ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 1997
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ СИМВОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

С.М. Хрящев

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29,
С.-Петербургский государственный технический университет,
кафедра Высшей математики,
e-mail: khrya@osipenko.stu.neva.ru

Г.С. Осипенко

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29,
С.-Петербургский государственный технический университет,
кафедра Высшей математики,
e-mail: math@math.stu.neva.ru

Аннотация

Задачи управления имеют локальный и глобальный аспекты исследования. В то время как для изучения локальной управляемости достаточно успешно применяются аналитические методы, глобальная управляемость исследуется аналитическими методами значительно труднее. В настоящей работе предлагается метод, который соединяет преимущества двух подходов (аналитического и неаналитического).

1. Определения, обозначения и постановка задачи

Мы рассмотрим динамическую систему управления (ДСУ) с фазовым пространством X и управляющим пространством U, где X, U – конечномерные многообразия, $\dim X = n, \dim U = m = 1$. Обозначим $E = X \times U$. Пусть T – множество моментов времени, в течение которых происходит функционирование ДСУ. Введем также $\mathcal{X} = \{\hat{x} | \hat{x} : T \to X\}$ – множество траекторий в пространстве X и $\mathcal{U} = \{\hat{u} | \hat{u} : T \to U\}$ – множество траекторий в пространстве U (множество допустимых управлений). Функции $\hat{u}$ этого класса будем считать кусочно-непрерывными. В большинстве рассмотренных задач можно ограничиться классом кусочно-постоянных допустимых управлений.

Под ДСУ мы понимаем некоторое правило (функцию) $F : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$. Правило F дополняется также указанием краевых (начальных и конечных) значений траектории $\hat{x}$.

Отображение $D_{(t_0,t]}(\hat{u}) : X \to X$, действующее в соответствии с этим правилом, сопоставляет (при фиксированном управлении $\hat{u}$ и фиксированном моменте времени t) началу траектории x_0 положение траектории в момент времени t, будем задавать формулой $x = D_{(t_0,t]}(\hat{u})x_0$.

Определение 1. *ДСУ управляема из точки x_0 в точку x_1 за время τ, если существует управление $\hat{u}$, заданное на промежутке $(t_0, t_1], t_1 = t_0 + \tau$, что $D_{(t_0,t_1]}(\hat{u})(x_0) = x_1$. Этот факт будем обозначать*

$$x_0 \xrightarrow{\hat{u},\tau} x_1$$

Определение 2. *ДСУ называется глобально управляемой в фазовом пространстве M, если любая точка x_0 управляема в любую точку x_1 за некоторое время τ.*

Рассмотрим некоторое семейство векторных полей $f_u, u \in U$ с фазовым пространством X. В непрерывном времени конечномерную ДСУ обычно можно (по крайней мере локально) описать векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, u). \tag{1.1}$$

Рассмотрим некоторое допустимое управление $u = \overline{u}$ и отвечающее управлению движение в фазовом пространстве X на промежутке времени $(t_0, t_1]$ и исходящее из точки x_0, которое описывается функцией $\overline{x}(t)$. Пусть траектория $\{\overline{x}(t), \overline{u}(t)\}$ удовлетворяет уравнению (1.1).

Будем считать, что рассматриваемая ДСУ задана локально в окрестности траектории $\{\overline{x}(t), \overline{u}(t)\}$. уравнением (1.1)

Определение 3. *ДСУ (1.1) локально управляема вдоль траектории* $\{\overline{x}(t), \overline{u}(t)\}$, $t \in (t_0, t_1]$, *если для любого* $t \in (t_0, t_1]$

$$\overline{x}(t) \in \mathrm{Int}\{x | x = D_{(t_0,t]}(\hat{u})x_0, \quad \hat{u} \in \mathcal{U}\}.$$

Наличие у ДСУ свойства локальной управляемости вдоль траектории может быть проверено ранга некоторой матрицы, построенной по данному семейству векторных полей [7]. В частности, свойство управляемости вдоль траектории, соответствующей постоянному управлению u, может быть проверено вычислением ранга матрицы $\Gamma(x, u)$, составленной из вектор-столбцов вида $\mathrm{ad}^k f(g)(x, u)$, $k = 0, \ldots, n-1$, где

$$\mathrm{ad}^0 f(g) = g, \quad \mathrm{ad}^k f(g) = [f, \mathrm{ad}^{k-1} f(g)]. \tag{1.2}$$

Квадратные скобки обозначают операцию взятия коммутатора (скобка Ли), т.е. для любых векторных полей f, g

$$[f, g](x) = \frac{\partial f}{\partial x} g(x) - \frac{\partial g}{\partial x} f(x).$$

Если

$$\mathrm{rank}\, \Gamma(x, u) = \mathrm{rank} \left\{ \mathrm{ad}^k f(g)(x, u) \right\}_{k=0}^{n-1} = n, \tag{1.3}$$

то ДСУ обладает свойством локальной управляемости вдоль траектории, выходящей из точки x и соответствующей постоянному управлению u.

Как отмечается в [7, 10], множество ДСУ со свойством локальной управляемости из любой точки образуют открытое всюду плотное множество (в равномерной метрике) во множестве всех гладких ДСУ.

Целью дальнейшего будет дать конструктивные методы проверки управляемости из некоторой начальной точки x_0 в некоторую конечную точку x_1. При наличии свойства управляемости будет определено соответствующее управление.

2. Основные предположения о ДСУ

Для решения поставленной задачи конкретизируем класс допустимых управлений. Пусть

$$U_0 = \{u_1, \ldots, u_N\}$$

есть некоторое конечное множество значений управляющих параметров, $U_0 \subset U$.

Во-первых, предположим, что множество допустимых управлений $\mathcal{U}$ содержит множество $\mathcal{U}_0$ кусочно-постоянных управлений, где

$$\mathcal{U}_0 = \{\overline{u} | \overline{u} : T \to U_0\}, \tag{2.4}$$

причем для любого промежутка $(\underline{t}, \overline{t}] \subset T$ существует его разбиение $\underline{t} = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = \overline{t}$, что для любого $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, M$, $\overline{u}(t) = u_i$ $u_i \in U_0$. Таким образом, для множества допустимых управлений $\mathcal{U}_0$ можно рассмотреть полисистему

$$\dot{x} = f(x, u_i), \quad x \in X, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2.5}$$

Во-вторых, предположим, что множество допустимых управлений $\mathcal{U}$ содержит множество $\Delta\mathcal{U}$ локальных управлений, где

$$\Delta\mathcal{U} = \{\Delta u | \exists \underline{t}, \overline{t} \quad \Delta u : [\underline{t}, \overline{t}] \to \Delta U, \quad \Delta U \subset U, \quad \Delta u(\underline{t}) = 0, \Delta u \in C(\underline{t}, \overline{t})\}, \tag{2.6}$$

причем $\Delta U = \cup_{k=1}^{N} \Delta U_k$, где $\Delta U_k = \{u \,| |u - u_k| < \delta(u_k)\}$, $u_k \in U$ и $\delta(u_k)$ – некоторые заданные числа.

В [10] указана структура локального управления $\Delta u_k(s)$. Оно имеет вид

$$\Delta u_k(t) = v^*(t)\delta, \tag{2.7}$$

где δ-n-мерный постоянный вектор, $v(t) = \theta^{-1}(t)b(t)$, $\theta(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{\theta}(t) = \mathcal{A}(t)\theta(t), \quad \theta(0) = I$.

$$\mathcal{A}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\overline{x}_k(t), u_k)\right), \quad b(t) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\overline{x}_k(t), u_k\right),$$

$\overline{x}_k(t) = \overline{x}(x_0, \overline{u}_k)$ – траектория, исходящая из точки x_0 при постоянном управлении u_k.

Отметим, что числа $\delta(u_k)$ определяют величину параметра δ локального управления Δu_k.

Сделаем основное предположение о ДСУ.

Предположение 1. ДСУ (1.1) локально управляема вдоль любой траектории вида $\overline{x}(x_0, \overline{u}, t)$, исходящей из точки x_0, где $x_0 \in X$, $\overline{u} \in U_0$. Локальная управляемость обеспечивается с помощью управлений из множества $\Delta\mathcal{U}$.

Локальная управляемость в частности означает, что каждая траектория $\overline{x}(x_0, u_k, t)$, $u_k \in U_0$ с началом в точке x_0 находится в некотором открытом конусе с вершиной в точке x_0, заполненном траекториями полисистемы (2.5). Обозначим $\Delta x(x_0, u_k, t)$ максимально возможный радиус некоторого открытого шара с центром в точке $\overline{x}(x_0, u_k, t)$, лежащий в этом конусе. Таким образом, для любых $x \in X$ и $t > 0$, таких что

$$|x - \overline{x}(x_0, u_k, t)| < \Delta x(x_0, u_k, t) \tag{2.8}$$

существует локальное управление $\Delta u_k(s)$, $\Delta u_k(0) = 0$, определенное при $0 \leq s \leq t$, что управление

$$\hat{u}_k(s) = u_k + \Delta u_k(s) \tag{2.9}$$

переводит точку x_0 в точку x за время t.

Таким образом, далее мы будем использовать управления вида $\hat{u} = \overline{u} + \Delta u$, где $\hat{u} \in \mathcal{U}_0$ и $\overline{u} \in \Delta\mathcal{U}$. При этом $\overline{u}$ интерпретируется как основное управление, а Δu – как корректирующее управление.

3. Символический образ ДСУ

3.1. Конструкция символического образа.

Напомним конструкцию так называемого символического образа [1]. Пусть $g : X \to X$ является некоторым отображением многообразия X в себя и $C = \{M(1), \cdots, M(s)\}$ является конечным покрытием X замкнутыми множествами. Множество $M(i)$ назовем ячейками покрытия. Для каждого номера i определим подпокрытие $C(i)$ образа $g(M(i))$ ячейки $M(i)$, состоящее из тех ячеек $M(j)$, которые пересекают $g(M(i))$:

$$C(i) = \{M(j) \ : M(j) \cap g(M(i)) \neq \emptyset\}.$$

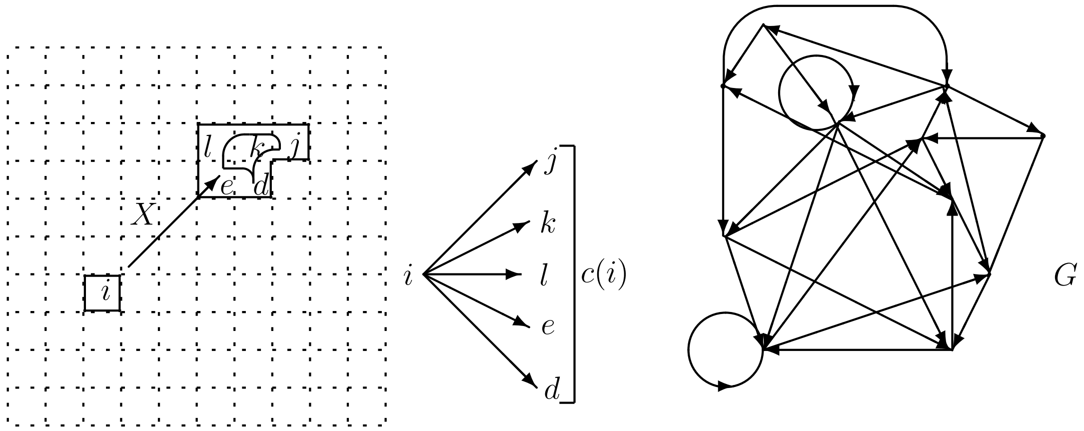

Рис. 1. Конструкция символического образа.

Ячейки подпокрытия $C(i)$ назовем ячеичным образом для ячейки $M(i)$ и положим

$$c(i) = \{j \ : M(j) \cap g(M(i)) \neq \emptyset\}.$$

Определение 4. *Пусть G есть ориентированный граф, имеющий s вершин, при этом номер вершины i соответствует ячейке $M(i)$. Вершины i и j связаны ориентированным ребром $i \to j$, если, и только если, $j \in c(i)$ т.е. $M(j) \cap g(M(i)) \neq \emptyset$. Так построенный граф G называется символическим образом отображения g относительно покрытия C.*

Обозначим Ver множество вершин графа G. Ориентированный граф G можно рассматривать как многозначное соответствие $G : Ver \to Ver$ между вершинами. Такой граф G однозначно определяется матрицей переходов $\Pi = (\pi_{ij})$, которая имеет размеры $s \times s$. Элемент $\pi_{ij} = 1$, если, и только если, существует ориентированное ребро $i \to j$, в противном случае $\pi_{ij} = 0$. Много эффективной информации о свойствах динамической системы можно получить, исследуя ее символический образ. Ясно, что символический образ зависит от покрытия C. Варьируя покрытие C, мы можем изменить символический образ. Естественно рассматривать символический образ как конечную дискретную аппроксимацию отображения g. Эта аппроксимация будет более точной при более мелком покрытии. Обозначим

$$\operatorname{diam} M(i) = \max(\rho(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in M(i))$$

диаметр ячейки $M(i)$. Пусть d есть наибольший из диаметров ячеек $M(i)$ покрытия C. Обозначим R_i объединение всех ячеек $M(j)$ из подпокрытия

$C(i)$:

$$R_i = \{\bigcup M(j) : M(j) \in C(i)\}.$$

Тогда образ $g(M(i))$ лежит внутри множества R_i: [3]

$$g(M(i)) \subset \operatorname{Int} R_i \subset \{d - \text{окрестность } g(M(i))\}. \tag{3.10}$$

Обозначим q наибольший диаметр образов $g(M(i)),\ i = 1, ..., s$. Определим число r следующим образом. Если ячейка $M(k)$ не принадлежит подпокрытию $C(i)$, тогда расстояние между $M(k)$ и образом $g(M(i))$

$$r_{ik} = \rho(g(M(i)), M(k)) = \min(\rho(x, y) : x \in g(M(i)), y \notin M(k)))$$

является положительным. Пусть r есть минимальное значение среди таких r_{ik}. Так как число описанных пар (i, k) конечно, то r является положительным числом. Таким образом число r есть наименьшее расстояние между образами $g(M(i))$ и ячейками $M(k)$, которые не пересекаются. Не трудно показать, что r-окрестность образа $g(M(i))$ лежит в R_i. Число r называется нижней гранью символического образа G. Ясно, что нижняя грань зависит от покрытия C. Меняя покрытие C, мы можем построить покрытие, для которого нижняя грань r будет сколь угодно мала.

3.2. Корреляция между символическим образом и динамической системой.

Определение 5. *Последовательность вершин $\{z_k\}$ графа G называется допустимым путем (или просто - путем), если для каждого k граф G имеет ориентированное ребро $z_k \to z_{k+1}$.*

Определение 6. *Бесконечная в обе стороны последовательность точек $\{x_i,\ -\infty < i < \infty\}$ называется ε-траекторией, если расстояние между образом $g(x_i)$ и x_{i+1} меньше чем ε :*

$$\rho(g(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$$

для любого i.

Следует подчеркнуть, что, как правило, точная траектория системы редко известна, а в действительности мы находим только ε-траекторию для достаточно малых положительных ε.

Существует естественная связь между допустимыми путями на символическом образе G и ε-траекториями отображения g. Можно сказать, что допустимый путь является следом ε-траектории, причем обратное также верно. Однако имеются некоторые соотношения между параметрами d, q, r символического образа и числом ε, для которых такое соответствие имеет место.

Утверждение 1. [3]

1) *Если последовательность $\{z_k\}$ является допустимым путем на символическом образе G и $x_k \in M(z_k)$, тогда последовательность $\{x_k\}$ является ε-траекторией отображения g для любого $\varepsilon > q + d$.*

2) *Если последовательность $\{x_k\}$ является ε-траекторией отображения g , $\varepsilon < r$ и вершина z_k определяется включением $x_k \in M(z_k)$, тогда последовательность $\{z_k\}$ является допустимым путем на символическом образе G.*

Отметим, что может иметься некоторое семейство отображений мгогообразия X в себя. Тогда для каждого отображения из этого семейства можно построить граф, а затем взять объединение этих графов. Полученный в результате объединения граф назовем символическим образом семейства отображений.

3.3. Символический образ ДСУ

При построении символического образа ДСУ производится некоторая дискретизация исходной ДСУ (1.1) по пространственной и временной координатам.

Покроем множество X клетками, каждая из которых является замкнутым шаром $b_\gamma(x)$ радиуса γ. с центром и точке x. В силу компактности множества X таких клеток можно взять конечное число:

$$\{M_1^\gamma, \ldots, M_L^\gamma\}. \tag{3.11}$$

где $x_1, \ldots, x_L$–центры клеток, для краткости клетку $C_\gamma(x_l)$ будем иногда обозначать C_l. Для краткости записи параметр γ будем иногда опускать.

Возьмем в качестве семейства отображений, о котором говорится в предыдущем подразделе, следующее

$$F^k_{\Delta t} : X \to X, \quad F^k_{\Delta t} = D_{(t_0, t_0+\Delta t]}(u_k), \quad u_k \in U_0, \tag{3.12}$$

где Δt – некоторое фиксированное число, подлежащее дальнейшему уточнению. Этот набор операторов осуществляет сдвиг по траекториям векторных полей уравнений (2.5) при фиксированном Δt: С помощью набора операторов сдвига (3.12) опишем множество переходов на графе для клеток набора (3.11).

Будем говорить, что существует переход из клетки M_i в клетку M_j если существует некоторое k, что $M_j \cap F^k_{\Delta t}(M_i) \neq \emptyset$. Этот факт будем обозначать

$$M_i \xrightarrow{u_k} M_j. \tag{3.13}$$

Определение 7. *Символический образ полисистемы (2.5) – это ориентированный граф $\mathcal{M}(\gamma, \Delta t)$, для которого множество вершин является набор клеток (3.11), а множество ориентированных дуг $i \to j$ определено равенством (3.13), при этом для каждого ребра $i \to j$ фиксировано управление перехода (3.13).*

Определение 8. *Граф $\mathcal{M}(\gamma, \Delta t)$ называется управляемым из вершины M_i в вершину M_j, если существует цепочка переходов*

$$M_i = M_{i_0} \xrightarrow{u_{i_1}} M_{i_1} \xrightarrow{u_{i_2}} \ldots \xrightarrow{u_{i_q}} M_{i_q} = M_j. \tag{3.14}$$

Нашей задачей будет научиться выносит суждение об управляемости или неуправляемости исходной ДСУ (прообраза) по управляемости или неуправляемости символического образа.

Зафиксируем две произвольные точки $x_0, x_* \in X$. Из утверждения ([3]) следует, что если полисистема управляема из точки x_0 в точку x_*, то символический образ также управляем из клетки $C_\gamma(x_0)$ в клетку $C_\gamma(x_*)$. Мы без ограничения общности предполагаем, что эти клетки принадлежат символическому образу. Условия обращения этого утверждения дает

Теорема 1. *Пусть относительно некоторой ДСУ (1.1) и символического образа полисистемы (2.5) выполнены следующие предположения.*

1. ДСУ (1.1) локально управляема вдоль траекторий с постоянным управлением $u_k \in U_0$, т.е. выполнено предположение 1.

2. Параметр пространственной дискретизации γ и параметр временной дискретизации $\Delta t > 0$ удовлетворяют условию

$$\begin{gathered} \operatorname{diam}\{F^k_{\Delta t}(M^\gamma_l)\} < \Delta x(y, u_k, \Delta t), \\ y \in M^\gamma_l, \quad k = 1, \ldots, N, \quad l = 1, \ldots, L, \end{gathered} \tag{3.15}$$

где значение $\Delta x(y, u_k, \Delta t)$ определено правой частью формулы (2.8) при $x_0 = y$, $t = \Delta t$ при любом $y \in M^\gamma_l$.

Тогда если для некоторых точек x_0, x_s имеется управляемость из клетки M_{l_0} в клетку M_{l_s} на символическом образе, то имеется также управляемость из точки x_0 в точку x_s в фазовом пространстве ДСУ, т.е. если существует цепочка переходов

$$M^\gamma_{l_0} \xrightarrow{u_1} M^\gamma_{l_1} \xrightarrow{u_2} \ldots \xrightarrow{u_s} M^\gamma_{l_s} \tag{3.16}$$

на символическом образе, то существует цепочка переходов

$$x_0 \xrightarrow{\hat{u}_1} x_1 \xrightarrow{\hat{u}_2} \ldots \xrightarrow{\hat{u}_s} x_s \tag{3.17}$$

в фазовом пространстве X. где $x_k \in M^\gamma_{l_k}$, $k = 0, \ldots s$.

Доказательство теоремы проведем по шагам. На нулевом шаге мы находимся в точке x_0. Предположим, что за $k-1$ предыдущих шагов точка x_0 посредством управлений $\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{k-1}$ переведена в точку x_{k-1}. Рассмотрим движение на шаге с номером k. Пусть $M^\gamma_{l_{k-1}} \xrightarrow{u_k} M^\gamma_{l_k}$. Будем использовать управление вида (2.9)

$$\begin{gathered} \hat{u}_k(s) = u_k + \Delta u_k(s), \quad \Delta u_k(0) = 0, \\ t_{k-1} < s \leq t_k = t_{k-1} + \Delta t, \end{gathered} \tag{3.18}$$

где $\Delta u_k(s)$ – локальное управление.

При $s = 0$ ДСУ находится в точке x_{k-1}. Локальное управление Δu_k обеспечивает корректировку траектории: фазовая траектория ДСУ при управлении вида (2.9) в момент времени $s = t_k$ попадает в точку x_k (см. рис. 1). Условие (3.15) позволяет попасть из точки x_{k-1} в любую точку любой клетки $M^{\gamma}_{l_k}$, имеющей непустое пересечение с образом $F^{k}_{\Delta t}(M^{\gamma}_{l_{k-1}})$ клетки M^{γ}_{k-1}.

После того, как мы попадем в точку x_k, можно перейти к следующему шагу. Теорема доказана.

remark

Замечание 1. *Ясно, что неравенство (3.15) справедливо для достаточно малых γ при фиксированном Δt.*

Замечание 2. *Управление вида (2.9), переводящее точку x_0 в точку x_* конструктивно построено при доказательстве теоремы 1. Это управление состоит из кусочно-постоянных управлений из множества (2.4) и локальных управлений из множества (2.6). Заметим, что, вообще говоря, существует много допустимых путей на символическом образе $\mathcal{M}(\gamma, \Delta t)$ из ячейки M_0 в ячейку M_*. Это позволяет выбрать наиболее оптимальный в каком-либо смысле путь.*

4. Некоторые замечания о ДСУ, не обладающих свойством локальной управляемости во всех точках фазового пространства.

Некоторые значимые ДСУ могут иметь в фазовом пространстве точки, что траектории исходящие из этих точек не являются локально управляемыми. Обозначим K множество таких точек для некоторой ДСУ. Известно, что для аналитической ДСУ множество K принадлежит некоторому подмногообразию размерности меньшей n.

Предположим вначале, что множество K не является инвариантным для данной ДСУ.

Если начальная точка x_0 и конечная точка x_s не принадлежат множеству K, то исследование управляемости проводится также, как и в случае общего положения. Действительно, точки x_k, $k = 0, \ldots, s$ на клетках символического образа можно взять так, чтобы их центры не лежали в множестве K.

Если начальная точка x_0 принадлежит множестве K, то так как оно не является инвариантным, то существует точка $\overline{x}_0$, достижимая из точки x_0. Поэтому если ДСУ управляема из точки $\overline{x}_0$ в точку x_*. что может быть проверено на символическом образе, то она также управляема из точки x_0 в точку x_*.

Аналогично рассматривается случай, когда конечная точка x_* принадлежит множеству K.

Рассмотрим теперь случай, когда множество K является инвариантным для ДСУ. Рассмотрим ее ε-окрестность $V_\varepsilon(K)$. На множестве $V_\varepsilon(K)$ управляемость ДСУ исследуется методами, изложенными в [8, 9]. На каждой компоненте связности множества $X \setminus V_\varepsilon(K)$ (в топологии многообразия X) ДСУ находится в общем положении и ее управляемость может быть исследована с помощью символического образа.

Список литературы

[1] Г.С.Осипенко. *О символическом образе динамической системы*, сб. Граничные задачи, Пермь, 1983, 101-105.

[2] Г.С.Осипенко. *Проверка условия трансверсальности методами символической динамики*, Дифференциальные уравнения, т.26, N9, 1990, 1126-1132.

[3] G.S.Osipenko. *The periodic points and symbolic dynamics*, in Seminar on Dynamical Systems, Birkhauser Verlag, Basel, 1993, 261-267.

[4] G.S.Osipenko, I.V.Il'in, *Methods of Applied Symbolis Dynamics*, Proceedings of Dynamic Systems and Applications, v.2, 1996, 451-460.

[5] Grasse K.A. *On accessibility and normal accessibility: the openess of controllability in the fine C^0-topology.* J. Differential Equation, 1984, 53, N 3, 387-441.

[6] Gauthier J.-P., Bornard G. *An openess condition for the controllability of nonlinear systems.* SIAM J. Contr. and Optim., 1982, 20, т 6, 808-814.

[7] Sussmann H.J. *Some properties of vector fields systems wich are not altered by small perturbations.* J. Differetial Equatons, 1976,20, т 2, 292–315.

[8] Khryashchev S.M. *Spectral conditions of spherical controllability linear with respect to the state dynamical systems.* Proceedings of the third European Control Conference, Roma, 1995, v.4, part 2, pp. 3454-3455.

[9] Хрящев С.М. *Спектральные условия управляемости динамических систем со свойством зацепляемости.* Деп. ВИНИТИ т 1021-В96, с. 1–25.

[10] Хрящев С.М. *О локальной управляемости динамической системы вдоль траектории.* Деп. ВИНИТИ 24.03.97, т 868-В 97, с.1–14.