



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 1, 1997

Электронный журнал,
рег. № П23275 от 07.03.97

<http://www.neva.ru/journal>

<http://www.imop.csa.ru/diff>

e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

стохастические дифференциальные уравнения

УНИФИЦИРОВАННОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕЙЛОРА-ИТО

О.Ю.Кульчицкий

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29,
С.-Петербургский Государственный Технический Университет,
кафедра “Механика и процессы управления”,
e-mail: control1@citadel.stu.neva.ru

Д.Ф.Кузнецов

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29,
С.-Петербургский Государственный Технический Университет,
кафедра “Высшая математика”
e-mail: control1@citadel.stu.neva.ru

Аннотация

С помощью формул замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах в статье получено унифицированное разложение Тейлора-Ито. Это разложение содержит существенно меньшее число различных повторных стохастических интегралов, нежели разложение Тейлора-Ито в форме В.Вагнера и Е.Платена. Аппроксимация повторных стохастических интегралов является сложной теоретической и вычислительной

проблемой. Поэтому унифицированное разложение Тейлора-Ито может оказаться более удобным при численном решении стохастических дифференциальных уравнений, чем разложение Тейлора-Ито в форме В.Вагнера и Е.Платена.

1. Введение

Настоящая статья посвящена проблеме разложения процессов Ито в ряды Тейлора-Ито. Эта проблема является достаточно новой в теории случайных процессов, так как первые работы, посвященные ей, относятся к 70-80 годам (Мильштейн (1974), Вагнер и Платен (1978, 1982), Платен (1981,1982)). Разложение Тейлора-Ито, представляющее собой разложение гладкого безынерционного нелинейного преобразования решения стохастического дифференциального уравнения Ито в ряд по повторным стохастическим интегралам с использованием формулы Ито, было впервые получено и использовано в работах [3], [4] Вагнером и Платеном.

Настоящая статья посвящена построению, на основе результатов, полученных авторами в [7], [9], [11], [10] унифицированного разложения Тейлора-Ито. Поясним, что здесь имеется в виду. Дело в том, что повторные стохастические интегралы, входящие в разложение Тейлора-Ито из [3], [4], могут быть преобразованы к системе канонических повторных стохастических интегралов Ито меньшей кратности с полиномиальными подынтегральными функциями. Эти преобразования осуществляются в [7], [10] на основе формул замены порядка интегрирования для повторных стохастических интегралов Ито, полученных авторами [9], [11]. Результат, получающийся после приведения подобных слагаемых и является упомянутым выше унифицированным разложением Тейлора-Ито. Важно отметить, что коэффициенты унифицированного разложения Тейлора-Ито определяются рекуррентными соотношениями. Другой важной особенностью унифицированного разложения Тейлора-Ито является то, что оно содержит значительно меньшее количество различных повторных стохастических интегралов, нежели разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена [3], [4]. Для сравнения отметим, что унифицированное разложение Тейлора-Ито до членов третьего порядка малости содержит 12 различных повторных стохастических интегралов, в то время, как аналогичное разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена содержит 17 различных повторных стохастических интегралов. При этом, чем больше удерживается чле-

нов в разложении, тем существеннее проявляется это различие. Это преимущество унифицированного разложения Тейлора-Ито является особенно важным, поскольку аппроксимация повторных стохастических интегралов является сложной теоретической и вычислительной проблемой [5], [6], [8].

2. Определения и соглашения

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) вероятностное пространство, а $\mathbf{f}_t = \mathbf{f}(t, \omega) \in \mathfrak{R}^m$ измеримый в нем для всех $t \in [0, \infty)$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \dots, m$.

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0), \quad (1)$$

где $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t, \omega) \in \mathfrak{R}^n$ решение уравнения (1); функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \in \mathfrak{R}^n$ и $\Sigma(\mathbf{x}, t) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ многократно непрерывно дифференцируемы по обоим аргументам и удовлетворяют условиям существования и единственности в смысле стохастической эквивалентности решения уравнения (1).

Случайный процесс $g_t \in \mathfrak{R}^1$ будем называть неупреждающим к винеровскому процессу $\mathbf{f}_t \in \mathfrak{R}^m$ на $[a, b]$, если для любых моментов $\tau, t, s \in [a, b]$ таких, что $\tau \leq t < s$ значения процесса g_τ стохастически независимы с приращениями $\mathbf{f}_s^{(i)} - \mathbf{f}_t^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$).

Будем говорить, что процесс g_t непрерывен в среднем степени m на $[a, b]$ если для любых моментов $t, \tau \in [a, b]$ справедливо следующее условие:

$$\lim_{t \rightarrow \tau} M \{|g_t - g_\tau|^m\} = 0$$

Пусть $a=t_0, t_1, t_2, \dots, t_N = b$ разбиение промежутка $[a, b]$ такое, что: $t_i < t_{i+1}$; $0 \leq i \leq N - 1$ и $\Delta_N = \max_{0 \leq i \leq N-1} |t_{i+1} - t_i|$.

Обобщенным стохастическим интегралом Ито от случайных процессов g_t and q_t по винеровскому процессу $\mathbf{f}_t^{(i)} \in \mathfrak{R}^1$ ($i = 1, \dots, m$) называется (Р.Л. Стратонович [1]) следующий среднеквадратический предел:

$$\int_a^b g_t d\mathbf{f}_t^{(i)} q_t = \lim_{\substack{\Delta_N \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{k=0}^{N-1} g_{t_k} \left(\mathbf{f}_{t_{k+1}}^{(i)} - \mathbf{f}_{t_k}^{(i)} \right) q_{t_{k+1}}. \quad (2)$$

Пусть процессы q_t и g_t удовлетворяют следующим условиям:

A1 $q_t \equiv 1$.

A2 Процесс g_t является неупреждающим к винеровскому процессу $\mathbf{f}_t^{(i)} \in R_1$ ($i = 1, \dots, m$).

A3 Процесс g_t среднеквадратически непрерывен на $[a, b]$.

A4 $M\{g_t^2\} < \infty$ для всех $t \in [a, b]$.

Нетрудно показать, что в этих условиях стохастический интеграл (2) существует. Нетрудно также показать, что в этих же условиях существует стохастический интеграл вида

$$\int_a^b g_t dt q_t = \lim_{\substack{\Delta_N \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{k=0}^{N-1} g_{t_k} (t_{k+1} - t_k) q_{t_{k+1}}. \quad (3)$$

Определение 1 Процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ называется непрерывно дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на $s \in [0, T]$ на траекториях уравнения (1), если для всех $s, t \in [0, T]$ таких, что $s \geq t$ следующее представление:

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s B_0\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \quad (4)$$

справедливо с вероятностью 1 и интегралы в правой части (4) существуют в среднеквадратическом смысле.

В (4) \mathbf{x}_τ — решение уравнения (1); $B_0\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}$, $B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}$; $i = 1, \dots, m$ непрерывные в среднеквадратическом смысле процессы на $[0, T]$, называемые систематической и диффузионными производными процесса η_s по Ито.

Лемма 1 (Формула Ито) Пусть

1° Частные производные $\frac{\partial}{\partial t} R(\mathbf{x}, t)$; $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} R(\mathbf{x}, t)$; $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} R(\mathbf{x}, t)$; $i, j = 1, 2, \dots, n$ существуют и непрерывны на $\mathbb{R}^n \times [0, T]$.

2° Функции $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma^{(il)}(\mathbf{x}, t)$ и процессы $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}_t, t)$, $\Sigma^{(il)}(\mathbf{x}_t, t)$ таковы, что для процессов $L\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$ и $G_0^{(i)}\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$; $i = 1, \dots, m$ выполнены условия A3, A4.

Тогда процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ и его производные $B_0\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$, $B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$; $i = 1, \dots, m$ имеют вид:

$$B_0\{R(\mathbf{x}_t, t)\} = L\{R(\mathbf{x}_t, t)\}; \quad B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x}_t, t)\} = G_0^{(i)}\{R(\mathbf{x}_t, t)\},$$

где

$$L\{\cdot\} = \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(l)} \partial \mathbf{x}^{(i)}}; \quad (5)$$

$$G_0^{(i)}\{\cdot\} = \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}; \quad i = 1, \dots, m \quad (6)$$

и для всех $s, t \in [0, T]$ таких, что $s \geq t$ равенство

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s L\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s G_0^{(i)}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\mathbf{f}_\tau^{(i)}$$

справедливо с вероятностью 1 и интегралы в правой части существуют в среднеквадратическом смысле.

Будем называть совокупность k -индексных элементов матрицей k -го ранга ${}^{(k)}A$: ${}^{(k)}A = \left\| A^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^{m_1, \dots, m_k}$. Ясно, что ${}^{(0)}A$ скаляр; ${}^{(1)}A$ матрица размера $m_1 \times 1$; ${}^{(2)}A$ матрица размера $m_1 \times m_2$ и т.д. Обозначение ${}^{(k)}A = \left\| {}^{(k-1)}A^{(i_1)} \right\|_{i_1=1}^{m_1}$, где ${}^{(k-1)}A^{(i_1)} = \left\| A^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_2, \dots, i_k=1}^{m_2, \dots, m_k}$ следует понимать как блочную матрицу с элементами $k-1$ -го ранга. В дальнейшем иногда у скаляров и матриц-столбцов ранг указывать не будем.

Будем называть матрицу ${}^{(k)}C$ сверткой матриц ${}^{(k+l)}A$ и ${}^{(l)}B$ и обозначать ее в виде: ${}^{(k)}C = {}^{(k+l)}A \overset{!}{\cdot} {}^{(l)}B$, где

$${}^{(k)}C = \left\| \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^{m_1, \dots, m_l} A^{(i_1 \dots i_{k+l})} B^{(i_1 \dots i_l)} \right\|_{i_{l+1}, \dots, i_{l+k}=1}^{m_{l+1}, \dots, m_{l+k}}$$

Определение 2 Процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ называется N раз непрерывно дифференцируемым по Ито среднеквадратическом смысле на $[0, T]$ на траекториях уравнения (1) если для всех $l = 0, 1, \dots, N-1$; $s, t \in [0, T]$ таких, что $s \geq t$ справедливо с вероятностью 1 представление

$$\begin{aligned} {}^{(r_l)}B_{\gamma_l \dots \gamma_1}\{R(\mathbf{x}_s, s)\} &= {}^{(r_l)}B_{\gamma_l \dots \gamma_1}\{R(\mathbf{x}_t, t)\} + \int_t^s {}^{(r_l)}B_{0\gamma_l \dots \gamma_1}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\tau + \\ &+ \int_t^s {}^{(r_{l+1})}B_{1\gamma_l \dots \gamma_1}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} \cdot^1 d\mathbf{f}_\tau, \end{aligned}$$

где интегралы в правой части существуют в среднеквадратическом смысле; $\gamma_q = 0, 1$; $r_l = \sum_{i=1}^l \gamma_i$; ${}^{(r_q)}B_{\gamma_1 \dots \gamma_l} \{R(\mathbf{x}_t, t)\}$, $q = 1, 2, \dots, N$ непрерывные в среднеквадратическом смысле матричные случайные процессы, называемые q -ми производными процесса η_s по Ито в среднеквадратическом смысле на траекториях системы (1): ${}^{(0)}B_{\underbrace{0 \dots 0}_q} \{R(\mathbf{x}_t, t)\}$ систематической составляющей q -й производной, ${}^{(q)}B_{\underbrace{1 \dots 1}_q} \{R(\mathbf{x}_t, t)\}$ диффузионной составляющей, а все другие ${}^{(r_q)}B_{\gamma_1 \dots \gamma_l} \{R(\mathbf{x}_t, t)\}$ смешанными составляющими q -й производной. При этом полагаем $r_0 \equiv 0$; ${}^{(r_0)}B_{\gamma_0 \dots \gamma_1} \{\cdot\} \stackrel{def}{=} \cdot$; ${}^{(r_0)}B_{0 \gamma_0 \dots \gamma_1} \{\cdot\} \stackrel{def}{=} {}^{(0)}B_0 \{\cdot\}$; ${}^{(r_0+1)}B_{1 \gamma_0 \dots \gamma_1} \{\cdot\} \stackrel{def}{=} {}^{(1)}B_1 \{\cdot\}$.

Пусть ${}^{(1)}D_j \{\cdot\} = \left\| D_j^{(i)} \{\cdot\} \right\|_{i=1}^m$; $j = 1, \dots, k$ — векторные дифференциальные операторы,

$$A_p \{\cdot\} = \begin{cases} C_p \{\cdot\} \\ \cdot \end{cases}; \quad p = 1, \dots, k+1,$$

где $C_p \{\cdot\}$ — скалярный дифференциальный оператор. Далее будем обозначать:

$$\begin{aligned} & \left\| A_{k+1} \left\{ D_k^{(i_k)} \left\{ A_k \left\{ \dots \left\{ D_1^{(i_1)} \left\{ A_1 \{\cdot\} \right\} \dots \right\} \right\} \right\} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m \stackrel{def}{=} \\ & \stackrel{def}{=} {}^{(k)}A_{k+1} D_k A_k \dots D_1 A_1 \{\cdot\} = A_{k+1} \left\{ {}^{(k)}D_k A_k \dots D_1 A_1 \{\cdot\} \right\} = \\ & = A_{k+1} \left\{ {}^{(1)}D_k \left\{ {}^{(k-1)}A_k \dots D_1 A_1 \{\cdot\} \right\} \right\} = \dots = \\ & = A_{k+1} \left\{ {}^{(1)}D_k \left\{ A_k \dots \left\{ {}^{(1)}D_1 \left\{ A_1 \{\cdot\} \right\} \right\} \dots \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Лемма 2 Пусть условия леммы 1 выполнены. Пусть для всех $l = 0, 1, \dots, N-2$ процессы ${}^{(r_{l+1})}H_{l+1}H_l \dots H_1 \{R(\mathbf{x}_s, s)\}$ и соответствующие им функции ${}^{(r_{l+1})}H_{l+1}H_l \dots H_1 \{R(\mathbf{x}, s)\}$ покомпонентно удовлетворяют условиям 1°, 2° леммы 1. Тогда процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ N раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на $[0, T]$ и его производные имеют вид:

$${}^{(r_{l+1})}B_{\gamma_{l+1} \dots \gamma_1} \{R(\mathbf{x}_s, s)\} = {}^{(r_{l+1})}H_{l+1}H_l \dots H_1 \{R(\mathbf{x}_s, s)\},$$

где $H_p \{\cdot\} = {}^{(1)}G_0 \{\cdot\}$, $L \{\cdot\}$; $r_{l+1} = \sum_{p=1}^{l+1} \gamma_p$; $\gamma_p = 1$ при $H_p \{\cdot\} = {}^{(1)}G_0 \{\cdot\}$ и $\gamma_p = 0$ при $H_p \{\cdot\} = L \{\cdot\}$; дифференциальные операторы ${}^{(1)}G_0 \{\cdot\}$ и $L \{\cdot\}$ такие же, как в лемме 1; $l=0, 1, \dots, N-1$.

3. Повторные стохастические интегралы и их свойства

Рассмотрим некоторые свойства повторных стохастических интегралов, необходимые для дальнейшего изложения. Доказательства этих утверждений можно найти в [9], [11].

Согласно (2), (3) рассмотрим повторный стохастический интеграл вида:

$$J_{ab}^{(k)} \stackrel{def}{=} \int_a^b \psi_{k-1}(t_1) \dots \int_a^{t_{k-2}} \psi_1(t_{k-1}) \int_a^{t_{k-1}} \phi_{t_k} dW_{t_k}^{(i_k)} dW_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \dots dW_{t_1}^{(i_1)},$$

где $\psi_j(t)$; $j = 1, \dots, k-1$ некоторые функции, ϕ_t некоторый случайный процесс, а $W_t^{(q)} = \mathbf{f}_t^{(q)}$ при $q = 1, \dots, m$ и $W_t^{(0)} = t$; $\mathbf{f}_t^{(q)}$ — независимые скалярные винеровские процессы.

Сформулируем достаточные условия существования в среднеквадратическом смысле повторных стохастических интегралов $J_{ab}^{(k)}$ [9], [11].

Лемма 3 Пусть функции $\psi_j(t)$; $j = 1, \dots, k-1$ непрерывны на $[a, b]$, а процесс ϕ_t является неупреждающим к винеровским процессам $\mathbf{f}_t^{(q)}$ ($q = 1, \dots, m$) и непрерывен в среднеквадратическом смысле на $[a, b]$. Пусть также $M \{ \phi_t^2 \} < \infty$ для всех $t \in [a, b]$. Тогда повторный стохастический интеграл $J_{ab}^{(k)}$; $k = 1, 2, \dots$ существует в среднеквадратическом смысле.

Рассмотрим свойство замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах.

Определение 3 Среднеквадратический предел

$$\underset{N \rightarrow \infty}{\overset{l.i.m.}{\Delta_N \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} \left(W_{\tau_{j+1}}^{(i_k)} - W_{\tau_j}^{(i_k)} \right) S_{\tau_{j+1}b}^{(k-1)},$$

где

$$S_{t_1b}^{(k-1)} \stackrel{def}{=} \begin{cases} \int_{t_1}^b \psi_1(t_2) dW_{t_2}^{(i_{k-1})} \dots \int_{t_{k-1}}^b \psi_{k-1}(t_k) dW_{t_k}^{(i_1)} & \text{при } k = 2, 3, \dots \\ 1 & \text{при } k = 1 \end{cases}$$

называется интегралом

$$I_{ab}^{(k)} \stackrel{def}{=} \int_a^b \phi_{t_1} dW_{t_1}^{(i_k)} \int_{t_1}^b \psi_1(t_2) dW_{t_2}^{(i_{k-1})} \dots \int_{t_{k-1}}^b \psi_{k-1}(t_k) dW_{t_k}^{(i_1)}$$

Существование интеграла $I_{ab}^{(k)}$ и свойство замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1 Пусть функции $\psi_l(t)$; $l = 1, \dots, k - 1$ и процесс ϕ_t удовлетворяют условиям леммы 3, тогда интеграл $I_{ab}^{(k)}$ существует в среднеквадратическом смысле и равенство

$$I_{ab}^{(k)} = J_{ab}^{(k)}$$

справедливо с вероятностью 1.

Из теоремы 1 вытекает следствие.

Следствие В условиях теоремы 1 справедливо с вероятностью 1 равенство

$$\int_a^b \int_a^{t_1} \phi_\tau dW_\tau^{(j)} dW_{t_1}^{(i_k)} S_{t_1 b}^{(k-1)} = \int_a^b \phi_\tau dW_\tau^{(j)} \int_\tau^b dW_{t_1}^{(i_k)} S_{t_1 b}^{(k-1)},$$

где $j = 0, \dots, m$.

Доказательство: Рассмотрим процесс $\theta_{at} = \int_a^t \phi_\tau dW_\tau^{(j)}$. Тогда в условиях теоремы 1 имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \theta_{at_1} dW_{t_1}^{(i_k)} S_{t_1 b}^{(k-1)} &= \\ &= \int_a^b \psi_{k-1}(t_1) \dots \int_a^{t_{k-2}} \psi_1(t_{k-1}) \int_a^{t_{k-1}} \theta_{at_k} dW_{t_k}^{(i_k)} dW_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \dots dW_{t_1}^{(i_1)}. \end{aligned}$$

Далее остается лишь применить теорему 1 к правой части последнего равенства.

Далее будет использоваться следующее свойство повторных стохастических интегралов.

Лемма 4 Пусть условия теоремы 1 выполнены и $h(t)$ непрерывная на $[a, b]$ функция. Тогда справедливо с вероятностью 1 следующее равенство

$$\int_a^b \phi_t dW_t^{(i_k)} h(t) S_{tb}^{(k-1)} = \int_a^b \phi_t h(t) dW_t^{(i_k)} S_{tb}^{(k-1)},$$

где $k > 1$ и интегралы $\int_a^b \phi_t dW_t^{(i_k)} h(t) S_{tb}^{(k-1)}$, $\int_a^b \phi_t h(t) dW_t^{(i_k)} S_{tb}^{(k-1)}$ существуют в среднеквадратическом смысле.

Рассмотрим в условиях леммы 3 некоторые свойства интегралов $J_{ab}^{(k)}$:

$$M\{J_{ab}^{(k)}\} = 0. \tag{7}$$

$$M\left\{\left(J_{ab}^{(k)}\right)^2\right\} = \int_a^b \psi_{k-1}^2(t_1) \dots \int_a^{t_{k-2}} \psi_1^2(t_{k-1}) \int_a^{t_{k-1}} M\{\phi_{t_k}^2\} dt_k dt_{k-1} \dots dt_1 \tag{8}$$

Введем обозначение

$$J_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^s (s - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \int_{\tau_1}^s (s - \tau_2)^{l_2} d\mathbf{f}_{\tau_2}^{(i_2)} \dots \int_{\tau_{k-1}}^s (s - \tau_k)^{l_k} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k > 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}$$

и

$${}^{(k)}J_{l_1 \dots l_{k_s, t}} = \left\| J_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m.$$

Из теоремы 1 и свойств (8) и (9) вытекают существование и следующие свойства интегралов $J_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)}$ при $k > 0$:

$$\mathbf{M}\{J_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)}\} = 0;$$

$$\mathbf{M}\left\{\left(J_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)}\right)^2\right\} = \frac{(s-t)^{2(l_1 + \dots + l_k) + k}}{(2l_k + 1)(2(l_k + l_{k-1}) + 2) \dots (2(l_k + \dots + l_1) + k)}; \quad (9)$$

$$\int_t^s (s - \tau)^j d\mathbf{f}_{\tau}^{(p)} J_{l_1 \dots l_{k_s, \tau}}^{(i_1 \dots i_k)} = J_{j l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(p i_1 \dots i_k)}; \quad p = 1, \dots, m; \quad (10)$$

$$\int_t^s (s - \tau)^j d\tau J_{l_1 \dots l_{k_s, \tau}}^{(i_1 \dots i_k)} = \frac{(s-t)^{j+1}}{j+1} J_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)} - \frac{1}{j+1} J_{l_1 + j + 1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)}; \quad (11)$$

$$J_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^s (s - \tau_1)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_{k-1}} (s - \tau_k)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_k)}.$$

Введем в рассмотрение матрицу k -го ранга вида:

$${}^{(k)}(s \ominus t)_{j l_1 \dots l_k} = \left\| (s \ominus t)_{j l_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m = \left\| \frac{(s-t)^j}{j!} J_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m.$$

Рассмотрим совокупность матриц k -го ранга:

$$C^{\mathcal{B}} = \{ {}^{(k)}C_{j l_1 \dots l_k} : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{B} \},$$

$$\mathcal{B} = \{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k, j, l_1, \dots, l_k \in \mathcal{Z}_1 \subset \mathcal{N} \cup \{0\} \}.$$

и введем следующую операцию над множеством матриц k -го ранга

$$(C^{\mathcal{B}} \odot D^{\mathcal{B}}) \stackrel{def}{=} \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{B}} {}^{(k)}C_{j l_1 \dots l_k} \cdot {}^{(k)}D_{j l_1 \dots l_k}.$$

Нетрудно видеть, что введенная операция обладает переместительным и распределительным свойствами. Далее будем обозначать

$$(s \ominus t)^{\mathcal{B}} = \{ {}^{(k)}(s \ominus t)_{j l_1 \dots l_k} : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in \mathcal{B} \},$$

4. Разложение процессов Ито

Докажем теорему о разложении процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$.

Теорема 2 Пусть процесс Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, порожденный решением уравнения (1), $r+1$ раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на $[0, T]$ на траекториях уравнения (1). Тогда он разлагается в окрестности фиксированного момента $t \in [0, T]$ в ряд вида:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r (C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}) + D_{r+1, s, t}, \quad (12)$$

где равенство справедливо с вероятностью 1, правая часть (13) существует в среднеквадратическом смысле и в (13) введены обозначения:

$$D_{r+1, s, t} = \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_r} \{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}) + \int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_r} \{\eta_\tau\} \stackrel{!}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right), \quad (13)$$

где

$$C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_\tau\} = \left\{ {}^{(k)}C_{j l_1 \dots l_k} \{\eta_t\} : (j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q \right\};$$

$$Q^{\mathcal{A}_q} \{\eta_\tau\} = \left\{ L \left\{ {}^{(k)}C_{j l_1 \dots l_k} \{\eta_\tau\} \right\} : (j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q \right\};$$

$$H^{\mathcal{A}_q} \{\eta_\tau\} = \left\{ {}^{(1)}G_0 \left\{ {}^{(k)}C_{j l_1 \dots l_k} \{\eta_\tau\} \right\} : (j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q \right\};$$

$${}^{(k)}C_{j l_1 \dots l_k} \{\eta_t\} = \begin{cases} {}^{(k)}L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{\eta_t\} & \text{при } k > 0 \\ L^j \{\eta_t\} & \text{при } k = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_q = \{(k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + l_1 + \dots + l_k = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots\};$$

$$L^j \{\cdot\} \stackrel{def}{=} \begin{cases} \underbrace{L\{L\{\dots\{L\{\cdot\}\}\dots\}}_j & \text{при } j > 0 \\ \cdot & \text{при } j = 0 \end{cases}$$

$${}^{(1)}G_p \{\cdot\} = \frac{1}{p} \left({}^{(1)}G_{p-1} L \{\cdot\} - {}^{(1)}L G_{p-1} \{\cdot\} \right); \quad p = 1, 2, \dots$$

${}^{(1)}G_0 \{\cdot\}$ и $L \{\cdot\}$ определены соотношениями (6) и (7).

Доказательство: Доказательство проведем по индукции. Применим к процессу η_s формулу Ито:

$$\eta_s = \eta_t + D_{1_{s,t}} = (C^{A_0}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{A_0}) + D_{1_{s,t}}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} D_{1_{s,t}} &= \int_t^s L\{\eta_\tau\}d\tau + \int_t^s G_0\{\eta_\tau\} \cdot^1 d\mathbf{f}_\tau = \\ &= \int_t^s (Q^{A_0}\{\eta_\tau\}d\tau \odot (s \ominus \tau)^{A_0}) + \int_t^s \left(\left(H^{A_0}\{\eta_\tau\} \cdot^1 d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{A_0} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Соотношения (15) и (16) являются частными случаями (13) и (14) при $r = 0$. Применим формулу Ито к подынтегральным процессам в $D_{1_{s,t}}$:

$$D_{1_{s,t}} = D_{1_{s,t}}^* + D_{2_{s,t}}; \quad (16)$$

$$D_{1_{s,t}}^* = (s - t)L\{\eta_t\} + G_0\{\eta_t\} \cdot^1 J_{0_{s,t}} = (C^{A_1}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{A_1}); \quad (17)$$

$$\begin{aligned} D_{2_{s,t}} &= \int_t^s \left(\int_t^{s_1} L^2\{\eta_\tau\}d\tau + \int_t^{s_1} G_0L\{\eta_\tau\} \cdot^1 d\mathbf{f}_\tau \right) ds_1 + \\ &+ \int_t^s \left(\int_t^{s_1} LG_0\{\eta_\tau\}d\tau + \int_t^{s_1} {}^{(2)}G_0G_0\{\eta_\tau\} \cdot^1 d\mathbf{f}_\tau \right) \cdot^1 d\mathbf{f}_{s_1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Заменяем порядки интегрирования в (19) согласно теореме 1:

$$\begin{aligned} D_{2_{s,t}} &= \int_t^s L^2\{\eta_\tau\}d\tau(s - \tau) + \int_t^s LG_0\{\eta_\tau\}d\tau \cdot^1 J_{0_{s,\tau}} + \\ &+ \int_t^s G_0L\{\eta_\tau\} \cdot^1 d\mathbf{f}_\tau(s - \tau) + \int_t^s \left({}^{(2)}G_0G_0\{\eta_\tau\} \cdot^1 d\mathbf{f}_\tau \right) \cdot^1 J_{0_{s,\tau}} = \\ &= \int_t^s (Q^{A_1}\{\eta_\tau\}d\tau \odot (s \ominus \tau)^{A_1}) + \int_t^s \left(\left(H^{A_1}\{\eta_\tau\} \cdot^1 d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{A_1} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Объединяя соотношения (15)-(20) приходим к представлению:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^1 (C^{A_q}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{A_q}) + D_{2_{s,t}}, \quad (20)$$

$$D_{2s,t} = \int_t^s (Q^{A_1}\{\eta_\tau\}d\tau \odot (s \ominus \tau)^{A_1}) + \int_t^s \left((H^{A_1}\{\eta_\tau\} \cdot^1 d\mathbf{f}_\tau) \odot (s \ominus \tau)^{A_1} \right). \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что (21) и (22) являются частными случаями (13) и (14) при $r = 1$. Таким образом утверждение теоремы справедливо для $r = 0, 1$. Продолжая начатый процесс разложения получим на следующем шаге соотношения:

$$\begin{aligned} \eta_s &= \sum_{q=0}^1 (C^{A_q}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{A_q}) + \frac{1}{2}(s-t)^2 L^2\{\eta_t\} + \\ &+ (G_0 L\{\eta_t\} - L G_0\{\eta_t\}) \cdot^1 J_{1s,t} + {}^{(2)}G_0 G_0\{\eta_t\} \cdot^2 {}^{(2)}J_{00s,t} + \\ &+ (s-t) L G_0\{\eta_t\} \cdot^1 J_{0s,t} + D_{3s,t} = \\ &= \sum_{q=0}^1 (C^{A_q}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{A_q}) + (C^{A_2}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{A_2}) + D_{3s,t} \\ &= \sum_{q=0}^2 (C^{A_q}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{A_q}) + D_{3s,t}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} D_{3s,t} &= \int_t^s L^3\{\eta_\tau\} d\tau \frac{1}{2}(s-\tau)^2 + \int_t^s L^2 G_0\{\eta_\tau\} d\tau \cdot^1 J_{0s,\tau}(s-\tau) + \\ &+ \int_t^s (L G_0 L\{\eta_\tau\} - L^2 G_0\{\eta_\tau\}) d\tau \cdot^1 J_{1s,\tau} + \\ &+ \int_t^s {}^{(2)}L G_0 G_0\{\eta_\tau\} d\tau \cdot^2 {}^{(2)}J_{00s,\tau} + \int_t^s (G_0 L^2\{\eta_\tau\} \cdot^1 d\mathbf{f}_\tau) \frac{1}{2}(s-\tau)^2 + \\ &+ \int_t^s ({}^{(2)}G_0 L G_0\{\eta_\tau\} \cdot^1 d\mathbf{f}_\tau) \cdot^1 J_{0s,\tau}(s-\tau) + \\ &+ \int_t^s \left(({}^{(2)}G_0 G_0 L\{\eta_\tau\} - {}^{(2)}G_0 L G_0\{\eta_\tau\}) \cdot^1 d\mathbf{f}_\tau \right) \cdot^1 J_{1s,\tau} + \\ &+ \int_t^s ({}^{(3)}G_0 G_0 G_0\{\eta_\tau\} \cdot^1 d\mathbf{f}_\tau) \cdot^2 {}^{(2)}J_{00s,\tau} = \\ &= \int_t^s (Q^{A_2}\{\eta_\tau\}d\tau \odot (s \ominus \tau)^{A_2}) + \int_t^s \left((H^{A_2}\{\eta_\tau\} \cdot^1 d\mathbf{f}_\tau) \odot (s \ominus \tau)^{A_2} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Следовательно утверждение теоремы справедливо и при $r = 2$. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором $n = r$ и докажем его справедливость при $n = r + 1$. Применяя формулу Ито к подынтегральным процессам в (14) получим

$$\begin{aligned}
 D_{r+1s,t} &= D_{r+1s,t}^* + D_{r+2s,t}; \\
 D_{r+1s,t}^* &= \left(Q^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_t \} \odot \int_t^s d\tau (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right) + \left(\left(H^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_t \} \stackrel{!}{\int}_t^s d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right); \\
 D_{r+2s,t} &= \int_t^s \left(\int_t^{\tau_1} dU^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} d\tau_1 \odot (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right) + \\
 &+ \int_t^s \left(\left(\int_t^{\tau_1} dV^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} \stackrel{!}{d\mathbf{f}_{\tau_1}} \right) \odot (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right), \quad (24)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 dU^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} &= \\
 &= \left\{ {}^{(k)}X_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} d\tau + {}^{(k+1)}Y_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} \stackrel{!}{d\mathbf{f}_\tau} : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in \mathcal{A}_r \right\}; \\
 dV^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} &= \\
 &= \left\{ {}^{(k+1)}Z_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} d\tau + {}^{(k+2)}W_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} \stackrel{!}{d\mathbf{f}_\tau} : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in \mathcal{A}_r \right\},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 {}^{(k)}X_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} &= {}^{(k)}L^{j+2} G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_\tau \}; \\
 {}^{(k+1)}Z_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} &= {}^{(k+1)}L G_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_\tau \}; \\
 {}^{(k+1)}Y_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} &= {}^{(k+1)}G_0 L^{j+1} G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_\tau \}; \\
 {}^{(k+2)}W_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} &= {}^{(k+2)}G_0 G_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_\tau \};
 \end{aligned}$$

Заменяем, согласно следствию из теоремы 1, порядки интегрирования в повторных стохастических интегралах в (25):

$$\begin{aligned}
 D_{r+2s,t} &= \int_t^s \left(\left(dU^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} \int_\tau^s d\tau_1 \right) \odot (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right) + \\
 &+ \int_t^s \left(\left(dV^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} \stackrel{!}{\int}_\tau^s d\mathbf{f}_{\tau_1} \right) \odot (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right). \quad (25)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим $\int_\tau^s d\tau_1 (s \ominus \tau_1)_{jl_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)}$ и $\int_\tau^s d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(q)} (s \ominus \tau_1)_{jl_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} d\tau_1$; $q = 1, \dots, m$.

Согласно свойствам (11) и (12) имеем

$$\int_{\tau}^s d\tau_1 (s \ominus \tau_1)_{j l_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} (s \ominus \tau)_{j+1 l_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} - \frac{1}{(s-\tau)^{j+1}} (s \ominus \tau)_{j+1 l_1+j+1 l_2 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} & \text{при } k > 0 \\ \frac{(s-\tau)^{j+1}}{(j+1)!} & \text{при } k = 0 \end{cases}; \quad (26)$$

$$\int_{\tau}^s d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(q)} (s \ominus \tau_1)_{j l_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} = \frac{1}{(s-\tau)^j} (s \ominus \tau)_{j j l_1 \dots l_k}^{(q i_1 \dots i_k)}; \quad k = 0, 1, \dots \quad (27)$$

Подставим (27) и (28) в (26) и заметим, что получающийся результат эквивалентен записи:

$$D_{r+2s,t} = \int_t^s (Q^{A_{r+1}}\{\eta_{\tau}\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{A_{r+1}}) + \int_t^s \left(\left(H^{A_{r+1}}\{\eta_{\tau}\} \right)^{\cdot} d\mathbf{f}_{\tau} \right) \odot (s \ominus \tau)^{A_{r+1}}.$$

Таким образом (14) доказано. Из (14) следует, что

$$D_{r+1s,t} = D_{r+1s,t}^* + D_{r+2s,t};$$

$$D_{r+1s,t}^* = \left(Q^{A_r}\{\eta_t\} \int_t^s d\tau \odot (s \ominus \tau)^{A_r} \right) + \left(\left(H^{A_r}\{\eta_t\} \right)^{\cdot} \int_t^s d\mathbf{f}_{\tau} \right) \odot (s \ominus \tau)^{A_r}. \quad (28)$$

После подстановки (27) и (28) в (29) при $\tau = t$ получим

$$D_{r+1s,t}^* = (C^{A_{r+1}}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{A_{r+1}}).$$

Таким образом соотношение (13) доказано. Теорема доказана.

5. Унифицированное разложение Тейлора-Ито

Нетрудно видеть, что часть членов в сумме в правой части (13) имеет больший порядок малости в среднеквадратическом смысле при $s \rightarrow t$, чем порядок малости остаточного члена $D_{r+1s,t}$. Это заключение вытекает из свойства (10). Следующая теорема показывает, как необходимо видоизменить разложение (13) чтобы упорядочить его члены по порядкам малости. При этом новый остаточный член разложения будет иметь наибольший порядок малости.

Теорема 3 В условиях теоремы 2 справедливо с вероятностью 1 следующее унифицированное разложение Гейлора-Ито процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, $s \in [0, T]$ в окрестности фиксированного момента $t \in [0, T]$:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r (C^{\mathcal{D}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q}) + H_{r+1_{s,t}},$$

где

$$H_{r+1_{s,t}} \stackrel{def}{=} (C^{\mathcal{U}_r} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1_{s,t}};$$

$$D_{r+1_{s,t}} = \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_q} \{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_q}) + \int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_q} \{\eta_\tau\} \stackrel{!}{=} d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_q} \right);$$

$$\mathcal{D}_q = \{(k, j, l_1, \dots, l_k) : k + 2(j + l_1 + \dots + l_k) = q;$$

$$k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots\},$$

$$\mathcal{U}_r = \{(k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + l_1 + \dots + l_k \leq r;$$

$$k + 2(j + l_1 + \dots + l_k) \geq r + 1; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots\};$$

$$\sqrt{\mathbb{M} \left\{ (H_{r+1_{s,t}})^2 \right\}} \leq C_r (s - t)^{(r+1)/2}; C_r = const < \infty; r = 0, 1, \dots,$$

а другие обозначения такие же, как в теореме 2.

Доказательство: Нетрудно видеть, что разложение (13) может быть представлено в следующей форме:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r (C^{\mathcal{D}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q}) + H_{r+1_{s,t}},$$

где

$$H_{r+1_{s,t}} \stackrel{def}{=} (C^{\mathcal{U}_r} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1_{s,t}}.$$

с помощью неравенства Минковского имеем:

$$\sqrt{\mathbb{M} \left\{ (H_{r+1_{s,t}})^2 \right\}} \leq \sqrt{\mathbb{M} \left\{ (C^{\mathcal{U}_r} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r})^2 \right\}} + \sqrt{\mathbb{M} \left\{ (D_{r+1_{s,t}})^2 \right\}}. \quad (29)$$

Рассмотрим величины в правой части (30). Поскольку

$$(C^{\mathcal{U}_r} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}) = \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{U}_r} \frac{(s-t)^j}{j!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{\eta_t\} J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)},$$

то в малой окрестности момента t из свойства (10) и неравенства Минковского получаем

$$\sqrt{\mathbf{M} \left\{ (C^{\mathcal{U}_r} \{ \eta_t \} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r})^2 \right\}} \leq C'_r (s - t)^z, \quad C'_r = \text{const} < \infty,$$

где

$$z = \min_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{U}_r} \left\{ \frac{k}{2} + j + l_1 + \dots + l_k \right\} = \frac{r+1}{2}.$$

Таким образом

$$\sqrt{\mathbf{M} \left\{ (C \{ \eta_t \}^{\mathcal{U}_r} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r})^2 \right\}} \leq C'_r (s - t)^{\frac{r+1}{2}}, \quad C'_r = \text{const} < \infty. \quad (30)$$

Рассмотрим $D_{r+1,s,t}$:

$$\begin{aligned} D_{r+1,s,t} &= \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}) + \int_t^s \left((H^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} \cdot d\mathbf{f}_\tau) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right) = \\ &= \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_r} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m \left(\int_t^s L^{j+1} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_\tau \} \frac{(s - \tau)^j}{j!} d\tau J_{l_1 \dots l_{k,s,\tau}}^{(i_1 \dots i_k)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=1}^m \int_t^s G_0^{(p)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_\tau \} \frac{(s - \tau)^j}{j!} d\mathbf{f}_\tau^{(p)} J_{l_1 \dots l_{k,s,\tau}}^{(i_1 \dots i_k)} \right). \end{aligned}$$

В малой окрестности момента t с помощью теоремы 1, свойства (10) и неравенства Минковского имеем:

$$\sqrt{\mathbf{M} \left\{ (D_{r+1,s,t})^2 \right\}} \leq C''_r (s - t)^{z'}, \quad C''_r = \text{const} < \infty,$$

где

$$z' = \min_{k+j+l_1+\dots+l_k=r; 0 \leq k \leq r} \left\{ 1 + \frac{k}{2} + j + l_1 + \dots + l_k; \frac{1}{2} + \frac{k}{2} + j + l_1 + \dots + l_k \right\} = \frac{r+1}{2}.$$

Таким образом

$$\sqrt{\mathbf{M} \left\{ (D_{r+1,s,t})^2 \right\}} \leq C''_r (s - t)^{\frac{r+1}{2}}, \quad C''_r = \text{const} < \infty. \quad (31)$$

Из (30)-(32) получаем

$$\sqrt{\mathbf{M} \left\{ (H_{r+1,s,t})^2 \right\}} \leq C_r (s - t)^{\frac{r+1}{2}}, \quad C_r = \text{const} < \infty.$$

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. Москва: Издательство Московского Университета, 1966.
- [2] Milstein G.N. Approximate integration of stochastic differential equations//Theor. Prob. Appl., 1974, 19, p. 557-562.
- [3] Wagner W., Platen E. Approximation of Ito integral equations//Preprint ZIMM, Akad. der. Wiss der DDR, Berlin, 1978.
- [4] Platen E., Wagner W. On a Taylor formula for a class of Ito processes//Prob. Math. Statist., 1982, 3, p. 37-51.
- [5] Мильштейн Г.Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Издательство Уральского Университета, 225 с., 1988.
- [6] Kloeden P.E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1992.
- [7] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Разложение процессов Ито в ряд Тейлора-Ито в окрестности фиксированного момента времени//ВИНИТИ, 1993, N2637-B93.
- [8] Кузнецов Д.Ф. Теоретическое обоснование метода разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанного на кратных рядах Фурье по тригонометрическим и сферическим функциям//ВИНИТИ, 1997, N3608-B97.
- [9] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Повторные стохастические интегралы и их свойства//ВИНИТИ, 1996, N3506-B96.
- [10] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Обобщение разложения Тейлора на класс случайных процессов, порожденных решениями стохастических дифференциальных уравнений Ито//ВИНИТИ, 1996, N3507-B96.
- [11] Кузнецов Д.Ф. Теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах//ВИНИТИ, 1997, N3607-B97.