ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 1998
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ ГЛАДКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И АНАЛИЗ ОТКЛОНЕНИЯ ВЕКТОРА НАБЛЮДЕНИЯ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ ВРЕМЕННОЙ КООРДИНАТЫ

А.Н.Кусюмов
Россия, 420111, Казань, ул. К.Маркса, д.10,
Казанский государственный технический университет им. А.Н.Туполева,
кафедра Аэрогидродинамики,
e-mail: sysroot@unc3.ksu.ras.ru

В рамках теоретико-группового подхода рассматривается задача об отклонении вектора наблюдения гладкой динамической системы от его номинального значения при наличии возмущения (погрешности определения) временной координаты. Для определения отклонения вектора наблюдения используется характеристический оператор динамической системы, который выводится в работе на основе представления исходной динамической системы, как системы внешних дифференциальных уравнений.

Рассматривается система уравнений, описывающая поведение гладкой динамической системы

$$\dot{x}^i = w^i(t,\, x) \tag{1}$$

с вектором-функцией наблюдения

$$y^k = g^k(t,\, x), \tag{2}$$

где t – время; x^i – координаты m-мерного вектора фазовых координат, заданного на некотором открытом подпространстве M m-мерного декартова пространства; y^k – координаты l-мерного вектора наблюдения. Значения координат вектора наблюдения определяется по решению системы (1).

Пусть под действием каких-либо возмущений происходит отклонение временной координаты t от ее номинального значения. Определим это отклонение с помощью некоторого преобразования (диффеоморфизма)

$$\bar{t} = f(t,\, x). \tag{3}$$

Возмущение, заданное преобразованием (3), можно трактовать в частности, как погрешность измерения временной координаты. Подстановка преобразованной, согласно (3), временной координаты в уравнения (1) приведет к изменению вида системы уравнений (1). Для преобразований (3) произвольного вида это означает, что при оценке отклонения (под действием возмущения временной координаты) вектора наблюдения (2) от его первоначального значения, необходимо определить возмущенный вектор фазовых координат заново, решая систему уравнений (1).

В настоящей работе для исследования поведения динамической системы при наличии возмущения временной координаты используется следующие ограничения:

1) преобразованиям временной координаты t

$$\bar{t} = \psi(t,\, x,\, a), \tag{4}$$

соответствуют преобразования вектора фазовых координат

$$\bar{x}^i = \varphi(t,\, x,\, a), \tag{5}$$

так, что соотношения (4), (5) определяют некоторую однопараметрическую группу преобразований G (a – параметр преобразования);

2) система уравнений (1) инвариантна относительно преобразований группы G.

Таким образом, при наложенных ограничениях можно говорить о теоретико-групповой интерпретации задачи исследования отклонения вектора наблюдения динамической системы под действием некоторого возмущающего фактора (возмущении временной координаты). В данной постановке рассматриваемая задача является дальнейшим развитием задачи исследования чувствительности вектора наблюдения динамической системы к возмущениям вектора параметров динамической системы [1]. При этом, рассматриваемая задача отличается от задачи работы [1] тем, что возмущения накладываются не на вектор параметров динамической системы, а на временную координату.

Всякая группа преобразований, заданная преобразованиями вида (4), (5), определяет векторное поле X на пространстве $t \times M$. Для рассматриваемой задачи векторное поле X будет иметь вид

$$X = \xi_t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{6}$$

где

$$\xi_t = \left.\frac{\partial \psi}{\partial a}\right|_{a=0}, \qquad \xi^i = \left.\frac{\partial \varphi^i}{\partial a}\right|_{a=0}. \tag{7}$$

Согласно [2], инфинитезимальной симметрией (или просто симметрией) системы уравнений (1) называется векторное поле X, если при преобразованиях сдвига вдоль траекторий поля система (1) остается инвариантной.

Докажем ниже утверждение о том, что всякой функции $\xi_t = \xi_t(t,\, x)$ соответствует симметрия системы уравнений (1), для которой функции $\xi^i(t,\, x)$ имеют вид

$$\xi^i(t,\, x) = \xi_t(t,\, x) w^i(t,\, x). \tag{8}$$

Предварительно отметим, что симметрия вида (8) называется по разному в различных литературных источниках. В [2] такая симметрия называется характеристической. В работе [3] векторное поле (6) с координатами вида (8) называется оператором дифференцирования по времени. При этом, для доказательства существования симметрии (8) обычно используется операция продолжения оператора X. Покажем, что симметрию (8) можно получить и не используя операции продолжения векторного поля (8).

Для этого запишем исходную систему уравнений (1) в виде системы внешних дифференциальных уравнений

$$\omega^i = 0, \tag{9}$$

где ω^i – дифференциальные 1-формы вида

$$\omega^i = dx^i - w^i dt. \tag{10}$$

Условие того, что векторное поле X является симметрией системы уравнений (6), можно записать в виде

$$X(\omega^i)\Big|_{\omega^i=0} = 0, \qquad (11)$$

где $X(\omega^i)$ – производная Ли формы ω^i по векторному полю X. Подстановка в (11) выражений (6) и (10) дает систему уравнений

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} w^j - \xi^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} - w^i w^j \frac{\partial \xi_t}{\partial x^j} + \frac{\partial}{\partial t}(\xi^i - \xi_t w^i) = 0. \qquad (12)$$

Подстановкой проверяем, что левая часть выражения (12) обращается в ноль при условии (8). Утверждение доказано.

Таким образом, всякая функция $\xi_t(t, x)$ определяет характеристическую симметрию X и, следовательно, преобразования вида (4), (5). При этом система (1) будет инвариантной относительно этих преобразований.

Запишем изменение величин t, x^i, y^k в отклонениях

$$\delta t = \bar{t} - t, \quad \delta x^i = \bar{x}^i - x^i, \quad \delta y^k = \bar{y}^k - y^k. \qquad (13)$$

При малых значениях параметра a отклонения (13) можно записать в виде

$$\delta t = a\xi_t, \quad \delta x^i = a\xi^i, \quad \delta y^k = aXy^k(t, x). \qquad (14)$$

Имея некоторое решение системы уравнений (1) и задавая функции, определяющие возмущения временной координаты по формулам (4), (5), можно определить отклонение вектора наблюдения системы при различных значениях параметра a не решая заново систему уравнений (1).

Кроме того, анализируя соотношения (14), можно сделать некоторые качественные выводы о поведении динамической системы при наличии погрешности в измерении временной координаты, не решая уравнения (1).

В качестве примера исследования системы с возмущением временной координаты, рассмотрим систему уравнений, описывающую движение ракеты на активном участке траектории [4]. Уравнения движения возьмем в виде

$$\frac{dv}{dt} = g_0 \frac{\dot{G}P - S_a p - \frac{1}{2} i S \rho c_x v^2}{G_0 - \dot{G}t} - g\sin\theta, \quad \frac{dy}{dt} = v\sin\theta, \quad \frac{dx}{dt} = v\cos\theta.$$

В этой системе v – скорость ракеты, оси x и y направлены соответственно по касательной к поверхности Земли и перпендикулярно поверхности, t – время, G_0 – стартовый вес ракеты, $\dot{G}$ – секундный расход топлива, g_0 – ускорение свободного падения у поверхности Земли, P – удельная тяга, S_a – площадь выходного сечения сопла, p – атмосферное давление в точке полета, i – коэффициент формы, S – характеристическая площадь ракеты, ρ – плотность воздуха в точке полета, c_x – коэффициент лобового сопротивления, g – ускорение свободного падения в точке полета, θ – угол наклона касательной к траектории.

Запишем систему в следующем виде

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k_1}{k_6 - t} - \frac{k_2 v^2}{k_6 - t} - k_3, \quad \frac{dy}{dt} = vk_4, \quad \frac{dx}{dt} = vk_5, \tag{15}$$

где коэффициенты k_i определяются соотношениями

$$k_1 = g_0 P - \frac{g_0 S_a p}{\dot{G}}; \quad k_2 = \frac{g_0 i S \rho c_x}{\dot{G}}, \quad k_3 = g \sin\theta;$$

$$k_4 = \sin\theta, \quad k_5 = \cos\theta, \quad k_6 = \frac{G_0}{\dot{G}}.$$

Коэффициенты k_i зависят от координат точки полета, т.к. в них входят параметры атмосферы. Будем считать, что все параметры, входящие в систему, не возмущаются. Возмущениям подвергается только временная координата в зависимости от времени полета, т.е. $\xi_t = \xi_t(t)$. Проведем оценку отклонения вектора наблюдения при возмущениях временной координаты для системы (15).

В качестве вектора наблюдения возьмем вектор фазовых координат. Тогда отклонение вектора наблюдения примет вид

$$\delta y^i = a\xi^i. \tag{16}$$

Отметим, что при таком выборе вектора наблюдения формулы (16) аналогичны формулам для оценки отклонения вектора фазовых координат при наличии погрешности в работе измерителя времени, приведенным в [4].

Выясним, как будут зависеть от вида функции $\xi_t(t)$ возмущения вектора фазовых координат в окрестности точки $t = v = 0$, т.е. при малых t, v.

Положим $\xi_t(t) = c = \text{const} > 0$, т.е. $\bar{t} = t + ac$, и возмущения определяют постоянный во времени сдвиг (измеритель времени работает с постоянным во времени опережением). В этом случае имеем

$$\xi_v = c\left(\frac{k_1}{k_6 - t} - \frac{k_2 v^2}{k_6 - t} - k_3\right) \approx c\left[\left(1 + \frac{t}{k_6}\right)\left(\frac{k_1}{k_6} - \frac{k_2 v^2}{k_6}\right) - k_3\right],$$

$$\xi_y = cvk_4, \qquad \xi_x = cvk_5.$$

Из этих соотношений следует, что в начальный момент $\xi_y = \xi_x = 0$, а $\xi_v > 0$. Такие значения погрешностей определяются видом системы (15). В начальный момент времени производные координат x, y по времени равны нулю (поэтому $\xi_y = \xi_x = 0$), а ускорение ракеты (производная от скорости v) имеет ненулевое значение (поэтому $\xi_v \neq 0$). С увеличением времени и скорости полета, в зависимости от соотношений между коэффициентами k_i, могут иметь место как положительные, так и отрицательные ξ_v.

Положим теперь $\xi_t(t) = t$, т.е. $\bar{t} = at$ (погрешность измерителя растет с увеличением времени полета). Тогда

$$\xi_v = t\left(\frac{k_1}{k_6 - t} - \frac{k_2 v^2}{k_6 - t} - k_3\right) \approx t\left(\frac{k_1}{k_6} - \frac{k_2 v^2}{k_6} - k_3\right), \quad \xi_y = tvk_4, \quad \xi_x = tvk_5.$$

Здесь в стартовой точке мы имеем нулевые начальные возмущения фазовых координат, т.е. $\xi_v = \xi_y = \xi_x = 0$. С ростом времени и скорости полета сначала обязательно будут иметь место положительные значения ξ_v, а при дальнейшем росте скорости полета как положительные, так и отрицательные значения ξ_v (в зависимости от значений k_i).

Аналогичный характер поведения ξ_v сохранится и при задании $\xi_t(t)$ с более высокими степенями по t.

Список литературы

1. Борецкий И.Ф., Павлов В.Г. Теоретико-групповая интерпретация чувствительности гладких динамических систем // Автоматика и телемеханика. – 1980. – №2. С. 5 – 10.

2. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: "Наука", 1986. 336 с.

3. Яковенко Г.Н. Групповые свойства динамических систем. Конечномерный случай. – М.: Изд-во МФТИ, 1994. 140 с.

4. Апазов Р.Ф., Лавров С.Ф., Мишин В.П. Баллистика управляемых ракет дальнего радиуса действия. – М.: "Наука", 1966. 308 с.