ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 1998
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Моделирование динамических систем

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

И.Е.ЗУБЕР

Россия, 190180, Санкт-Петербург, д. 66, кв. 37
ЗАО "Ecology"
e-mail: xen@excite.com

Аннотация.

Для систем $x_{k+1} = A(x_k, k)x_k + b(x_k,)u_k, \quad u_k = s^T(x_k, k)x_k$, по заданной паре $(A(x_k, k), \quad b(x_k, k))$ и произвольному вектору $g_k \neq 0$ определяются условия существования и явный вид преобразования подобия, обеспечивающее матрице объекта преобразованной системы форму Фробениуса. Стабилизация преобразованной системы осуществляется выбором g_k.

1. Введение

Рассмотрим систему $x_{k+1} = A(x_k, k)x_k + b(x_k,)u_k, \quad u_k = s^T(x_k, k)x_k$, где пара (A_k, b_k) задана, а вектор обратной связи s_k, обеспечивающий замкнутой системе требуемые свойства, подлежит определению. Попытаемся

[0]Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований, проект 99–01–00871.

сконструировать по паре (A_k, b_k) преобразование подобия, которое переводит матрицу объекта в матрицу Фробениуса. Отметим, что решение двойственной задачи известно, т.е. для заданной пары (A_k, s_k) определено преобразование подобия, переводящее матрицу в матрицу Фробениуса [1]. Однако для нелинейных и/или нестационарных систем, прямая и двойственная задачи не эквивалентны [2], т.е. устойчивость системы $y_{k+1} = D_k y_k$ не гарантирует устойчивость системе $z_{k+1} = D_k^T z_k$. Поэтому конструирование преобразования подобия, переводящего матрицу A_k в матрицу Фробениуса, будем проводить непосредственно, без ссылок на дуальный аналог. Искомое преобразование будет определено с точностью до векторного параметра g_k, а решение задачи стабилизации преобразованной системы осуществим выбором вектора $g = \mathrm{const}$.

Для нелинейных непрерывных систем решение аналогичной задачи содержится в [3], для линейных нестационарных систем в [4].

2. Постановка задачи

Рассматривается система

$$x_{k+1} = A_k\ x_k + b_k\ u_k, \tag{1}$$

где $A_k = A_k(x_k, k), \quad b_k = b_k(x_k, k), \quad x_k \in \Re^n, \quad \exists m, \rho, \nu$ такие что

$$||A_k|| \leqslant m < \infty, \quad |\det A_k| \geqslant \rho > 0, \quad |b_k| \leqslant \nu < \infty, \quad k > 0 \tag{2}$$

Допустимым предполагается управление вида обратной связи по состоянию

$$u_k = s_k^T(x_k, k)x_k \tag{3}$$

Задача состоит в определении вектора обратной связи $s_k(x_k, k)$, при котором замкнутая система (1)–(3) асимптотически устойчива в целом.

Формирование преобразования подобия специального вида.

Начнем с формирования преобразования подобия $y_k = T_k(x_k, k)x_k$, удовлетворяющего следующим условиям:

I. Матрица объекта $A_k(x_k, k)$ системы (1) переходит в матрицу Фробениуса $\tilde{A}_k(y_k, x_{k+1},\ k, k+1)$.

II. Подлежащий определению вектор обратной связи системы (1)-(3), $s_k(x_k, k)$ переходит в $\tilde{s} = (1, 0, 0, \dots 0)^T$.

III. Вектор распределения управления системы (1)-(3), $b_k(x_k, k)$ переходит в произвольно задаваемый вектор $g = \text{const}$.

Искомое преобразование строим, задавая соотношения

$$y_k = (y_1^{(k)}, \dots y_n^{(k)})^T, \quad y_1^{(k)} = s_k^T x_k, \quad y_2^{(k)} = s_{k-1}^T x_{k-1}, \quad \dots y_n^{(k)} = s_{k-n}^T x_{k-n}.$$

Вводим в рассмотрение оператор сдвига с k-го шага на $k-1$, $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}_k^1$ в силу системы $x_{k+1} = A_k(x_k, k)x_k$, задавая сдвиг на m шагов назад от k -го шага соотношением $L_k^m(x_k, k) = L_k^1(x_k, k)x_k$ задавая сдвиг на m шагов назад от k-го шага соотношением $\mathcal{L}_k^m(x_k, k) = \mathcal{L}_k^{m-1}(x_k, k)\mathcal{L}_k^1$.

Обозначим через $L_k^m(x_k, k)$ матрицу оператора $\mathcal{L}_k^m$, полагая $\mathcal{L}_k^m(x_k, k) = L_k^m(x_k, k)x_k$. Тогда матрица преобразования $T_k(x_k)$ принимает вид

$$T_k = \begin{vmatrix} s_k^T \\ s_{k-1}^T L_k^1 \\ \dots \\ s_{k-n}^T L_k^n \end{vmatrix} L_k^m = \prod_{j=0}^{m-1} A_{k-j}^{-1}. \tag{4}$$

Сформируем $y_{k+1} = T_{k+1}x_{k+1}$. В силу (4) $y_{k+1}^{(2)} = y_k^{(1)}, \quad \dots y_{k+1}^{(n)} = y_k^{(n-1)}$, т.е. матрица связи между y_k и y_{k+1} имеет форму Фробениуса и требование выполнено. Матрица объекта $A_k(x_k, k)$ системы (1) переходит в матрицу Фробениуса $\tilde{A}_k(y_k, x_{k+1}, k, k+1)$.

Введем в рассмотрение произвольно задаваемый вектор

$$g = (g_1, \dots g_n)^T = \text{const} \neq 0$$

Выпишем требование III для моментов $k+j$ при $j = 1, \overline{n-1}$. Из системы $T_{k+1}b_k = T_{k+2}b_{k+1} = \dots \; T_{k+n+1}b_{k+n} = g$ получаем в силу (4) систему уравнений $s_n^T b_{k-1} = g_1$, $s_n^T L_{k+1}^1 b_k = g$, $\dots s_k^T L_{k+n}^{n-1} b_{k+n-1} = g_n$, откуда $s_k^T = |b_{k-1}, \quad L_{k+1}^1 b_k, \quad \dots L_{k+n}^{n-1} b_{k+n-1}|^{-1} g$. Сравнивая выражения $T_{k+1}b_{k+j-1} = g$ для n последовательных моментов j, получаем

$$s_{k-j}^T = |b_{k-j-1}, \quad L_{k-j+1}^1 b_{k-j}, \quad \dots L_{k-j+n}^{n-1} b_{k-j+n-1}|^{-1} g.$$

Перепишем последнее соотношение в виде

$$s_{k-j} = B_{k-j}^{-1} g, \tag{5}$$

где $B_{k-j} = |b_{k-j+1}, \quad L^1_{k-j+1} b_{k-j}, \quad \dots L^{n-1}_{k-j+n} b_{k-j+n-1}|$, и, подставив, s_{k-j}, $j = \overline{0, n}$, в соотношение (4), получим явный вид матрицы преобразования $T_k = T_k(x_j, j, g), \quad j = k, \quad \dots k+n$. Рассмотрим преобразованную систему (1) , $y_{k+1} = A_{k,k+1} y_k + b_{k,k+1} u_k, \quad u_k = s_k y_k$, где $A_{k,k+1} = T_{k+1} A_k T_k^{-1}, \quad b_{k,k+1} = T_{k+1} b_k, \quad \tilde{s}_k^T = s_k^T T_k^{-1}$. Согласно (4), $\tilde{s}_k^T = (1, 0, \dots, 0)^T$. Таким образом, сформированное преобразование $T(x_j, j, g)$ удовлетворяет требованиям I-III. Отметим, что матрица $\tilde{A}_{k,k+1}$ имеет вид ,

$$\tilde{A}_{k,k+1} = \begin{vmatrix} t^T_{k+1,1} A_k T_k^{-1} & & & \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

где $t^T_{k+1,1}$ – первая строка матрицы T_{k+1}. Отсюда следует, что $||\tilde{A}_{k,k+1}||$ не зависит от $||g||$.

Предположим теперь, что для матриц B_{k-j}, задаваемых соотношениями (5) выполняется условие

$$\exists \rho_1 > 0, \quad |\mathrm{det} B_{k-j}| > \rho_1 \quad k > j, \tag{6}$$

а для матриц T_k, задаваемых соотношениями (4), (5) выполняется условие

$$\exists \rho > 0 \quad |\mathrm{det} T_k| > 0 = \rho \quad k > 0, \tag{7}$$

Рассмотрим в качестве нормы произвольной матрицы P ее максимальное сингулярное число $\mu(P)$. Тогда для оценки $||B_k^{-1}||$, а также для оценки $||T_k^{-1}||$ воспользуемся леммой о сингулярной норме обратной матрицы [3] $\mu(P^{-1}) \leqslant (\mathrm{Sp} P^T P)^{n/2} (\mathrm{det} P^T P)^{-\frac{n+1}{2n}}$ и убедимся в равномерной ограниченности сверху норм матриц $B_k^{-1}, \quad T_k$ и T_k^{-1} в предположениях (6), (7).

Таким образом доказана следующая

Теорема 1. *Пусть для рассматриваемой системы (1) выполнено условие (6). Пусть вектор* $g = \mathrm{const}$ *– произвольный вектор, для которого матрицы* T_k *определяются соотношениями (4), (5), удовлетворяют условиям (7). Тогда преобразование с матрицей* T_k *переводит матрицу объекта в матрицу Фробениуса с равномерно ограниченной нормой, вектор обратной связи в первый единичный орт, вектор распределения управления* b_k *в заданный вектор* $g = \mathrm{const}$.

3. Стабилизация преобразованной системы

Рассмотрим преобразованную систему (1), записанную в виде

$$y_{k+1} = A_k^0 y_k + g u_k, \quad u_k = e_1^T y_k \tag{8}$$

здесь A_k^0 – матрица Фробениуса, где $a_{k,1}^T(y_k)$ – ее первая строка, причем $\exists m < \infty, \quad ||a_{k,1}|| \leqslant m$. Задача состоит в определении вектора $g = \text{const}$, для которого замкнутая система (8) $y_{k+1} = D_k y_k, \quad D_k = A_k^0 + g c_1^T$ асимптотически устойчива в целом.

Введем в рассмотрение квадратичную форму

$$V_k = y_k^T H_1 y_k \tag{9}$$

с постоянной матрицей $H_1 = \text{diag}\{h_i^{-1}\}_{j=1}^n, \quad h_j > 0$.

Рассмотрим приращение этой формы в силу замкнутой системы (8)

$$\delta V_k = V_k - V_{k+1} = y_k^T (H_1 - D_k^T H_1 D_k) y_k = y_k^T R_1^k y_k \tag{10}$$

и перейдем к определению постоянного вектора g, при котором для некоторого $0 < a < 1$ выполняется условие

$$R_1^k > \alpha H_1 \tag{11}$$

Нам понадобится следующая

Лемма 1 *Пусть* $D \in \Re^n, \quad H \in \Re^n, \quad 0 < a < 1, \quad H = H^T > 0$. *Тогда неравенство (11) эквивалентно неравенству*

$$H - DHD^T > \alpha H, \text{где}\, H = H_1^{-1}. \tag{12}$$

Доказательство. Перепишем (11) в виде $(1 = \alpha)H > D^T H D$, откуда следует $(1-\alpha)^{-1} H^{-1} < D^{-1} H^{-1} D^{T^{-1}}$ или $(1-\alpha)^{-1} D H^{-1} D^T < H^{-1}$, т.е. $(1-\alpha) H^{-1} > D H^{-1} D^T$. Итак, из (11) следует (12). Аналогично показываем, что из (12) следует (11).

Перейдем к определению постоянного вектора g, для которого выполняется (12).

Выпишем подробнее матрицу $R_\alpha^k = (1-\alpha)H - D_k H D_k^T$:

$$R_\alpha^k = Q_\alpha^k - A_k^0 H g e_1^T - e_1 g^T H A_k^{0^T} - g e_1^T H e_1 g^T. \tag{13}$$

$Q_\alpha^k = (1-\alpha)H - A_k^{0^T} H A_k^0$ – матрица приращения формы (9) при отсутствии управления. При этом для $\beta = 1-\alpha$, опуская индекс k, запишем

$$-Q_a = \begin{vmatrix} \sum a_i^2 h_i - \beta h_i & a_1 h_i & a_2 h_2 & \dots & a_{n-1} h_{n-1} \\ a_1 h_1 & h_1 - \beta h_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 h_2 & 0 & h_2 - \beta h_3 & 0 & 0 \\ & & & h_{n-2} - \beta h_{n-1} & 0 \\ a_{n-1} h_{n-1} & 0 & & h_{n-1} - \beta h_n & \end{vmatrix}.$$

Согласно теореме 2 работы [5], неравенство $R_a^k > 0$ выполняется для некоторого g тогда и только тогда, когда для некоторого λ_0 выполняется условие

$$M_k = -Q_\alpha^k + \lambda_0 e_1 e_1^T > 0 \tag{14}$$

При выполнении условия (14) вектор обратной связи e_1 называется допустимым и вектор распределения управления g задается согласно [5] известной формулой

$$g = (I + \lambda e_1 e_1^T)^{-1}(I - A_0^k)(\lambda e_1 + q), \tag{15}$$

где $\lambda > \lambda_0$, λ_0 удовлетворяет (14), q – произвольный вектор, такой, что $-Q_\alpha^k + \lambda_0 e_1 e_1^T - \frac{1}{\lambda_0} q q^T > 0$. Итак, покажем, что существует и определяется λ_0, для которого выполняется условие (14). Имеем $\det M_k = \det(-Q_\alpha^k) + \lambda_0 \prod\limits_{j=1}^{n-1} h_i - \beta h_{i+1}$. При этом для $h_{m-1} < \beta h_m$ последовательность главных диагональных миноров M_k, отсчитываемых от правого нижнего угла, имеет $n-1$ перемен знака. Таким образом, согласно критерию Сильвестра [6], для положительной определенности M_k достаточно выбрать λ_0 из условия $\delta_{n-1}(-Q_\alpha) \quad M_k > 0$, где $\delta_{n-1}(-Q_\alpha^k) = \prod\limits_{i=1}^{n-1}(h_i - \beta h_{i+1})$ – главный диагональный минор матрицы $-Q_\alpha^k$ порядка $(n-1)\times(n-1)$, т.е. положить

$$\lambda_0 \geqslant \frac{|\det Q_\alpha^k|}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(\beta h_{i-1} - h_i)}. \tag{16}$$

При этом равномерная ограниченность всех элементов матрицы Q_α^k обеспечивает постоянство g. Таким образом доказана

Теорема 2. *Система специального вида (8) с матрицей Фробениуса и заданным вектором обратной связи* $s_k = e_1$ *стабилизируется выбором вектора распределения управления* $g = \mathrm{const}$, *задаваемым для произвольного* $0 < \alpha < 1$ *соотношениями (14), (16). При этом функция Ляпунова замкнутой системы (8), (15), (16) имеет вид квадратичной формы с постоянной диагональной матрицей и приращение этой формы на траекториях сконструированной системы удовлетворяет условию* $V_{k+1} < (1-\alpha)^k V_0$.

Вернемся к рассмотрению исходной системы, т.е. системы общего вида (1). Сравнивая формулировки теорем 1 и 2, убеждаемся в справедливости следующей теоремы:

Теорема 3. *Пусть* $A_k(x_k, k)$ – *матрица объекта системы (1), в предположениях (2). Матрица* T_k *задана формулами (4), (5) при выполнении условий (6), (7), а вектор* g *задан формулами (15), (16). Тогда система (1) асимптотически устойчива в целом, ее функция Ляпунова имеет для произвольно задаваемого* $0 < \alpha < 1$ *вид* $W_k = x_k^T T_k^{T^{-1}} H T_k^{-1} x_k, \quad H = \mathrm{diag}\{h_i\}_{i=1}^n, \quad h_n > 0, \quad h_i > (1-\alpha)h_{i+1}$. *При этом функция Ляпунова* W_k *удовлетворяет условию* $W_k < (1-\alpha)^k W_0$.

Пример. Рассмотрим систему общего вида (1) в предположениях $n = 3$.

Начнем с формирования преобразования подобия $y_k = T_k(x_k, k)x_k$, приводящего исходную систему в систему специального вида (8).

Полагаем

$$y_1^{(k)} = s_k^T x_k, \quad y_2^{(k)} = s_{k-1}^T x_{k-1} = s_{k-1}^T A_{k-1}^{-1} x_k, \quad y_3^{(k)} = s_{k-2}^T A_{k-2}^{-1} A_{k-1}^{-1} x_k$$

т.е. $T_k = \begin{vmatrix} s_k^T \\ s_{k-1}^T A_{k-1}^{-1} \\ s_{k-2}^T A_{k-2}^{-1} A_{k-1}^{-1} \end{vmatrix}$. Из условия $T_{k+1} b = g = (g_1, \ldots, g_n), \quad k > 0$, рассматривая последовательные моменты времени $k-2, \quad k-1, \quad k, \quad k+1, \quad k+2$, получаем систему уравнений для векторов s_k, s_{k-1}, s_{k-1} :

$$\begin{array}{lll} s_k^T b_{k-1} = g_1 & s_{k-1}^T b_{k-1} = g_1 & s_{k-2}^T b_{k-3} = g_1 \\ s_k^T A_k^{-1} b_k = g_2 & s_{k-1}^T A_{k-1}^{-1} b_{k-1} = g_2 & s_{k-2}^T A_{k-2}^{-1} b_{k-2} = g_2 \\ s_k^T A_k^{-1} A_{k+1}^{-1} b_{k+1} = g_3 & s_{k-1}^T A_{k-1}^{-1} A_k^{-1} b_k = g_3 & s_{k-2}^T A_{k-2}^{-1} A_{k-1}^{-1} b_{k+1} = g_3, \end{array} .$$

т.е. $s_{k-j} = B_{k-j}^{-1} g$, где матрица B_{k-j} задана соотношениями (5) для $n = 3$.

Оценим теперь норму матрицы объекта преобразованной замкнутой системы, имеющий вид (8) при $n = 3$

$$y_{k+1} = \tilde{A}_k(y_k, y_{k+1}, k, k+1)y_k + e_1 g^T y_k. \tag{17}$$

Очевидно $||\tilde{A}_k|| \leqslant ||T_{k+1}||\,||T_k^{-1}||\,||A_k|| = \left\| \begin{pmatrix} g_0^T B_k^{-1} \\ g_0^T B_{k-1} \\ g_0^T B_{k-2} \end{pmatrix}^{-1} \right\| \left\| \begin{matrix} g_0^T B_{k+1}^{-1} \\ g_0^T B_k^{-1} \\ g_0^T B_{k-1}^{-1} \end{matrix} \right\| ||A_k||,$

где $g_0 = g/||g||$. Оцениваем $B_{k\pm j}^{-1}$ по формуле для нормы обратной матрицы [3] и получаем

$$\mu_{max}(B_{k\pm j}^{-1}) \leqslant \mathrm{Sp}(B_{k-j}^T B_{k-j})^{n/2}(\det(B_{k-j}^T B_{k-j}))^{-\frac{n+1}{2n}} \tag{18}$$

где $\mu_{max}(\bullet)$ – максимальное сингулярное число матрицы $(\bullet)$. Вычисляя с учетом определений (2) $\mu_{max}(A_{k\pm j}^{-1})$ по той же формуле (18), получаем верхнюю границу для $||B_{k-j}^{-1}|| = \mu_{max}(B_{k-j}^{-1})$. Тогда получаем $\mu_{max}(T_k^{-1})$ по той же формуле, где $\mathrm{Sp}(T_{k+1})$ оценивется соотношениями

$$\mathrm{Sp}T_{k+1} \leqslant 3\mu_{max}(T_{k+1}) \leqslant 3(\mu_{max}(B_{k+1}^{-1})) + \mu_{max}(B_k^{-1}) + \mu_{max}(B_{k-1}^{-1}).$$

Каждое из слагаемых опять оцениваем по формуле (18). В результате получаем достаточно громоздкую и весьма грубую оценку сверху нормы матрицы объекта преобразованной системы (17)

$$||\tilde{A}_k(y_k, y_{k+1}, k, k+1)|| \leqslant N, \quad k > 0 \tag{19}$$

Перейдем к стабилизации преобразованной системы (17).

Введем в рассмотрение форму $V_k = y_k^T H_1 y_k, \quad H_1 = \mathrm{diag}(h_1^{-1}, h_2^{-1}, h_3^{-1})$, и рассмотрим приращение формы V_k в силу преобразованной системы (17).

Задача стабилизации сводится к определению вектора g, обеспечивающего отрицательную определенность приращения δV_k, т.е. выполнения для некоторого $0 < \alpha < 1$ условия $\delta V_k > \alpha\, V_k$, где $\delta V_k = V_k - V_{k-1}$. Согласно лемме, выполнение последнего условия эквивалентно выполнению условия

$$\begin{gathered} R_\alpha^k = Q_\alpha^k + \tilde{A}_k H e g_1^T + g e^T H \tilde{A}_k + g e_1^T H e g^T, \\ Q_\alpha^{(k)} = (1-\alpha)H - A_k H A_k^T, H = \mathrm{diag}(h_1, h_2, h_3). \end{gathered} \tag{20}$$

Выпишем подробнее матрицу $Q_\alpha^{(k)}$

$$-Q_\alpha^{(k)} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^{(k)2} h_i - (1-\alpha)h_1 & \alpha_1^{(k)} h_1 & \alpha_2^{(k)} h_2 \\ \alpha_1^{(k)} h_1 & h_1 - (1-\alpha)h_2 & 0 \\ \alpha_2^{(k)} h_2 & 0 & h_2 - (1-\alpha)h_3 \end{vmatrix}.$$

Согласно теореме 2 работы [5], для выполнения условия (20) для заданной пары $(\tilde{A}_k, H)$ достаточно выполнения условия существования постоянного λ_0, такого что выполняется условие (14), т.е. $Q_\alpha^k + \lambda_0 e_1 e_1^T > 0, \quad k > 0$. В свою очередь, для выполнения последнего условия необходимо, чтобы для всех $k > 0$ матрица $-Q_\alpha^k$ имела не более одного неположительного собственного значения или, согласно критерию Сильвестра [6], число перемен знака в последовательности главных диагональных миноров матрицы $-Q_\alpha$ было не меньше 2. Очевидно, что выполнение последнего условия достигается выбором $h_{i-1} < (1-\alpha)h_i, \quad h_n > 0, \quad i = \overline{1,3}$. Теперь выполнение условия (20) обеспечивается выбором λ_0 из требования (14).

Отметим, что два первых главных диагональных минора матриц $-Q_\alpha^k$ и $-Q_\alpha^k - \lambda_0 e_1 e_1^T, \quad \delta_i(-Q_\alpha), \quad i = 1,2$, рассматриваемые с правого нижнего конца главной диагонали совпадают. Таким образом, для выполнения условия (14) достаточно чтобы осуществлялась третья перемена знака в последовательности главных диагональных миноров матрицы $-Q_\alpha^k - \lambda_0 e_1 e_1^T$, т.е. условие

$$\det(Q_\alpha^k + \lambda_0 e_1 e_1^T) > 0. \tag{21}$$

Чтобы упростить себе расчеты фиксируем $0 < \beta = 1 - \alpha$ и $\delta = (h_1 - \beta h_2)(h_2 - \beta h_3)$. Тогда $\det(Q_\alpha^k + \lambda_0 e_1 e_1^T) = \det Q_\alpha^k + \lambda_0 \delta$, откуда для $\lambda_0 > \det Q_\alpha^k / \delta$ следует выполнение условия (21). Имеем

$$\lambda_0 > \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i^{(k)})^2 h_i - \beta h_1 - \frac{\alpha_1^{(k)}}{\beta h_2},$$

где $h_1 = 1, \quad h1 - \beta h_2 < 0, \quad h_2 - \beta h_3 < 0, \quad 0 < \beta < 1$, т.е. с учетом оценки нормы матрицы $\tilde{A}_k$ (20),

$$\lambda_0 > N^2 - \beta + \frac{N\, h_1}{\beta\, h_2 - 1}. \tag{22}$$

Теперь, согласно теореме 2 [5], вид стабилизирующего вектора g, для которого замкнутая система (17) асимптотически устойчива и ее функция Ляпунова V_k удовлетворяет соотношению $V_k < (1-\alpha)^k V_0$, задается соотношением $g = \lambda(I + \lambda e_1 e_1^T)^{-1}(I - \tilde{A}_k)e_1$, где $\lambda \geq \lambda_0$, задаваемого формулой (22).

Заключение. Теоремы 1-3 определяют условия стабилизируемости и явный вид стабилизирующего управления скалярной обратной связью по состоянию для рассматриваемой нелинейной нестационарной дискретной системы. Следует отметить, что первое достаточное условие стабилизируемости, т.е. равномерная отделимость от нуля определителя матрицы B_k, задаваемая формулой (6), близка к условию полной управляемости пары $(A_k(x_k, k), b_k(x_k, k)), k > 0$.

Второе достаточное условие стабилизируемости, т.е. условие равномерной отделимости от нуля определителя матрицы T_k при $s_{k-j} = B_{k-j}^{-1}g$ близко к условию полной наблюдаемости пары $(A_k(x_k, k), s_{k-j} = B_{k-j}^{-1}g),\ k > 0$.

Возможность выбора g, для которого последнее условие выполнено, обусловлено тем, что вектор g задается формулой (16), т.е. с точностью до вектора q, ограниченного лишь по норме.

Отметим, что приведенная в тексте лемма позволяет выделить класс систем $x_{k+1} = D_k x_k$, которые остаются устойчивыми при замене D_k на D_k^T.

Список литературы

[1] F.Deza, J.P.Gauthier. A simple and robust nonlinear estimator// Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control. Brighton, England December 1991 p. 871–873

[2] А.П.Крещенко, С.Б.Ткачев. Двойственные нелинейные системы ДАН. Том 333 №5 1993 с.538-600.

[3] I.E.Zuber. Stabilization of nonlinear systems by similarity transformations. Jorn. Of Applied Mathemathics and Stochastic Analysis, Florida, Institute of Technology, Melbourne, USA. Vol.11. N4 1998 p. 519–526

[4] И.Е.Зубер. Стабилизация линейных нестационарных систем на основе специального преобразования подобия. //Кибернетика и системный анализ. Киев 1998 №5 с.32–39.

[5] И.Е.Зубер. К вопросу об оптимальной структуре обратных связей монотонно стабилизированной импульсной системы. //Сб. Управляемые системы. Институт кибернетики СО АН СССР 1969 г., вып.3 с.23–32.

[6] Гантмахер. Теория матриц. М. Наука 1966. с.575.