное инструментальное средство по распознаванию образов в идее расширяемой библиотеки методов на основе прецедентов [1]. Реализуемая архитектура инструментария позволяет решать задачу повышения эффективности вычислительных ресурсов через процедуры настройки структуры подключаемых методов и алгоритмов обработки данных и реконфигурирования подключаемых технических вычислительных средств Internet-сети. Создаваемая WEB-систем с закладываемыми в неё аппаратно-программными, алгоритмическими и техническими решениями, обладает высокой степенью коммерческой перспективы и потенциально востребована в различных областях человеческой деятельности.

#### **4. Облачная систем принятия решений на основе байесовской сети доверия.**

Облачная система принятия решений на основе байесовской сети доверия (ОСПР) представляет собой клиент-серверное программное решение для создания, обучения и вычисления байесовских сетей. Клиентская часть реализована в виде WEB-приложения, которое включает в себя визуальный редактор вероятностных моделей и команды для оперирования вычислениями. Всю нагрузку, связанную с вычислительными задачами на байесовских сетях, берет на себя серверная часть. При высоких нагрузках сервер масштабирует вычислительные задачи по дочерним узлам. Тип ЭВМ: IBM-совместимая. Язык, СУБД, инструментарий разработки: C#, TypeScript, T-SQL, ASP.NET, MSSQLServer 2012.

Выбор байесовских сетей доверия в качестве оболочки разработки экспертных систем (ЭС) по сравнению с другими направлениями их построения обусловлен рядом причин.

1. Логический вывод в байесовских сетях доверия является алгоритмически апробированным и практически реализуемым с вычислительной точки зрения.

2. Теория, лежащая в основе байесовских сетей и отработанная в течение последних десятилетий, имеет формальное обоснование и развитый математический аппарат.

3. Логика построения байесовских сетей совпадает с естественными человеческими моделями рассуждений (индукция, дедукция), что позволяет психологически проще управлять процессом построения сетей и выполнять субъективное вероятностное оценивание причинно-следственных связей.

4. Обеспечивает эффективное вычисление условных вероятностей.

Система ОСПР разрабатывается как система инструментов, позволяющая построить модель на основе системы поддержки принятия решений в областях, характеризующихся свойствами неопределенности. Она имеет развитый графический интерфейс и позволяет создавать, хранить, редактировать базы знаний и фактов, проводить расчёты (моделирование). В ОСПР закладываются все основные функции информационной системы, включая такие как: импорт, ввод, редактирование и хранение данных, документирование, диагностика ошибок в работе и т. д.

Система ОСПР представляет собой Web-программное обеспечение для создания, развертывания и анализа интеллектуальных решений управления знаниями.

## **5. Клиент-серверная организация работы системы тестирования знаний с функцией автогенерации тестовых заданий.**

В рамках проводимых прикладных и научных исследований НИР, одним из приоритетных направлений работ было определено развитие методов и технологий на основе алгоритмов обработки текстов. В соответствии с выделенным направлением был создан алгоритм автогенерации тестовых заданий из текстовых данных и по нему на языке высокого уровня была разработана Internet-программа тестирования знаний с функцией автогенерации тестовых заданий [4].

В данный момент работа над программой направлена на расширение пользовательских возможностей и на увеличение быстродействия программы, использующей алгоритм автогенерации тестовых заданий посредством расширения локальной программы до крупной информационной системы тестирования знаний. Обозначенная система состоит из следующих компонентов: 1) автоматизированное рабочее место преподавателя; 2) автоматизированное рабочее место обучающегося; 3) база данных; 4) рабочее место администратора системы.

В ходе работы над созданием системы средствами PostgreSQL была раз-

работана база данных, обеспечивающая хранение данных, необходимых для полного функционирования разрабатываемой системы тестирования знаний. База данных включает в себя следующие схемы данных: учебные материалы и тестовые задания; занятия по дисциплинам и преподаватели занятий; учебные группы, учащиеся и их результаты обучения; сетевая конфигурация системы.

Систем позволяет производить полный цикл автоматизированного обучения по произвольным дисциплинам: ознакомление обучающихся с учебными материалами по дисциплинам и контроль усваиваемых знаний. Уникальностью данной системы является внедрение в неё алгоритма автогенерации тестовых заданий с произвольных текстовых учебных материалов, представленных в широком диапазоне форматов документов.

На данный момент алгоритм позволяет генерировать тестовые задания с выбором одного правильного ответа из предложенных вариантов из текстовых материалов с определенной структурой составления, не содержащих формул. В дальнейшем работа будет направлена на увеличение типов генерируемых заданий и на создание алгоритмов по работе с произвольными учебными материалами: с произвольной структурой и с наличием формул и изображений.

## **6. Организация контекстного поиска на основе модифицированного алгоритма Бойер–Мура.**

Поисково-текстовые методы и алгоритмы все больше акцентируют внимание на попытке использования небольшого, минимального арсенала теоретико-лингвистических изысков, и делают акцент на формальных методах статистической обработки упрощенных словоформ. Анализ словоформ предполагает использование алгоритмов поиска общего назначения для выполнения контекстного поиска. Среди алгоритмов контекстного поиска таких как, алгоритм Кнута–Мориса–Пратта, Бойер–Мура, Робина–Карпа, Ахо–Корасик, самым быстрым является алгоритм Бойер–Мура.

Сокращение времени выполнения алгоритма Бойер–Мура можно достигнуть путем организации параллельных вычислений в вычислительной системе или сети, в развитии «облачных вычислений». Для этого была проведена модификация алгоритма [9]. Модификация использует параллельные вычисления, а так же несколько простых функций для устранения недостатков параллельного выполнения алгоритма.

Для реализации алгоритма и проведения эксперимента с целью последующей оценки его эффективности и его параллельного выполнения была создана модель на объектно-ориентированном языке C++. Основные параметры оценки модели: время, затрачиваемое на исполнение алгоритма и количество символов в ключе. Результаты моделирования показали высокую эффективность модификации алгоритма Бойер–Мура при поиске подстроки в больших объемах данных. Модификация алгоритма сокращает время необходимое для поиска подстроки в строке, а при помощи предложенных мероприятий по устранению выявленных недостатков модификации алгоритма Бойер–Мура скорость выполнения алгоритма возрастает.

При моделировании и тестировании данной модификации было выявлено сокращение времени, необходимое для поиска подстроки в строке, среди большого объема информации. При поиске подстроки в строке среди незначительного объема информации, эффективность модификации несколько меньше, чем у оригинального алгоритма.

## 7. Обработка неточных темпоральных данных.

Потребность в проведении исследования вызвана отсутствием необходимых методов представления, алгоритмов извлечения, унифицированных процедур обработки и интерпретации нечётких темпоральных данных в современной инструментарии систем управления баз данных на предмет их использования в ситуациях неточно-временной информации [10]. Примерами таких систем являются:

1. Системы планирования. Фиксирование нечеткой временной информации в календаре или в планировщике задач на интервале времени или дат.
2. Фиксирование исторических неточных фактов или данных.
3. Системы прогнозирования
4. Последовательная цепочка выполнения задач системы, где каждый последующий процесс зависит от факта и времени выполнения предыдущего.

Темпоральные модели данных подразумевают временную сущность явлений, хранение динамики их движения и изменения по временной шкале. Важным преимуществом темпоральной модели является возможность хранения состояний данных в БД в любой момент времени как в прошлом, настоящем, так и в будущем. Использование данного подхода позволяет реализовать более гибкую логику обработки данных в предметных областях. Современ-

ные исследования направлены на изучение и построение различных моделей баз данных с опорой на эффективно развитый и используемый аппарат реляционных моделей данных. В общем случае, любой информации присуще изменение ее состояния во времени, не является исключением и нечеткая информация. Объект может переходить из одного нечеткого состояния в другое в один момент времени и возвращаться в прежнее состояние в другой момент, т. е. возможна так называемая «Темпоральная нечеткость». Аналогично темпоральная информация может быть полностью или неточно определена при возникновении событий в системе в различные моменты времени, т. е. возможна «Нечеткая темпоральность».

В проводимых исследованиях инициирован процесс рассмотрения и решения указанных проблем путем построения новой модели нечетко-темпорального домена и соответствующих типов данных для хранения возможно-временной информации, а также построения методов обработки нечетко-темпоральных отношений между временными точками и/или интервалами с реализацией соответствующих процедур и функций.

Разрабатывается библиотека процедур, дополняющая и расширяющая возможности языка SQL для обработки данных на базе реляционных моделей данных. Прорабатывается теории темпоральных моделей данных. В перспективе – разработка отдельного инструментария СУБД для работы с темпоральными базами данных.

## **8. Заключение.**

В рамках проводимой НИР, продолжаются научные исследования и практические разработки по ряду направлений, методов и алгоритмов искусственного интеллекта [11, 12]. Предложены программно-технические решения по прикладному применению в информационных системах и образовательных технологиях в рамках приоритетных направлений науки, в том числе: машинного обучения, экспертных систем, семантического поиска, искусственных нейронных сетей, темпоральных баз данных. Разработаны WEB ресурсы в развитие методологий облачных вычислений, обработки больших объемов данных, распределённых систем. Полученные математические и алгоритмические решения – основа разработки информационного, аналитического, программного обеспечения ресурсных центров. Модели, методы, модули, программы, прототипы ресурсных центров позволяют решать задачи оценки, обоснования и принятия решений в вопросах обучения, управления, мониторинга, про-



гнозирования в таких проблемных областях как учебно-образовательный и научно-исследовательский процессы.

## Список литературы

- [1] Александров И. В., Фомина И. К. Разработка web-инструментария для машинного обучения в области распознавания образов // Актуальные проблемы экономики и управления. 2015. № 4 (8). С. 133–137.
- [2] Лаптев В. В., Флегонтов А. В., Фомин В. В. Организация облачного ресурса интеллектуального анализа данных // Информатизация образования и науки. 2015. № 1 (25). С. 100–115.
- [3] Никольский Б. Б., Фомин В. В. Перспективы использования нейронных сетей во встраиваемых системах на примере спектроскопии // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. “Герценовские чтения – 2015”. – СПб: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 206–209.
- [4] Просенкова Ю. Б., Флегонтов А. В. Клиент-серверная организация работы системы тестирования знаний с функцией автогенерации тестовых заданий и информационная база, обеспечивающая обмен данными между компонентами системы // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2015”. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 216–220.
- [5] Флегонтов А. В., Фомин В. В., Лаптев В. В. WEB-инструментарий интеллектуального анализа данных // Учёные записки ИИО РАО. 2013. № 47. С. 32–47.
- [6] Флегонтов А. В., Фомин В. В. Систем интеллектуальной обработки данных // Известия РГПК им. А. И. Герцена. 2013. № 154. С. 41–48.
- [7] Фомин В. В., Миклуш В. А. Интеллектуальные информационные системы. – СПб.: РГГМУ, 2013. – 150 с.
- [8] Фомин В. В., Смирнов Е. М., Фомина И. К. Компьютерная программа моделирования искусственных нейронных сетей в облачных вычислениях // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2013. № 204. С. 181–190.
- [9] Фомина И. К., Осочкин А. А. Организация контекстного поиска на основе модифицированного алгоритма Бойер–Мура // Актуальные проблемы экономики и управления. 2015. № 3 (7). С. 86–90.

- [10] Jose Pons, Christophe Billiet, Olga Pons, Guy De Tre. Aspects of Dealing with Imperfect Data in Temporal Databases // Flexible Approaches in Data, Information and Knowledge Management. – Springer International Publishing, 2014, С. 189–220.
- [11] Лаптев В. В., Носкова Т. Н., Флегонтов А. В. Новые образовательные стратегии в современном информационном пространстве. РГПУ. ФИТ. – СПб, 2014. – 150 с.
- [12] Лаптев В. В., Носкова Т. Н., Флегонтов А. В., Гавронская Ю. Ю., Пиотровская К. Р. Высокотехнологичная информационная образовательная среда – синтез высоких образовательных технологий и Hi-Tech технологий // Региональная информатика – 2014. Материалы XIV Санкт-Петербургской Международной конференции. 2014. – С. 347.
- [13] Костюк А. В., Бобонец С. А., Флегонтов А. В., Черных А. К. Информационные системы и технологии. Информационные технологии. Базовый курс. Часть 1. Учебник. – СПб: РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – 242 с.

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ АДАПТИВНОГО АВТОМАТИЗИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ

Чертовской В. Д.

Государственный университет морского и речного флота  
имени адмирала С. О. Макарова  
Санкт-Петербург

**Chertovskoy V. D. Computer Simulation for Adaptive Automated System of Production Management.** The possibility to use computer simulation for three-level adaptive automatized control system as the basis of building a real manufacturing system is considered.

Рассмотрены возможности компьютерного моделирования трехуровневой адаптивной автоматизированной системы управления как основы построения реальной производственной системы.

### Введение.

В работах [1, 2], теоретическая база которых отражена в [3], рассмотрены вопросы алгоритмического построения и локальной реализации нового класса адаптивных систем – многоуровневых автоматизированных интеллекту-

альных систем управления производством с оперативно меняющейся целью функционирования. Моделирование необходимо как для компьютерной отладки, так и для изучения свойств систем. Для этих систем более характерна сетевая структура, вопросы реализации которой изучаются в настоящей работе.

### **Постановка задачи.**

Исследуем структуру системы с серийным типом производства: руководство (уровень  $h = 3$ ) – диспетчер ( $h = 2$ ) – начальники цехов ( $h = 1$ ) – цехи ( $h = 0$ ).

Числовые данные могут быть получены из реальной системы (идентификации [3]) или путем генерации данных [1].

Изучение проведем в два этапа: моделирование отдельного структурного элемента системы; реализация системы в целом.

### **Решение задачи.**

**1. Моделирование отдельного структурного элемента.** Речь идет о моделировании как процесса планирования, так и процесса управления, для которых используются [3] задачи динамического линейного программирования (ДЛП), представляющего сочетание задачи известного статического программирования (СЛП) и совокупности дифференциальных (разностных) уравнений.

К методам моделирования элемента необходимо предъявить следующие требования.

1. Удобный ввод и вывод данных в табличной форме.
2. Высокая размерность исходных таблиц.
3. Количество выходных таблиц значительно.
4. Все таблицы должны иметь простой экраный доступ.
5. Наличие многих пользователей требует применения режима клиент–сервер.
6. Предпочтительно использование только одного вида программного продукта.
7. Потребность оперативной апробации системы алгоритмов.
8. Возможность оптимизации процессов планирования и управления.
9. Возможность формирования алгоритмических циклов в программе.

10. Простота построения интерфейса.
11. Распространенность используемого программного пакета.
12. Простота интеграции программных продуктов.

В таблице представлены возможные классы методов и соответствие их сформулированным методам.

Номер класса	Используемые программные продукты	Требования, которым класс не удовлетворяет
1	InterBase + Delphi	5, 6, 9
2	InterBase и внешняя функция + Delphi	Сложность построения внешней функции
3	Delphi + MatLab	5, 6, 12
4	MatLab + Delphi	5, 6, 12
5	InterBase + Builder C++	5, 6, 9
6	InterBase и внешняя функция + Builder C++	Сложность построения внешней функции
7	Builder C++ + MatLab	5, 6, 12
8	MatLab + Builder C++	5, 6, 12
9	Denver (MySQL) + Apache	
10	Net Solver Foundation	

Из этой таблицы видно, что представляют интерес классы 2 и 6. Однако с позиций реализации системы наиболее предпочтительными являются классы 9 и 10. В силу этого их следует рассмотреть более детально.

**2. Системное моделирование.** Схема системы показана на рисунке. Администратор обеспечивает техническую часть работы модели. Преподаватель генерирует числовые данные и вводит их в базу данных, при этом выделяются традиционный (согласованный и несогласованный) и адаптивный.

После введения согласованного режима клиенты проверяют уровень согласованности работы. В несогласованном случае клиенты проводят согласо-

вание экономических интересов.

Адаптивный режим предполагает переход на выпуск новой продукции. Если руководитель определяет целесообразность перехода, остальные клиенты рассчитывают новые планы и проверяют их согласованность.

Во всех случаях полученные планы выводятся на экраны пользователей. Преподаватель имеет возможность их проверки.

Реализация схемы взаимодействия элементов возможна в локальном (без использования Internet) и глобальном (с применением Internet) вариантах.

Рассмотрим первый вариант, поскольку использование Internet во втором варианте требует серьезных дополнительных затрат в части тщательной алгоритмизации и особенно – в обеспечении безопасности.

Системная реализация связана с дополнительными требованиями.

1. Блочная реализация с применением внутренних интерфейсов, делегатов, позволяющих легко расширять вычислительные возможности и связи элементов.

2. Учёт связей элементов по вертикали и горизонтали

3. Простота реализации.

4. Связь с другими подсистемами и Internet.

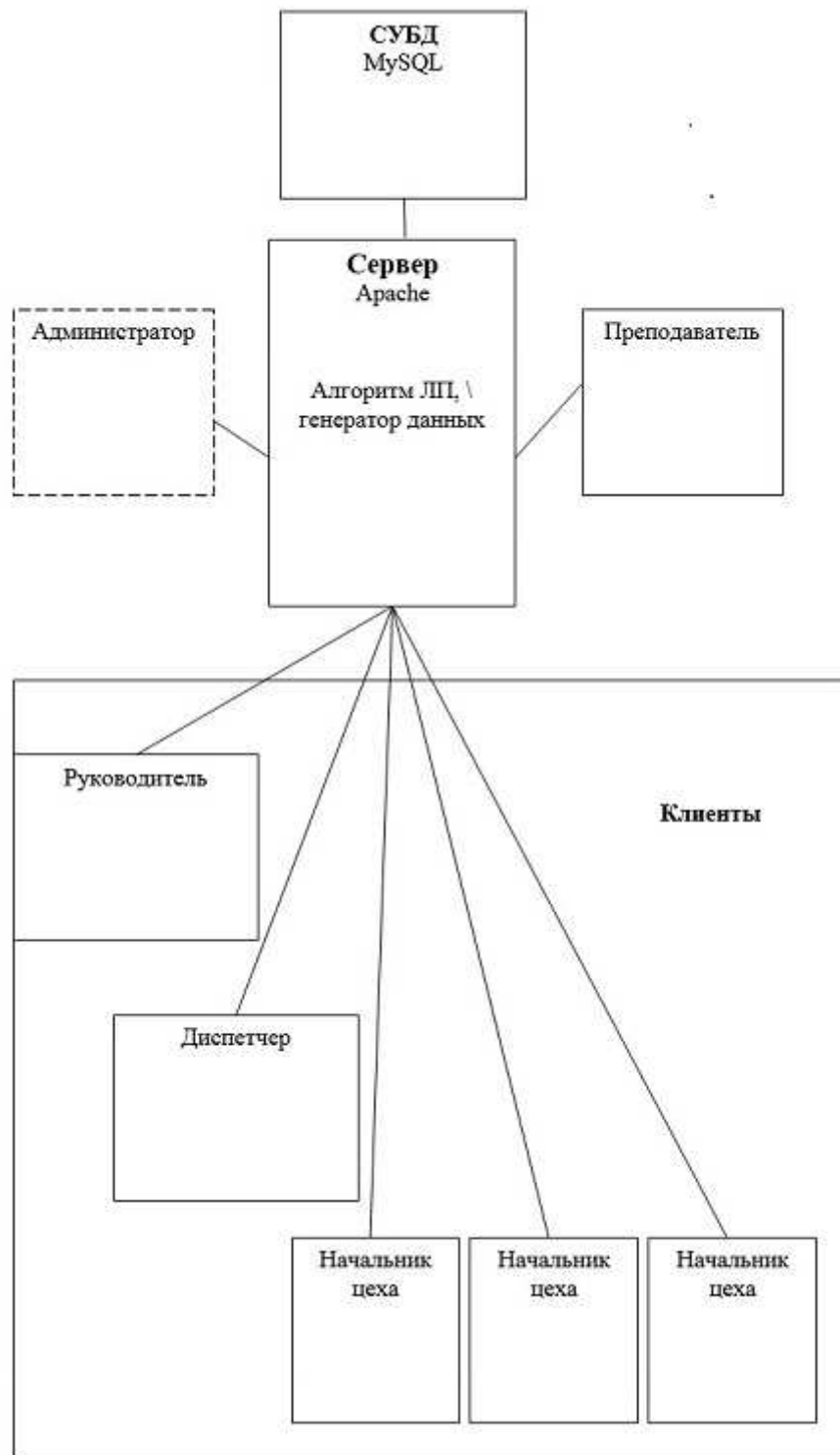
5. Необходимость стандартной программы оптимизационного алгоритма.

В соответствии с требованиями определяют 4 возможных способа реализации.

1. MySQL – Apache (+ php). 2. MySQL – ADO.NET. 3. Java – ASP.NET. 4. SQL Server – ADO.NET.

Некоторое предпочтение следует отдать первым трем способам, поскольку платформа ADO.NET специфична, особенно в ее усвоении. Отметим, что пятое дополнительное требование удачно реализовано в рамках языков C++ и Java. Использование языка Java дает преимущество в алгоритмической части, однако проигрывает в части хранения данных. СУБД MySQL (Denver) современнее и более тщательно апробирована ее разработчиками, чем СУБД SQL Server.

Автор по рейтингу предпочитает первый, а затем третий способы. Окончательный выбор способа определится в процессе программирования и изучения свойств модели.



### Заключение.

Показаны возможности исследования многоуровневых систем автоматизированного управления с помощью моделирования трёхуровневой системы. Сформулированы требования и осуществлен выбор методов моделирования.

## Список литературы

- [1] Чертовской В. Д. Решение обратной задачи линейного программирования // Труды LXVI международной конференции «Герценовские чтения–2013». – СПб.: РГПУ, 2013. – С. 276–279.
- [2] Чертовской В. Д. Трёхуровневая система адаптивного автоматизированного управления // Труды LXVII международной конференции «Герценовские чтения–2014». – СПб.: РГПУ, 2014. – С. 244–246.
- [3] Чертовской В. Д. Интеллектуализация автоматизированного управления производством. – СПб.: СПбГУ, 2007. – 164 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

### *История и современность*

Алексюк В. Н., Исаков В. Н., Попов В. А. Арешкин Георгий Яковлевич (к 100-летию со дня рождения) .....	3
Гушель Р. З. О некоторых родственниках академика А. Н. Колмогорова .....	11
Одинец В. П. Давид Фомич Харазов (к 100-летию со дня рождения) .....	21

### *Современные проблемы теории дифференциальных уравнений*

Аксенов А. В., Дружков К. П. Законы сохранения системы уравнений мелкой воды над неровным дном .....	29
Андреев В. К. Решение некоторых обратных задач для специальных движений вязкой жидкости .....	33
Бадюкина Т. Е., Бегматов А. Б., Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Юлдашев Н. Н. Многопараметрические бифуркационные задачи аэрогидроупругости .....	39
Бахматов А. Н., Коробейникова Н. И. Дискретное уравнение Шрёдингера для квантовой точки .....	44
Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Об одной обратной задаче тепломассообмена .....	50
Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Построение области экстремальных значений функционалов .....	56
Волосова Н. К., Вакуленко С. П., Волосов К. А. Контроль состояния железнодорожного полотна и уравнение Шрёдингера .....	61
Вязьмин А. В., Сорокин В. Г. Реакционно-диффузионные уравнения гиперболического типа с запаздыванием. Точные решения. Глобальная неустойчивость .....	69
Гайнетдинова А. А., Газизов Р. К. Интегрирование систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, инвариантных относительно четырёхмерных алгебр Ли операторов .....	78



<b>Гарипова Л. А., Кусюмов А. Н., Кусюмов С. А., Романова Е. В.</b> Моделирование акустического излучения несущего винта вертолѐта .....	<b>87</b>
<b>Жалова А. С., Зайцев В. Ф.</b> Смещение минимума потенциала электронного пучка в криволинейных координатах .....	<b>92</b>
<b>Зайцев В. Ф., Линчук Л. В.</b> Шесть новых факторизуемых классов ОДУ 2-го порядка .....	<b>96</b>
<b>Клебанов И. И., Иванов С. А., Старцун О. В.</b> Группы Ли, допускаемые уравнениями динамики идеальной самогравитирующей жидкости .....	<b>105</b>
<b>Лагодинский В. М.</b> Краевая задача для системы двух релятивистских уравнений Шрёдингера, описывающая реакцию между двумя нейтральными бесспиновыми частицами .....	<b>108</b>
<b>Миронов А. Н., Миронова Л. Б.</b> Инварианты Лапласа для одного класса уравнений с частными производными .....	<b>117</b>
<b>Сенашов С. И., Филюшина Е. В.</b> Интегральное представление решения обыкновенных дифференциальных линейной системы дифференциальных уравнений .....	<b>121</b>
<b>Созонтова Е. А.</b> К условиям разрешимости характеристической задачи в квадратурах для системы уравнений с кратным дифференцированием .....	<b>123</b>
<b>Созонтова Е. А.</b> Об условиях разрешимости задачи Гурса в квадратурах для системы уравнений $n$ -го порядка .....	<b>125</b>
<b>Stogniy V. I., Kovalenko S. S., Kopas I. N.</b> Symmetries of fundamental solutions of the Kramers equation .....	<b>128</b>
<b>Филатов О. П.</b> Модели измерения уровня жидкости .....	<b>131</b>
<b>Черемных Е. Н.</b> Решение задачи об однонаправленном термогравитационном движении вязкой жидкости в плоском канале .....	<b>133</b>
<i>Современные проблемы теории функций и функционального анализа</i>	
<b>Колдунов А. В.</b> Свойства абсолюта, порождённого нормой, и его канонического отображения .....	<b>138</b>
<b>Ловягин Ю. Н.</b> Минимальная теория множеств .....	<b>142</b>

Локоть В. В., Мартынов О. М. О точности оценки снизу проекционной константы $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$ .....	157
Рахимова А. И., Напалков В. В. Операторы в обобщённых производных .....	160
Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Специальные задачи для полиномов Бернштейна в комплексной области .....	166
<i>Актуальные проблемы математического образования</i>	
Букушева А. В. Связности с кручением и неголономная геометрия .....	175
Гарминович Н. А., Логинов А. В. Бинарная лекция в курсе “НОШКМ” как реализация междисциплинарных связей .....	180
Евсеева А. А. Организация олимпиадной подготовки учащихся основного (общего) образования на примере изучения принципа Дирихле .....	189
Журавлева О. И. Преимущество обучения математике в системе “школа–вуз” .....	194
Колдунов А. В. Изучение научных основ содержания школьного курса математики (алгебра) .....	198
Максимов Д. В., Рукшин С. Е. Математические олимпиады и становление профессионального математика, часть 2: о пользе олимпиад .....	202
Мельников Ю. Б. Обучение математическому моделированию на основе алгебраического подхода к построению модели .....	206
Петров Н. Г. Новый метод решения линейного дифференциального уравнения .....	214
Пименов Р. Р. Шахматный кружок в ФТШ им. Иоффе .....	219
Попов В. А. Проблемы преподавания математики в экономических вузах .....	223
Рукшин С. Е., Суслина М. Е. О некоторых проблемах обучения решению нестандартных задач, часть 2: о задачах на доказательство и пропедевтике геометрии .....	228
Сангалова М. Е. Средства развития и оценки компетенций при обучении математической логике .....	236

Светлаков А. Н., Кондратьева С. Ю. Применение распределений, отличных от нормального, в задачах обучения .....	243
Шабаета А. Ф., Шабает Р. Б. О повышении эффективности математического образования в вузе .....	245
<i>Актуальные информационные системы и технологии моделирования</i>	
Ампилова Н. Б., Соловьев И. П. Применение энтропийных характеристик в прикладных задачах динамических систем...	249
Кавин Б. В. Решения ряда проблем мониторинга автоматизированного диспетчерского контроля на железных дорогах России	254
Каспаров А. А., Конобеевский Е. С., Зуев С. В. Моделирование кинематики реакции $d + d \rightarrow p + p + n + n$ .....	257
Ловягин Н. Ю. О некоторых решениях, универсализирующих программное обеспечение для анализа свойств пространственного распределения изолированных нагруженных точек .....	261
Олейник А. Ю., Марлей В. Е., Макшанов А. В., Гарибин П. А., Ольховик Е. О. Мониторинг состояния гидротехнических сооружений на основе интернет-технологий и микроконтроллеров .....	265
Подорога А. В., Тихонов И. В. О предельных состояниях замкнутых транспортных потоков на кольцевой автодороге .....	271
Просенкова Ю. Б., Флегонтов А. В. Реализация средствами C++/Qt и PostgreSQL взаимодействия между компонентами автоматизированной системы тестирования знаний .....	279
Сизиков В. С., Кривых А. В., Степанов А. В. Использование модельных обучающих примеров при решении обратных некорректных задач .....	288
Флегонтов А. В., Фомин В. В., Носкова Т. Н. Виртуальный ресурсный центр интеллектуальных информационных технологий .....	296
Чертовской В. Д. Компьютерное моделирование системы адаптивного автоматизированного управления производством .....	306
Содержание .....	312