

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 3, 1998

Электронный журнал,
рег. № П23275 от 07.03.97

<http://www.neva.ru/journal>
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

численные методы

НОВЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Ю.Г.Исполов, Е.А.Постоялкина, Н.Н.Шабров

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29
С.-Петербургский государственный технический университет
Кафедра "Механика и процессы управления"
e-mail: shabrov@iris2.stu.neva.ru

Аннотация.

Рассматриваются вопросы численного решения связанной задачи термоупругости. На основе методов семейства Рунге–Кутты построены новые алгоритмы численного интегрирования дифференциальных уравнений конечноэлементной модели задачи. При построении методов учитываются внутренние свойства механической системы. Для решения задачи в одномерной постановке предложен улучшенный алгоритм, в котором использованы идеи метода прямого математического моделирования, разработанного Б. Ф. Шорром.

Анализ качества работы алгоритмов проводится на примере задачи о распространении плоской термоупругой волны, решения которой в связанной и несвязанной постановках имеют не только количественное, но и качественное различие. Рассмотрен вопрос о возможности предлагаемых методов отразить эту особенность распространения термоупругой волны, возникающую при учете эффекта связанности.

1 Введение

Достаточно часто задача термоупругости решается в предположении, что в уравнении теплопроводности можно пренебречь слагаемым зависящим от скорости движения, т.е. задача рассматривается в так называемой несвязанной постановке. В ряде задач это приводит к положительным результатам. Но в некоторых случаях, например, при резком изменении температурного поля, необходимо учитывать влияние этого слагаемого, т.е. рассматривать задачу в связанной постановке. Аналитическое решение связанной задачи термоупругости может быть получено только при упрощающих предположениях или для конкретных задач. В общем случае получение точного решения очень сложно, а иногда и невозможно. Поэтому особый интерес представляют приближенные методы решения, в частности численные методы интегрирования. В работе предложены новые методы численного интегрирования связанной задачи термоупругости, построенные с учетом внутренних свойств исходной системы и ее конечномерной модели.

2 Постановка задачи

В общем случае задача связанной термоупругости в дифференциальной форме ставится следующим образом.

Требуется определить вектор перемещения \underline{u} и температуру θ , которые удовлетворяют следующим уравнениям при определенных начальных и граничных условиях

$$\begin{aligned}\rho\ddot{\underline{u}} &= \mu\Delta\underline{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \underline{u} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\nabla\theta + \underline{F}, \\ \rho c_\varepsilon\dot{\theta} &= k\Delta\theta - b + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0\nabla \cdot \dot{\underline{u}},\end{aligned}$$

где $\theta \equiv (T - T_0)$, T — текущая температура, T_0 — абсолютная температура в естественном состоянии, ρ — массовая плотность, λ, μ — коэффициенты Ламе, α — температурный коэффициент линейного расширения, \underline{F} — вектор интенсивности внешних нагрузок, c_ε — теплоемкость при постоянной деформации, k — коэффициент теплопроводности, b — интенсивность подвода тепла, точкой обозначена производная по времени, ∇ — оператор Гамильтона, Δ — оператор Лапласа.

Граничные условия задачи термоупругости складываются из механических и тепловых граничных условий.

Механические граничные условия могут быть поставлены в следующей форме:

- 1) заданы перемещения на части поверхности S_u ,
- 2) заданы внешние нагрузки на S_p .

В качестве основных граничных условий для температурного поля обычно задаются:

- 1) температура на S_θ ,
- 2) поток тепла через поверхность на S_q ,
- 3) теплообмен с окружающей средой на S_h .

$S_u, S_p, S_\theta, S_q, S_h$ — взаимодополняющие друг друга части поверхности тела.

Начальные условия ставятся следующим образом:

$$\underline{u}|_{t=0} = \underline{u}_0, \quad \underline{\dot{u}}|_{t=0} = \underline{v}_0, \quad \theta(0) = \theta_0,$$

где $\underline{u}_0, \underline{v}_0, \theta_0$ — начальные значения перемещений, скоростей и температуры, соответственно.

Используя вариационный подход и дискретизируя задачу методом конечных элементов, можно получить следующую систему матричных уравнений

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{u} + K_1 u - C \theta &= F(t), \\ C^T \dot{u} + M_2 \dot{\theta} + K_2 \theta &= Q(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(t)$ и $\theta(t)$ — векторы-столбцы перемещений и температуры, M_1 — матрица масс, $M_1^T = M_1 > 0$, K_1 — матрица жесткости, $K_1^T = K_1 > 0$, M_2 — матрица теплоемкости, $M_2^T = M_2 > 0$, K_2 — матрица теплопроводности, $K_2^T = K_2 > 0$, C — матрица термоупругости, $F(t)$ и $Q(t)$ — векторы-столбцы сил и тепловых нагрузок.

Система (1) это связанные между собой перекрестными слагаемыми уравнение колебаний консервативной системы и уравнение теплопроводности (его можно рассматривать как уравнение, описывающие систему с большой диссипацией энергии).

Начальные условия в этой формулировке задачи определяются равенствами:

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0, \quad \theta(0) = \theta_0,$$

а граничные условия учтены при выводе соотношений (1).

3 Анализ свойств конечноэлементной модели

Проведем анализ свойств конечноэлементной модели. Разыскивая частное решение (1) в виде:

$$u = a_u e^{\lambda t} \quad \theta = a_\theta e^{\lambda t}, \quad (2)$$

найдем собственные значения λ_s и собственные векторы a_{us} и $a_{\theta s}$. Величины $\lambda_s, a_{us}, a_{\theta s}$ тождественно удовлетворяют следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \lambda_s^2 M_1 a_{us} + K_1 a_{us} - C a_{\theta s} &= 0, \\ \overline{\lambda_s} M_2 a_{\theta s} + K_2 \overline{a_{\theta s}} + \overline{\lambda_s} C^T \overline{a_{us}} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Преобразуем (3), умножив слева обе части первого уравнения на $\overline{\lambda_s} \overline{a_{us}}^T$, а обе части второго — на $\overline{a_{\theta s}}^T$ и затем транспонировав его

$$\begin{aligned} |\lambda_s|^2 \lambda_s \overline{a_{us}}^T M_1 a_{us} + \overline{\lambda_s} \overline{a_{us}}^T K_1 a_{us} - \overline{\lambda_s} \overline{a_{us}}^T C a_{\theta s} &= 0, \\ \overline{\lambda_s} \overline{a_{\theta s}}^T M_2 a_{\theta s} + \overline{a_{\theta s}}^T K_2 a_{\theta s} + \overline{\lambda_s} \overline{a_{us}}^T C a_{\theta s} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$m_{1s} = \overline{a_{us}}^T M_1 a_{us}, \quad m_{2s} = \overline{a_{\theta s}}^T M_2 a_{\theta s}, \quad k_{1s} = \overline{a_{us}}^T K_1 a_{us}, \quad k_{2s} = \overline{a_{\theta s}}^T K_2 a_{\theta s}.$$

Поскольку матрицы M_1, M_2, K_1, K_2 — симметричные и знакоопределенные положительные, то введенные величины — вещественные и положительные числа

$$m_{1s} > 0, m_{2s} > 0, k_{1s} > 0, k_{2s} > 0. \quad (5)$$

С учетом указанных обозначений система (4) принимает вид

$$\begin{aligned} |\lambda_s|^2 \lambda_s m_{1s} + \overline{\lambda_s} k_{1s} - \overline{\lambda_s} \overline{a_{us}}^T C a_{\theta s} &= 0, \\ \overline{\lambda_s} m_{2s} + k_{2s} + \overline{\lambda_s} \overline{a_{us}}^T C a_{\theta s} &= 0. \end{aligned}$$

Сложим левые и правые части этих уравнения и выделим вещественную часть у полученного равенства

$$|\lambda_s|^2 m_{1s} \operatorname{Re} \lambda_s + k_{1s} \operatorname{Re} \overline{\lambda_s} + m_{2s} \operatorname{Re} \overline{\lambda_s} + k_{2s} = 0.$$

Отсюда следует

$$\operatorname{Re} \lambda_s = - \frac{k_{2s}}{|\lambda_s|^2 m_{1s} + k_{1s} + m_{2s}}.$$

Тогда в силу соотношений (5) имеем $\operatorname{Re} \lambda_s < 0$. Полученный результат свидетельствует об устойчивости решения системы уравнений конечноэлементной модели связанной задачи термоупругости. К этому заключению можно прийти и путем построения функции Ляпунова.

Построим асимптотические оценки корней характеристического уравнения. Система (1) при переходе к новым безразмерным переменным допускает выделение малого параметра

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_1 \ddot{\varphi} + \widetilde{K}_1 \varphi - \sqrt{\delta} \widetilde{C} \vartheta &= \widetilde{F}(\eta), \\ \widetilde{M}_2 \ddot{\vartheta} + \widetilde{K}_2 \vartheta + \sqrt{\delta} \widetilde{C}^T \dot{\varphi} &= \widetilde{Q}(\eta), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\varphi = \frac{uv_e(\lambda + 2\mu)}{\varkappa(3\lambda + 2\mu)\alpha T_0}, \quad \vartheta = \frac{\theta}{\sqrt{\delta}T_0}, \quad \eta = \frac{v_e^2}{\varkappa}t, \quad (7)$$

$v_e = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ — скорость распространения в упругой среде волн расширения, \varkappa — коэффициент температуропроводности, $\delta = \frac{T_0(3\lambda + 2\mu)^2\alpha^2}{(\lambda + 2\mu)\rho c_\varepsilon}$ — параметр связанности, характеризующий степень взаимного влияния колебаний консервативной системы, описываемых первым уравнением (6) и процессов распространения тепла (второе уравнение (6)). Параметр связанности обычно является малым. Значения δ для металлов лежат в пределах 0.01 ... 0.03.

При $\delta = 0$ корни характеристического уравнения задачи (6) разделяются на две группы. Одна включает в себя пары чисто мнимых собственных чисел задачи о колебаниях консервативной системы: $\lambda_{\pm s} = \pm i\Omega_s$, а вторая — вещественные отрицательные собственные числа задачи теплопроводности: $\lambda_p = -\mu_p$, где Ω_s, μ_p — вещественные положительные числа.

Асимптотическое разложение корней характеристического уравнения связанной задачи термоупругости по степеням параметра δ имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm s} &= \pm i\Omega_s + \delta \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_\theta} \frac{\hat{c}_{sj}^2 \mu_j}{\Omega_s^2 + \mu_j^2} \pm i \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{\hat{c}_{sj}^2 \mu_j}{\Omega_s^2 + \mu_j^2} \right) + \dots, \\ \lambda_p &= -\mu_p + \delta \mu_p \sum_{j=1}^{k_u} \frac{\hat{c}_{pj}^2}{\Omega_j^2 + \mu_p^2} + \dots, \end{aligned}$$

где \hat{c}_{sj} — элементы матрицы $\widehat{C} = U_1^T \widetilde{C} U_2$, U_1, U_2 — модальные матрицы задач динамики и теплопроводности, на которые расщепляются система (6) при $\delta = 0$. Таким образом, при $\delta \neq 0$ вместо пар чисто мнимых корней получаем пары комплексно сопряженных корней с малыми отрицательными вещественными частями, а вещественные отрицательные собственные числа несколько изменяются по абсолютной величине, оставаясь вещественными и отрицательными.

4 Построение алгоритмов численного интегрирования на основе методов семейства Рунге - Кутты

Метод численного интегрирования должен быть согласован с внутренними свойствами системы [4]. Так для консервативных систем следует применять методы, которые сохраняли бы полную механическую энергию системы, а для систем с большой диссипацией энергии желательно использовать методы, которые адекватно описывали бы поглощение энергии. Дифференциальные уравнения конечноэлементной модели связанной задачи термоупругости (1), представляют собой связанные перекрестными слагаемыми уравнение колебаний консервативной системы и уравнение теплопроводности, которое можно рассматривать как уравнение, описывающие систему с большой диссипацией энергии. Алгоритм численного интегрирования должен учитывать эту существенную особенность задачи. Построение алгоритма будем осуществлять на основе численных методов класса Рунге-Кутты.

Для системы уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, t)$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$ методы Рунге-Кутты задаются следующими формулами

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i,$$

$$k_i = f(t_n + c_i h, x_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \quad (i = 1, \dots, s),$$

где x_n — приближенное значение $x(t_n)$, $t_n = nh$, h — шаг интегрирования. Значения коэффициентов b_i , c_i , a_{ij} в конкретном методе Рунге - Кутты определяются таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array} \quad (8)$$

Перепишем систему (1) следующим образом

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{u} + K_1 u &= F(t) + C \theta, \\ M_2 \dot{\theta} + K_2 \theta &= Q(t) - C^T \dot{u}. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу изложенного выше, предлагается к первому уравнению системы (9) применить метод хорошо приспособленный для решения задач о колебаниях консервативных систем [4]. Одним из таких методов является метод трапеций, который и был использован. Таблица (8) этого метода имеет вид

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Ко второму уравнению системы (9) предлагается применить метод адекватно описывающий процессы в системах с большой диссипацией энергии. В качестве такого метода был выбран метод [5], задаваемый следующей таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & \alpha_i & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \alpha_i & \alpha_i \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \quad (i = 1, 2), \quad (10)$$

где α_i принимает одно из двух значений

$$\alpha_1 = (2 - \sqrt{2})/2, \quad \alpha_2 = (2 + \sqrt{2})/2.$$

Со слагаемыми $C\theta$ и $C^T\dot{u}$ в правых частях уравнений (9) будем обращаться так же как с $F(t)$ и $Q(t)$ и, кроме того, будем считать, что значение правой части в середине шага может быть заменено на полусумму значений в начале и конце шага.

Применение указанных методов к соответствующим уравнениям, с учетом сделанных замечаний, приводит к следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \left(M_1 + \frac{h^2}{4}K_1\right)k_v &= -K_1\left(u_n + \frac{h}{2}v_n\right) + \frac{1}{2}C(\theta_n + \theta_{n+1}) + \frac{1}{2}(F_n + F_{n+1}), \\ v_{n+1} &= v_n + hk_v, \\ k_u &= v_n + \frac{h}{2}k_v, \\ u_{n+1} &= u_n + hk_u, \\ (M_2 + h\alpha_i K_2)k_{1\theta} &= -K_2\theta_n - \frac{1}{2}C^T(v_n + v_{n+1}) + \frac{1}{2}(Q_n + Q_{n+1}), \\ (M_2 + h\alpha_i K_2)k_{2\theta} &= -K_2\left(\theta_n + h\left(\frac{1}{2} - \alpha_i\right)k_{1\theta}\right) - \frac{1}{2}C^T(v_n + v_{n+1}) + \frac{1}{2}(Q_n + Q_{n+1}), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + hk_{2\theta}. \end{aligned}$$

Непосредственное решение такой системы линейных алгебраических уравнений достаточно трудоемко, поскольку она имеет несимметричную матрицу размера $3k \times 3k$. Поэтому предлагается итерационная процедура, на

каждом шаге которой нужно решать системы уравнений с симметричными матрицами размера $k \times k$

$$\begin{aligned}
 (M_2 + h\alpha_i K_2)k_{1\theta}^{(i+1)} &= -K_2\theta_n - \frac{1}{2}C^T(v_n + v_{n+1}^{(i)}) + \frac{1}{2}(Q_n + Q_{n+1}), \\
 (M_2 + h\alpha_i K_2)k_{2\theta}^{(i+1)} &= -K_2(\theta_n + h(\frac{1}{2} - \alpha_i)k_{1\theta}^{(i+1)}) - \frac{1}{2}C^T(v_n + v_{n+1}^{(i)}) + \frac{1}{2}(Q_n + Q_{n+1}), \\
 \theta_{n+1}^{i+1} &= \theta_n + hk_{2\theta}, \\
 (M_1 + \frac{h^2}{4}K_1)k_v^{(i+1)} &= -K_1(u_n + \frac{h}{2}v_n) + \frac{1}{2}C(\theta_n + \theta_{n+1}^{(i+1)} + \frac{1}{2}(F_n + F_{n+1})), \\
 v_{n+1}^{(i+1)} &= v_n + hk_v^{(i+1)}, \\
 k_u^{(i+1)} &= v_n + \frac{h}{2}k_v^{(i+1)}, \\
 u_{n+1}^{(i+1)} &= u_n + hk_u^{(i+1)} \quad (i = 0, 1, \dots).
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

В качестве начального приближения величины $v_{n+1}^{(0)}$ выбирается значение этой величины в предыдущий момент времени — v_n .

Для повышения точности был также построен алгоритм, в котором к первому уравнению системы (9) вместо метода трапеций применен метод четвертого порядка точности [3], задаваемый следующей таблицей Бутчера [4]

$$\begin{array}{c|cc}
 \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\
 \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\
 \hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
 \end{array}
 \tag{12}$$

5 Анализ качества работы алгоритмов, построенных на основе методов семейства Рунге-Кутты

Анализ качества работы, алгоритмов проводился на примере связанной задачи о распространении плоской термоупругой волны, точное решение которой описано в литературе [1], [8]. Впервые эта задача в несвязанной постановке была решена В. И. Даниловской [2]. Задача формулируется следующим образом. Пусть граница $x = 0$ полупространства $x \geq 0$, свободного от напряжений и имеющего температуру T_0 , мгновенно принимает температуру T_c . При этом предполагается, что компоненты перемещения и температура имеют вид

$$u_x = u_x(x, t), \quad u_y = u_z = 0, \quad T = T(x, t).$$

В [1] решение этой задачи, которым мы воспользовались для оценки получаемых результатов, приведено в безразмерных величинах в виде зависимостей напряжения σ от координаты ξ для различных моментов времени η , где

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{(3\lambda + 2\mu)\alpha T_0}, \quad \xi = \frac{v_e}{\alpha}x, \quad \eta = \frac{v_e^2}{\alpha}t,$$

σ_x — компонента тензора напряжения.

Точное решение задачи в момент времени $\eta = 0.25$ при значении параметра связанности $\delta = 0.0168$ приведено на рис. 1. Численное решение, полученное при помощи алгоритма (11), построенного на основе метода трапеций и метода (10) показано на рис. 2.

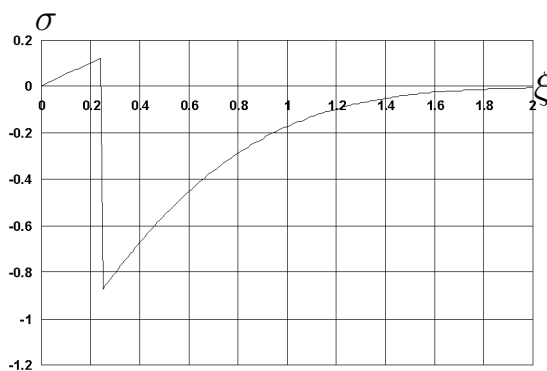


Рис. 1. Точное решение задачи.

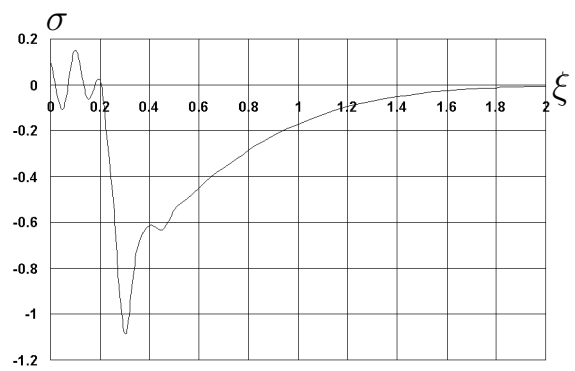


Рис. 2. Численное решение задачи, полученное при помощи алгоритма, построенного с использованием метода трапеций.

Сравнивая эти кривые, легко заметить, что хотя общий характер распределения напряжения отражается достаточно хорошо, вблизи границы полупространства вместо плавного возрастания напряжения наблюдаются неоправданные осцилляции, а скачок напряжения на фронте волны размыт.

Применение к задаче алгоритма, в котором вместо метода трапеций использован метод четвертого порядка точности, задаваемый таблицей Бутчера (12) не приводит к сколько-нибудь заметному повышению точности. Соответствующая кривая показана на рис. 3.

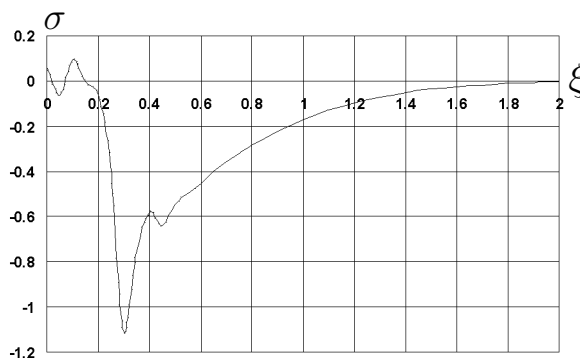


Рис. 3. Численное решение задачи, полученное при помощи алгоритма построенного с использованием метода 4-го порядка точности.

По-видимому, причина происходящего в том, что конечноэлементная модель не позволяет адекватно отразить специфику задачи — резкое изменение температурного поля и поля напряжений.

6 Алгоритм решения задачи о распространении плоской термоупругой волны, построенный на основе метода прямого математического моделирования (ПММ)

Для того, чтобы корректно описать распространение волны деформаций предлагается построить алгоритм, в котором величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние, определяются соотношениями метода ПММ, а значения температуры — соотношениями, полученными на основе метода (10).

Приведем общие принципы и некоторые уравнения метода ПММ, более полно они изложены в [7]. Деформируемое тело разбивается на m конечных структурных элементов, которым присваиваются номера $j = 1, 2, \dots, m$. Границы j -го элемента (узлы) обозначаются: левая — $j - 1, j$, правая — $j, j + 1$. В элементе выделяются три части: внутренняя упругоинерционная континуальная часть и две граничные связи, которые можно представить в виде бесконечно тонких жестких безынерционных пластин (см. рис. 4.).

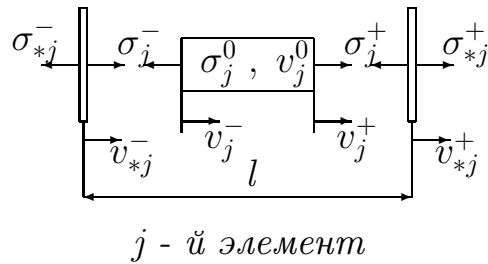


Рис. 4. Конечный структурный элемент.

Здесь введены обозначения: σ_j^0, v_j^0 — напряжение и скорость упругоинерционной части j -го элемента, σ_j^+, σ_j^- — напряжения на границах упругоинерционной части j -го элемента, здесь и далее “+” и “-” означают правую и левую границы, соответственно, v_j^+, v_j^- — скорости границ упругоинерционной части j -го элемента, $\sigma_{*j}^+, \sigma_{*j}^-$ — напряжения на внешних границах j -го элемента, v_{*j}^+, v_{*j}^- — скорости внешних границах j -го элемента.

Шаг интегрирования выбирается равным времени прохождения волны по элементу — $h = l/v_e$. Рассмотрим j -й элемент в течении промежутка времени равного выбранному таким образом шагу интегрирования. В начальный момент времени напряженное состояние элемента характеризуется величинами σ_j^0 и v_j^0 . Затем возникающие зоны возмущений, которым соответствуют значения величин σ_j^+, v_j^+ и σ_j^-, v_j^- , начинают распространяться вглубь элемента. До момента встречи фронтов возмущений в средней части элемента справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_j^- - \sigma_j^0 &= -\rho v_e (v_j^- - v_j^0), \\ \sigma_j^+ - \sigma_j^0 &= \rho v_e (v_j^+ - v_j^0). \end{aligned} \quad (13)$$

В момент встречи фронтов возмущений начинается перераспределение этих величин, после чего к концу рассматриваемого промежутка времени устанавливаются одинаковые на всем элементе значения напряжения σ_j и скорости v_j . Их можно определить по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \sigma_j^+ + \sigma_j^- - \sigma_j^0 \\ v_j &= v_j^+ + v_j^- - v_j^0 \end{aligned}$$

Граничные связи находятся в равновесии под действием приложенных сил

$$\begin{aligned} \sigma_{*j}^- &= \sigma_j^- \\ \sigma_{*j}^+ &= \sigma_j^+ \end{aligned} \quad (14)$$

Условия взаимодействия смежных элементов имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{*j}^- &= \sigma_{*j-1}^+ \\ v_{*j}^- &= v_{*j-1}^+ \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{*j}^+ &= \sigma_{*j+1}^- \\ v_{*j}^+ &= v_{*j+1}^- \end{aligned} \quad (16)$$

Деформация, соответствующая остаточному (неупругому) удлинению элемента за период времени равный выбранному шагу интегрирования, может быть вычислена через скорости внешней границы и границы упругоинерционной части элемента следующим образом

$$0.5v_e\Delta\epsilon_{\cdot}^{\pm} = \pm(v_*^{\pm} - v^{\pm}) \quad (17)$$

В рассматриваемой задаче остаточное удлинение определяется изменением температуры — $\Delta\epsilon_{\cdot}^{\pm} = \Delta\epsilon_{\cdot}^{\pm}$. Пусть в начале текущего этапа времени средняя температура j -го элемента — θ_j^0 , а в конце этапа температура его правой и левой границ — θ_j^{\pm} , соответственно. Тогда, принимая во внимание удлинение каждой половины элемента под действием температуры, можем записать

$$\Delta\epsilon_{\cdot}^{\pm} = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha (\theta_j^{\pm} - \theta_j^0)$$

Воспользовавшись выражением (17), получим

$$\begin{aligned} v_{*j}^- - v_j^- &= -\frac{1}{2}v_e \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha (\theta_j^- - \theta_j^0) = -\frac{1}{2}v_e \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha \Delta\theta_j^{-0} \\ v_{*j}^+ - v_j^+ &= \frac{1}{2}v_e \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha (\theta_j^+ - \theta_j^0) = \frac{1}{2}v_e \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha \Delta\theta_j^{+0} \end{aligned} \quad (18)$$

Переходя к безразмерным величинам

$$\bar{\theta} = \frac{\theta}{T_0}, \quad \bar{x} = \frac{v_e}{\alpha} x, \quad \bar{t} = \frac{v_e^2}{\alpha} t, \quad \bar{v} = \frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu)\alpha T_0} v_e v, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(3\lambda + 2\mu)\alpha T_0}, \quad (19)$$

запишем систему рекуррентных соотношений, которые позволяют по известным значениям скоростей, напряжений и температуры в начале текущего (n -го) промежутка времени определить значения скоростей и напряжений в конце текущего, т.е. в начале следующего — $n+1$ промежутка времени (черта над новыми безразмерными переменными в дальнейшем не ставится):

$$\begin{aligned}
 v_{*j}^- &= \frac{1}{2} [(v_{j-1}^n + v_j^n) - (\sigma_{j-1}^n - \sigma_j^n) + \frac{1}{2}(\Delta\theta_{j-1}^{+n} - \Delta\theta_j^{-n})], \\
 v_{*j}^+ &= \frac{1}{2} [(v_{j+1}^n + v_j^n) + (\sigma_{j+1}^n - \sigma_j^n) - \frac{1}{2}(\Delta\theta_{j+1}^{-n} - \Delta\theta_j^{+n})], \\
 \sigma_j^- &= \sigma_j^n - (v_{*j}^- - v_j^n) - \frac{1}{2}\Delta\theta_j^{-n}, \\
 \sigma_j^+ &= \sigma_j^n + (v_{*j}^+ - v_j^n) - \frac{1}{2}\Delta\theta_j^{+n}, \\
 v_j^- &= v_j^n - (\sigma_j^- - \sigma_j^n), \\
 v_j^+ &= v_j^n + (\sigma_j^+ - \sigma_j^n), \\
 \sigma_j^{n+1} &= \sigma_j^+ + \sigma_j^- - \sigma_j^n, \\
 v_j^{n+1} &= v_j^+ + v_j^- - v_j^n.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Выражения для v_{*j}^- и v_{*j}^+ получены из уравнений (13), (14), (18), записанных для левой и правой границ элемента и уравнений (15) и (16). Соотношения для σ_j^- и σ_j^+ определяются уравнениями (13) и (18), для v_j^- и v_j^+ — уравнениями (13).

Как уже было отмечено, значения температуры будем определять из второго уравнения системы (9), используя алгоритм, построенный на основе метода (10). С учетом перехода к безразмерным переменным и сделанных выше замечаний относительно слагаемого $C^T v$, получим

$$\begin{aligned}
 (\widetilde{M}_2 + h\alpha_i \widetilde{K}_2)\Delta_1 &= -\widetilde{K}_2\theta_n - \frac{1}{2}\widetilde{C}^T(v_n + v_{n+1}) + \frac{1}{2}(\widetilde{Q}_n + \widetilde{Q}_{n+1}), \\
 (\widetilde{M}_2 + h\alpha_i \widetilde{K}_2)\Delta_2 &= -\widetilde{K}_2(\theta_n + h(\frac{1}{2} - \alpha_i)\Delta_1) - \frac{1}{2}\widetilde{C}^T(v_n + v_{n+1}) + \frac{1}{2}(\widetilde{Q}_n + \widetilde{Q}_{n+1}), \\
 \theta_{n+1} &= \theta_n + h\Delta_2.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Эти соотношения определяют температуру в узлах. Входящие в (20) значения $\Delta\theta_j^{-n}$ и $\Delta\theta_j^{+n}$ предлагается выразить следующим образом

$$\begin{aligned}
 \Delta\theta_j^{-n} &= (\beta\theta_{j-1,j} + (1-\beta)\theta_{j,j+1})^{n+1} - (\beta\theta_{j-1,j} + (1-\beta)\theta_{j,j+1})^n \\
 \Delta\theta_j^{+n} &= (\beta\theta_{j,j+1} + (1-\beta)\theta_{j-1,j})^{n+1} - (\beta\theta_{j,j+1} + (1-\beta)\theta_{j-1,j})^n
 \end{aligned} \tag{22}$$

где параметр β может принимать одно из следующих значений: 1/2, 3/4, 1, какое из них предпочтительнее определяется из численного эксперимента. Ряд тестов свидетельствует о том, что значение величины β не оказывает заметного влияния на результаты работы алгоритма. Но, по-видимому, $\beta = 3/4$ является более предпочтительным.

Объединим соотношения (20), (21), (22) в единый алгоритм и организуем итерационную процедуру:

$$(\widetilde{M}_2 + h\alpha_i\widetilde{K}_2)\Delta_1^{(i+1)} = -\widetilde{K}_2\theta^n - \frac{1}{2}\widetilde{C}^T A_v(v^n + v_{n+1}^{(i)}) + \frac{1}{2}(\widetilde{Q}^n + \widetilde{Q}^{n+1}),$$

$$(\widetilde{M}_2 + h\alpha_i\widetilde{K}_2)\Delta_2^{(i+1)} = -\widetilde{K}_2(\theta^n + h(\frac{1}{2} - \alpha_i)\Delta_1^{(i+1)}) - \frac{1}{2}\widetilde{C}^T A_v(v^n + v_{n+1}^{(i)}) + \frac{1}{2}(\widetilde{Q}^n + \widetilde{Q}^{n+1}),$$

$$\theta_{n+1}^{(i+1)} = \theta^n + h\Delta_2^{(i+1)},$$

$$\Delta\theta_{-n}^{(i+1)} = (\beta A_{\theta-}\theta_{n+1}^{(i+1)} + (1 - \beta)A_{\theta+}\theta_{n+1}^{(i+1)}) - (\beta A_{\theta-}\theta^n + (1 - \beta)A_{\theta+}\theta^n),$$

$$\Delta\theta_{+n}^{(i+1)} = (\beta A_{\theta+}\theta_{n+1}^{(i+1)} + (1 - \beta)A_{\theta-}\theta_{n+1}^{(i+1)}) - (\beta A_{\theta+}\theta^n + (1 - \beta)A_{\theta-}\theta^n),$$

$$v_*^{- (i+1)} = A_v^- v^n + A_\sigma^- \sigma^n - A_{\Delta\theta-}^- \Delta\theta_{-n}^{(i+1)} + A_{\Delta\theta+}^- \Delta\theta_{+n}^{(i+1)},$$

$$v_*^{+ (i+1)} = A_v^+ v^n + A_\sigma^+ \sigma^n - A_{\Delta\theta+}^{-T} \Delta\theta_{-n}^{(i+1)} + A_{\Delta\theta+}^+ \Delta\theta_{+n}^{(i+1)},$$

$$\sigma_{-}^{(i+1)} = \sigma^n - (v_*^{- (i+1)} - v^n) - \frac{1}{2}\Delta\theta_{-n}^{(i+1)},$$

$$\sigma_{+}^{(i+1)} = \sigma^n + (v_*^{+ (i+1)} - v^n) - \frac{1}{2}\Delta\theta_{+n}^{(i+1)},$$

$$v_{-}^{(i+1)} = v^n - (\sigma_{-}^{(i+1)} - \sigma^n),$$

$$v_{+}^{(i+1)} = v^n + (\sigma_{+}^{(i+1)} - \sigma^n),$$

$$\sigma_{n+1}^{(i+1)} = \sigma_{+}^{(i+1)} + \sigma_{-}^{(i+1)} - \sigma^n,$$

$$v_{n+1}^{(i+1)} = v_{+}^{(i+1)} + v_{-}^{(i+1)} - v^n,$$

где: $\theta^n, Q^n, \Delta_1, \Delta_2, v^n, \Delta\theta^{\pm n}, \sigma^{\pm}, v_*^{\pm}, v^{\pm}, \sigma^n$ — это столбцы, состоящие из компонент вида: $\theta_i^n, Q_i^n, \Delta_{1i}, \Delta_{2i}, v_j^n, \Delta\theta_j^{\pm n}, \sigma_j^{\pm}, v_{*j}^{\pm}, v_j^{\pm}, \sigma_j^n, i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, m$.

$$A_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{v-} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, A_v^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{2} \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{\sigma}^{-} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & & & & & \\ & -\frac{1}{2} & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, A_{\sigma}^{+} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\ & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_{\Delta\theta}^{-} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \\ & \frac{1}{4} & & & & \\ & & \frac{1}{4} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, A_{\Delta\theta}^{-+} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ \frac{1}{4} & 0 & & & & \\ & \frac{1}{4} & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, A_{\Delta\theta}^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & & & & & \\ & \frac{1}{4} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$A_{\theta}^{-} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, A_{\theta}^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Применение полученного алгоритма к решению связанной задачи о распространении плоской термоупругой волны показало, что использование соотношений метода ПММ позволило значительно улучшить качество воспроизводимых результатов: устранить неоправданные осцилляции вблизи границы полупространства, получить четкий скачок напряжения. Соответствующая кривая изображена на рис. 5 (см. для сравнения точное решение задачи — рис. 1).

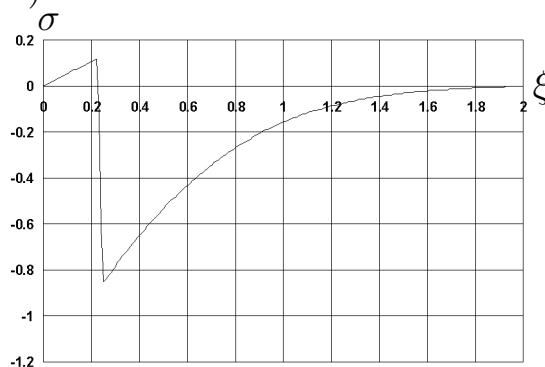


Рис. 5. Численное решение задачи о распространении плоской термоупругой волны, полученное при помощи алгоритма, построенного с использованием соотношений метода ПММ.

В [6] отмечено, что решение задачи о распространении плоской термоупругой волны в несвязанной ($\delta = 0$) и связанной ($\delta \neq 0$) постановках имеют качественное различие: при $\delta = 0$ разрыв напряжения остается неизменным, а при учете эффекта связанности он с течением времени быстро уменьшается. Построенный метод хорошо отражает эту особенность распространения термоупругой волны — рис. 6 и 7. Кривая на рис. 7 соответствует $\delta = 0.431$. Такое значение параметра связанности имеет поливинилбутираль [1].

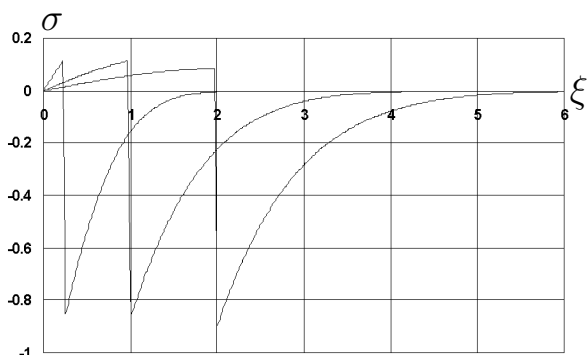


Рис. 6. Численное решение задачи в динамической постановке ($\delta = 0$), полученное при помощи алгоритма построенного с использованием соотношений метода ПММ для моментов времени $\eta = 0.25, \eta = 1, \eta = 2$.

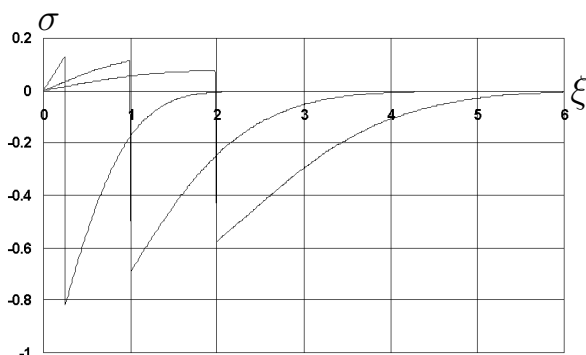


Рис. 7. Численное решение задачи в связанной постановке ($\delta = 0.431$), полученное при помощи алгоритма построенного с использованием соотношений метода ПММ для моментов времени $\eta = 0.25, \eta = 1, \eta = 2$.

7 Заключение

Предлагаемые нами методы численного интегрирования конечноэлементных уравнений связанной задачи термоупругости, построенные на основе методов семейства Рунге-Кутты и учитывающие внутренние свойства механической системы, являются достаточно эффективными, по крайней мере в тех случаях, когда изменения полей напряжений и температур не являются слишком быстрыми. Эти алгоритмы, могут применяться и в двух- и трехмерных задачах. В одномерных задачах в случае резкого изменения полей напряжений и температур более высокую точность численного решения дает другой предлагаемый нами метод, использующий для решения задачи динамики идеи метода прямого математического моделирования.

Список литературы

- [1] Грибанов В. Ф., Паничкин Н. Г. Связанные и динамические задачи термоупругости. М.:Машиностроение, 1984. 184с.
- [2] Даниловская В. И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы. Прикладная математика и механика, 1950, т. XIV, вып.3.
- [3] Исаков Н. Ю., Исполов Ю. Г., Шабров Н. Н. Метод численного интегрирования уравнений динамики больших конечноэлементных моделей. Проблемы прочности, 1987, N 12.
- [4] Исполов Ю. Г. Численное решение задачи Коши для конечномерных математических моделей механических систем. Труды СПбГТУ, N 446, 1993.
- [5] Исполов Ю. Г., Шабров Н. Н. Конечноэлементный анализ нестационарных полей температур в деталях ГТУ. Проблемы прочности, 1989, N 12.
- [6] Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 308с.
- [7] Шорр Б. Ф., Мельникова Г. В. Расчет конструкций методом прямого математического моделирования. М.:Машиностроение, 1988. 160с.
- [8] Hetnarski R. B. Coupled one-dimentional thermal shock problem for small times.—Arch. Mech. Stos., 1961, vol.13, N2.